ANALISI 2 — LEZIONE 055

Note Title 01/12/2017

Domanda: ω forma diff. chiusa $\Rightarrow$ ω esatta?

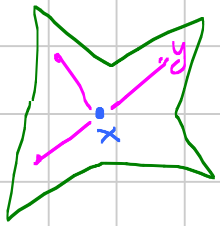
Sì, sotto certe ipotesi sull'insieme di definizione Ω.

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che Ω è

- $\boxed{\text{CONVESSO}}$ se $\forall x \in \Omega$ $\forall y \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$

- $\boxed{\text{STELLATO}}$ se $\boxed{\exists x \in \Omega}$ $\forall y \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$

Fisso



Brutalmente: posso piazzare un guardiano in x e questo vede tutto.

- $\boxed{\text{CONNESSO}}$ se $\forall A$ aperto in Ω $\forall B$ aperto in Ω

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \Omega, \quad A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = \Omega \text{ e } B = \emptyset$$

- $\boxed{\text{SEMPLICEMENTE CONNESSO}}$ se è connesso e vale uno dei seguenti fatti equivalenti.

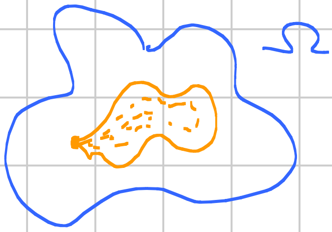
Prop. (Misteriosa) Sia X uno spazio topologico connesso.
Allora sono fatti equivalenti

(i) ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante

(ii) se γ_1 e γ_2 sono due curve con gli stessi estremi, allora sono omotope mediante una omotopia che lascia gli estremi fissi

(iii) ogni $f: S^1 \to X$ continua si estende a tutto il disco D, ovviamente in modo continuo.

Brutalmente: Ω è sempl. connesso se è connesso e ogni cordino chiuso tirato in D si può ritrarre ad un cordino costante.



Qui si può

Qui si incastra nel buco

$\mathbb{R}^3 \setminus$ palla è sempl. connesso: "posso fare il giro intorno"
$\mathbb{R}^3 -$ retta oppure $\mathbb{R}^3 \setminus$ toro non sono sempl. conn.

<u>Fatto quasi ovvio</u>:

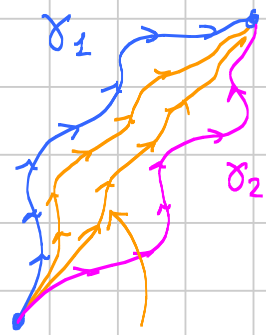
$$\boxed{\text{CONVESSO} \Rightarrow \text{STELLATO} \Rightarrow \text{SEMPL. CONN.} \Rightarrow \text{CONN.}}$$

Non vale nessuna delle inverse.

<u>Def.</u> Siano $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ due curve con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.
Una omotopia che fissa gli estremi è una funzione

$$\Phi : \underset{t}{[0,1]} \times \underset{s}{[0,1]} \to \Omega \qquad \text{(tutto continuo)}$$

(i) $\Phi(t,0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0,1]$
(ii) $\Phi(t,1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0,1]$
(iii) $\Phi(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \forall s \in [0,1]$
(iv) $\Phi(1,s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) \quad \forall s \in [0,1]$



$\Phi(t,s)$ ad s fisso

Lemma (Misterioso) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO semplicemente connesso.
Sia γ_1 e γ_2 due curve $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ con gli stessi estremi di classe C^1.
[Essendo sempl. conn. sappiamo che c'è una omotopia continua che lascia fissi gli estremi]
Esiste anche una omotopia più regolare, cioè con

$$\boxed{\Phi_t(t,s), \qquad \Phi_s(t,s), \qquad \Phi_{ts}(t,s)}$$

continue.

Lemma (Dimostrato forse a suo tempo)
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Allora sono fatti equivalenti
(i) Ω è connesso
(ii) Ω è connesso per archi (continui)
(iii) Ω è connesso per archi C^∞.

— o — o —

Teorema 1 (Versione facile)
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato.
Sia ω forma diff. su Ω di classe C^1 e chiusa.
Allora ω è esatta.

Teorema 2 (Versione più difficile)

Stessa cosa (chiusa $\Rightarrow$ esatta) assumendo solo sempl. connesso.

— o — o —

Teorema alla base di tutto Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
Sia ω CHIUSA su Ω e di classe C^1. Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi di classe C^1 e omotope.
Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

$\boxed{\text{Dim Teo. 1 con } n=2}$

Ipotesi: ω chiusa

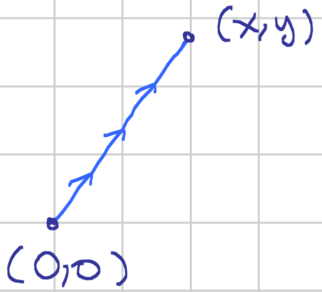
Tesi: ω esatta, cioè esiste una primitiva

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

Supponiamo WLOG che Ω sia stellato rispetto all'origine

Voglio definire una primitiva $V(x,y)$

Considero la curva "direttissima"



(tx, ty) $\quad t \in [0,1]$ $\quad$ e pongo

$$V(x,y) = \int_{\text{dirett.}} \omega = \int_0^1 [A(tx,ty)x + B(tx,ty)y]\,dt$$

Dico che va bene

$$V_x(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. dip.} \\ \text{da parametro}}}{=} \int_0^1 [A_x(tx,ty)tx + A(tx,ty) + \underbrace{B_x(tx,ty)}_{\substack{\| \\ A_y(tx,ty) \\ \text{(per chiusura)}}}ty]\,dt$$

$$= \int_0^1 [A_x(tx,ty)tx + A_y(tx,ty)ty + A(tx,ty)]\,dt$$

(niente panico! È una derivata!)

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(tA(tx,ty)\right)\right]dt = \left[tA(tx,ty)\right]_0^1$$

$$= A(x,y)$$ ☺

Allo stesso modo se derivo risp. ad y.

—o—o—

$\boxed{\text{Dim. Teo. 1 in dim } n}$ $\quad \Omega$ stellato risp. a 0.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\,dx_i$$

Dirittissima $\quad \gamma(t) := tx \quad t \in [0,1]$

$$V(x) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(tx)\,x_i \right) dt$$

Calcolo la derivata parziale j-esima

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(tx)\,t\,x_i + A_j(tx) \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(tx)\,t\,x_i + A_j(tx) \right) dt$$

chiusura

(vale anche per $j=i$)

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(t\,A_j(tx) \right) \right] dt$$

chain rule

$$= \Big[t\,A_j(tx) \Big]_{t=0}^{t=1} = A_j(x).$$

— o — o —

Il teorema 2 segue dal teorema alla base di tutto e dalla caratterizzazione dell' esattezza

$\boxed{\omega \text{ esatta}} \iff \boxed{\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \forall\, \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ con gli stessi estremi}}$

$\boxed{\Omega \text{ sempl. conn.}} \implies$ 2 curve (γ_1 e γ_2) con gli stessi estremi sono sempre omotope

$\Downarrow$ ω è chiusa

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega}$$