SSSUP 2015
Corso di Complementi di Analisi Matematica II

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

SSSUP 2015 — LEZIONE 01

Titolo nota 31/01/2015

Richiami di Analisi 1 :
- liminf e limsup
- funzioni semicontinue
- Teo. di Weierstrass
- Funzioni uniformemente continue
- Moduli di continuità

$\boxed{\text{LIMINF e LIMSUP}}$ Caso delle successioni $\{a_n\}$.

Idea : $a_n = (-1)^n$ questa non ha limite

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1 \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$$

Def. (di limsup) Sia a_n una successione

(1) Se a_n non è limitata superiormente (cioè non esiste nessuna costante $M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) si pone per def.

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

(2) Se a_n è limitata superiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ posso considerare

$$S_k := \sup\{a_n : n \geq k\} \in \mathbb{R}$$

e osservare che

$$S_{k+1} \leq S_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$ (il sup è su meno roba)

dunque per il teo. delle succ. monotone esiste

$$\lim_{k\to+\infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Si pone quindi $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{k\to+\infty} S_k$

— o — o —

Def. (di liminf) Data una succ. $\{a_n\}$ si pone

(1) se a_n non è lim. inf.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

(2) se a_n è limitata inferiormente, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\inf\{a_n : n\geq k\}}_{} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

I_k, che è succ. debolmente crescente di numeri reali

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora $I_k = -1$ e $S_k = 1$ per ogni k

Esempio 2 $b_n = (-1)^n \arctan n$. Allora

$$I_k = -\frac{\pi}{2} \qquad S_k = \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni } k\in\mathbb{N}$$

Esempio 3 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Se k è pari, allora $I_k = \frac{-1}{k+1}$ $\qquad S_k = \frac{1}{k}$

Se k è dispari, allora $I_k = -\frac{1}{k}$ $\qquad S_k = \frac{1}{k+1}$

Si vede che $I_k \to 0$ e $S_k \to 0$.

— o — o —

Caratterizzazioni di liminf e limsup

(1) Si ha che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se $\forall M\in\mathbb{R}$ si ha $a_n \geq M$ frequentemente (infinite volte)

(2) Si ha che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \ell\in\mathbb{R}$ se $\forall\varepsilon>0$ si ha

$a_n \leq \ell+\varepsilon$ definitivamente $\qquad a_n \geq \ell-\varepsilon$ frequentemente

(3) Si ha che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, cioè

$\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ definitivamente.

Caratterizzazioni analoghe valgono per il liminf.

— o — o —

<u>Oss.</u> liminf e limsup esistono sempre (finiti oppure $\pm\infty$) e soddisfano

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se esiste il limite.

— o — o —

<u>Teorema delle sottosuccessioni</u> Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una qualunque sottosuccessione.
Allora

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n}$$

In particolare, se a_n ha limite, allora LHS e RHS coincidono (left-hand side e right-hand side), quindi tutto coincide

<u>Teorema del confronto a due</u> Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

<u>Teorema</u> (Criterio rapporto → radice) Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Se LHS = RHS, allora ...

$\boxed{\text{MAXLIM} = \text{LIMSUP}}$ $\boxed{\text{MINLIM} = \text{LIMINF}}$

Sia a_n una successione e sia L il limsup $(L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$. Allora

- esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \to L$
- tutte le sottosuccessioni che hanno limite, $\underbrace{\text{hanno limite} \leq L}_{\text{segue da teo. sottosuccessioni}}$.

In altri termini, L è il massimo limite possibile (maxlim) per le sottosuccessioni di a_n che ammettono limite.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (che esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \to L$)

$\boxed{\text{Caso } L = +\infty}$ Costruisco la sottosuccessione così:

- Scelgo n_1 in maniera tale che $a_{n_1} \geq 1$
- Scelgo n_2 " " " " $a_{n_2} \geq 2$ e $n_2 > n_1$

⋮

- Scelgo n_k " " " " $\underline{a_{n_k} \geq k}$ e $n_k > n_{k-1}$

gli indici per cui succede questo sono infiniti, quindi almeno uno soddisfa

$\boxed{\text{Caso } L \in \mathbb{R}}$ Costruisco così:

- Scelgo n_1 tale che $L-1 \leq a_{n_1} \leq L+1$
- Scelgo n_2 " " $L-\frac{1}{2} \leq a_{n_2} < L+\frac{1}{2}$ e $n_2 > n_1$

⋮

- Scelgo n_k " " $L-\frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq L+\frac{1}{k}$ e $n_k > n_{k-1}$

definit.

frequentemente, quindi posso trovare un indice con

<u>Oss / esercizio</u> Ritoccando l'algoritmo, posso fare in modo che $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$, cioè la s.succ. è monotona

Operativamente, come calcolo liminf e limsup.

Per il limsup lo slogan è

1. Disuguaglianza dall'alto
2. Sottosuccessione dal basso

Esempio $a_n = \dfrac{n + (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt{n}}$. Calcolare S_k è improponibile

$$\frac{n + (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt{n}} \leq \boxed{\frac{n + n^2}{3n^2 + \sqrt{n}}}$$

(Disuguaglianza dall'alto)

$b_n \to \frac{1}{3}$

Da questo deduco che $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \frac{1}{3}$

Cerco ora una s.succ. a_{n_k} t.c. $a_{n_k} \to \frac{1}{3}$ da cui

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \geq \frac{1}{3}$$

e quindi uguaglianza. Basta prendere $a_{n_k} = a_{2k}$.

Oss. Se anche a_n non ha limite, c'è almeno una sottosucc. che tende al liminf e una che tende al limsup.

—o—o—

SSSUP 2015 - LEZIONE 02

Titolo nota 31/01/2015

$\boxed{\text{Liminf e limsup di funzioni}}$ $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ $\limsup_{x\to x_0} f(x)$

Può essere $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 \in \{\pm\infty\}$.

Def. (di limsup) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un p.to di accumulazione di D. Supponiamo anche $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Se per ogni $r > 0$ si ha che

$$\sup\{f(x) : x \in \underbrace{([x_0-r, x_0+r] \cap D) \setminus \{x_0\}}\} = +\infty$$

intorno di ampiezza r intersecato D tolto il p.to x_0

allora per def. $\limsup_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

(2) altrimenti, detto S_r il sup scritto sopra (che ora è un numero almeno quando r è piccolo), si pone

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \lim_{r\to 0^+} S_r .$$

— o — o —

Liminf / limsup di funzioni stanno al limite di funzioni come
" " " succ. " " " " succ.

— o — o —

Teorema (De L'Hôpital). Per forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ si ha che

$$\boxed{\liminf_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Se RHS = LHS, allora è ...

$\boxed{\text{Funzioni vs Successioni}}$

Supponiamo che $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Allora

- per ogni successioni $a_n \to x_0$ e tale che $f(a_n)$ ha limite si ha che
$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq L$$

- esiste $a_n \to x_0$ (ovviamente $a_n \neq x_0$ e $a_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) tale che
$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = L$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$)

Costruisco a_n con questo algoritmo

- Scelgo a_1 tale che $x_0 - 1 < a_1 < x_0 + 1$ e $L - 1 < f(a_1) < L + 1$ $\quad a_1 \neq x_0$, $a_1 \in D$
- Scelgo a_2 tale che $x_0 - \frac{1}{2} < a_2 < x_0 + \frac{1}{2}$, $L - \frac{1}{2} < f(a_2) < L + \frac{1}{2}$

e così via. È ovvio dalla costruzione che $a_n \to x_0$ e $f(a_n) \to L$.
Basta dimostrare che ogni volta posso trovare a_k.
Infatti, dati ε ed r, posso sempre trovare x tale che

vera in almeno un pto.
$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon \qquad x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$$
vera in tutto l'intorno

Questo perché se r è sufficientemente piccolo, il sup di f in $[x_0 - r, x_0 + r]$ è vicino ad L

—o —o —

Come dimostro un limsup di funzioni?

1. Disuguaglianza dall'alto
2. Successione dal basso

<u>Esempio</u> $f(x) = \cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$ Che succede per $x \to 0^+$

Dico che $\limsup_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Infatti

(1) $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \boxed{\cos x}$, con $\cos x \to 1$, quindi $\limsup \leq 1$

(2) Devo trovare $a_n \to 0^+$ tale che $f(a_n) \to 1$.

[Faccio in modo che $\sin \frac{1}{a_n} = 1$, cioè $\frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè $a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$]. Scelgo a_n come ho appena fatto e osservo che $a_n \to 0$ e $f(a_n) = \cos a_n \to 1$.

— o — o —

<u>Funzioni semicontinue</u> Una funzione $f(x)$ si dice

- <u>semicontinua inferiormente</u> (SCI) in x_0 se

$$\boxed{f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)}$$

"al limite può solo crollare"

- <u>semicontinua superiormente</u> (SCS) in x_0 se

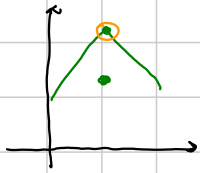
$$\boxed{f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x)}$$

— o — o —

Teorema di Weierstrass Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto non vuoto (limitato + chiuso). Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione SCI in tutti i p.ti di D.
Allora per forza esiste

$$\boxed{\min \{ f(x) : x \in D \}}$$

Esempio



Esiste il minimo, ma non esiste il max.

$\boxed{\text{Teo. di Bolzano – Weierstrass}}$ Sia D un insieme chiuso e limitato e sia $\{a_n\}$ una successione a valori in D.
Allora esiste una sottosuccessione che ammette limite, e tale limite sta in D.
Detto altrimenti, esistono $a_\infty \in D$ ed esiste una succ. di interi $n_k \to +\infty$ tale che n_k è strett. cresc.

$$a_{n_k} \to a_\infty$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Per ipotesi esistono M_1 ed M_2 t.c.

$$M_1 \leq a_n \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(perché } D \text{ è limitato)}$$

Per teo. dell'ora precedente liminf e limsup di a_n sono numeri reali ed esiste una s.succ. a_{n_k} che tende al limsup (e volendo un'altra che tende al liminf).
Poiché D è chiuso, il limite sta per forza in D.

— o — o —

Dim (di W. in versione SCI)
Pongo

$$I := \inf \{ f(x) : x \in D \}$$

Ora I esiste per forza, però potrebbe essere $-\infty$ oppure reale ma non essere minimo.
Di sicuro esiste una successione $a_n \in D$ tale che

$$f(a_n) \to I \quad \text{(} a_n \text{ si dice successione minimizzante)}$$

Questo per definizione di inf.

Applico BW alla successione a_n. Ottengo una s.succ. convergente

$$a_{n_k} \to a_\infty .$$

Dico che a_∞ è il p.to di minimo cercato. Infatti

$$f(a_\infty) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(a_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = I$$

f è SCI

perchè $f(a_n)$ ha limite e quindi $f(a_{n_k})$ ha lo stesso limite

L'unica possibilità è che sia $f(a_\infty) = I$, quindi I è reale ed è proprio il minimo.

— o — o —

SSSUP 2015 – LEZIONE 03

Titolo nota 31/01/2015

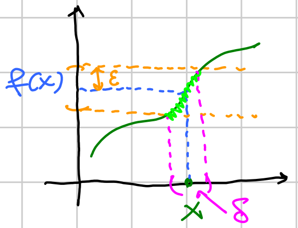
FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$.

Def. Si dice che $f(x)$ è continua in D se

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap D \qquad |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

δ dipende da x e da ε

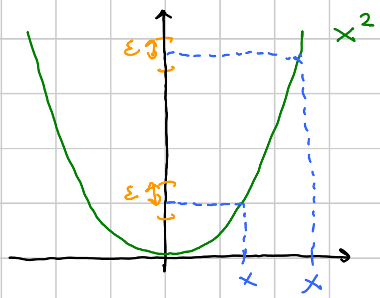


Def. Si dice che $f(x)$ è uniformemente continua in D se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists \delta > 0} \ \forall x \in D \quad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \qquad |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

δ dipende solo da ε

Esempio $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$



Brutalmente: a parità di ε, se prendo x sempre più grande mi servirà δ sempre più piccolo.
Un δ universale non c'è, quindi NON è unif. continua.

Se considero $f(x) = x^2$ su $[-100, 100]$, allora diventa unif. continua.

<u>Teorema</u> (HEINE-CANTOR) Se $f : D \to \mathbb{R}$ è continua in D e D è compatto, allora f è unif. cont. in D.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Si fa per assurdo. Quindi supponiamo che f non sia uniformemente continua.

$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ \forall\, \delta > 0 \ \exists\, x \in D \ \exists\, y \in [x-\delta, x+\delta] \cap D$ tali che

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$. Ottengo punti x_n e y_n tali che

$x_n \in D$, $y_n \in D$, $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

Poiché D è compatto, x_n ammette una sottosuccessione convergente, diciamo

$$x_{n_k} \to x_\infty \in D$$

Ora basta osservare che

- $y_{n_k} \to x_\infty$ (infatti $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$)
- $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty)$ e $f(y_{n_k}) \to f(x_\infty)$ (f è continua)

Quindi $\underbrace{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}_{\downarrow\, 0} \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow \ 0 \geq \varepsilon_0$ che è assurdo.

— o — o —

<u>Esempio</u> $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. continua in $[0,10]$.
Eppure ha pendenza esagerata vicino a 0.

$\boxed{\text{MODULI DI CONTINUITÀ}}$ Sia $f: D \to \mathbb{R}$. Per ogni $r > 0$ poniamo

$$\boxed{\omega(r) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \leq r,\ x \in D,\ y \in D\}}$$

$\omega(r)$ è la massima distanza possibile tra $f(x)$ e $f(y)$ posto che x e y distano $\leq r$.

Oss. Se f è uniformemente continua in D, allora

$$\boxed{\lim_{r \to 0^+} \omega(r) = 0}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $\varepsilon > 0$ prendo il δ corrispondente dato dall'unif. continuità e ho che $\omega(\delta) \leq \varepsilon$.

Oss. La funzione $\omega(r)$ è crescente ($r_1 < r_2 \Rightarrow \omega(r_1) \leq \omega(r_2)$). Inoltre

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|) \qquad \forall x \in D \quad \forall y \in D}$$

stima del gap verticale in funzione del gap orizzontale.

Caso particolare Supponiamo $D = [a,b]$, supponiamo $f(x) \in C^1([a,b])$

derivabile con derivata continua

Poniamo $L := \sup\{|f'(x)| : x \in [a,b]\}$.
Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall y \in [a,b]$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per Lagrange $\quad f(x)-f(y) = f'(c)\,(x-y) \quad (\text{se } y \le x)$

quindi

$$|f(x)-f(y)| \le |f'(c)| \cdot |x-y|$$
$$\le L\,|x-y|$$

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$. Si dice che

- $f(x)$ è LIPSCHITZIANA in D se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y| \qquad \forall x \in D \;\; \forall y \in D$$

(Oss. $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le L$

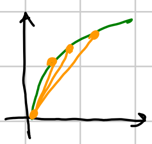
↑ coeff. angolare della retta che passa per 2 p.ti dati del grafico)

- $f(x)$ è α-HÖLDERIANA in D con un certo esponente $\alpha \in (0,1)$ se esiste $H \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \le H\,|x-y|^{\alpha} \qquad \forall x \in D \;\; \forall y \in D}$$

Oss. Se una funzione è Lip. o Hölder, allora f è unif. continua.

Esempio $\quad f(x) = \sqrt{x} \qquad D = [0,2]$



- è unif. continua? Sì, per Heine – Cantor
- è Lip.? No, per colpa di 0
- è Hölderiana con esponente $\frac{1}{2}$ e $H = 1$.

Si tratta di dimostrare che

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le |x-y|^{1/2}.$$

Eleviamo al $\square$: supponendo $x \ge y$

$\cancel{x}+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \overset{?}{\le} \cancel{x}-y \qquad \cancel{2}y \overset{?}{\le} \cancel{2}\sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \sqrt{y} \overset{?}{\le} \sqrt{x} \quad$ Ok!

Oss. Il modulo di continuità dice sostanzialmente come un errore nella variabile x si ripercuote in un errore su $f(x)$

Oss. Perché non c'è l'Hölderianità con $\alpha > 1$?
Se fosse

$$|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^2$$

vorrebbe dire che

$$f'(x) = 0 \quad \text{ovunque}$$

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \leq Hh.$$

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 04

Titolo nota 07/02/2015

$\boxed{\text{SUCCESSIONI DI FUNZIONI}}$ Famiglia f_n di funzioni, con $n \in \mathbb{N}$.
Si intende che $f_n : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$.

→ Convergenza puntuale
→ Convergenza uniforme

Def. Si dice che la successione $f_n(x)$ converge $\boxed{\text{PUNTUALMENTE}}$ ad una funzione $f_\infty(x)$ se

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) \qquad \forall x \in D.$$

Detto "smontando il limite", questo equivale a

$$\boxed{\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon}$$

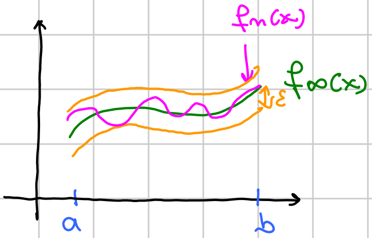
n_0 dipende da x e da ε

Def. Si dice che $f_n(x)$ converge $\boxed{\text{UNIFORMEMENTE}}$ a $f_\infty(x)$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon}$$

n_0 dipende solo da ε e va bene per tutti gli x

Oss. Dire che $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in D$ è come dire che il grafico di $f_n(x)$ sta in una striscia di ampiezza ε centrata sul grafico di $f_\infty(x)$.



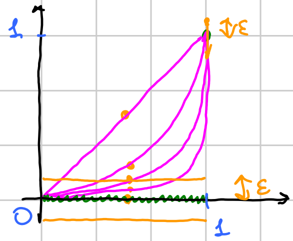
Il grafico di $f_n(x)$ sta nella striscia per n grande

Oss. facile Se $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente, allora converge puntualmente.
In generale NON vale il viceversa.

Esempio 1 $D = [0,1]$ $f_n(x) = x^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

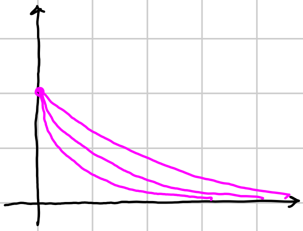
Questa sarebbe la funzione $f_\infty(x)$



Il limite non è uniforme, perché fissato $\varepsilon \in (0,1)$ non è vero che il grafico di $f_n(x)$ sta nella striscia di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$.

Esempio 2 $D = [0,+\infty)$ $f_n(x) = e^{-nx}$

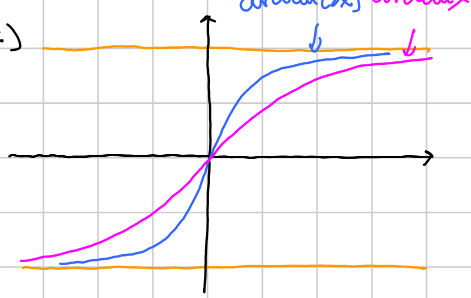
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Il limite non è uniforme.

Se invece fosse $D = [1,+\infty)$, allora il limite sarebbe uniforme.
Fissato $\varepsilon > 0$, appena $e^{-n} \le \varepsilon$, anche $e^{-nx} \le \varepsilon$ per ogni $x \ge 1$,

Esempio 3 $D = \mathbb{R}$ $f_n(x) = \arctan(nx)$

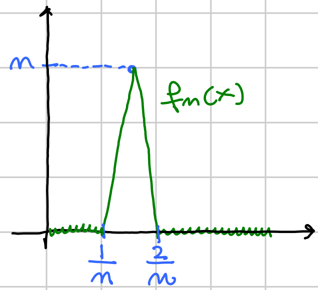


$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il limite non è unif. in $\mathbb{R}$, ma lo sarebbe in $[1,+\infty)$, ma non $(0,+\infty)$

Oss. Può accadere che il limite puntuale di funzioni continue non sia una funzione continua.

Esempio 4 $D = [0,1]$ $f_n(x)$ come da disegno



$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in D$ perché

- se $x = 0$ valgono sempre tutte 0,
- se $x > 0$, da un certo n in poi $f_n(x) = 0$.

Il limite ovviamente NON è uniforme. Inoltre

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{ma} \quad \int_0^1 f_\infty(x)\,dx = 0$$

Oss. Se $f_n(x) \to f_\infty(x)$ puntualmente in D, NON È DETTO che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_D f_n(x)\,dx = \int_D f_\infty(x)\,dx$$

— o — o —

Utilità della conv. uniforme è che permette i teoremi di scambio

$\boxed{\text{Teorema di scambio dell' integrale}}$

Supponiamo che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente in $[a,b]$.
Supponiamo che $f_n(x)$ e $f_\infty(x)$ siano continue.
Allora

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f_\infty(x)\,dx}$$

Il limite dell' integrale è l' integrale del limite

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\left| \int_a^b f_\infty(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_\infty(x) - f_n(x))\,dx \right|$$

$$\text{propr. integr.} \rightarrow \leq \int_a^b |f_\infty(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$\text{se } n \text{ è abb. grande} \Rightarrow \leq \int_a^b \varepsilon\,dx$$

$$= \varepsilon(b-a)$$

Quindi il LHS è piccolo quanto voglio pur di prendere n grande.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema di scambio della derivata}}$

Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni su $[a,b]$ di classe C^1.
Supponiamo che

$$f_n'(x) \longrightarrow g_\infty(x) \quad \text{uniformemente}$$
$$f_n(x) \longrightarrow f_\infty(x) \quad \text{uniformemente}$$

Allora

$f_\infty(x)$ è derivabile e la sua derivata è $g_\infty(x)$
(la derivata del limite è il limite delle derivate)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Usiamo lo scambio per l'integrale

$$\begin{array}{ccccc} f_n(x) & = & f_n(a) & + & \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f_\infty(x) & = & f_\infty(a) & + & \int_a^x g_\infty(t)\,dt \end{array}$$

Se derivo la seconda riga rispetto ad x ottengo $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$.
Posto che io sappia già che $g_\infty(x)$ è continua questo dimostra la derivabilità di $f_\infty(x)$

<u>Oss.</u> Non ho usato che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente, ma solo che ci converge puntualmente.
In realtà ho usato solo che $f_n(a)$ converge a qualcosa per $n \to +\infty$. A quel p.to <u>definisco</u>

$$f_\infty(x) = \text{q.c.} + \int_a^x g_\infty(t)\,dt$$

e dimostro che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ addirittura uniforme-mente.
Per essere minimalisti, ho usato che esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f_n(x_0) \longrightarrow \text{q.c.} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

— o — o —

SSSUP 2015 - LEZIONE 05

Titolo nota 07/02/2015

RIPASSO: SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA

Def. Una successione x_n di numeri reali è una succ. di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$$

Teorema Ogni successione di Cauchy ha limite reale

In maniera equivalente si enuncia dicendo che $\mathbb{R}$ è un insieme completo, cioè le succ. di Cauchy convergono.

Fatto 1 Se x_n ha limite reale, allora x_n è di Cauchy.

Dim. Supponiamo $x_n \to x_\infty$

Idea euristica: se definitiv. gli x_n stanno vicini ad x_∞, allora stanno vicini tra di loro.

Formalmente: prendo $\varepsilon > 0$ e per definizione di limite

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |x_n - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora $\forall n \geq n_0$, $\forall m \geq n_0$ si avrà che

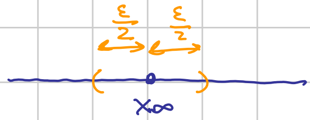
$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_\infty + x_\infty - x_m| \\ &\leq |x_n - x_\infty| + |x_m - x_\infty| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Fatto 2 Sia x_n una succ. di Cauchy.
Supponiamo che esista $x_{n_k} \to x_\infty$ (s.succ. conv.)
Allora $x_n \to x_\infty$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Idea euristica: la s.succ. convergente si tira dietro tutti gli altri termini.

Formalmente: fisso $\varepsilon > 0$.

Essendo di Cauchy $\exists\, n_0$ t.c. $|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall m \geq n_0$



Poichè esiste una s.succ. convergente,
$\exists\, n_1 \geq n_0$ t.c. $|x_{n_1} - x_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ma allora per ogni $n \geq n_0$ avremo che

$$|x_n - x_\infty| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1} - x_\infty|$$

$$\leq \underbrace{|x_n - x_{n_1}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_1} - x_\infty|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}$ perchè gli indici sono $\geq n_0$; $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ per scelta di n_1

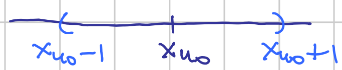
$$= \varepsilon$$

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Ogni successione di Cauchy è limitata

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon = 1$. Allora $\exists\, n_0$ t.c. $|x_n - x_{n_0}| \leq 1$ $\forall n \geq n_0$

Tutti i termini tranne un numero finito stanno tra $x_{n_0} - 1$ e $x_{n_0} + 1$.



— o — o —

$\boxed{\text{Dim 1 del teorema}}$ Sia x_n una succ. di Cauchy

1 – per il fatto 3 si ha che x_n è limitata

2 – dunque per Bolzano – W ha una s. succ. convergente

3 – dunque per il fatto 2 converge tutta.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 2 del teorema}}$

1 – come sopra x_n è limitata

2 – dunque esistono

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R} \qquad \limsup_{n\to+\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$$

ovviamente con $\ell \le L$

3 – Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \le x_n \le x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \ge n_0$$

Ma allora

$$x_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \le \ell \le L \le x_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui $L - \ell \le \varepsilon$

4 – Dal punto precedente si conclude che $\ell = L$, cioè esiste il limite.

— o — o —

$\boxed{\text{META-IDEA}}$ Per dimostrare che una succ. ha limite, ci sono varie strategie:

1. Esibire il limite e poi usare la definizione o gli strumenti per il calcolo
2. usare la monotonia
3. Dimostrare che è una succ. di Cauchy

Dimostrano l'esistenza senza calcolarlo esplicitamente

Teorema (analisi 1) Sia a_n una successione.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$\boxed{\text{Dim via completezza}}$ Siano S_n le somme parziali della 2^a e $\bar{S}_n$ le somme parziali della prima.

Basta dim. che S_n è di Cauchy. Supponiamo $m > n$

$$
\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \\
&\leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| \\
&= \overline{S}_n - \overline{S}_m \\
&= |\overline{S}_n - \overline{S}_m|
\end{aligned}
$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. RHS $\leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\forall m \geq n_0$.
Ma allora pure LHS $\leq \varepsilon$, quindi S_n è di Cauchy.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA DI SCAMBIO DEI LIMITI}}$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f_n : D \to \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.
Sia x_0 un p.to di accumulazione di D.
Supponiamo che
(i) $f_n(x) \longrightarrow f_\infty(x)$ uniformemente
(ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora intanto l_n ha un certo limite l_∞ e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f_\infty(x) = l_\infty}$$

il limite della funzione limite è
il limite dei limiti

$\boxed{\text{Dim.}}$ Intanto dimostriamo che $\{l_n\}$ è una succ. di Cauchy,
anzi prima ancora dimostriamo

<u>Fatto 1</u> $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ \forall x \in D$$

Questo si fa come prima...

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f_\infty(x) - f_m(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

Fatto 2 $\quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ e passo al limite per $x \to x_0$

$$|l_n - l_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Quindi l_n è di Cauchy e quindi $l_n \to l_\infty$

Fatto 3 Resta da dimostrare che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f_\infty(x) = l_\infty$

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \underbrace{|f_\infty(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(x) - l_n| + \underbrace{|l_n - l_\infty|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

voglio dim. che va sotto ε per ogni x abbastanza vicino a x_0

$\leq \frac{\varepsilon}{3}$ qualunque sia x quando n è grande

Fissato n, questo è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando x è abbastanza vicino a x_0

$\leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando n è grande

Quindi: dato $\varepsilon > 0$, scelgo $n \in \mathbb{N}$ in maniera tale che 1° e 3° addendo stiano sotto $\frac{\varepsilon}{3}$.
Fissato quel valore di n, scelgo $\delta > 0$ in modo tale che $|f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ quando $|x - x_0| \leq \delta$ (e $x \in D$ e $x \neq x_0$)

— o — o —

SSSUP 2015 – LEZIONE 06

Titolo nota 07/02/2015

TEOREMA DI SCAMBIO DELLA CONTINUITÀ

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f_n : D \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente in D (non vale per la puntuale!)

(ii) $f_n(x)$ continua in D per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_\infty(x)$ è continua in D.

Dim. Prendo $x_0 \in D$. Per ipotesi so che

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n = f_n(x_0)$$

Ora per il teo. di scambio dei limiti so che $\ell_n \to \ell_\infty$, ma dall'uguaglianza di sopra so già che $\ell_\infty = f_\infty(x_0)$. Inoltre

$$f_\infty(x_0) = \ell_\infty = \lim_{x \to x_0} f_\infty(x)$$

e questo mi dice che $f_\infty(x)$ è continua in x_0.

Teorema di scambio della derivata (rivisitato)

Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Supponiamo che

(i) $f_n'(x) \to g_\infty(x)$ uniformemente

(ii) esiste un p.to $x_0 \in [a,b]$ ed esiste $\ell_\infty \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f_n(x_0) \to \ell_\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

Allora $f_n(x) \to f_\infty(x)$ uniformemente, dove

$$\boxed{f_\infty(x) = \ell_\infty + \int_{x_0}^{x} g_\infty(t)\,dt}$$ e ovviamente $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per il teo. precedente sappiamo che g_∞ è continua e quindi per il teo. fond. del calcolo integrale sappiamo che $f_\infty \in C^1$ e $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$.
Scrivendo come prima

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \leftarrow \text{Teo. scambio integrale}$$

$$\ell_\infty + \int_{x_0}^{x} g_\infty(t)\,dt = f_\infty(x)$$

e questo mostra che $f_n(x) \to f_\infty(x)$ puntualmente.
Per averla uniforme, faccio la differenza e ottengo

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_0) - \ell_\infty|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{per } n \text{ grande}}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g_\infty(t)|\,dt}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2}|b-a| \\ \text{per } n \text{ grande}}}$$

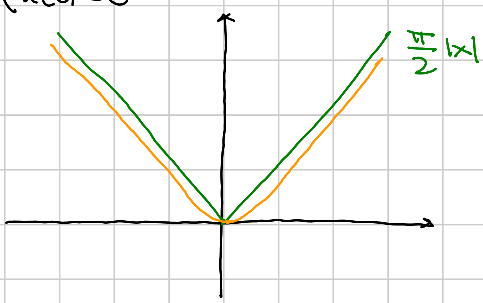
Quindi per ogni $x \in [a,b]$ il LHS è $\leq \varepsilon$ per n grande e la grandezza di n NON dipende da x.

— o — o —

<u>Esempio</u> Trovare $\underset{\substack{\cap \\ C^1}}{f_n(x)} \to f_\infty(x)$ con convergenza uniforme ma limite $f_\infty(x)$ non di classe C^1.

Idea: basta integrare uno degli esempi di prima, ad esempio fare in modo che

$$f_n'(x) = \arctan(nx) \qquad f_n(0) = 0$$



(Fare il conto per esercizio)

Altro esempio: $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$

$\boxed{\text{SERIE DI FUNZIONI}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Si costruisce la successione delle somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Si dice che la serie converge puntualmente / uniformemente a seconda di quello che fa $S_n(x)$.

C'è una scorciatoia per dimostrare la convergenza uniforme, e si chiama convergenza totale.

<u>Def</u>. Siano $f_n : D \to \mathbb{R}$. Si dice che la serie converge $\boxed{\text{TOTALMENTE}}$ se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sup\{|f_n(x)| : x \in D\}}_{\text{NUMERI}} \quad \text{converge}$$

<u>Osservazione</u> Supponiamo che esista una successione di numeri M_n tali che

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D$$

e tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$$

Allora la serie di funzioni converge totalmente.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Si ha che $0 \leq \sup\{|f_n(x)| : x \in D\} \leq M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

quindi la serie dei sup converge converge per confronto tra serie.

Teorema Se una serie converge totalmente, allora converge uniformemente.

Dim. Chiamiamo $L_n := \sup\{|f_n(x)| : x \in D\}$. Per ipotesi sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n < +\infty.$$

Passo 1 Per ogni $x \in D$ dimostro che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge.
Questo è vero perché converge assolutamente, in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \underset{\text{def. di } L_n}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \underset{\text{ipotesi}}{<} +\infty$$

Questo mi autorizza a definire $S_\infty(x)$ come la somma della serie, per ora nel senso della convergenza puntuale.

Passo 2 Devo far vedere che $S_n(x) \to S_\infty(x)$ uniformemente.
Idea: $S_\infty(x) - S_n(x)$ è la "coda" della serie, la quale è $\leq$ della coda della serie degli L_n.

$$\begin{aligned} |S_\infty(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L_k \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per n abbastanza grande il RHS è $\leq \varepsilon$ perché la serie di L_n converge, quindi il LHS è $\leq \varepsilon$ $\boxed{\text{per ogni } x \in D}$ il che mostra la convergenza uniforme

— o — o —

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(nx)+\arctan x^4}{n^{20}+3}}_{f_n(x)}$

Questa formula definisce una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio di Analisi 1: la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \le \frac{|\text{num.}|}{n^{20}+3} \le \frac{30}{n^{20}+3}$$

Convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza.
Questo basta per definire $S_\infty(x)$

1° Esercizio di Analisi 2: $S_\infty(x)$ è continua. Chiamo M_n il RHS di sopra. Quindi ho conv. totale, quindi unif.
Le somme parziali sono continue, quindi il limite è continuo.

2° Esercizio di Analisi 2: per dim. che $S_\infty(x)$ è derivabile basta dim. che la serie delle derivate converge unif.
Lo calcolo e spero nella totale sulle derivate

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^{20}+3}\left(n\cos(nx) + \underbrace{\frac{4x^3}{1+x^8}}_{\text{ha un max } M}\right)$$

$$|f_n'(x)| \le \underbrace{\frac{1}{n^{20}+3}(n+M)}_{\text{questa converge, quindi c'è la totale}}$$

Prevedo guai sulla derivata 19-esima di $S_\infty(x)$.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx^2)}{n^3+1} = S_\infty(x)$

Come prima: $S_\infty(x)$ definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Vediamo le derivate

se faccio il sup su $\mathbb{R}$ crea problemi ☹

$$f_n'(x) = \frac{2nx\cos(nx^2)}{n^3+1}$$

Non dico che la serie di $f_n'(x)$ converge unif. su tutto $\mathbb{R}$.
Dico però che conv. unif in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$ poichè

$$|f_n'(x)| \le \frac{2nA}{n^3+1} \qquad \forall x \in [-A, A]$$

serie converge

Conseguenza: $S_\infty(x)$ è derivabile in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$
quindi è derivabile su tutto $\mathbb{R}$

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 07

Titolo nota 11/02/2015

Introduzione al Calcolo delle Variazioni

CdV = problemi di max / min (sostanzialmente di min)

Problema. Dato un insieme X e una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, studiare

$$\boxed{\min \{ f(x) : x \in X \}}$$

Ci si chiede:
- → se il minimo esiste
- → se esiste, calcolarlo e trovare i p.ti di min
- → se non esiste, capire chi è l'inf. e perché il minimo non esiste.

Spesso l'insieme X è contenuto in uno spazio dim. infinita, ad esempio uno spazio di funzione.

Esempio 1 $\quad F_1(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 \, dx$

X = insieme delle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che soddisfano $u(0) = 1$ e $u(1) = 3$

Notazione: quando la funzione da minimizzare ha come argomento delle funzioni, si chiama FUNZIONALE

Altri esempi: $\quad F_2(u) = \int_0^1 |u'(x)| \, dx \qquad F_3(u) = \int_0^1 |u'(x)|^{1/2} dx$

Questi sono esempi di funzionali integrali

Due possibili approcci:

→ METODO INDIRETTO

→ METODO DIRETTO

<u>Esempio</u> $X = \mathbb{R}^2$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 5$$

<u>Metodo indiretto</u>: → cercare i candidati p.ti di min

→ sperare di dim. a mano che sono minimi

I candidati li cerco fra i p.ti stazionari

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ 8y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Se c'è il minimo, allora viene assunto in $(-3, -\frac{1}{4})$ e vale

$$f(-3, -\tfrac{1}{4}) = 9 + \frac{1}{4} - 18 - \frac{1}{2} + 5 = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$$

Spero di dimostrare che $f(x,y) \geq -\frac{17}{4}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 5 \overset{?}{\geq} -\frac{17}{4} \iff x^2 + 4y^2 + 6x + 2y + 9 + \frac{1}{4} \overset{?}{\geq} 0$$

$$\iff (x+3)^2 + (2y + \tfrac{1}{2})^2 \overset{?}{\geq} 0$$

Questo è vero con uguaglianza $\iff x = -3$ e $y = -\frac{1}{4}$.

<u>Metodo diretto</u>: → dimostrare in qualche modo che il min. esiste

→ trovare i p.ti stazionari, e quelli in cui f vale meno sono i p.ti di min. per forza.

Per dimostrare l'esistenza si ricorre a Weierstrass o varianti.

Nell'esempio si tratta di dim. che

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

e usare Weierstrass generalizzato.

— o — o —

$\boxed{\text{EQUAZIONE DI EULERO}}$ (Metodo indiretto applicato ai funzionali)

<u>Obiettivo</u>: trovare i candidati p.ti di minimo (l' equiv. di $\nabla f = 0$)

Molto in generale: sia X un insieme, e sia $F: X \to \mathbb{R}$ un funzionale.

Sia $x_0 \in X$ un p.to di minimo per F.
Sia $\gamma: [-\delta, \delta] \to X$ una curva ($\delta > 0$) a valori nell' insieme X.
Supponiamo che $\gamma(0) = x_0$.
Posso considerare la funzione

$$[-\delta, \delta] \ni t \longrightarrow \underbrace{F(\gamma(t))}_{= \varphi(t)} \in \mathbb{R}$$

Osservazione fondamentale: se x_0 è un p.to di min. per $F(x)$, allora $t = 0$ è un p.to di min. per $\varphi(t)$.

Quindi: se $\varphi(t)$ è derivabile in $t = 0$, allora per forza $\varphi'(0) = 0$
Nota bene: la funzione φ va da $[-\delta, \delta]$ in $\mathbb{R}$, quindi la sua derivabilità è quella di Analisi 1.

Quindi: se esiste una curva $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = x_0$ e $\varphi'(0) \neq 0$, allora x_0 non può essere p.to di minimo.

<u>Oss.</u> È l'analogo della derivata direzionale di Analisi 2.

Esempio $\quad F(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) \ : \ u(0) = 2, \ u(1) = 5 \}$$

Supponiamo che $u(t)$ sia un p.to di minimo.
Prendo una qualunque funzione $v(t)$ in $C^1([0,1])$ tale che $v(0)=0$ e $v(1)=0$.
Allora la funzione

$$u(x) + t\,v(x) \quad \text{sta in } X \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Quindi posso considerare

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^1 [u'(x) + t\,v'(x)]^2 dx$$
$$= \int_0^1 [u'(x)]^2 dx + 2t \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx$$
$$+ t^2 \int_0^1 [v'(x)]^2 dx$$

Come funzione di t ha senso calcolare $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = 2\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx + 2t \int_0^1 [v'(x)]^2 dx$$

Se $u(x)$ è un p.to di minimo, allora per forza deve essere $\varphi'(0)=0$
e cioè

$$\boxed{\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = 0}$$

1ª forma integrale dell' eq. di Eulero

Detto brutalmente: $\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx$ rappresenta la derivata direzionale di $F(u)$ nella direzione v, e deve fare 0 per ogni v se u è un p.to di minimo.

Usiamo ora l'integrazione per parti

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \underbrace{\left[u'(x)\, v(x) \right]_{x=0}^{x=1}}_{=0 \text{ perché } v(x) \text{ si annulla agli estremi}} - \int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx$$

Quindi, supponendo per un attimo che $u(x)$ sia di classe C^2, l'equazione di Eulero è diventata

$$\boxed{\int_0^1 u''(x)\, v(x) = 0}$$

2ª forma integrale dell'equazione di Eulero

Se $u(x)$ è un p.to di minimo, ed è di classe C^2, allora questa equazione deve essere soddisfatta per ogni $v(x)$ di classe C^1 con $v(0) = v(1) = 0$.

<u>Lemma</u> (DBR) Sia $f(x)$ una funzione in $C^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b f(x)\, v(x)\, dx = 0$$

per ogni $v(x)$ in $C^1([a,b])$ con $v(0) = v(1) = 0$.
Allora

$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

— o — o —

Dato per buono il Lemma DBR, l'equazione diventa

$$\boxed{u''(x) = 0}$$

Eq. di Eulero in forma differenziale

Conseguenza: l'unico candidato ad essere il p.to di minimo è la retta che congiunge i due valori al bordo, cioè la retta

$$u(x) = 2 + 3x$$

Proviamo ora a concludere.
Prendo $u(x) = 2+3x$ e prendo una qualunque altra $w \in X$.
Osservo che posso scrivere

$$w(x) = u(x) + v(x)$$

C^1 e nulla al bordo

Ora

$$F(w) = \int_0^1 [w'(x)]^2 dx = \int_0^1 [u'+v']^2 dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 [u']^2 dx}_{F(u)} + \underbrace{2\int_0^1 u'v' dx}_{= 0} + \underbrace{\int_0^1 [v']^2 dx}_{\geq 0}$$

per Eulero nella 1ª forma integrale

$$\geq F(u)$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se $\int_0^1 [v'(x)]^2 dx = 0$, cioè se e solo se $v'(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e avendo $v(x)$ valore nullo al bordo questo accade se e solo se $v(x) \equiv 0$.

Conclusione: esiste il minimo di $F(u)$ in X e l'unico p.to di minimo è la funzione $u(x) = 2+3x$.

SSSUP 2015 — LEZIONE 08

Titolo nota 11/02/2015

Lemma (DBR) $\int_a^b f v = 0 \quad \forall v \in C^1$ nulla al bordo

Allora $f(x) \equiv 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) > 0$. Allora esiste una $v(x)$ che rispetta le condizioni per cui l'integrale viene positivo.

Essendo f continua c'è un intorno $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$ in cui $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$.

Mi basta ora trovare $v(x)$ di classe C^1 tale che

- $v(x) = 0$ fuori da $[x_0-\delta, x_0+\delta]$
- $v(x) = 1$ in $[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$
- $0 \leq v(x) \leq 1$ ovunque.

— o — o —

Oss. L'idea di dimostrazione permette di capire diverse varianti del lemma, ad esempio

1. funziona uguale se l'ipotesi vale solo per $v \in C^7$
2. funziona uguale anche se metto valori diversi da 0 al bordo (basta andare subito a 0 vicino al bordo)
3. posso imporre condizioni anche in punti interni ad $[a,b]$ oltre che negli estremi.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 \, dx + \int_0^1 u^2 \, dx$

$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 7 \}$ (senza condizioni in $x = 1$)

Considero $\underbrace{u(x) + t v(x)}_{\in X \text{ per ogni } t}$ dove $v \in C^1([0,1])$ e $v(0) = 0$.

$$\varphi(t) = \int_0^1 \left[(\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u + tv)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \dot{u}^2 + 2t \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_0^1 \dot{v}^2 + \int_0^1 u^2 + 2t \int_0^1 uv + t^2 \int_0^1 v^2$$

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + 2t \int_0^1 \dot{v}^2 + 2 \int_0^1 uv + 2t \int_0^1 v^2$$

Quindi $\varphi'(0) = 0$ se e solo se

$$\boxed{\int_0^1 u'(x) v'(x) \, dx + \int_0^1 u(x) v(x) = 0}$$

1ª forma integrale dell'eq. di Eulero

Integro per parti il 1° integrale (obiettivo: ottenere $v(x)$ in vista dell'applicazione di DBR)

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) \, dx = \left[u'(x) v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u''(x) v(x) \, dx$$

$$= u'(1) v(1) - \int_0^1 u''(x) v(x) \, dx$$

Quindi la seconda forma di Eulero integrale è

$$\boxed{u'(1) v(1) + \int_0^1 \left[u(x) - u''(x) \right] v(x) \, dx = 0}$$

Se $u(x)$ è un p.to di minimo, l'eq. sopra deve valere per ogni $v \in C^1([0,1])$ tale che $v(0) = 0$.

Agisco in due tempi

① L'equazione deve essere vera a maggior ragione per tutte le $v \in C^1$ con $v(0) = v(1) = 0$. Quindi

$$\int_0^1 [u(x) - u''(x)]\, v(x)\, dx = 0$$

per queste v, che bastano per usare DBR. Quindi

$$\boxed{u''(x) = u(x)}$$ Forma diff. dell'Eq. di Eulero

② A questo punto, se $u(x)$ è un p.to di min. (di classe C^2), allora per forza

$$u'(1)\, v(1) = 0$$

per ogni $v \in C^1$ con $v(0) = 0$. Quindi basta fare in modo che $v(1) = 1$ (o comunque $\neq 0$) per dedurre che

$$\boxed{u'(1) = 0}$$ ← condizione al bordo nata da Eulero

Conclusione: se $u(x)$ è un p.to di minimo, allora risolve

$$\begin{cases} u''(x) = +u(x) & \text{Eq. diff. nata da Eulero} \\ u(0) = 7 & \text{Cond. al bordo iniziale} \\ u'(1) = 0 & \text{Cond. al bordo nata da Eulero} \end{cases}$$

Questo problema si risolve esplicitamente. La soluzione è del tipo

$$u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

e c_1 e c_2 si determinano univocamente con le cond. al bordo.

Sia $\bar{u}(x)$ la soluzione così trovata. È veramente un p.to di min?

Disuguaglianza! Una qualunque altra $w \in X$ si scrive come

$$w = \bar{u} + t v$$

↑ di classe C^1 e $v(0)=0$

$$F(w) = F(\bar{u}) + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + \int_0^1 v^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\int_0^1 \bar{u}' v' + 2\int_0^1 \bar{u}\, v}_{=0}$$

$=0$ perché $\bar{u}$ soddisfa l'Eulero finale, quindi anche la sua forma iniziale di Eulero
(integrare per parti per verifica)

$$\geq F(\bar{u})$$

con uguaglianza se e solo se $v(x) \equiv 0$, cioè se e solo se $\bar{u}(x) = w(x)$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Quello che è venuto fuori è un problema diff. del 2° ordine con due condizioni al bordo.
Ci sono 2 tipi di condizioni al bordo

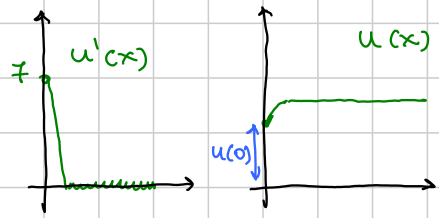
- condizioni di DIRICHLET: prescrivere $u(x)$ in un estremo
- condizioni di NEUMANN: " $u'(x)$ " " "

Moralmente: se in un estremo ho messo in partenza una condizione di D me la ritrovo nell'eq. finale; se in un estremo non ho richiesto nulla, mi ritrovo N in quell'estremo

— o — o —

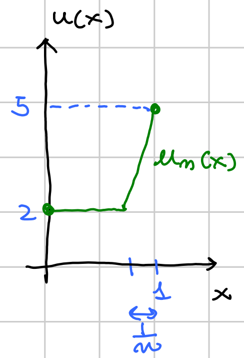
<u>Esempio</u> $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2\, dx \qquad X = \{u \in C^1([0,1]) \text{ con } u'(0) = 7\}$

Basta che $u'(x)$ sia quasi subito 0.
Inf $=0$, min. non esiste



<u>Esempio</u> $F(u) = \int_0^1 |\dot{u}|^{1/2} dx$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 2, \ u(1) = 5 \}$$



Allentiamo le regole: prendiamo u C^1 a tratti

$$F(u_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|3n|}_{u_n'(x)}{}^{1/2} dx = \frac{3\sqrt{n}}{n} \to 0$$

A patto di "smussare l'angolo" ottengo lo stesso effetto anche in C^1. Quindi INF $= 0$.

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 09

Titolo nota 14/02/2015

Equazione di Eulero di funzionali

$F(u)$ definito per $u \in X$ $\qquad G(t) := F(u+tv)$

Se u è un p.to di min per F, allora $G'(0)=0$ se esiste

Più in generale $\boxed{F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x))\,dx}$

$$X = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0)=a,\ u(1)=b \}$$

Presa $v \in C^1([0,1])$ con $v(0)=v(1)=0$, si ha $u+tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e

$$G(t) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x))\,dx.$$

Voglio calcolare $G'(0)$

Brutal mode: $\displaystyle\int_0^1 \varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x))\,dx =$ $\qquad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)b + \frac{\varphi''(a)}{2}b^2$

$$\underbrace{\int_0^1 \varphi(\dot{u}(x))}_{G(0)} + \underbrace{\int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\, t\dot{v}(x)\,dx}_{+\ t\,G'(0)} + \underbrace{\int_0^1 \varphi''(\dot{u}(x))\,\frac{t^2\dot{v}(x)^2}{2}\,dx + \dots}_{+\ o(t)}$$

$$G'(0) = \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x)\,dx$$

Quindi la prima forma integrale dell'eq. di Eulero diventa

$$\boxed{\int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x)\,dx = 0} \qquad \text{per ogni } v \in \dots$$

Per andare alla seconda forma integrale, integro per parti

$$0=\int_0^1 \varphi'(\dot u(x))\cdot \dot v(x)\,dx = \left[\varphi'(\dot u(x))\, v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[\varphi'(\dot u(x))\right]' v(x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 \left[\varphi'(\dot u(x))\right]' v(x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 \varphi''(\dot u(x))\, \ddot u(x)\, v(x)\,dx$$

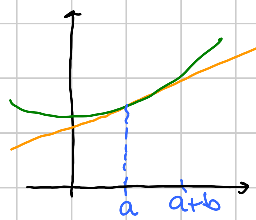
$$\boxed{\int_0^1 \varphi''(\dot u(x))\, \ddot u(x)\, v(x)\,dx = 0} \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

Lemma DBR (DU BOIS – REYMOND) implica

$$\boxed{\varphi''(\dot u(x))\, \ddot u(x) = 0}$$

Oss Se uno sapesse che $\varphi''(x) > 0$ per ogni x, allora l'unica possibilità è che sia $\ddot u(x) = 0$, cioè $u(x) = ax + b$.
Lo stesso discorso vale anche se $\varphi''(x) < 0$ per ogni x.

Parentesi sulle funzioni convesse



Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

$$\boxed{\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)\, b \qquad \forall a \in \mathbb{R} \ \ \forall b \in \mathbb{R}}$$

il grafico sta sopra la retta tangente

Dim. Assumiamo che φ sia di classe C^2. Allora per Taylor-Lagrange

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)\, b + \underbrace{\frac{\varphi''(c)}{2}}_{\geq 0} b^2 \qquad (c \text{ sta tra } a \text{ e } a+b)$$

$$\geq \varphi(a) + \varphi'(a)\, b$$

Tornando al funzionale, sia $\bar{u}(x)$ la retta che soddisfa le due condizioni agli estremi. Supponiamo $\varphi(x)$ convessa.
Ogni $w \in X$ la posso scrivere come

$$w = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nulla al bordo}}}{\bar{u} + v}$$

$$F(w) = F(\bar{u}+v) = \int_0^1 \varphi(\dot{\bar{u}}(x) + \dot{v}(x))\,dx$$

$$\geq \int_0^1 [\varphi(\dot{\bar{u}}(x)) + \varphi'(\dot{\bar{u}}(x))\,\dot{v}(x)]\,dx$$

$$= F(\bar{u}) + \underbrace{\int_0^1 \varphi'(\dot{\bar{u}}(x))\,\dot{v}(x)\,dx}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ per l'equazione di eulero}}}$$

Così abbiamo dim. che $F(w) \geq F(\bar{u})$ per ogni $w \in X$, quindi $\bar{u}$ è un p.to di minimo.
Se ci fosse un altro p.to di minimo, dovrebbe esserci $=$ al posto di $\geq$, ma se $\varphi(x)$ è strett. convessa questo è possibile solo se $\dot{v}(x) = 0$ per ogni x, il che accade solo se $v(x) \equiv 0$ (per via del dato al bordo).

— o — o —

<u>Giustificazione del calcolo di $G'(0)$.</u>

$$G'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{G(t)-G(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(F(u+tv) - F(u)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 [\varphi(\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{\dot{u}(x)} + \underbrace{t\,\dot{v}(x)}_{b}) - \varphi(\dot{u}(x))]\,dx$$

Ora per Taylor-Lagrange: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)\cdot b + \frac{1}{2}\varphi''(c)\,b^2$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{\int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\,t\,\dot{v}(x)\,dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\varphi''(c(x,t))\,t^2\,\dot{v}(x)^2\,dx\right\}$$

$$= \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x)\,dx + \lim_{t\to 0} t\,\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi''(c(x,t))\,\dot{v}(x)^2\,dx$$

Ora mi serve che l'ultimo termine tenda a 0. Mi basta che l'integrale sia limitato.
Ora esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\dot{v}(x)|^2 \leq M \qquad \forall x \in [0,1]$$ ($\dot{v}$ è continua, quindi limitata)

Allo stesso modo $\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)$ è limitato, quindi i possibili valori di $c(x,t)$ sono limitati, quindi $\varphi''(c(x,t))$ è limitata perchè φ'' è limitata sugli intervalli limitati.

<u>Oss.</u> Si può dimostrare la stessa cosa senza assumere che φ sia di classe C^2. Quando siamo a

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 [\varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))]\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_0^1 \frac{\varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t}\,dx$$ VORREI

$$= \int_0^1 \left[\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t}\right] dx$$ uso solo che φ è C^1

$$= \int_0^1 \varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x)\,dx$$

Il vorrei è basato su un teorema di scambio limite / integrale, che si può fare se c'è convergenza uniforme. Quello che dovrebbe convergere unif. è

$$\frac{\varphi(\dot{u}(x)+t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t} \longrightarrow \varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x)$$

Lagrange

$$\frac{\varphi'(c(x,t))\cdot \cancel{t}\,\dot{v}(x)}{\cancel{t}}$$

la conv. puntuale è la def di derivata
l'uniforme è qualcosa in più.

Caso più generale

$$\boxed{F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x))\,dx + \int_0^1 \psi(u(x))\,dx}$$

$$\underbrace{F(u+tv)}_{G(t)} = \int_0^1 \varphi(\dot{u}+t\dot{v})\,dx + \int_0^1 \psi\,(u+tv)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \varphi(\dot{u})}\, + \varphi'(\dot{u})\cdot t\dot{v} + t^2\ldots \; + \underbrace{\int_0^1 \psi(u)}\, + \psi'(u)\,tv + t^2\ldots$$

$$= \underbrace{F(u)}_{G(0)} + t\underbrace{\int_0^1 [\varphi'(\dot{u})\,\dot{v} + \psi'(u)\,v]}_{G'(0)} + t^2\cdot \text{roba}$$

$$+\; t\cdot \qquad\qquad + t^2\cdot \text{roba}$$

Eq. di Eulero

$$\boxed{\int_0^1 [\varphi'(\dot{u}(x))\,\dot{v}(x) + \psi'(u(x))\,v(x)]\,dx = 0}$$

Integro per parti il primo e se il bordo se ne va

$$\int_0^1 \left\{-[\varphi'(\dot{u}(x))]' + \psi'(u(x))\right\} v(x)\,dx = 0$$

Per il lemma DBR si arriva a

$$[\varphi'(\dot{u}(x))]' = \psi'(u(x)) \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{\varphi''(\dot{u}(x))\,\ddot{u}(x) = \psi'(u(x))}$$

— o — o —

Ancora più generale

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}(x), u(x), x)\,dx$$

L'equazione di Eulero diventa

$$F(u+tv) = \int_0^1 \varphi(\dot{u}+t\dot{v}, u+tv, x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(\dot{u},u,x) + \varphi_{\dot{u}}(\dot{u},u,x)\,t\dot{v} + \varphi_u(\dot{u},u,x)\,tv + t^2\cdot\text{roba}$$

Eulero prima forma

$$\int_0^1 \varphi_{\dot{u}}(\dot{u}, u, x)\, \dot{v} + \varphi_u(\dot{u}, u, x)\, v = 0$$

Seconda forma

$$\int_0^1 \left\{ -\left[\varphi_{\dot{u}}(\dot{u}, u, x)\right]' + \varphi_u(\dot{u}, u, x) \right\} v = 0$$

e infine

$$\boxed{\left[\varphi_{\dot{u}}(\dot{u}, u, x)\right]' = \varphi_u(\dot{u}, u, x)}$$

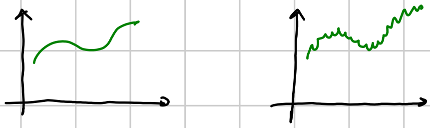
Forma diff. dell'eq. di Eulero nel caso generale,

SSSUP 2015 – LEZIONE 10

Titolo nota 14/02/2015

Esempio 1 Trasmissione / ricezione segnali

Segnale: funzione definita in $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}$



Problema: dato il segnale disturbato che si riceve, cercare di ricostruire quello di partenza.

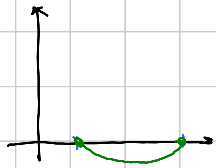
Possibile procedura: sia $f(x)$ quello che ricevo.
Considero il funzionale

$$F(u) = \underbrace{\int_a^b [\dot{u}(x)]^2 dx}_{\text{Questo è basso se } u(x) \text{ non è troppo irregolare}} + \overset{\text{positivo}}{k} \underbrace{\int_a^b [u(x) - f(x)]^2 dx}_{\text{Questo è basso se } u(x) \text{ assomiglia ad } f(x)}$$

Dato $f(x)$, minimizzare $F(u)$ tra tutte le funzioni C^1 è una ragionevole procedura per "ripulire" $f(x)$.

Esempio 2 $$F(u) = \underbrace{\int_a^b [\dot{u}(x)]^2}_{\text{energia elastica}} + \underbrace{g\int_a^b u(x)\,dx}_{\text{energia potenziale}}$$

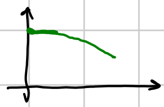
Minimizzare $F(u)$ tra tutte le $u \in C^1([a,b])$ con $u(a) = u(b) = 0$ vuol dire trovare la posizione di equilibrio di una sbarra sospesa tra 2 pti



Allungamento $\sim \sqrt{1+\dot{u}^2} \sim 1 + \frac{1}{2}\dot{u}^2$

Esempio 2.5 $$F(u) = \int_a^b [\ddot{u}(x)]^2 dx + g\int_a^b u(x)\,dx$$

con condizioni $u(0) = 3$, $\dot{u}(0) = 0$



<u>Soluzione esempio 1</u> $F(u) = \int \dot{u}^2 + (u-f)^2$
$= \int [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf + f^2]$

Posso limitarmi a minimizzare

$$F(u) = \int [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf]\, dx$$

$$G(t) = \int (\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 - 2(u+tv) f$$

$$= \int (\dot{u}^2 + u^2 - 2uf) + 2t \int \dot{u}\dot{v} + uv - fv \; + t^2 \int \dot{v}^2 + v^2$$

$G'(0) = 0 \iff \boxed{\int \dot{u}\dot{v} + uv - fv = 0}$ $\forall v \in C^1([a,b])$ senza altri vincoli

Integrando per parti, non possiamo ignorare il bordo, e arriviamo a

$$[\dot{u}v]_a^b - \int \ddot{u} v + \int uv - fv = 0$$

$$\boxed{\dot{u}(b)v(b) - \dot{u}(a)v(a) + \int_a^b [-u''(x) + u(x) - f(x)]\, v(x)\, dx = 0}$$

Usando solo le $v(x)$ con $v(a) = v(b) = 0$ ottengo (via DBR):

$$\boxed{-u''(x) + u(x) = f(x)}$$

Poi scelgo una $v(x)$ con $v(a) \neq 0,\ v(b) = 0 \rightsquigarrow u'(a) = 0$
" " " " " $v(a) = 0,\ v(b) \neq 0 \rightsquigarrow u'(b) = 0$

Sia $u(x)$ una soluzione del problema. Dico che è un minimo

$$F(u+v) = \int_a^b [(\dot{u}+\dot{v})^2 + (u+v)^2 - 2(u+v)f]\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b (\dot{u}^2 + u^2 - 2fu)\, dx}_{F(u)} + 2\underbrace{\int_a^b \dot{u}\dot{v} + uv - 2vf}_{=0 \text{ per Eulero}} + \underbrace{\int_a^b (\dot{v}^2 + v^2)}_{\geq 0 \text{ e nullo solo se } v \equiv 0}$$

Soluzione esempio 2.5

potrei mettere $u(a)=2$, $\dot{u}(a)=7$

$$\min\left\{ \underbrace{\int_a^b [\ddot{u}(x)]^2 + g\int_a^b u(x)}_{F(u)} : u \in C^2,\ \overbrace{u(a)=u'(a)=0} \right\}$$

$$G(t) := F(u+tv) = \int_a^b (\ddot{u}+t\ddot{v})^2\,dx + g\int_a^b (u(x)+t\,v(x))\,dx$$

$$= \int_a^b [\ddot{u}^2 + 2t\,\ddot{u}\,\ddot{v} + t^2\ddot{v}^2 + gu + tgv]\,dx$$

$$= \int_a^b (\ddot{u}^2+gu)\,dx + t\int_a^b 2\ddot{u}\ddot{v} + gv + t^2\int_a^b \ddot{v}^2\,dx$$

$G'(0)=0$ se e solo se

$$\boxed{\int_a^b [2u''(x)\,v''(x) + g\,v(x)]\,dx = 0}$$

per ogni $v \in C^2([a,b])$ con $\underbrace{v(a)=\dot{v}(a)=0}$,

sarebbe così anche con $u(a)=2$, $\dot{u}(a)=7$

$$\int \ddot{u}\,\ddot{v} = [\ddot{u}\,\dot{v}]_a^b - \int \dddot{u}\,\dot{v}$$

$$= [\ddot{u}\,\dot{v}]_a^b - [\dddot{u}\,v]_a^b + \int_a^b u^{(4)}v$$

$$= \ddot{u}(b)\,\dot{v}(b) - \dddot{u}(b)\,v(b) + \int_a^b u^{(4)}v$$

$$\boxed{2\ddot{u}(b)\,\dot{v}(b) - 2\dddot{u}(b)\,v(b) + \int_a^b [+u^{(4)}(x)+g]\,v(x)\,dx = 0}$$

Prima fase: uso $v(x)$ con $v(b)=\dot{v}(b)=0$. Con un lemma DBR opportuno ottengo

$$\boxed{u^{(4)}(x) = -g} \rightsquigarrow u(x) = -\frac{1}{24}g\,x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$$

Seconda fase: Prendo $v(x)$ con $\dot{v}(b)=1$ e $v(b)=0$ $\rightsquigarrow$ $\ddot{u}(b)=0$

" " " $\dot{v}(b)=0$ e $v(b)=1$ $\rightsquigarrow$ $\dddot{u}(b)=0$

In conclusione ho ottenuto l'eq. diff.

$$u^{(4)}(x) = -g$$

con quattro condizioni al bordo

$$\left.\begin{aligned} u(a) &= 0 \\ \dot{u}(a) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{le avevo all'inizio}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u}(b) &= 0 \\ \dddot{u}(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{nate dall'equazione di Eulero}$$

SSSUP 2015 – LEZIONE 11

Titolo nota 28/02/2015

Teoremi di esistenza / unicità per equazioni differenziali

Strategie ① Via $\boxed{\text{completezza}}$ ⇝ teorema delle contrazioni in spazi metrici

② Via $\boxed{\text{compattezza}}$ ⇝ teorema di ASCOLI-ARZELÀ (problemi approssimanti)

X → insieme

→ nozione di convergenza ($x_n \to x_\infty$)

→ topologia

$\boxed{\to}$ spazio metrico

Se X è anche uno spazio vettoriale → spazio di BANACH

$\boxed{\to}$ spazio di HILBERT

Def. Sia X un insieme. Una distanza su X è una funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà

(D0) $d(x,y) \geq 0$ per ogni $x \in X$, $y \in Y$

(D1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni ... (simmetria)

(D3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disug. triangolare)

Def. Uno $\boxed{\text{spazio metrico}}$ è una coppia (X,d) dove

- X è un insieme
- $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una distanza.

Esempi

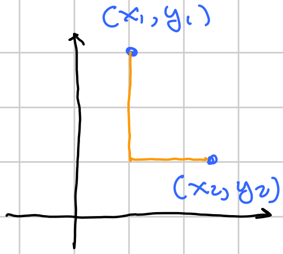
① $X = \mathbb{R}$ con la solita $d(x,y) = |x-y|$

② $X = \mathbb{R}^n$ " " " $d(x,y) = \|x-y\|$ ← norma

③ X = insieme qualunque con

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

④ $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza taxi driver



$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

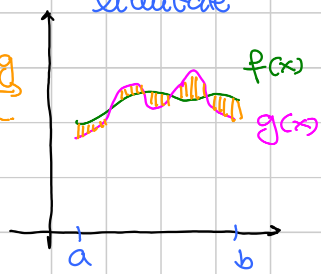
⑤ $X = \{\text{funzioni } f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ limitate}\}$ con la distanza

$$\boxed{d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}}$$

Questo è reale perché le funz. f e g sono limitate

Bisognerebbe verificare le (D0) – (D4) (l'unica cosa meno ovvia è la triangolare)

distanza tra f e g = sup delle lunghe dei segmenti verticali



Oss. Avere una distanza implica una nozione di convergenza, cioè

$$\underbrace{x_n \to x_\infty}_{\text{elementi di } X} \iff \underbrace{d(x_n, x_\infty) \to 0}_{\text{numeri}}$$

Def. Uno spazio metrico (X,d) si dice <u>completo</u> se tutte le successioni di Cauchy a valori in X convergono

Analogamente al caso di $\mathbb{R}$, una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \ \forall m \geq n_0}$$

Esempio 1 $\mathbb{N}$ con la distanza che eredita di $\mathbb{R}$.
È completo?
Sì, perché le uniche successioni di Cauchy sono quelle definitivamente costanti (basta usare la def. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

Esempio 2 $(0,1)$ con la distanza che eredita da $\mathbb{R}$ è completo?
No, perché $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy ma non converge ad un elemento dell'insieme.

Teorema Sia $X = C^0([a,b], \mathbb{R})$ (funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dunque limitate) con la solita

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$

Allora X è completo.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $\{f_n(x)\}$ una succ. di Cauchy rispetto alla d.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Fissato un qualunque $x \in [a,b]$, avremo che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m)$$

Quindi ne segue che la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy di numeri, quindi converge ad un limite che chiamiamo $f_\infty(x)$.
Abbiamo così definito $f_\infty : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Così abbiamo dim. la convergenza puntuale

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Dimostriamo la convergenza uniforme, cioè rispetto alla distanza d.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

Facendo il limite per $m \to +\infty$ si ottiene

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

cioè $\quad d(f_n, f_\infty) = \sup\{|f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in [a,b]\}$
$\leq \varepsilon$

e questo è come dire che $\quad d(f_n, f_\infty) \to 0$.

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Ci sarebbe da dire che f_∞ è continua.
Questo segue dal fatto che il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

— o — o —

<u>Def.</u> Sia (X,d) uno spazio metrico. Una funzione $f: X \to X$ si dice <u>contrazione</u> se esiste una costante $\ell < 1$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq \ell \, d(x,y) \qquad \forall x \in X, \forall y \in X$$

<u>Oss.</u> La Lipschitzianità è un concetto metrico e una contrazione è una funzione Lip. con costante di Lip. < 1.

$\boxed{\text{TEOREMA DELLE CONTRAZIONI}}$

Sia (X, d) uno spazio metrico COMPLETO.
Sia $f: X \to X$ una contrazione.
Allora f ammette esattamente un pto fisso, cioè esiste un unico $x \in X$ tale che $f(x) = x$.

$\boxed{\text{Dim.}}$

$\boxed{\text{Unicità}}$ Supponiamo che ci siano due pti fissi x_1 e x_2. Allora

$$d(x_1, x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono fissi}}}{=} d(f(x_1), f(x_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contrazione}}}{\leq} \ell\, d(x_1, x_2)$$

quindi

$$\underbrace{(1-\ell)}_{>0} d(x_1, x_2) \leq 0 \quad \rightsquigarrow d(x_1, x_2) = 0 \rightsquigarrow x_1 = x_2$$

$\boxed{\text{Esistenza}}$ Scelgo a caso $x_0 \in X$ e costruisco la succ. per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Se sapessi che $x_n \to x_\infty$, allora

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_\infty & = & f(x_\infty) \end{array}$$

Quindi basta dim. che x_n converge, cioè basta dim. che x_n è di Cauchy. Ora

$$d(x_2, x_1) \leq \ell\, d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) \leq \ell\, d(x_2, x_1) \leq \ell^2 d(x_1, x_0)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \ell^n d(x_1, x_0)$$

Preso quindi $m > n$ avremo che

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \ell^k d(x_1, x_0) \\
&= d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} \ell^k \\
&\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} \ell^k \quad \leftarrow \text{raccolto } \ell^n \text{, diventa una geometrica} \\
&= d(x_1, x_0) \frac{\ell^n}{1-\ell}
\end{aligned}
$$

Fissato $\varepsilon > 0$ per n (e quindi anche m) abbastanza grande sarà vero che

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

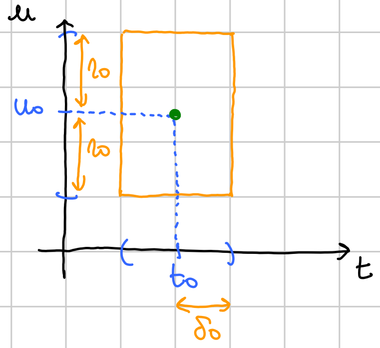
— o — o —

Oss. Se siamo a Pisa e piazziamo una cartina d'Italia sul tavolo, allora c'è un unico p.to sulla cartina che rappresenta se stesso.

SSSUP 2015 – LEZIONE 12

Titolo nota 28/02/2015

$\boxed{\text{Problema di Cauchy}}$ $\begin{cases} u' = f(t,u) & \text{eq. diff. in forma normale} \\ u(t_0) = u_0 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$



Assumiamo che f sia definita almeno in un rettangolo che contiene (t_0, u_0), diciamo in

$$[t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] \times [u_0-r_0, u_0+r_0]$$

per opportuni $\delta_0 > 0$ e $r_0 > 0$.

$\boxed{\text{Teorema di esistenza e unicità}}$

Consideriamo il problema di Cauchy come sopra.
Supponiamo che $f(t,u)$ sia continua nel rettangolo, dunque in particolare esiste

$$M := \max\{|f(t,u)| : (t,u) \in \text{rettangolo}\}$$

Supponiamo inoltre che esista una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L\,|u_1-u_2| \qquad \begin{array}{l} \forall u_1 \in [u_0-r_0, u_0+r_0] \\ \forall u_2 \in \quad " \\ \forall t \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] \end{array}$$

(Lipschitzianità nella variabile u uniforme rispetto a t)

Sia $\delta > 0$ tale che (basta prendere δ piccolo)

$$\delta \leq \delta_0 \qquad \delta M \leq r_0 \qquad \delta L < 1$$

Allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione

$$u : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$$
$$[u_0-r_0, u_0+r_0]$$

<u>Oss.</u> La soluzione esiste ed è unica su un intervallo di solito più piccolo di $[t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]$.

$\boxed{\text{Primo passo : FORMULAZIONE INTEGRALE}}$

Una funzione $u \in C^1([t_0-\delta, t_0+\delta])$ risolve il problema di Cauchy se e soltanto se
$u \in C^0([t_0-\delta, t_0+\delta])$ risolve il problema integrale

$$\boxed{u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]}$$

<u>Oss.</u> Il problema iniziale ha due richieste e vuole $u \in C^1$
Il secondo pbm ha una sola richiesta e vuole $u \in C^0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo $u \in C^0$ e soluzione del secondo pbm.
Allora banalmente $u(t_0) = u_0$. Inoltre $u \in C^1$ perché è u_0 + primitiva di funzione continua e infine

$$u'(t) = f(t, u(t)) \qquad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$$

per il teo. fond. del calcolo integrale.

Supponiamo ora che $u \in C^1$ sia una sol. del primo pbm, cioè $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni ... e $u(t_0) = u_0$.
Allora ovviamente $u \in C^0$ e integrando tra t_0 e t si ottiene

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds}_{u(t) - \underbrace{u(t_0)}_{u_0}} = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

Quindi $u(t)$ risolve il secondo problema.

Conseguenza: se dimostro che l'equazione integrale ha una soluzione unica, allora ho finito.

$\boxed{\text{Secondo passo: formulazione come p.to fisso}}$

Considero lo spazio

$$X := \{ u \in C^0([t_0-\delta, t_0+\delta]) : u_0 - r_0 \leq u(t) \leq u_0 + r_0 \ \forall t \in \ldots \}$$

Per ogni elemento $u \in X$ definisco

$$[Fu](t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \qquad \forall t \in \ldots$$

In altre parole, Fu è una nuova funzione definita sullo stesso intervallo.
La formulazione integrale è equivalente a cercare una funzione u tale che $u = Fu$, cioè un p.to fisso della funzione F.
Nota bene: F manda funzioni in funzioni e un eventuale p.to fisso sarebbe una sol. del pbm. integrale.

Quindi ora spero che
- X sia uno spazio metrico completo rispetto alla solita distanza (già dimostrato all'ora precedente: basta osservare che la condizione $u(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ si mantiene quando passo al limite)
- $F: X \to X$ (è ovvio che Fu è continua, ma non che sta nell'intervallo $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$)
- F è una contrazione (non è ovvio)

$\boxed{\text{Terzo passo: } Fu \in X, \text{ cioè } Fu(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]}$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$|Fu(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \right|$$

qui serve $t \geq t_0$, altrimenti devo invertire gli estremi

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))|\, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} M\, ds$$

$$= M(t - t_0) \leq \boxed{M\delta \leq r_0}$$

ipotesi per non scappare dall'intervallo

Invertendo gli estremi funziona anche per $t \leq t_0$

$\boxed{\text{Quarto passo: } F \text{ è una contrazione}}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dimostrare che esiste una costante $\ell < 1$ tale che

$$d(Fu_1, Fu_2) \leq \ell\, d(u_1, u_2) \qquad \forall u_1 \in X, \forall u_2 \in X$$

distanza fra funzioni

$$\left| [Fu_1](t) - [Fu_2](t) \right| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, u_2(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \{ f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)) \}\, ds \right|$$

solito $t \geq t_0$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))|\, ds$$

ipotesi su f

$$\leq \int_{t_0}^{t} L\, |u_1(s) - u_2(s)|\, ds$$

per ogni s è $\leq$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L\, d(u_1, u_2)\, ds$$

$$= d(u_1, u_2)\, L\, |t - t_0|$$

$$\leq d(u_1, u_2)\, \underbrace{L\delta}_{\ell < 1 \text{ per ipotesi}}$$

Abbiamo così dim. che

$$|[Fu_1](t) - [Fu_2](t)| \leq \ell \, d(u_1,u_2)$$

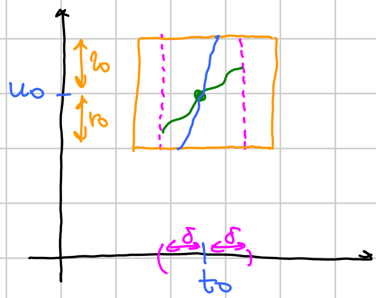
per ogni $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Facendo il sup al variare di t ottengo

$$d(Fu_1, Fu_2) \leq \ell \, d(u_1,u_2).$$

— o — o —

Poiché $F : X \to X$ è una contrazione, avrà un p.to fisso, che quindi è sol. del pbm. integrale, quindi anche del pbm. diff.

Ho dimostrato che la soluzione è unica? NI!
Ho dimostrato che è unica in X, cioè tra quelle che rimangono in $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ per ogni $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$.
Potrebbe esserci una soluzione che "scappa prima" dall'intervallo $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$.



Se così fosse, c'è un δ_1 comune in cui entrambe le soluzioni sono definite e non scappano. Ma allora nello spazio X corrispondente a questo δ comune avrei 2 p.ti fissi, ma anche lì ho la contrazione.

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 13

Titolo nota 28/02/2015

$\boxed{\text{TEOREMA DI SOLA ESISTENZA}}$ (per il problema di Cauchy)

Consideriamo il problema $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

con le stesse notazioni di prima.

Supponiamo $f(t,u)$ continua nel rettangolo e definiamo M come prima.

Non supponiamo la Lip. di $f(t,u)$ rispetto ad u.

Sia $\delta > 0$ tale che $\delta \leq \delta_0$ e $\delta M \leq r_0$.

Allora il problema di Cauchy ammette almeno una soluzione definita in $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

— o — o —

Per semplicità facciamo la dim. nel caso $u' = f(u)$ (caso autonomo)

$\boxed{\text{INGREDIENTE 1 : teo. di Ascoli – Arzelà}}$

Teorema misterioso (AA edulcorato)

Consideriamo una successione di funzioni $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) esiste un intervallo $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ tale che $u_n(t) \in [c,d]$ per ogni $t \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

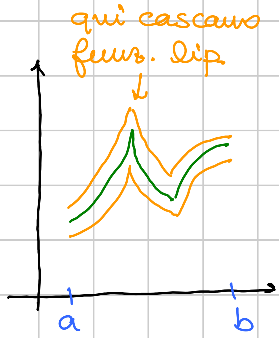
(ii) le u_n sono tutte Lip. con una costante che va bene per tutte, cioè esiste $L > 0$ t.c.

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2| \qquad \begin{matrix} \forall t_1 \in [a,b] \\ \forall t_2 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Allora esiste una sottosucc. che converge uniformemente, cioè esiste $n_k \to +\infty$ ed esiste $u_\infty : [a,b] \to [c,d]$ tale che $u_{n_k} \to u_\infty$ unif. in $[a,b]$.

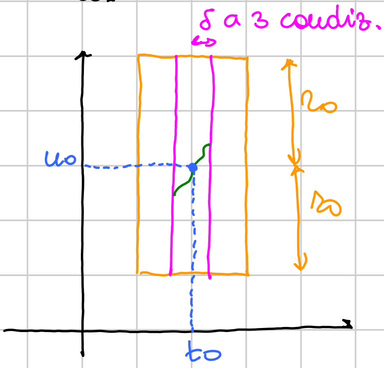
$\boxed{\text{INGREDIENTE 2}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una successione di funzioni $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ che sono Lip. (con costanti anche diverse tra di loro) tale che

$$f_n \to f \quad \text{uniform. in } [a,b]$$



$\boxed{\text{INGREDIENTE 3}}$ (Migliora il teo. della lezione precedente)

Prendiamo il pbm. di Cauchy come nel teorema di esistenza e unicità.
Allora esiste una soluzione (unica) definita in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ purché δ soddisfi le prime due richieste, cioè $\delta \le \delta_0$, $\delta M \le r_0$.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Grazie al teo. prec. otteniamo una sol. in $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ dove δ verifica le 3 richieste $\delta \le \delta_0$, $\delta M \le r_0$ e $\delta L < 1$ (diciamo $\delta L = \frac{1}{2}$)
Alla fine dell'intervallino, cioè in $t_0 + \delta$ ci sono due casi

1. $u(t_0+\delta) \in (u_0 - r, u_0 + r)$ (aperto) ed in tal caso posso riapplicare il teo. con la condizione iniziale data in $t_0 + \delta$ e prolungare ulteriormente la soluzione.
Fino a quando posso prolungare? Fino a quando non arrivo sul bordo sopra o sotto.

2. $u(t_0+\delta) = u_0 \pm r_0$, cioè sono arrivato sul bordo sopra o sotto. Nel rettangolo

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

quindi

$$|u'(t)| \le M$$

quindi

$$r_0 = |u(t_0+\delta) - u(t_0)| \le M\delta$$

Se sono arrivato sopra/sotto, allora $M\delta = r_0$ (era $\le$...)

Strategia per il teorema di esistenza

Ho f solo continua. La approssimo con funzioni f_n lipschitz.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risolvo il problema

$$\begin{cases} u_n' = f_n(u_n) \\ u_n(t_0) = u_0 \end{cases} \to \text{problemi approssimanti}$$

Spero di dimostrare che $u_n \to u_\infty$ e usando che $f_n \to f$ spero di poter dedurre che $u_\infty' = f(u_\infty)$.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Grazie all'ingrediente 2 posso trovare una successione di funzioni $f_n \to f$ uniformemente in $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$.
Posso fare questo in maniera tale che

$$|f_n(u)| \le M \qquad \forall u \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema approssimante ha una soluzione (pure unica) definita in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ dove δ verifica 2 disuguaglianze: $\delta \le \delta_0$, $\delta M \le r_0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Segue dall'ingrediente 3 e dal fatto che M è lo stesso per tutte le $f_n(u)$.

$\boxed{\text{Passo 3}}$ La successione $u_n(t)$ verifica le ipotesi di A.A. edulcorato. Infatti

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $u_n(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ perchè i probl. approx. sono definiti in quell'intervallo

(ii) le $u_n(t)$ sono tutte lipschitz perchè

$$|u_n'(t)| = |f_n(u_n(t))| \le M \qquad \text{per ogni } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

e un controllo sulla derivata prima implica un controllo sulla costante di Lip.
Quindi, a meno di sottosuccessioni (che non sto ad indicare) avremo che

$$u_n(t) \longrightarrow u_\infty(t) \quad \text{uniformemente.}$$

$\boxed{\text{Passo 4}}$ La $u_\infty(t)$ risolve il problema limite

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sappiamo che

$$\begin{array}{ccc} u_n'(t) & = f_n(u_n(t)) & , \; u_n \to u_\infty, \; f_n \to f \\ \downarrow & \downarrow & \\ u_\infty'(t) & = f(u_\infty(t)) & \end{array}$$

sapendo solo che $u_n \to u_\infty$, non possiamo dedurre che $u_n' \to u_\infty'$

Per non dover scrivere derivate, uso la formulazione integrale che sappiamo già essere equivalente

$$\begin{array}{ccccc} u_n(t) & = & u_0 & + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_n(u_n(s))\,ds & \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ u_\infty(t) & = & u_0 & + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u_\infty(s))\,ds & \end{array}$$

Resta da giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale, il che è ok se sapessi che

$$f_n(u_n(t)) \longrightarrow f(u_\infty(t)) \quad \text{uniformemente}$$

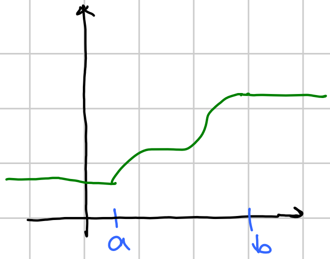
$$|f(u_\infty(t)) - f_n(u_n(t))| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(u_\infty(t)) - f(u_n(t))|}_{\substack{\text{questa è piccola per}\\ n \text{ grande in quanto}\\ f \text{ è unif. continua e}\\ u_\infty(t) \text{ e } u_n(t) \text{ sono}\\ \text{vicini per } n \text{ grande.}}} + \underbrace{|f(u_n(t)) - f_n(u_n(t))|}_{\substack{\leq d(f, f_n), \text{ quindi è}\\ \text{piccolo per } n \text{ grande.}}}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. ingrediente 2}}$ Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, come la approx. con funzioni Lip (anzi pure C^1) ?

Intanto estendo f a tutto $\mathbb{R}$ come viene in mente di fare ...



Poi pongo

$$f_n(x) = \boxed{n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy}$$

è come dividere per $\frac{1}{n}$

media di $f(x)$ tra x e $x+\frac{1}{n}$

È facile verificare che $f_n \in C^1$ e $f_n'(x) = n\left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\right]$ quindi $f_n(x)$ è Lip.

Inoltre
$$|f(x)-f_n(x)| = \left| f(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy \right|$$
$$= \left| n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x)\,dy - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(y)\,dy \right|$$
$$\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(x)-f(y)|\,dy$$

Quando $\frac{1}{n}$ è piccolo $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, quindi
$$\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon\,dy = \varepsilon$$

Questo dice che $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente.

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 14

Titolo nota 07/03/2015

Programma di lungo termine: METODO DIRETTO nel calcolo delle variazioni ⇝ dimostrare che $\min\{F(x) : x \in X\}$ esiste

Approccio debole:

(1) Si considera un insieme $\hat{X} \supseteq X$ e si estende F all'insieme $\hat{X}$, cioè si prende una funzione

$$\hat{F} : \hat{X} \to \mathbb{R}$$

che estende la F, nel senso che $\hat{F}(x) = F(x)$ se $x \in X$

(2) Si dimostra che

$$\min\{\hat{F}(x) : x \in \hat{X}\}$$

esiste

(3) Si spera che almeno un p.to di min di $\hat{F}$ stia in X.

Se tutto ciò funziona, allora esiste il minimo in X.

Dim. Sia x_0 un p.to di minimo in $\hat{X}$ che sta anche in X. Questo esiste grazie al (3). Allora

$$\hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) \qquad \forall x \in \hat{X}$$

e quindi in particolare

$$F(x_0) = \hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) = F(x) \qquad \forall x \in X$$

Quindi x_0 è p.to di min. in X.

Oss. Funziona tutto anche se in (1) suppongo solo $\hat{F}(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$ purché al p.to (3) aggiunga che $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

— o — o —

<u>Esempio</u> (banale) $\quad \min \{ \underbrace{x^2-3x+5}_{F(x)} : x \in \underset{X}{\mathbb{Q}} \}$

Estendo su $\mathbb{R} = \hat{X}$ e $\hat{F}(x) = x^2-3x+5$ vista su $\mathbb{R}$. Su $\mathbb{R}$ con il calcolo diff. dimostro che il p.to di min. è $2x-3=0$ quindi $x_0 = \frac{3}{2} \in \hat{X}$ ma anche $x_0 \in X$, quindi è p.to di min. anche su X.

— o — o —

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2 dx + \int_0^1 \arctan(u)\, dx}_{F(u)} : \underbrace{\boxed{\begin{array}{l} u \in C^1([0,1]) \\ u(0) = 2015 \end{array}}}_{X} \right\}$$

Obiettivo: capire chi è un buon $\hat{X}$.

— o — o —

SPAZI DI HILBERT

Sia V uno spazio vettoriale. Un <u>prodotto scalare</u> <u>definito positivo</u> su V è una funzione $V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ per ogni $u \in V$, per ogni $v \in V$

(ii) $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$ per ogni...

(ii') $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$ " "

(iii) $\langle u, u \rangle > 0$ per ogni $u \in V$ con $u \neq 0$.

Da un tale prodotto possiamo definire una <u>norma</u>

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad = \text{"lunghezza del vettore"}$$

Dalla norma segue la <u>distanza</u> tra 2 vettori

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$$

$$\boxed{\text{Prodotto scalare} \rightsquigarrow \text{Norma} \rightsquigarrow \text{distanza}}$$

Def. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale V su cui è definito un prodotto scalare che lo rende uno spazio metrico completo. Formalmente uno sp. di Hilbert è una coppia (sp. vett., prod. scalare)

Idea: uno sp. di Hilbert è la cosa più simile ad $\mathbb{R}^n$ che ci sia

FATTO 1 Negli spazi di Hilbert H ha senso parlare di serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \qquad v_n \in H$$

La si può definire come limite delle somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \text{se } S_n \to S_\infty,$$ dico che S_∞ è la somma della serie.

so fare le somme perché sono in uno spazio vett.

so fare i limiti perché sono in un metrico $\operatorname{dist}(S_n, S_\infty) \to 0$

Proposizione In uno spazio di Hilbert vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|}_{\text{serie di numeri } \geq 0} < +\infty \implies \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n}_{\text{serie di vettori (elementi di } H)} \text{ converge}$$

Dim. Costruisco le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \hat{S}_n := \sum_{k=0}^{n} \|v_k\|$$

So per ipotesi che $\hat{S}_n$ ha limite (finito). Voglio dim. che S_n ha limite. Basta dimostrare che S_n è di Cauchy.

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\text{dist}(S_n, S_m) \leq \varepsilon \qquad \forall m \geq n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(S_n, S_m) &= \| S_m - S_n \| \\ &= \| v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_m \| \\ &\leq \| v_{n+1} \| + \| v_{n+2} \| + \ldots + \| v_m \| \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

se $m \geq n \geq n_0$ — perchè la successione $\hat{S}_n$ è convergente, quindi di Cauchy

Conclusione: lo stesso n_0 che va bene per $\hat{S}_n$ va bene per S_n.

— o — o —

<u>Oss.</u> Perchè è vero che $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$?

$$\|a+b\| = \sqrt{\langle a+b, a+b \rangle} = \sqrt{\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle} \overset{?}{\leq} \|a\| + \|b\|$$

Facendo i quadrati si ottiene

$$\cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\langle a,b\rangle \overset{?}{\leq} \cancel{\|a\|^2} + \cancel{\|b\|^2} + 2\|a\| \cdot \|b\|$$

$\langle a,b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$ e questa è Cauchy – Schwarz.

$\boxed{\text{Cauchy – Schwarz}}$ $\quad |\langle a,b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a \in H, \forall b \in H$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\begin{aligned} p(t) &= \|a + tb\|^2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ &= \|a\|^2 + t^2 \|b\|^2 + 2t\langle a,b \rangle \end{aligned}$$

Ora è un polinomio di 2° grado che è ≥ 0 sempre, quindi $\Delta \leq 0$, e

$$\Delta = \langle a,b\rangle^2 - \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$$, da cui la tesi

BASI NEGLI SPAZI DI HILBERT

Base algebrica: È un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq H$ tale che ogni $v \in H$ si può scrivere in modo unico come comb. lin. FINITA di elementi di $\mathcal{B}$.

Detto altrimenti: $\forall v \in H$, $\exists\, n \geq 1$ (dipendente da v)
$\exists\, c_1, \dots, c_n$ numeri
$\exists\, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ tali che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Base Hilbertiana: È un sottoinsieme $\{e_n\} \subseteq H$ tale che

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{ortonormale}$$

e tale che ogni vettore $v \in H$ si scrive in modo unico come serie

$$\boxed{v = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{numeri}} e_n}$$

A questo p.to i c_n sono le componenti di v rispetto alla base.

SSSUP 2015 — LEZIONE 15

Titolo nota 07/03/2015

Proprietà delle basi Hilbertiane

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ una base Hilbertiana.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Sia $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ una successione di numeri reali. Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n}_{\text{serie di vettori}} \text{ converge} \iff \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}_{\text{serie di numeri}} < +\infty$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \qquad \hat{S}_n := \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}^2(S_m, S_n) &= \| c_{n+1} e_{n+1} + \ldots + c_m e_m \|^2 \\
&= c_{n+1}^2 + \ldots + c_m^2 \quad \text{(Ho usato che gli } e_n \text{ sono ortonormali)} \\
&= \hat{S}_m - \hat{S}_n
\end{aligned}$$

Quindi la serie di vettori converge $\iff$ S_n è di Cauchy
$\iff$ $\hat{S}_n$ è di Cauchy
$\iff$ la serie di numeri è di Cauchy

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Sia $v \in H$ e siano $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ le sue componenti rispetto alla base. Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi $v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$. Dette S_n le solite somme parziali, si ha che $S_n \to v$ e

$$\|S_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=0}^{n} c_k e_k\Big\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma finita +} \\ \text{base ortonormale}}}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

Quando $n \to +\infty$ il RHS $\to$ alla serie dei c_n^2, e il LHS tende a $\|v\|^2$.

Sotto-fatto generale: se $v_n \to v_\infty$, allora $\|v_n\| \to \|v_\infty\|$

Infatti

$$\begin{aligned}\|v_n\|^2 &= \|(v_n - v_\infty) + v_\infty\|^2 \\ &= \underbrace{\|v_n - v_\infty\|^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{dist}^2(v_n, v_\infty)}} + \underbrace{\|v_\infty\|^2}_{\substack{\downarrow \\ \|v_\infty\|^2}} + 2\underbrace{\langle v_n - v_\infty, v_\infty\rangle}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché}}}\end{aligned}$$

$$|\langle v_n - v_\infty, v_\infty\rangle| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C.S.}}}{\leq} \underbrace{\|v_n - v_\infty\|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \|v_\infty\|$$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $v = \sum a_n e_n$ e $u = \sum b_n e_n$, allora

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Si dimostra prima che

$$v_n \to v_\infty, \quad u_n \to u_\infty \quad \Longrightarrow \quad \langle u_n, v_n\rangle \longrightarrow \langle u_\infty, v_\infty\rangle$$

e poi si applica con v_n = somme parziali della 1ª serie

u_n = " " " 2ª serie

— o — o —

$\boxed{\text{BRUTTA NOTIZIA}}$ Negli spazi di Hilbert, così come negli spazi metrici, posso definire le palle

$$B_R(u_0) = \{ u \in H : \text{dist}(u_0, u) \le R \}$$

raggio   centro   chiuse

e le sfere

$$S_R(u_0) = \{ u \in H : \text{dist}(u_0, u) = r \}$$

Se H ha dimensione infinita, allora $B_R(u_0)$ e $S_R(u_0)$ non sono compatte (per successioni).

<u>Esempio</u> Prendiamo una base Hilbertiana $\{e_n\}$. Questa sta in $B_1(0)$ e anche in $S_1(0)$.
Tuttavia NON può avere una s.succ. convergente, perchè $\text{dist}(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ per ogni $i \neq j$, quindi nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy

Per superare questo problema, si introduce la convergenza debole.

<u>Def.</u> Si dice che v_n <u>converge debolmente</u> a v_∞, e si scrive

$$\boxed{v_n \rightharpoonup v_\infty}$$

se $\langle v_n, w \rangle \to \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

<u>Oss.</u> Può succedere che questo accada senza che $v_n \to v_\infty$

<u>Esempio</u> Se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightharpoonup 0$, cioè $\langle e_n, w \rangle \to 0 = \langle 0, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Scrivo w come serie $w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$. Allora

$\langle e_n, w \rangle = c_n \to 0$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|w\|^2$

e se una serie converge, allora il termine generale $\to 0$.

— o — o —

<u>Proprietà 1</u> Se $v_n \to v_\infty$ (forte), allora $v_n \rightharpoonup v_\infty$ (debole)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dim. che $\langle v_n, w \rangle \to \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$

$$\begin{aligned}\langle v_n, w \rangle &= \langle (v_n - v_\infty) + v_\infty, w \rangle \\ &= \underbrace{\langle v_n - v_\infty, w \rangle}_{\to\, 0 \text{ per C.S.}} + \langle v_\infty, w \rangle\end{aligned}$$

<u>Oss.</u> Non vale il viceversa cioè può succedere che $v_n \rightharpoonup v_\infty$ debole, ma non forte (solito esempio di e_n)

<u>Proprietà 2</u> Se $u_n \rightharpoonup u_\infty$ e $v_n \rightharpoonup v_\infty$, allora
$u_n + v_n \rightharpoonup u_\infty + v_\infty$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\langle u_n + v_n, w \rangle = \langle u_n, w \rangle + \langle v_n, w \rangle$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\langle u_\infty, w \rangle + \langle v_\infty, w \rangle$$

$$= \langle u_\infty + v_\infty, w \rangle$$

<u>Proprietà 3</u> Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$ debole e v_n è limitata (cioè esiste M t.c. $\|v_n\| \le M$ per ogni n) e $u_n \to u_\infty$ forte, allora

$$\langle u_n, v_n \rangle \to \langle u_\infty, v_\infty \rangle$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\langle u_n, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle =$

$= \langle u_n, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_n \rangle + \langle u_\infty, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle$

$= \underbrace{\langle u_n - u_\infty, v_n \rangle}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\langle u_\infty, v_n - v_\infty \rangle}$

$= \langle u_\infty, v_n \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle$
$\downarrow$
$\langle u_\infty, v_\infty \rangle - \langle u_\infty, v_\infty \rangle = 0$

$|\langle u_n - u_\infty, v_n \rangle| \leq \underbrace{\|u_n - u_\infty\|}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\|v_n\|}_{\leq M}$

per ipotesi

— o — o —

Achtung! Se $u_n \longrightarrow u_\infty$ e $v_n \longrightarrow v_\infty$, allora non è detto che $\langle u_n, v_n \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$

Esempio $u_n = e_n$ $\qquad u_n \longrightarrow 0 = u_\infty$
$v_n = e_n$ $\qquad v_n \longrightarrow 0 = v_\infty$

$\langle u_n, v_n \rangle = 1 \qquad \langle u_\infty, v_\infty \rangle = 0$

In particolare non è vero che

$$\boxed{u_n \longrightarrow u_\infty \implies \|u_n\| \longrightarrow \|u_\infty\|}$$

FALSO

— o — o —

La compattezza delle palle

→ in $\mathbb{R}$ si dimostra con Bolzano – Weierstrass

→ in $\mathbb{R}^n$ si fa componente per componente (in $\mathbb{R}^2$ data una succ. (x_n, y_n) prima trovo una s.succ. t.c. $x_{n_k} \to x_\infty$, e di questa trovo una sotto-sotto-succ. $y_{n_{k_i}} \to y_\infty$)

$\boxed{\text{Oss.}}$ In $\mathbb{R}^n$ la convergenza dei vettori è equivalente alla convergenza delle componenti

Se $v_n \in \mathbb{R}^{15}$, allora $v_n \longrightarrow v_\infty$ come vettori di $\mathbb{R}^{15}$ se e solo se convergono le componenti, cioè

$$\langle v_n, e_k \rangle \longrightarrow \langle v_\infty, e_k \rangle \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, 15$$

Negli Hilbert le 2 cose non sono più equivalenti

$v_n \longrightarrow v_\infty$ forte vuol dire $\text{dist}(v_n, v_\infty) \to 0$

$v_n \longrightarrow v_\infty$ debole vuol dire sostanzialmente "convergenza delle componenti"

Cosa sbagliatissima:

$$\|v_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle v_n, e_k \rangle^2 = \langle v_n, e_1 \rangle^2 + \langle v_n, e_2 \rangle^2 + \dots$$

$\downarrow \Leftarrow$ basta la debole

$$\langle v_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle v_\infty, e_2 \rangle^2 + \dots$$

$$= \|v_\infty\|^2$$

NON SI POSSONO SCAMBIARE LIMITI E SERIE.

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 16

Titolo nota 21/03/2015

<u>Spazio di Hilbert</u> : spazio vettoriale, con prodotto scalare def positivo ⇝ norma ⇝ distanza che lo rende uno sp. metrico completo.

<u>Base Hilbertiana</u> : insieme di vettori $\{e_n\}$ ortonormali (insieme finito o numerabile) tale che ogni altro $v \in H$ si scrive nella forma

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle v, e_n \rangle}_{\text{numeri}} \; \underset{\text{vettori}}{e_n}$$

le componenti di v risp. alla base

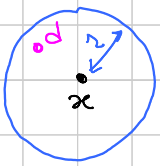
Prop. $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n}_{\text{serie di vettori}}$ converge in H $\iff$ $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2}_{\text{serie di numeri}}$ converge

Prop. $$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2$$

Quando esiste una base Hilbertiana?

<u>Def.</u> Sia X uno spazio metrico, e sia $D \subseteq X$.
Si dice che D è <u>denso</u> (in X) se

$$\boxed{\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \exists d \in D \quad \text{t.c.} \quad \text{dist}(x,d) < r}$$



<u>Esempi classici</u>

1. Ogni X è denso in se stesso
2. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$

Def. Uno spazio metrico X si dice separabile se esiste $D \subseteq X$ denso e numerabile.

Esempio $\mathbb{R}$ è separabile perchè contiene $\mathbb{Q}$, denso e numerabile.

TEOREMA MISTERIOSO Uno spazio di Hilbert H ammette una base Hilbertiana se e solo se H è separabile.

Idea della dimostrazione

Se esiste la base, allora è separabile: basta usare come denso i vettori che hanno solo un numero finito di componenti $\neq 0$ e le hanno tutte razionali.

Viceversa, supponiamo che esista un denso numerabile $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$. Allora costruisco e_n con questo algoritmo

(1) Prima ripulitura: → prendo d_1
→ se $d_2 \in \mathrm{Span}\{d_1\}$ lo butto, altrimenti lo prendo
⋮
→ se $d_{k+1} \in \mathrm{Span}\{d_1, \dots, d_k\}$ lo butto, altrimenti lo tengo

(2) Faccio Gram-Schmidt su quelli rimasti ottenendo una base ortogonale

(3) Ortonormalizzo rendendoli di lunghezza 1.

— o — o —

Def. Sia $\{x_n\} \subseteq H$ una successione di vettori. Si dice che

- $x_n \to x_\infty$ FORTE se $\|x_\infty - x_n\| \to 0$
- $x_n \to x_\infty$ DEBOLE se $\forall w \in H$ si ha $\langle w, x_n\rangle \to \langle w, x_\infty\rangle$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $\{x_n\} \subseteq H$ una successione <u>limitata</u> (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|x_n\| \leq M$). Sia $x_\infty \in H$.
Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $x_n \rightharpoonup x_\infty$

(ii) $\langle x_n, e_i \rangle \longrightarrow \langle x_\infty, e_i \rangle$ per ogni $i \in \mathbb{N}$
(le componenti di x_n risp. alla base convergono alle componenti di x_∞).

<u>Esempio</u> Se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightharpoonup 0$ ma non è vero che $e_n \to 0$ (non è di Cauchy).

$\boxed{\text{Dim.}}$ (i) $\Rightarrow$ (ii) è la definizione applicata con $w = e_i$

(ii) $\Rightarrow$ (i) non è banale e NON si fa così:

$$\begin{aligned}\langle x_n, w \rangle &= \langle x_n, e_1 \rangle \langle w, e_1 \rangle + \langle x_n, e_2 \rangle \langle w, e_2 \rangle + \dots \\ &\ \ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ &\ \langle x_\infty, e_1 \rangle \langle w, e_1 \rangle + \langle x_\infty, e_2 \rangle \langle w, e_2 \rangle + \dots, \\ &= \langle x_\infty, w \rangle\end{aligned}$$

(NON SI SCAMBIANO LIMITE E SERIE)

Serve una tecnica di approssimazione: dato $w \in H$ e dato $\varepsilon > 0$, esiste un vettore $w_\varepsilon \in H$ tale che

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

w_ε ha solo un numero finito di componenti (basta scrivere w come serie e prendere una somma parziale opportuna). Supponiamo che w_ε abbia solo componenti risp. a $e_1, \dots, e_m$.

$$\langle x_n, w \rangle = \langle x_n, w_\varepsilon \rangle + \underbrace{\langle x_n, w - w_\varepsilon \rangle}$$

$\downarrow$

$\langle x_\infty, w_\varepsilon \rangle$

(Sono un numero finito di componenti)

$|\langle x_n, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \leq M \cdot \varepsilon$

C.S.

$$\langle x_n, w_\varepsilon \rangle = \sum_{k=0}^{m} \langle x_n, e_k \rangle \langle w_\varepsilon, e_k \rangle \xrightarrow{\text{somma finita}} \text{stessa cosa con } x_\infty = \langle x_\infty, w_\varepsilon \rangle$$

Quindi riassumendo: $\langle x_n, w \rangle$ è vicino a $\langle x_\infty, w_\varepsilon \rangle$ che è vicino a $\langle x_\infty, w \rangle$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Il teorema vero non richiederebbe la limitatezza nel senso che sono equivalenti

(i) $x_n \rightharpoonup x_\infty$

(ii) x_n è limitata e $\langle x_n, e_i \rangle \to \langle x_\infty, e_i \rangle$

(Rispetto a prima c'è in più che $x_n \rightharpoonup x_\infty \Rightarrow x_n$ è limitata)

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO (Compattezza debole delle palle)

Sia H un Hilbert separabile.

Sia $\{v_n\} \subseteq H$ una successione limitata.

Allora esiste una sottosuccessione convergente DEBOLMENTE, cioè esiste una succ. di interi k_n strett. crescente ed esiste $v_\infty \in H$ t.c.

$$v_{k_n} \rightharpoonup v_\infty$$

Idea
- → Prendo una s.succ. in cui converge la prima comp.
- → Prendo una sotto-sotto-succ. in cui converge la 2ª...
- → concludo con un "procedimento diagonale" misterioso.

<u>Oss.</u> La norma di un vettore non passa al limite per convergenza debole, cioè se $x_n \rightharpoonup x_\infty$ non è detto che $\|x_n\| \to \|x_\infty\|$ (sdito esempio)

MA ...

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Semicontinuità inferiore della norma)

Se $x_n \rightharpoonup x_\infty$, allora $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| \geq \|x_\infty\|$

(al limite debole la norma può solo crollare)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\|x_n\|^2 = \|x_n - x_\infty + x_\infty\|^2$

$$= \underbrace{\|x_n - x_\infty\|^2}_{\geq 0} + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty\rangle + \|x_\infty\|^2$$

$$\geq 2\underbrace{\langle x_n - x_\infty, x_\infty\rangle}_{\downarrow\, 0} + \|x_\infty\|^2$$

Facendo liminf a dx e sx ottengo la tesi

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 \geq \|x_\infty\|^2$$

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 17

Titolo nota 21/03/2015

Spazio L^2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme (pensiamo ai casi $A = \mathbb{R}$, oppure $A = (a,b)$, oppure $A = (a,+\infty)$, ma tutto funziona anche per $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

Def. Si definisce $L^2(A)$ come l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_A f^2(x)\,dx < +\infty$$

Analogamente posso definire $L^p(A)$ imponendo $\int_A |f(x)|^p dx < +\infty$

Teorema misterioso

(1) $L^2(A)$ è uno spazio vettoriale

(2) Per ogni f e g in $L^2(A)$ posso definire

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \cdot g(x)\,dx$$

e questo è un prodotto scalare definito positivo

(3) $L^2(A)$ è un Hilbert separabile rispetto a questo prodotto.

Oss. La norma associata sarà: $\|f\|^2 = \int_A |f(x)|^2 dx$

Dim. (1) Il prodotto per una costante è immediato.
Per la somma uso che

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

Usandola con $f(x)$ e $g(x)$ ottengo

$$\left(f(x)+g(x)\right)^2 \leq 2f^2(x) + 2g^2(x)$$

Se a dx ho 2 cose integrabili, allora anche a sx è integrabile.

② $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (stesso motivo di prima) quindi

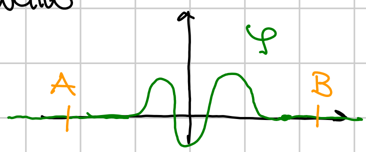
$$\int_A |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\int_A [f^2(x)+g^2(x)]\,dx$$

Quindi se f e $g \in L^2(A)$ l'integrale a sx converge.
Le proprietà del prodotto scalare sono ovvie

③ Completezza e separabilità sono la parte misteriosa.

— o — o —

Derivata debole Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$
Sia $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R})$, cioè C^1 e nulla al di fuori di un intervallo



Allora si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Dim. L'integrale su $\mathbb{R}$ è in realtà un integrale su un intervallo $[A,B]$ che contiene la zona in cui $\varphi \neq 0$.
A quel p.to segue da int. per parti osservando che φ è nulla al bordo.

— o — o —

<u>Def.</u> Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dico che $g \in L^2(\mathbb{R})$ è la derivata debole di f se

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx}$$

per ogni $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$.

Detto brutalmente: $g(x)$ "fa le veci" di $f'(x)$ nella formula di integrazione per parti.

<u>Piccola generalizzazione</u>: Se invece di $\mathbb{R}$ prendo (a,b), allora la relazione diventa

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in C^1((a,b)) \text{ nulla al bordo } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

<u>Esempio classico</u> $f(x) = |x|$ ha derivata debole in ogni intervallo (a,b) e la derivata è

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\int_{-4}^{4} |x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-4}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx + \int_0^4 x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\underbrace{\left[x\,\varphi(x)\right]_{-4}^{0}}_{=0} + \int_{-4}^{0} \varphi(x)\,dx$$

$$+ \underbrace{\left[x\,\varphi(x)\right]_0^4}_{=0} - \int_0^4 \varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{-4}^{0} g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

<u>Esercizio</u> Provare con $f(x) = |x|+1$ e vedere cosa succede al termine di bordo.

$\boxed{\text{Spazi di Sobolev}}$ → Approccio W
→ Approccio H

$\boxed{\text{Def. W}}$ Diciamo che $f \in W^{1,2}(A)$ se $f \in L^2(A)$ ed ammette una derivata debole $g \in L^2(A)$.

$W^{1,2}(A)$ — numero di derivate — esponente in L^2

$W^{k,p}(A)$ si definisce analogamente.

Esempio $f(x) = |x| \in W^{1,2}(A)$ per ogni intervallo A.

$\boxed{\text{Def. H}}$ Diciamo che $f \in H^{1,2}(A)$ se $f \in L^2(A)$ ed esiste una successione di funzioni $f_n \in C^1(A)$ t.c.

funzioni vere → $\boxed{f_n(x)} \longrightarrow f(x)$ in L^2 $\quad \int_A |f_n - f|^2 \to 0$

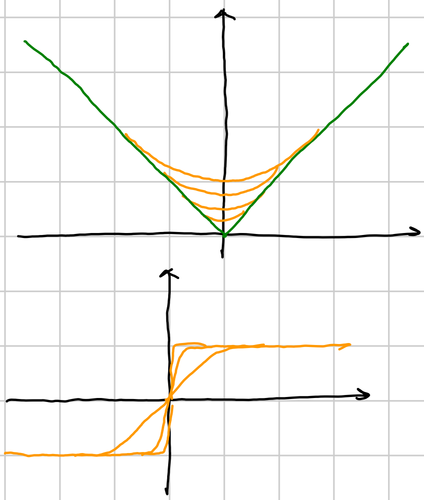
derivate vere → $\boxed{f_n'(x)} \longrightarrow g(x)$ in L^2 $\quad \int_A |f_n' - g|^2 \to 0$

↑qualunque

Brutalmente: $f \in H^{1,2}(A)$ se è approssimabile con funzioni C^1 in maniera tale che
$$f_n \longrightarrow f$$
e le derivabile f_n' tendono in L^2 a qualcosa

Esempio $f(x) = |x|$

Posso approssimarla "smussando l'angolo". È chiaro che $f_n \to f$ e le derivate f_n' tendono alla funzione g che vale $-1, 1$.



TEOREMA MISTERIOSO $\quad H = W$

(In particolare la g della definizione H è la stessa g della definizione W, cioè la derivata debole di f)

<u>Oss.</u> L'unicità della derivata debole segue dal lemma DBR in versione L^2.

Dim. che $H \subseteq W$ $\quad$ Voglio sostanzialmente dimostrare che la g della def. H è la derivata debole nel senso dell'integrazione per parti.

Ipotesi: $f_n \to f \qquad f_n' \to g \qquad f_n \in C^1$

Tesi: g è la derivata debole

$$\int_A f_n(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_A f_n'(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{int. per parti classica}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_A f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_A g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Questo è equivalente a dire che g è la derivata debole di f.

<u>Osservazione fondamentale</u> Non ho usato le convergenze forti, ma solo quelle deboli !!!

SSSUP 2015 — LEZIONE 18

Titolo nota 21/03/2015

<u>Esempio motivazionale</u>

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + \arctan^2 u)\,dx : \begin{array}{l} u(0)=0,\ u(1)=7 \\ u \in C^1((0,1)) \end{array} \right\}$$

Voglio dimostrare che il minimo esiste. Metodo indiretto porta ad un' eq. di Eulero che non risolve esplicitamente, e poi mancherebbe la convessità per concludere.

Idea: estendere il problema in un ambiente più grande di C^1, ad esempio $W^{1,2}((0,1)) = H^{1,2}((0,1)) = H^1((0,1))$

$H = W$ — il "2" è sottinteso

L'estensione è ovvia: se $u \in H^1$, pongo semplicemente

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \arctan^2 u)\,dx$$

derivata debole

Ovviamente esiste $\inf\{F(u) : u \in H^1\} = I$

Inoltre esiste una successione $\{u_n\} \subseteq H^1$ tale che

$$F(u_n) \longrightarrow I \qquad \text{(successione minimizzante)}$$

Speranze:
1. u_n abbia, a meno di sottosuccessioni, un limite $u_\infty \in H$
2. $F(u_\infty) = I$ (e questo dimostrerebbe che esiste il minimo)
3. $u_\infty \in C^1$ (e questo dimostrerebbe che esiste il minimo anche in C^1)

Cosa è facile dedurre?

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Se u_n è una successione minimizzante, allora

$$\int_0^1 |\dot{u}_n(x)|^2\,dx \quad \text{è limitato}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se u_n è succ. minimizzante, allora $F(u_n) \leq M$ per un'opportuna M, quindi

$$\int_0^1 |\dot{u}_n|^2\,dx \leq F(u_n) \leq M$$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Grazie al fatto 1, la succ. $\{\dot{u}_n\}$ è limitata in L^2, quindi ammette una s.succ. convergente in L^2, cioè

$$\dot{u}_{n_k} \longrightarrow v_\infty$$

Supponiamo ora di sapere che anche $u_{n_k} \longrightarrow u_\infty$, anzi supponiamo di sapere che

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{uniformemente.}$$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Data per buona la supposizione, allora v_∞ è la derivata debole di u_∞

Dim.

$$\int_0^1 u_{n_k}\varphi' = -\int_0^1 \dot{u}_{n_k}\varphi \qquad \text{(def. di deriv. debole)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_0^1 u_\infty\varphi' = -\int_0^1 v_\infty\varphi \qquad \text{(bastano 2 conv. deboli)}$$

Cosa accade se passo al limite nei 2 termini del funzionale?

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ $\displaystyle\int_0^1 \arctan^2(u_{n_k}(x))\,dx \longrightarrow \int_0^1 \arctan^2(u_\infty(x))\,dx$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Segue dalla convergenza uniforme

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ $\displaystyle\int_0^1 |\dot{u}_{n_k}(x)|^2\,dx$ questo non passa al limite se ho solo convergenza debole, ma al limite può solo crollare!

$$\liminf_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 |\dot{u}_{n_k}(x)|^2\,dx}_{\|\dot{u}_{n_k}\|^2} \geq \underbrace{\int_0^1 |v_\infty(x)|^2\,dx}_{\|v_\infty\|^2}$$

$\boxed{\text{FATTO 4 + FATTO 5}}$ $\liminf F(u_{n_k}) \geq F(u_\infty)$

Basta sommare

$\boxed{\text{FATTO 6}}$ $F(u_\infty) = I$, cioè u_∞ è un p.to di minimo

Dim.

$$I = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf F(u_{n_k}) \geq F(u_\infty) \underset{I \text{ è l'inf}}{\geq} I$$

Quindi ci sono tutte uguaglianze.

— o — o —

Problema in generale

$$\int_a^b \varphi(u(x))\,dx$$

Se so che $v_n(x) \longrightarrow v_\infty(x)$, cosa posso dire di

$$\int_a^b \varphi(v_n(x))\,dx$$

$\boxed{\text{Risposta 1}}$ Se $\varphi(x)$ è continua e $v_m(x) \to v_\infty(x)$ unif. in (a,b), allora

$$\lim_{m\to+\infty} \int_a^b \varphi(v_m(x))\,dx = \int_a^b \varphi(v_\infty(x))\,dx$$

$\boxed{\text{Idea della dim}}$ Si tratta di dimostrare che anche

$$\varphi(v_m(x)) \longrightarrow \varphi(v_\infty(x)) \quad \text{unif. in } (a,b)$$

Utilizzo operativo: serve per passare al limite nei pezzi dei funzionali "senza derivate".

$\boxed{\text{Risposta 2}}$ Se $\varphi(x)$ è convessa e $v_m(x) \longrightarrow v_\infty(x)$ anche solo debolmente (ed è limitata), allora

$$\liminf_{m\to+\infty} \int_a^b \varphi(v_m(x))\,dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x))\,dx$$

Utilizzo operativo: passare al limite nei pezzi di funzionale con la derivata.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ricordiamo la disuguaglianza

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)\,b \qquad \text{per ogni } a \text{ e } b$$

Quindi
$$\varphi(v_m(x)) = \varphi\big(\underbrace{v_m(x) - v_\infty(x)}_{b} + \underbrace{v_\infty(x)}_{a}\big)$$
$$\geq \varphi(v_\infty(x)) + \varphi'(v_\infty(x))\,(v_m(x) - v_\infty(x))$$

$$\int_a^b \varphi(v_m(x))\,dx \geq \int_a^b \varphi(v_\infty(x))\,dx + \underbrace{\langle \varphi'(v_\infty), v_m - v_\infty \rangle}_{\downarrow\, 0 \text{ per conv. debole}}$$

Passando al liminf si ha la tesi,

Teorema di passaggio al limite funzione e derivata

Caso classico: f_n funzioni C^1
$f_n' \longrightarrow g_\infty$ uniformemente
esiste un p.to in cui le f_n tendono a q.c.

Tesi: $f_n \longrightarrow f_\infty$ uniformemente e $\underbrace{f_\infty'}_{f_\infty \text{ è } C^1} = g_\infty$.

Teorema Sobolev: f_n funzioni H^1
$f_n' \longrightarrow g_\infty$ (debole)
esiste un p.to in cui f_n tendono a q.c.

Tesi: $f_n \longrightarrow f_\infty$ uniformemente. Inoltre $f_\infty \in H^1$ e $f_\infty' = g_\infty$.

Teorema (regolarità delle funzioni H^1).
Se $f \in H^1((a,b))$, allora è ancora vero che $f \in C^0((a,b))$ ed è l'integrale della sua derivata, cioè

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)\,dx$$

Conseguenza: Posso parlare del valore di $f(x)$ in un p.to perché prendo per $f(x)$ la sua versione continua.
Non posso parlare di $f'(x)$ in un p.to.

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 19

Titolo nota 28/03/2015

Metodo diretto del calcolo delle variazioni

Consideriamo funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b [\varphi(\dot{u}) + \psi(u,x)]\, dx$$

Voglio dim. l'esistenza del minimo

$\boxed{\text{ROAD MAP}}$ ① Formulazione debole ⇝ derivate deboli, spazi H^1

② Compattezza : data una succ. u_n t.c.

$$F(u_n) \longrightarrow \inf F(u) \quad \text{(succ. minimizzante)}$$

Sperare di riuscire a dim. che

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow u_\infty \\ \dot{u}_n \longrightarrow v_\infty \end{array}\right] \text{ a meno di sottosucc.}$$

(A quel p.to quasi gratis $v_\infty = \dot{u}_\infty$)

③ Semicontinuità : se $u_n \to u_\infty$ e $\dot{u}_n \longrightarrow \dot{u}_\infty$ allora

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Fatti ①, ② e ③ è gratis che $F(u_\infty)$ è il minimo, quindi u_∞ è un p.to di minimo

Dim. $F(u_\infty) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf F(u)$

per come è stata scelta u_n

④ <u>Regolarità</u>: dimostrare che in realtà $u_\infty \in C^1$ (o meglio)
per cui $\dot{u}_\infty$ esiste in senso classico

— o — o —

Il p.to 1 usa gli spazi di Sobolev (in genere H^1)

Per il p.to 2 servono dei teoremi di compattezza del tipo
" $|\dot{u}_n|$ limitata in L^2 + qualcosa che impedisca alle u_n di scappare $\Rightarrow$ $u_n \to u_\infty$ unif, $\dot{u}_n \to \dot{u}_\infty$ debolmente } a meno di sottosucc. "

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $u \in H^1((a,b))$. Allora u è $\frac{1}{2}$-Hölder, cioè u è continua ed esiste una costante H tale che

$$|u(x)-u(y)| \leq H\,|x-y|^{1/2} \qquad \forall x \in (a,b) \quad \forall y \in (a,b)$$

La costante H dipende dalla norma di $|\dot{u}|$ in L^2.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Cosa vuol dire che $u \in H^1((a,b))$? Uso la definizione H. Vuol dire che esiste una succ. di funzioni $u_n \in C^1((a,b))$ tali che

$$u_n \to u \quad \text{in } L^2$$
$$\dot{u}_n \to \dot{u} \quad \text{in } L^2.$$

Per ogni x e y in (a,b) si ha

$$u_n(x) - u_n(y) = \int_y^x \dot{u}_n(s)\,ds$$
$$= \int_a^b \dot{u}_n(s) \cdot \underbrace{1\!\!1_{[y,x]}}$$

funzione che vale 1 in $[y,x]$ e 0 altrove

Quindi per Cauchy–Schwarz si ottiene

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |\langle \dot{u}_n, 1\!\!1 \rangle|$$

$$\leq \|\dot{u}_n\| \cdot \|1\!\!1\|$$

$$= \underbrace{\left(\int_a^b \dot{u}_n^2(s)ds\right)^{1/2}}_{M} \cdot \underbrace{(|x-y|)^{1/2}}_{|x-y|^{1/2}}$$

Se potessi passare al limite per $n \to +\infty$ otterrei

$$|u_\infty(x) - u_\infty(y)| \leq \|\dot{u}_\infty\| \cdot |x-y|^{1/2}$$

Posso passare al limite?

Sapendo che $\dot{u}_n \to \dot{u}_\infty$ si ha $\|\dot{u}_n\| \to \|\dot{u}_\infty\|$

Per passare al limite in $u_n(x)$ e $u_n(y)$ dobbiamo usare il teo. di Ascoli – Arzelà

— o — o —

Def. Sia $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una succ. di funzioni. Si dice che le u_n sono

- equilimitate se esiste M t.c.

$$|u_n(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N}$$

lo stesso per ogni n

- equicontinue se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in [a,b]$ esiste un $\delta > 0$ tale che

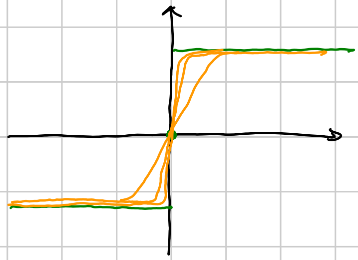
$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } y \in [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$$
$$\text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

(L'equi sta nel fatto che δ non dipende da n)

Teorema (Ascoli – Arzelà) Sia $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni equilimitate e equicontinue.
Allora esiste una sottosuccessione convergente uniformemente, cioè esiste una succ. di interi n_k strett. cresc. ed esiste $u_\infty : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$u_{n_k}(x) \longrightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif. in } [a,b].$$

Oss. L'equilimitatezza impedisce di scappare sopra / sotto
L'equicontinuità impedisce fenomeni come questo:



Oss. Una condizione che implica l'equicontinuità è la equilipschitzianità oppure equihölderianità.
Per esempio, se

$$|u_n(x) - u_n(y)| \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stessa } H \\ \text{per ogni } n \in \mathbb{N}}}{H} \cdot |x-y|^{1/2} \qquad \begin{array}{l} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$$

allora le $u_n(x)$ sono equicontinue.

[Se voglio a sx che sia $\le \varepsilon$ basta prendere $H\sqrt{\delta} \le \varepsilon$, quindi $\delta \le \frac{\varepsilon^2}{H^2}$]

In realtà questo dimostra pure che sono equi unif. continue, perché δ non dipende né da n né da x.

Tornando alla dimostrazione iniziale...

$u_n(x)$ sono equi $\frac{1}{2}$ - Hölder e dunque equicontinue.

Resta da dim. che sono equilimitate. Noi sappiamo che $u_n \to u$ in L^2, quindi $|u_n|$ è limitata (norma L^2), cioè

$$\underbrace{\int_a^b u_n^2(x)\,dx}_{\substack{= u_n^2(x_n)\cdot(b-a) \\ \text{teorema della media integrale}}} \leq M$$

quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un p.to x_n tale che

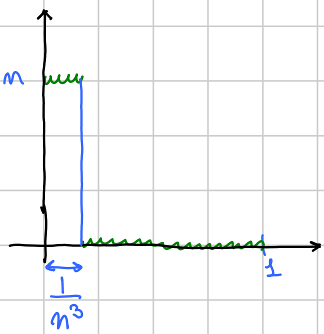
$$u_n^2(x_n) \leq \frac{M}{(b-a)}$$

Ma allora per ogni $x \in [a,b]$ si avrà

$$u_n(x_n) - H|x-x_n|^{1/2} \leq u_n(x) \leq \underbrace{u_n(x_n)}_{\text{limitato}} + \underbrace{H|x-x_n|^{1/2}}_{\leq H|b-a|^{1/2}}$$

— o — o —

Oss. Se anche sapessi che $u_n \to 0$ in L^2 non potrei dedurre che le u_n sono equilimitate !!!



$$|u_n|^2 = \int_0^1 u_n^2(x)\,dx = \int_0^{1/n^3} n^2\,dx = \frac{1}{n} \to 0$$

Idea: sapere che le norme in L^2 sono limitate non dà informazioni puntuali sulle u_n.

Concludendo la dim. iniziale: le u_n sono equilimitate + equicontinue, quindi ammettono una s.succ.

$$u_{n_k}(x) \longrightarrow \underbrace{u_\infty(x)} \quad \text{uniformemente}$$

↑ continua perché limite unif. di funzioni continue

Ma allora il limite L^2 è in realtà anche un limite uniforme ed è continuo.

— o — o —

Nella ROAD MAP, dal sapere che $F(u_n)$ è limitato si spera di poter dedurre che, a meno di s.succ.,

$$u_n \longrightarrow u_\infty \quad \text{unif}$$
$$\dot{u}_n \longrightarrow \dot{u}_\infty \quad \text{debolmente}$$

usando gli strumenti appena descritti.

— o — o —

SSSUP 2015 – LEZIONE 20

Titolo nota 28/03/2015

<u>Esercizio</u>
$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 (\dot{u}^2 + \cos u)\,dx}_{F(u)} : u \in C^1([0,1]),\ u(0)=0,\ u(1)=3 \right\}$$

<u>Formulazione debole</u>: considero $F(u)$ per $u \in H^1((a,b))$ con $\underbrace{u(0)=0 \text{ e } u(1)=3}$

posso parlare dei valori in 0 e 1 perché u è continua

<u>Compattezza</u>: considero una qualunque succ. u_n t.c.

$$F(u_n) \to \inf F(u) \quad \text{(succ. minimizz.)}$$

Allora so che $F(u_n) \leq M$, quindi

$$\int_0^1 \left\{ [\dot{u}_n(x)]^2 + \cos(u_n(x)) \right\} dx \leq M \quad (= \inf + 1,\ \text{volendo})$$

quindi $\displaystyle\int_0^1 \dot{u}_n^2(x)\,dx \leq M+1$

quindi $|\dot{u}_n|_{L^2} \leq M+1$

Da qui ottengo che
- $\dot{u}_n$ è limitata in L^2
- u_n sono equi – $\frac{1}{2}$ Hölder in $(0,1)$
- u_n sono equilimitate in $(0,1)$ (per via del pto precedente e del fatto che $u_n(0)=0$)

Quindi a meno di s.succ.

$$\dot{u}_n \rightharpoonup v_\infty \quad \text{(compattezza debole delle palle)}$$
$$u_n \to u_\infty \quad \text{uniformemente} \quad \text{(Ascoli–Arzelà)}$$

Come sempre $v_\infty = \dot{u}_\infty$

[$$\int_0^1 \dot{u}_n(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 u_n(x)\,\dot{\varphi}(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in C^1 \text{ nulla al bordo}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_0^1 v_\infty(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 u_\infty(x)\,\dot{\varphi}(x)\,dx$$

da cui $v_\infty = \dot{u}_\infty$ per definiz. di derivata debole].

Semicontinuità Vorrei dim. che $\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$

Qui intervengono i teo. di passaggio al limite:

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 \dot{u}_n^2(x)\,dx \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2(x)\,dx$$

$\uparrow$ semicontinuità della norma
(basta che sia $\varphi(\dot{u}_n)$ con φ convessa)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \cos(u_n(x))\,dx = \int_0^1 \cos(u_\infty(x))\,dx$$

$\uparrow$ conv. uniforme
(basta che sia $\varphi(u_n)$ con φ continua)

Sommando le 2 si ottiene la tesi.

Regolarità Si cerca l'equazione di Eulero. Sia u_∞ un p.to di minimo in H^1. Allora considero le perturbazioni $u_\infty + tv$ con $v \in H^1$ nulla al bordo (perché ho le cond. di Dirichlet sul pbm. iniziale). Per semplicità pongo $u = u_\infty$

$$\frac{1}{t}\left[F(u+tv) - F(u)\right] = \frac{1}{t}\int_0^1 (\dot{u}+t\dot{v})^2 - \dot{u}^2 + \cos(u+tv) - \cos u$$

$$= \int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + t\dot{v}^2 + \frac{\cos(u+tv) - \cos u}{t}$$

Facendo il limite per $t \to 0$ si ottiene

$$\boxed{\int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} - \sin u \cdot v)\,dx = 0}$$

la forma dell'eq. di Eulero

Riscrivo e mi limito alle $v \in C^1$ nulle al bordo

$$\int_0^1 \underset{g}{\dot{u}}\, \underset{\varphi'}{\dot{v}}\, dx = \int_0^1 \underset{\psi}{\tfrac{1}{2}\sin u} \cdot \underset{\varphi}{v}$$

$\leadsto$ ψ è $-g'$

Questo mi dice che $-\frac{1}{2}\sin u$ è la derivata debole di $\dot{u}$, quindi è ancora vero che

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2}\sin u$$

derivata debole di $\dot{u}$, cioè la derivata debole seconda di u

Morale: l'eq. di Eulero è sempre la stessa, solo che la derivata seconda va intesa in senso debole.

$\boxed{\text{BOOTSTRAP}}$ Si guadagna la regolarità un passo per volta:

→ $u \in C^0$ perché le funzioni H^1 sono C^0
→ $\ddot{u} = -\frac{1}{2}\sin u \in C^0$, ma allora $u \in C^2$

→ $\ddot{u} = -\frac{1}{2}\sin u \in C^2$, ma allora $u \in C^4$

proseguendo in questo modo si ottiene $u \in C^\infty$.

<u>Conclusione</u> Sappiamo che

① il minimo esiste e tutti i p.ti di minimo sono C^∞
② i p.ti di min. sono soluzioni classiche dell'eq. di Eulero

Non sappiamo se il p.to di min. o le sol. dell'eq. sono uniche.

Abbiamo usato questo fatto: se $u \in C^0$ e $\dot{u}$ (debole) è C^0, allora $u \in C^1$ e la derivata è quello che deve essere

[Dim. $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\,\varphi(x)\,dx$ $\quad \forall \varphi \in C^1$ nulla al bordo

da questo si ottiene che $u(x)$ è l'integrale della derivata

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt$$

e quindi se $v \in C^0$ per forza $u \in C^1$.]

Oss. Le funzioni H^1 sono l'integrale della propria derivata.
Consideriamo le approssimanti

$$C^1 \ni u_n \to u$$
$$\dot{u}_n \to \dot{u}$$

Per le approx è vero

$$u_n(x) = \int_a^x \dot{u}_n(t)\,dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u(x) \qquad \int_a^x \dot{u}(t)\,dt$$

perché è pure unif

perché lo posso vedere $\langle \dot{u}_n, 1\!\!1_{[a,x]} \rangle$ (basterebbe pure la debole)

—o — o —

$\boxed{\text{REVERSE ENGINEERING}}$ Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} \ddot{u} = -e^u \\ u(0) = u(7) = 2015 \end{cases}$$

Domande: ① esiste la soluzione ?
② è unica ?
③ che regolarità ha ?

Passo dal funzionale:

$$F(u) = \int_0^7 \left(\tfrac{1}{2}\dot{u}^2 + e^u\right) dx$$

$$F(u) = \int_a^b (\varphi(\dot{u}) + \psi(u)) \rightsquigarrow \int_a^b \varphi'(\dot{u})\dot{v} + \psi'(u)v$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b -\varphi''(\dot{u})\ddot{u}\, v + \psi'(u)\, v$$

$$\rightsquigarrow \varphi''(\dot{u})\ddot{u} = \psi'(u)$$

Il metodo diretto è quasi gratis

→ Formulazione in H^1

→ Compattezza: da $F(u_n)$ limitato ottengo la limitatezza di $|\dot{u}_n|_{L^2}$, quindi come prima

$$\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty$$

$$u_n \longrightarrow u_\infty \quad \text{unif.}$$

→ Semicontinuità: gratis

→ regolarità: gratis via bootstrap

Questo mostra esistenza + regolarità.

Per l'unicità servono 2 ingredienti

① Mostrare che tutte le soluzioni di Eulero sono minimi

② Mostrare che il p.to di min. è unico

Basta fare $F(u+w)$ dove u è una soluzione di Eulero e mostrare che

$$F(u+w) \geq F(u)$$

con uguaglianza solo se $w \equiv 0$. Questo riesce grazie alla convessità, come si faceva nel metodo indiretto.

$$F(u+w) = \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{u}+\dot{w})^2 + e^{u+w} \qquad = \quad e^u e^w \geq e^u(1+w)$$

$$\geq \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{w} + \underbrace{\dot{w}^2}_{\geq 0}) + e^u + e^u w$$

$$= \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2}\dot{u}^2 + e^u}_{F(u)} + \underbrace{\int_0^T \dot{u}\dot{w} + e^u w}_{=0}$$

perchè è l'eq. di Eulero

L'uguale vale $\Leftrightarrow$ $w = 0$.

SSSUP 2015 — LEZIONE 21

Titolo nota 28/03/2015

Analogo del teorema spettrale in spazi di Hilbert

Caso classico in dimensione finita : un'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

si dice simmetrica se

$$\boxed{\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n}$$

cioè f "migra nei prodotti scalari"

Fatto 1 Se A è la matrice associata ad f rispetto ad una base ortonormale, allora A è simmetrica.

Teorema spettrale Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrica, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di f. Tale base la posso scegliere ortonormale. Detto altrimenti, esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ed esistono vettori $v_1, \dots, v_n$ t.c.

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Negli spazi di Hilbert la def. di appl. simmetrica è la stessa

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \qquad \forall x \in H, \forall y \in H$$

prod. scalare in H

$f : H \to H$ lineare.

Def. Una funzione $f: H \to H$ lineare si dice COMPATTA se

$$\boxed{v_n \xrightarrow[\text{debole}]{} v_\infty \implies f(v_n) \xrightarrow[\text{forte}]{} f(v_\infty)}$$

Teorema spettrale Sia $f: H \to H$ un'applicazione lineare simmetrica e compatta.
Allora esiste una base Hilbertiana costituita da autovettori di f.

L' esempio Consideriamo $H = L^2((a,b))$. Consideriamo l'applicazione "doppia primitiva"

$$f(x) \rightsquigarrow F(x) = \int f(x) \rightsquigarrow \hat{F}(x) = \int F(x)$$

Visto che le primitive non sono uniche, devo fare delle scelte.
Data $f(x)$ e data una "doppia primitiva" $\hat{F}(x)$, l'insieme di tutte le "doppie primitive" è del tipo

$$\boxed{\hat{F}(x) + c_1 x + c_2}$$

Per calcolare c_1 e c_2 impongo delle condizioni:

(D−D) $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$

(N−N) $\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b) = 0$

(D−N) o (N−D)

(Cauchy) $\hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0$ o stessa cosa in b

(P) $\hat{F}(a) = \hat{F}(b)$ e $\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b)$ (periodico)

Domande: → con queste scelte, otteniamo una doppia prim. ben definita? (cioè calcoliamo c_1 e c_2)
→ otteniamo un'appl. lin. simmetrica?
→ " " " " compatta?

Facciamo il caso (D-D) $\quad \hat{F}(x) + c_1 x + c_2$

Impongo

$$\hat{F}(a) + c_1 a + c_2 = 0$$
$$\hat{F}(b) + c_1 b + c_2 = 0$$

Se $a \neq b$, posso trovare c_1 e c_2 in modo unico

È quasi ovvio che è lineare (perché al bordo ho imposto 0)

È simmetrica? $\quad \langle \hat{F}, g \rangle \stackrel{?}{=} \langle f, \hat{G} \rangle$

$$\underbrace{\int_a^b \hat{F}(x)\, g(x)\, dx}_{\langle \hat{F}, g \rangle} = [\underset{0}{\hat{F}(b)}\, G(b) - \underset{0}{\hat{F}(a)}\, G(a)] - \int_a^b F(x)\, G(x)$$

$$\langle f, \hat{G} \rangle = \int_a^b f(x)\, \hat{G}(x)\, dx = F(b)\underset{0}{\hat{G}(b)} - F(a)\underset{0}{\hat{G}(a)} - \int_a^b F(x)\, G(x)$$

Sì, è simmetrica!

È compatta? Sì, perché se $f_n \rightharpoonup f_\infty$, allora

$F_n \longrightarrow F_\infty$ uniformemente (purché ci sia un controllo al bordo), quindi a maggior ragione

$\hat{F}_n \longrightarrow \hat{F}_\infty$ uniformemente, e quindi a maggior ragione L^2 forte

<u>Oss.</u> Fare una sola primitiva è un'applic. compatta, ma non simmetrica.

Per il teorema spettrale esiste una base di $L^2((a,b))$ costituita da autovettori della doppia primitiva. Li trovo

$\hat{F}(x) = \lambda f(x)$. Derivo a dx e sx: $\quad \hat{F}''(x) = \lambda f''(x)$

$$f(x) = \lambda f''(x)$$

cioè $f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

la regolarità per fare il conto arriva dal bootstrap:

$f \in L^2 \Rightarrow F \in C^0 \Rightarrow \hat{F} \in C^1 \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda}\hat{F} \in C^1 \Rightarrow \hat{F} \in C^3 \ldots$

Ci sono 2 casi: ci mettiamo per semplicità in $(a,b) = (0,\ell)$

- $\lambda > 0$: $f'' = \frac{1}{\lambda} f \rightsquigarrow f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Impongo le cond. al bordo $\rightsquigarrow$
$a + b = 0$ $x = 0$
$a e^{\omega \ell} + b e^{-\omega \ell} = 0$ $x = \ell$

su $\hat{F}$ o f è lo stesso

$\Rightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow$ funzione nulla $\Rightarrow$ non vale

- $\lambda < 0$: $f'' = -\frac{1}{\mu} f \rightsquigarrow f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$

Cond. al bordo:
$b = 0$ $x = 0$
$a \sin(\omega \ell) = 0$ $x = \ell$

Se $\sin(\omega \ell) \neq 0$ non va bene perché viene $a = 0$.
Se $\sin(\omega \ell) = 0$, allora abbiamo autovettori non nulli del tipo

$$f(x) = a \sin(\omega x)$$

Ora $\sin(\omega \ell) = 0 \Leftrightarrow \omega \ell = n\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{n\pi}{\ell} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}$

Quindi:

① Gli autovalori della "doppia primitiva (D-D)" sono $\lambda = -\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}$

② I corrispondenti autovettori sono $a \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$

Grazie al teorema spettrale sappiamo che $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right\}$ sono una base ortogonale di $L^2((0,\ell))$

↳ dividendo si ortonormalizza

Conseguenze

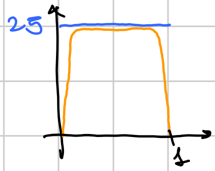
① $$\underbrace{\int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)dx}_{} = 0 \quad \text{se } n \neq m$$

volendo si scrive come $\cos(\ ) \pm \cos(\ )$ e integrato su un periodo viene $=0$

② Ogni $f \in L^2((0,\ell))$ si scrive in modo unico come

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}$$

La serie converge solo in L^2, quindi non possiamo avere informazioni a x fisso.



Chi è c_n? Ovviamente

$$c_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle}$$

↑ el. della base

e

$$\int_0^\ell f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

SSSUP 2015 - LEZIONE 22

Titolo nota 11/04/2015

SERIE DI FOURIER

Teorema spettrale in spazi di Hilbert. Sia $f : H \to H$ lineare.
Supponiamo che
(i) f è simmetrica ($\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ per ogni x, y in H)
(ii) f è compatta (se $x_n \rightharpoonup x_\infty$, allora $f(x_n) \to f(x_\infty)$)
Allora (se H è separabile) esiste una base Hilbertiana di H fatta da autovettori di f, quindi detta $\{e_n\}$ la base

$$f(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Inoltre $\lambda_n \to 0$.

Esempio classico $H = L^2((a,b))$
f = "doppia primitiva con condizioni al bordo"

Data $f(x)$, cerco una funzione $\hat{F}(x)$ tale che $\hat{F}''(x) = f(x)$ in (a,b) + opportune condizioni al bordo.
Si verifica che

$$f(x) \longrightarrow \hat{F}(x) + \underbrace{BC}_{\text{boundary conditions}}$$

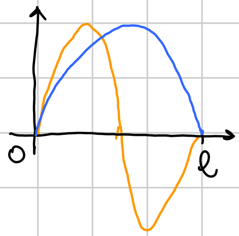
- è una funzione lineare (serve che le condiz. al bordo siano o o comunque condizioni stabili per somma e prodotto per costante)
- è simmetrica (segue da integrazione per parti + BC)
- è compatta

Boundary conditions
1. Cauchy $\hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0$ → NO SIMMETRIA
2. D-D $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$
3. N-N $\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b) = 0$
4. D-N (N-D) $\hat{F}(a) = \hat{F}'(b) = 0$ (o viceversa)
5. P (periodica) $\hat{F}(a) = \hat{F}(b)$, $\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b)$

① (D−D) produce un'applicazione simmetrica ben definita.
Gli autovettori, posto $(a,b) = (0,\ell)$ sono

$$\boxed{u_k(t) = \sin\left(k\frac{\pi}{\ell}x\right)}$$

↑ base ortogonale di $L^2((0,\ell))$



Gli autovalori corrispondenti sono

$$u_k''(x) = -k^2\frac{\pi^2}{\ell^2}u_k(x)\,, \quad \text{cioè} \quad u_k(x) = \boxed{-\frac{\ell^2}{\pi^2}\frac{1}{k^2}}\,u_k''(x)$$

$Au = \lambda u$ ↑ autoval ≠ 0

② (D−N) Come sempre $(a,b) = (0,\ell)$.
Data una funzione $f(x)$ cerco $\hat{F}(x)$ t.c. $\hat{F}''(x) = f(x)$
e verifichi

$$\hat{F}(a) = 0 \qquad \hat{F}'(b) = 0$$

Chiamo
$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
$$\hat{G}(x) = \int_0^x G(t)\,dt$$

Allora $\hat{G}(x)$ è doppia primitiva di $f(x)$ con condizioni di Cauchy.
Ora
$$\hat{F}(x) = \hat{G}(x) + c_1x + c_2$$
e cerco c_1 e c_2 in modo da soddisfare le condizioni

$$0 = \hat{F}(0) = \underbrace{\hat{G}(0)}_{=0} + c_2 \rightsquigarrow c_2 = 0$$

$$0 = \hat{F}'(\ell) = \hat{G}'(\ell) + c_1 \rightsquigarrow c_1 = -\hat{G}'(\ell) = -G(\ell) = -\int_0^\ell f(x)$$

⟹ le condizioni al bordo individuano univocamente $\hat{F}(x)$

Troviamo la base di autovettori, cioè risolviamo

$\hat{F}(x) = \lambda f(x)$

Derivo due volte a dx e sx (per BOOTSTRAP $f(x)$ è in realtà C^∞)
e ottengo
$$\hat{F}''(x) = \lambda f''(x), \text{ cioè } f(x) = \lambda f''(x), \text{ cioè}$$

$f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$. Da qui ci sono 3 casi a seconda del segno di λ

- Caso $\lambda > 0$: soluz. sono $f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}$ $\quad \omega^2 = \frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff a + b = 0 \\ f'(\ell) = 0 &\iff \omega a e^{\omega \ell} - \omega b e^{-\omega \ell} = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega \ell} & -\omega e^{-\omega \ell} \end{pmatrix}$$
Det $\neq 0$

$\Rightarrow$ l'unica soluzione è $a = b = 0 \Rightarrow$ nessun autovettore

- Caso $\lambda = 0$: soluz. sono $f(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff b = 0 \\ f'(\ell) = 0 &\iff a = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \text{ NO autovettori}$$

- Caso $\lambda < 0$: $f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$ $\quad \omega^2 = -\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\iff b = 0 \\ f'(\ell) = 0 &\iff a \omega \underbrace{\cos(\omega \ell)}_{0} = 0 \end{aligned}$$
$$\iff \omega \ell = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

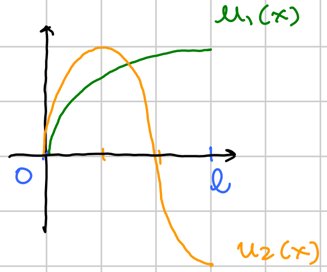
Quindi gli autovettori sono

se $\ell = \pi$

$$\boxed{u_k(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2\ell} + \frac{\pi}{\ell} k\right) x\right)} \qquad \boxed{u_k(x) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) x\right)}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_k = -\frac{1}{\omega_k^2} = -\frac{\ell^2}{\pi^2}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \to 0$$



—o—o—

③ (N-N) Come prima $\hat{F}(x) = \hat{G}(x) + c_1 x + c_2$

$$\hat{F}'(0) = 0 \iff \hat{G}'(0) + c_1 = 0$$
$$\hat{F}'(\ell) = 0 \iff \hat{G}'(\ell) + c_1 = 0$$

Ora non posso determinare univocamente c_2 e posso determinare c_1 se e solo se

$$\hat{G}'(0) = \hat{G}'(\ell) \quad , \quad \text{cioè se e solo se} \quad \int_0^\ell f(x)\,dx = 0$$

Allora si considera lo spazio

$$L^2_{\boxed{m=0}}((0,\ell)) = \left\{ f \in L^2((0,\ell)) : \int_0^\ell f(x)\,dx = 0 \right\}$$

media nulla

Ora la doppia primitiva definisce una funzione lineare

$$L^2_{m=0}((0,\ell)) \longrightarrow \underbrace{L^2_{m=0}((0,\ell))}_{\text{permette di determinare } c_2 \text{ in modo unico}}$$

In questo spazio funziona il teo. spettrale.

Chi sono gli autovettori? Devo risolvere

$f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ con B.C. + media nulla

- Casi $\lambda > 0$ e $\lambda = 0$ non producono nulla (verifica)
- Caso $\lambda < 0$ $\rightsquigarrow$

$$f(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x) \qquad \omega^2 = -\frac{1}{\lambda}$$

$f'(0) = 0 \iff \omega a = 0 \iff a = 0$

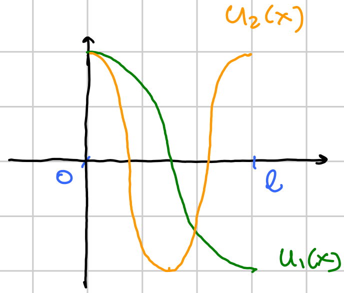
$f'(\ell) = 0 \iff -\omega b \underbrace{\sin(\omega \ell)}_{=0} = 0$

quindi $\omega \ell = k\pi$, cioè $\omega = \frac{\pi}{\ell} k$

$\ell = \pi$

Gli autovettori sono $\boxed{u_k(x) = \cos\left(\frac{\pi}{\ell} k x\right)}$ $\boxed{u_k(x) = \cos(kx)}$

NOTA BENE! HANNO MEDIA NULLA



④ (P) Come prima $\hat{F}(x) = \ldots$

$\hat{F}(0) = \hat{F}(\ell) \iff \hat{G}(0) + \cancel{c_2} = \hat{G}(\ell) + c_1 \ell + \cancel{c_2}$ $\rightsquigarrow$ trovo c_1

$\hat{F}'(0) = \hat{F}'(\ell) \iff \hat{G}'(0) + \cancel{c_1} = \hat{G}'(\ell) + \cancel{c_1}$

Quindi deve essere vero che $\int_0^\ell f(x)\,dx = 0$.

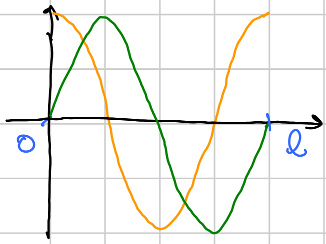
Anche in questo caso funziona tutto pensando

$$L^2_{m=0}((0,\ell)) \longrightarrow L^2_{m=0}((0,\ell))$$

Gli autovettori si calcolano come sempre e si ottengono sia seni sia coseni, ma occhio al periodo!

$$u_k(x) = \sin\left(2k\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

$$u_k(x) = \cos\left(2k\frac{\pi}{\ell}x\right)$$



Per ogni autovalore $\lambda = -\frac{\ell^2}{4\pi^2}\frac{1}{k^2}$ ci sono <u>due</u> autovettori, (lin. indip.)

quindi autospazio di dimensione 2.

<u>Oss.</u> Se so sviluppare le funzioni a media nulla, le so sviluppare tutte quante (basta aggiungere una costante).

SSSUP 2015 — LEZIONE 23

Titolo nota 11/04/2015

Convergenza di serie di Fourier Per semplicità $(a,b) = (0,\ell)$

Ogni $f \in L^2((0,\ell))$ si può scrivere come serie

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x)}$$

dove $\{u_k(x)\}$ è una qualunque delle basi ortogonali trovate in precedenza.

Achtung! Usare basi diverse porta a sviluppi diversi.

Oss. In ogni caso $c_k = \frac{1}{d_k} \int_0^{\ell} f(x) \cdot u_k(x)\, dx$ dove

$$d_k = \int_0^{\ell} [u_k(x)]^2 dx$$

$$\frac{\langle f, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

Domanda: in che senso la serie converge ad $f(x)$?

Risposta banale: nel senso L^2 del termine, cioè le somme parziali $S_n(x) \longrightarrow f(x)$ in L^2, cioè

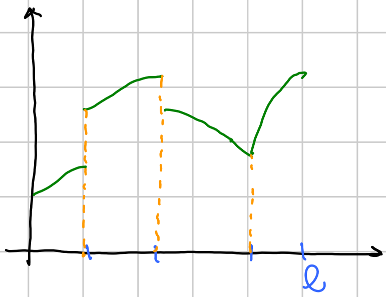
$$\int_0^{\ell} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \longrightarrow 0$$

In particolare questo non dice nulla a x fissa.

Obiettivo: sotto opportune ipotesi avere convergenza migliore.

Def. Una funzione $f: [0, \ell] \to \mathbb{R}$ si dice C^1 a tratti se esistono p.ti $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \ell$ tali che

- f è C^1 in ogni sottointervallo
- in ognuno dei p.ti x_i esistono il limite dx e sx di f e f' magari diversi.



Consideriamo la serie di F. di tipo (P), cioè stiamo scrivendo

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\frac{\pi}{\ell}kx\right) + \sum_{k\geq 1}^{\infty} b_k \sin\left(2\frac{\pi}{\ell}kx\right)}$$

Teorema misterioso 1 (Convergenza puntuale)

Supponiamo che $f: [0, \ell] \to \mathbb{R}$ sia C^1 a tratti.
Allora la serie di F di tipo (P) converge puntualmente a

$$\frac{1}{2}\left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite} \\ \text{destro}}}{f(x+)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite} \\ \text{sinistro}}}{f(x-)}\right]$$

In particolare la serie converge

- a $f(x)$ nei p.ti in cui f è continua
- alla media dei limiti dx e sx nei p.ti in cui non è continua.

Teorema misterioso 2 (Conv. uniforme)

Se f è C^1 a tratti e continua, allora la convergenza è uniforme, anzi totale.

$\boxed{\text{Teorema misterioso 3}}$ (Generalizza il precedente)
Se f è C^1 a tratti, allora la convergenza è uniforme in tutti gli intervalli chiusi che non contengono p.ti di discontinuità.

— o — o —

Cosa si può dire negli altri casi? (D−D), (N−N), (D−N)

Idea: tutti questi casi si riducono al precedente mediante opportune simmetrie!

$\boxed{\text{Oss.}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e dispari

$$f(x+2\pi) = f(x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx)$$

In questo caso NON servono i coseni e neanche a_0

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$a_k = \frac{1}{\text{cost.}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\,dx = \frac{1}{\cdots} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\,dx}_{=0}$$

l'integrale è lo stesso su un periodo qualunque

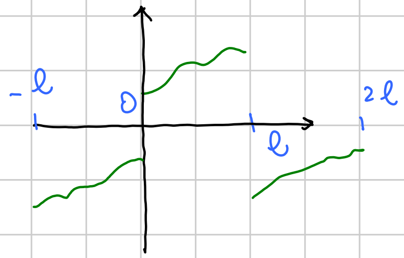
perché integrale di una funzione dispari su intervallo simmetrico

Analogamente nello sviluppo di una funzione pari NON ci sono i seni.

Supponiamo ora di avere $f : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ e di volerla sviluppare (D−D), cioè usando la base

$$u_k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell} k x\right)$$

Allora posso:



① estendo la funzione a $[-\ell, \ell]$ per disparità

② volendo penso di estendere a tutto $\mathbb{R}$ per 2ℓ-periodicità. Sia $\hat{f}$ l'estensione.

③ lo sviluppo di tipo (P) sull'intervallo $[0, 2\ell]$

$$\hat{f}(x) = \underbrace{a_0 + \sum a_k \cos\left(2\frac{\pi}{2\ell}kx\right)}_{=0 \text{ perché è dispari}} + \underbrace{\sum b_k \sin\left(\cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}\ell}kx\right)}_{\text{sviluppo di tipo (D-D)}}$$

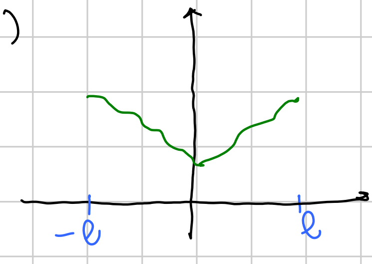
<u>Conclusione</u>. Lo sviluppo di tipo (D-D) di $f(x)$ è lo sviluppo di tipo (P) di $\hat{f}(x)$.

Quindi, se $f: [0, \ell]$ è C^1, allora l'estesa $\hat{f}$ è C^1 a tratti e la serie di F (D-D) di f, che poi è la serie (P) di $\hat{f}$ converge

- puntualmente a $f(x)$ in $(0, \ell)$, cioè dove $\hat{f}$ è continua
- " " 0 in $\{0, \ell\}$ (semisomma dei limiti)
- uniformemente a $f(x)$ in $[\varepsilon, \ell-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

— o — o —

Analogamente, se voglio sviluppare (N-N) estendo prima per parità e poi per 2ℓ-periodicità ottenendo una $\hat{f}(x)$ che sviluppo di tipo (P). Nello sviluppo ci saranno solo la costante ed i termini

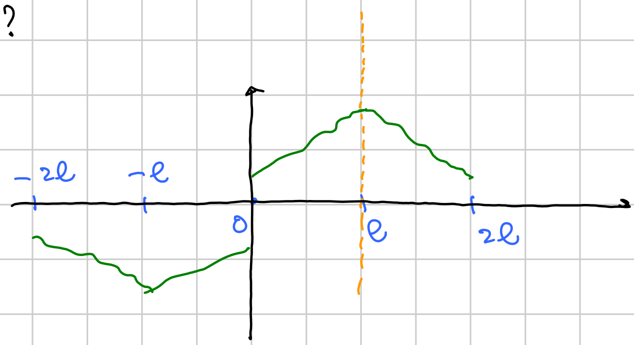


$$\cos\left(\cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}\ell}kx\right) \quad \text{che è lo sviluppo di tipo (N-N)}$$

Ora se f è C^1 in $[0, \ell]$, l'estensione $\hat{f}$ è C^1 a tratti in $\mathbb{R}$ e continua, quindi la convergenza è unif. per il teo. 2.

— o — o —

<u>Cosa succede nel (D-N)?</u>



① Estendo per "parità" rispetto a ℓ fino a 2ℓ

② " " disparità a $[-2\ell, 0]$

③ Estendo per 4ℓ - periodicità ad $\mathbb{R}$

④ Sviluppo di tipo (P) su $[0, 4\ell]$.

I coseni e la costante non ci sono per disparità

Si può dimostrare sfruttando la "parità" che non ci sono nemmeno i seni con k pari.

Restano solo i seni con k dispari che sono quelli che compaiono nel (D-N).

— o — o —

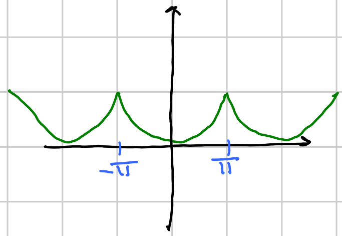
SSSUP 2015 — LEZIONE 24

Titolo nota 11/04/2015

Esercizio classico Dimostrare che

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Idea: considero $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$, la estendo per periodicità e sviluppo di tipo (P).
Equivalente: la considero in $[0,\pi]$ e sviluppo di tipo (N-N).



$$f(x) = a_0 + \sum_{k\geq 1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Niente sin (kx) perché è pari

$$a_0 = \text{media di } f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\text{cost}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\text{cost}}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx$$

Calcolo la primitiva:

$$\int x^2\cos(kx)\,dx = x^2\sin(kx)\cdot\frac{1}{k} - \int \frac{1}{k}\sin(kx)\cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{k}x^2\sin(kx) - \frac{2}{k}\int x\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{k}x^2\sin(kx) - \frac{2}{k}\left[x\,\frac{-\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k}\int\cos(kx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{k}x^2\sin(kx) + \frac{2}{k^2}x\cos(kx) - \frac{2}{k^3}\sin(kx)$$

Quindi
$$\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{k^2}\pi\cos(k\pi) = \frac{2}{k^2}\pi(-1)^k$$

La costante al denominatore è
$$\int_0^{2\pi}\cos^2(kx)\,dx \qquad \text{Pongo } y = kx \qquad dx = \frac{1}{k}dy$$
$$= \int_0^{2k\pi}\cos^2(y)\frac{1}{k}dy = \frac{1}{k}\cdot\underbrace{\int_0^{2k\pi}\cos^2(y)\,dy}_{\text{metà lungh. intervallo}} = \frac{k\pi}{k} = \pi$$

Quindi
$$a_k = \frac{2}{\text{cost}}\cdot\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\cancel{\pi}}\,\frac{2}{k^2}\cancel{\pi}(-1)^k$$
$$= (-1)^k\frac{4}{k^2}$$

Conclusione
$$f(x) = \underbrace{\frac{\pi^2}{3}}_{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^k\frac{4}{k^2}}_{a_k}\cos(kx)$$

La serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ e pure uniformemente. La convergenza puntuale è per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Pongo $x = \pi$
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\cancel{(-1)^k}\frac{4}{k^2}\cancel{\cos(k\pi)}$$
$$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \quad \text{da cui la tesi.}$$

— o — o —

Allo stesso modo si calcola $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}$ con a intero pari

<u>Esercizio</u> $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{9\,1}$$

— o — o —

Esercizio Sviluppare $f(x) \equiv 1$ in $[0,\pi]$ con serie (D-D)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\sin(kx)}_{(D\text{-}D) \text{ in } [0,\pi]}$$

$$b_k = \frac{1}{\text{cost}} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx = \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = \frac{1}{k} \left[-\cos(kx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{k}\left[-\cos(k\pi) + 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\text{cost} = \int_0^{\pi} \sin^2(\underbrace{kx}_{y})\, dx = \int_0^{k\pi} \sin^2 y \, \frac{1}{k}\, dy = \frac{1}{k} \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{k} = \frac{4}{\pi k} \quad \text{se } k \text{ è dispari}, \quad 0 \text{ se } k \text{ è pari}$$

Quindi
$$\boxed{f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left((2m+1)x\right)}$$

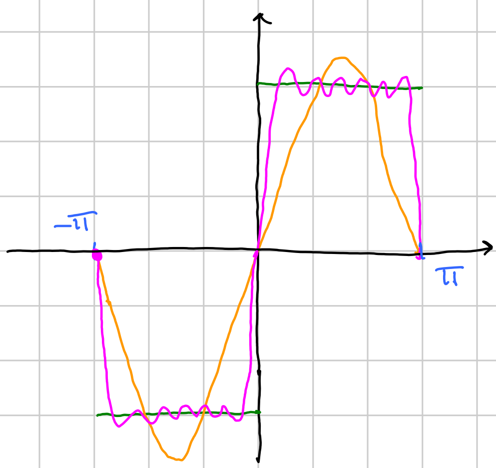
Questa converge puntualmente a 1 per $x \in (0,\pi)$, anzi ovunque tranne nei multipli di π dove invece converge a 0. Converge unif. in $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Come sono fatte le somme parziali?

$$\frac{4}{\pi} \sin x$$

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)\right)$$

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)\right)$$



Mettendo $x = \frac{\pi}{2}$ si ritrova una formula nota. I sin fanno ± 1:

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

da cui $\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

(si ottiene anche mettendo $x=1$ nello sviluppo di arctan x)

— o — o —

$\boxed{\text{Funzioni vs derivate}}$ Caso (P), ma gli altri sono uguali

$$f(x) = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx)$$

È ragionevole che

$$f'(x) = -\sum_{k\geq 1} k\, a_k \sin(kx) + \sum_{k\geq 1} k b_k \cos(kx)$$

e così via.

Chi è il coeff. di $\cos(kx)$ nello sviluppo di $f'(x)$:

$$\frac{1}{\dots} \int_0^{2\pi} f'(x) \cdot \cos(kx)\,dx = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\dots} \big[f(x) \cos(kx)\big]_0^{2\pi}}}_{=0 \text{ per periodicità}} + \frac{1}{\dots} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot k \sin(kx)\,dx$$

$$= k b_k$$

Questo dimostra la formula.

Quello che ho veramente usato è lo scaricamento da derivata debole, quindi basta che $f'(x)$ sia la derivata debole di f.

Punto della situazione:

$$f \in L^2 \iff \underbrace{\sum a_k^2 + b_k^2}_{= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx} < +\infty \qquad \left(\text{quindi } \begin{matrix} a_k \to 0 \\ b_k \to 0 \end{matrix}\right)$$

$$f \in H^1 \iff \sum k^2 (a_k^2 + b_k^2) < +\infty \qquad \left(\text{quindi } \begin{matrix} k a_k \to 0 \\ k b_k \to 0 \end{matrix}\right)$$

$$f \in H^{47} \iff \sum k^{94} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$$

$$f \in H^{\sqrt{2}} \iff \sum k^{2\sqrt{2}} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$$

Sapere che i coeff. tendono a 0 velocemente conduce a dimostrare facilmente la convergenza totale, quindi anche l'uniforme.

$$\sum \underbrace{(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))}_{\max |\cdots| \le a_k + b_k}$$

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 25

Titolo nota 18/04/2015

<u>Problemi di evoluzione</u> : → Eq. del calore
→ Eq. delle onde

{ Equaz. diff. alle derivate parziali
BC (condizioni al bordo)
Condizioni iniziali

$\boxed{\text{EQ. DEL CALORE}}$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{Eq. del calore} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{B.C. (Dirichlet)} \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{DATO INIZIALE} \end{cases}$$

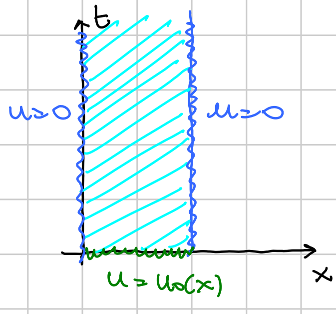
ℓ

L' incognita è $u(x,t)$ con $x \in [0,1]$ o $x \in [0,\ell]$
spazio tempo $t \geq 0$

Fisicamente: $[0,1]$ è una sbarretta e
$u(x,t)$ = temperatura al tempo t nel p.to x

Il dato iniziale $u_0(x)$ = temperatura nel p.to x al tempo $t=0$

La zona di definizione di $u(x,t)$ è una striscia

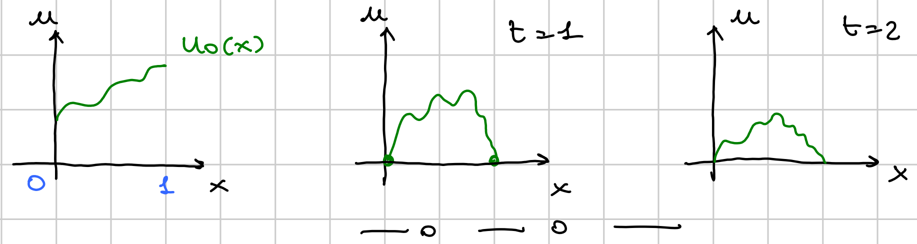


<u>Due mentalità diverse</u>

① Vedere u come una funzione di 2 variabili x e t

② Vedere u come $u: [0,+\infty) \to X$
spazio di funzioni della x
Ad ogni tempo $t \geq 0$ considero la funziona della sola x che descrive la temperatura al tempo t

$$x \longrightarrow u(t,x)$$
fisso



Come si risolve? Pensiamo all'approccio 2, con $X = L^2((0,1))$

Ad ogni $t \geq 0$ sviluppiamo u in serie di Fourier usando le condizioni al bordo opportune (nell'esempio D-D)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, e_k(x)$$

k-esimo elemento della base ortogonale

Calcoliamo $u_t(t,x)$ e $u_{xx}(t,x)$.
Supponiamo di poter scambiare serie e derivate.

$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\, e_k(x)$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, e_k''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)(-\lambda_k)\, e_k(x)$$

Ho usato che $\underbrace{e_k'' = -\lambda_k e_k}$, come erano stati ottenuti gli elem. della base

Se impongo $u_t = u_{xx}$ ottengo

$$\boxed{u_k'(t) = -\lambda_k u_k(t)}$$

uguaglio le componenti

da cui $u_k(t) = u_k(0)\, e^{-\lambda_k t}$ per ogni $t \geq 0$

Chi sono $u_k(0)$? Mettendo $t=0$

comp. del dato iniziale.

$$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{u_k(0)}\, e_k(x)$$

Riassumendo, la ROAD MAP è

① Considero una base ortogonale di $L^2((0,1))$ fatta da autovettori della "primitiva seconda" con le BC che stanno nel problema

② Sviluppo il dato iniziale rispetto a questa base

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{u_k(0)}{\overset{\shortparallel}{u_{0k}}} \, e_k(x)$$

③ La soluzione è data dalla formula

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \, e^{-\lambda_k t} \, e_k(x)}$$

$-\lambda_k$ sono gli autovalori nel senso che $e_k'' = -\lambda_k e_k$

Perché funziona? Brutalmente

→ per $t=0$ ottengo proprio $u_0(x)$

→ le BC sono soddisfatte per la scelta di $e_k(x)$

→ l'eq. è soddisfatta se posso scambiare la serie con le derivate.

— o — o —

<u>Caso molto speciale</u>: soluzioni con una sola componente di F, cioè soluzioni del tipo

$$u(t,x) = f(t) \cdot g(x)$$

Imponiamo che sia soluzione

$$u_t = f'(t) \cdot g(x)$$
$$u_{xx} = f(t) \cdot g''(x)$$

$$u_t = u_{xx} \iff f'(t) \cdot g(x) = f(t) \cdot g''(x)$$ se posso dividere

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

L'unica possibilità è che siano costanti, diciamo $= c$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c \quad \rightsquigarrow \quad f'(t) = c f(t) \quad \rightsquigarrow \quad f(t) = f(0)\, e^{ct}$$

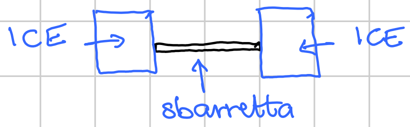
$$\frac{g''(x)}{g(x)} = c \quad \rightsquigarrow \quad g''(x) = c\, g(x) \quad \rightsquigarrow$$ se voglio D-D al bordo deve essere $c = -\lambda$

e $g(x) = \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$

Ogni soluzione è somma di queste soluzioni speciali

—o—o—

<u>Esempio</u> Prendiamo $[0,1]$ con cond. D-D e $u_0(x) \equiv 1$



$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{CALORE} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{ICE} \\ u(x,0) = u_0(x) = 1 \end{cases}$$

Seguo la ROAD MAP

① Uso la serie di F. D-D in $[0,1]$: $e_k(x) = \sin(k\pi x)$
Chi sono i λ_k ?

$$e_k''(x) = -\underbrace{\boxed{\pi^2 k^2}}_{\lambda_k} e_k(x)$$

② Sviluppo $\qquad u_0(x) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} u_{0k}\, e_k(x)$

$$u_{0k} = \frac{\langle 1, e_k(x) \rangle}{\langle e_k(x), e_k(x) \rangle}$$ ← prod. scalari in $L^2((0,1))$

$$\langle 1, e_k(x) \rangle = \int_0^1 \sin(k\pi x)\, dx = \frac{1}{k\pi}\left(-\cos(k\pi x)\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(-\cos(k\pi) + 1\right) = \frac{2}{k\pi} \quad \text{se } k \text{ è dispari}$$
$$= 0 \quad \text{se } k \text{ è pari}$$

$$\langle e_k(x), e_k(x) \rangle = \int_0^1 \sin^2(\underbrace{kx}_{y})\, dx = \int_0^{k\pi} \sin^2 y \cdot \frac{1}{k}\, dy = \frac{1}{\cancel{k}} \frac{\cancel{k}\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $u_{0k} = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{k}$ se k è dispari

$= 0$ se k è pari

$$u_0(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \dots\right)$$

③ Allora per la formula

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1}^{\infty} u_{0k}\, e^{-\lambda_k t}\, e_k(x)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left[e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + \frac{e^{-9\pi^2 t}}{3}\sin(3\pi x) + \dots \right]$$

Da questa si vede che per $t>0$ la $u(t,x)$ è nulla al bordo e per $t \to +\infty$ tutto tende a 0.
Per fare questo sto scambiando serie e limiti, cosa che posso fare solo se ho convergenza uniforme, cosa che andrà dimostrata (utilizzando a favore gli esponenziali negativi)

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 26

Titolo nota 18/04/2015

Regolarità per l'equazione del calore

D-D in un intervallo $[0,\ell]$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k\geq 1}^{\infty} u_{0k}\, e^{-\lambda_k t}\, e_k(x)}$$

Supponiamo di avere dato iniziale $u_0(x) \in L^2((0,\ell))$. Allora

$$\sum_{k\geq 1}^{\infty} u_{0k}^2 = \int_0^{\ell} [u_0(x)]^2\, dx < +\infty$$

quindi $u_{0k} \to 0$ ed in particolare sono limitati, quindi esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

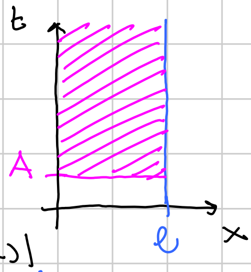
$$|u_{0k}| \leq M \qquad \forall k \geq 1.$$

Inoltre $\lambda_k = k^2 \dfrac{\pi^2}{\ell^2}$ ed $e_k(x) = \sin\left(k \dfrac{\pi}{\ell} x\right)$

Penso

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1}^{\infty} \underbrace{f_k(x,t)}_{= u_{0k}\, e^{-\lambda_k t}\, e_k(x)}$$

Dimostro che la serie converge totalmente, dunque uniformemente, su tutti gli insiemi del tipo $x \in [0,\ell]$ $t \geq A > 0$



(Commento: le storie di conv. tot., unif., valgono uguali per funzioni di 2 o più var.)

$$\sup_{\substack{x\in[0,\ell]\\ t\geq A}} |f_k(x,t)| = \sup_{\substack{x\in[0,\ell]\\ t\geq A}} \underbrace{|u_{0k}|}_{\leq M} \cdot \underbrace{e^{-\lambda_k t}}_{\leq e^{-\lambda_k A}} \cdot \underbrace{|e_k(x)|}_{\leq 1}$$

$$\leq M e^{-\lambda_k A}$$

Quindi

$$\sum_{k \geq 1} \sup \ldots \leq M \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k A} =$$

$$= M \sum_{k \geq 1} e^{-\text{coeff.}\, k^2} < +\infty$$

Quindi c'è convergenza totale!!!

Mostriamo che $u_{xx}(t,x)$ converge e

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} \underbrace{u_{0k}\, e^{-\lambda_k t} (-\lambda_k)\, e_k(x)}_{f_{k\,xx}(x,t)}$$

Per farlo basta verificare la convergenza totale della serie

$$\sup_{\substack{x \in [0,\ell] \\ t \geq A}} |f_{k\,xx}(x,t)| \leq M e^{-\lambda_k A} \lambda_k \cdot 1 = M \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} e^{-k^2 \cdot \text{coeff}}$$

e ancora una volta c'è convergenza. Quindi u_{xx} esiste ed è quello che uno si aspetta per ogni $x \in [0,\ell]$ e per ogni $t > 0$.

Idem per u_t

Stesso discorso per una qualunque derivata parziale di qualunque ordine in x e t. Moralmente: scendono potenze di k (2 per ogni derivata wrt a t e 1 per ogni derivata wrt a x) però il termine $e^{-k^2 \cdot \text{coeff}}$ sistema la conv. totale.

Quindi le soluz. dell'eq. del calore sono C^∞ in $[0,\ell] \times (0, +\infty)$ anche se il dato $u_0(x)$ è pessimo.

escluso

---o---o---

DBC $\rightsquigarrow$ ghiaccio a temperatura 0 in quell'estremo

NBC $\rightsquigarrow$ NO FLUX CONDITION = non entra o esce calore

$\rightsquigarrow$ estremo isolato termicamente

Se ho NBC in tutti e 2 gli estremi mi aspetto che ci sia convergenza ad una temperatura costante in tutti i p.ti e uguale alla media di $u_0(x)$.

$\boxed{\text{Conto energetico}}$ $E(t) = \int_0^\ell u(x,t)\,dx$ = calore totale della sbarretta

$$E'(t) = \int_0^\ell u_t(x,t)\,dx = \int_0^\ell u_{xx}(x,t)\,dx$$

$$= \left[u_x(x,t)\right]_{x=0}^{x=\ell}$$

$$= u_x(\ell,t) - u_x(0,t)$$

$= 0$ → sia se ho condizioni N-N
→ sia se ho condizioni P

quindi $E(t)$ è costante lungo la soluzione.

$\boxed{\text{Formula risolutiva}}$ $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}\, e^{-\lambda_k t} \cos\left(k\frac{\pi}{\ell}x\right)$

$$\lambda_k = k^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

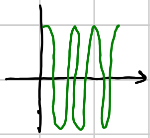
Dal p.to di vista della convergenza è come il caso D-D, quindi conv. tot. e dunque unif. in $[0,\ell] \times [A,+\infty)$ con $A>0$, sia per u sia per le sue derivate.

Quando $t \to +\infty$, tutti i termini con $k \geq 1$ tendono a 0 esponenzialmente. Resta solo quello con $k=0$

$$u(x,t) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}\, e^{-\lambda_k t}\, e_k(x)}_{\downarrow\ 0 \text{ per } t \to +\infty}$$

$a_0 \to \int_0^\ell u_0(x)\,dx$

Oss. Più un termine è oscillatorio (k grande), più λ_k è grande, più l'abbattimento $e^{-\lambda_k t}$ è veloce



— o — o —

Seconda stima energetica

Consideriamo

$$F(t) = \int_0^\ell [u(x,t)]^2 dx$$ (norma L^2 della sol. al tempo t)

$$F'(t) = \int_0^\ell 2 u u_t \, dx = 2 \int_0^\ell u u_{xx} \, dx$$ (integro per parti)

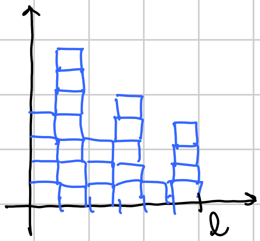
$$= -2 \int_0^\ell u_x^2 \, dx + 2 \underbrace{[u u_x]_{x=0}^{x=\ell}}_{=0 \text{ in tutti i casi D-D, D-N, N-N, P, N-D}}$$

$$\leq 0$$

quindi $F(t)$ è deb. decrescente lungo le traiettorie.

— o — o —

INTERPRETAZIONE STATISTICA



Brutalmente, penso al grafico di $u_0(x)$ come una pila di casse (ho discretizzato lo spazio).
Discretizzo anche il tempo, cioè penso ad istanti $t=0$, $t=R$, $t=2R$, $t=3R$, ...
Dall'istante kR all'istante $(k+1)R$ ogni cassa decide con prob. $\frac{1}{2}$ se andare a dx o sx.
Questo "mima" l'equazione del calore

$C_{i,k}$ = casse nella location i al tempo k

(i: spazio, k: tempo)

$$C_{i,k+1} = \frac{1}{2} C_{i+1,k} + \frac{1}{2} C_{i-1,k}$$ segue dalla legge dichiarata

(in media)

Sottraggo $c_{i,k}$

$$c_{i,k+1} - c_{i,k} = \frac{1}{2} c_{i+1,k} + \frac{1}{2} c_{i-1,k} - c_{i,k}$$

$$c_{i,k+1} - c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k} + c_{i-1,k} - 2c_{i,k}}{2}$$

Dividiamo per il passo temporale h

$$\boxed{\frac{c_{i,k+1} - c_{i,k}}{h}} = \boxed{\frac{c_{i+1,k} + c_{i-1,k} - 2c_{i,k}}{2h}}$$

$$u_t \qquad\qquad \frac{1}{2} u_{xx}$$ se h è il quadrato del passo spaziale

$$\frac{u(x,t+h) - u(t)}{h} \qquad\qquad \frac{u(x+\sqrt{h},t) + u(x-\sqrt{h},t) - 2u(x,t)}{2h}$$

Fatto generale
$$\frac{f(x+k) + f(x-k) - 2f(x)}{2k^2} =$$

$$= \frac{\cancel{f(x)} + \cancel{kf'(x)} + \frac{1}{2}k^2 f''(x) + \cancel{f(x)} - \cancel{kf'(x)} + \frac{1}{2}k^2 f''(x) - 2\cancel{f(x)}}{2k^2}$$

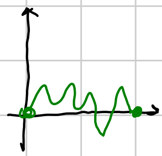
$$= \frac{f''(x)}{2}$$

SSSUP 2015 — LEZIONE 27

Titolo nota 18/04/2015

Equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in [0, \ell],\ t \geq 0 \\ \text{BC dei soliti tipi} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$



Modello: A t fisso, $x \to u(t,x)$ è la configurazione di una corda che vibra

→ BC rappresentano le condizioni al bordo per la corda (D: estremo fisso, N: estremo libero, P: corda infinita periodica)

→ $u_0(x)$ è la posizione iniziale della corda

→ $u_1(x)$ è la velocità iniziale di ogni p.to della corda

→ u_{tt} = accelerazione che dipende da u_{xx}

L'approccio è lo stesso del calore. Scrivo $u(x,t)$ nella forma

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} u_k(t)\, \underbrace{e_k(x)}$$

↑ base ortogonale di $L^2((0,\ell))$ con le BC date

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)\, e_k(x)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,(-\lambda_k)\, e_k(x)$$

Quindi impongo $\boxed{u_k''(t) = -\lambda_k u_k(t)}$ e ottengo

$$u_k(t) = a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)$$

dove a_k e b_k li devo determinare sulla base delle cond. iniziali.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}\, e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\, e_k(x) = u(x,0)$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}\, e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\, e_k(x) = u_t(x,0)$$

Quindi
$$\boxed{\begin{aligned} u_k(0) &= u_{0k} \\ u_k'(0) &= u_{1k} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\rightsquigarrow\ a_k = u_{0k} \\ &\rightsquigarrow\ b_k\sqrt{\lambda_k} = u_{1k} \end{aligned}$$

Quindi
$$u_k(t) = u_{0k}\cos(\sqrt{\lambda_k}\,t) + \frac{u_{1k}}{\sqrt{\lambda_k}}\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)$$

Conclusione
$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{0k}\cos(\sqrt{\lambda_k}\,t) + \frac{u_{1,k}}{\sqrt{\lambda_k}}\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)\right] e_k(x)}$$

ROAD MAP
1. Scelgo $e_k(x)$ e λ_k sulla base delle BC
2. Trovo u_{0k} e u_{1k} scrivendo le componenti dei dati iniziali
3. Uso la formula scritta sopra

Caso particolare: Condizioni D-D (corda fissa agli estremi) $\ell = \pi$. Allora $e_k(x) = \sin(kx)$ e $\lambda_k = k^2$. La formula diventa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{0k}\cos(kt) + \frac{u_{1,k}}{k}\sin(kt)\right]\sin(kx)$$

Stima energetica
$$E(t) = \underbrace{\int_0^{\ell} u_t^2(x,t)\,dx}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\int_0^{\ell} u_x^2(x,t)\,dx}_{\text{energia potenziale di tipo elastico}}$$

Supponendo di poter fare le derivate

$$E'(t) = \int_0^\ell 2 u_t \underset{u_{xx}}{\underset{\shortparallel}{u_{tt}}}\, dx + \underbrace{\int_0^\ell 2 u_x u_{xt}\, dx}_{\text{integro per parti}}$$

$$= \underbrace{2\int_0^\ell u_t u_{xx}\, dx - 2\int_0^\ell u_{xx} u_t \, dx}_{=0} + \underbrace{2\left[u_x u_t\right]_0^\ell}_{\substack{=0 \\ \text{con tutte le cond.} \\ \text{solite}}}$$

$$\left[u_x u_t\right]_0^\ell = u_x(\ell,t)\, u_t(\ell,t) - u_x(0,t)\, u_t(0,t)$$

Se è N-N si annullano entrambi i termini per colpa di u_x.
Se è D-D allora $u(\ell,t)=0$ per ogni t, quindi $u_t(\ell,t)=0$ per ogni t, e lo stesso vale per $x=0$, quindi entrambi i termini si annullano per colpa di u_t.
Nel caso periodico avviene qualcosa di simile.

<u>Conclusione</u>: con le condizioni al bordo classiche l'energia si conserva.

<u>Piccola osservazione su BC per calore e onde</u>

→ come faccio se sono $u(0,t)=5$ e $u(\ell,t)=7$.
Basta osservare che

1- tutte le rette fisse $u(x,t)=ax+b$ sono soluzioni gratis per calore ed onde
2- le equazioni sono lineari, quindi se u e v sono soluz. allora anche $u+v$ è soluzione
3- basta risolvere con dato D-D nullo e poi aggiungere la retta fissa che interpola i dati giusti al bordo.
Ovviamente devo aggiustare la condizione iniziale.

— o — o —

$\boxed{\text{Regolarità per l'equazione delle onde}}$

Se l'eq. del calore "migliorava" il dato $u_0(x)$, questo NON accade per l'eq. delle onde.

Supponiamo che $u_1(x) \equiv 0$, quindi velocità iniziale nulla, quindi $u_{1,k} = 0$ e quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_{0k} \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t)}_{\text{coeff.}} e_k(x)$$

Se $u_0(x) \in L^2$, allora $\sum u_{0k}^2 < +\infty$, e per fortuna

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^2 \cos^2(\sqrt{\lambda_k}\, t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$$

quindi se era L^2 all'inizio resta L^2 per tutti i $t \geq 0$, ma in generale niente di più.

Supponiamo ora che $u_0(x) \equiv 0$, cioè $u_{0k} \equiv 0$. Allora

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)\, e_k(x)$$

Se $u_1(x) \in L^2$, allora $\sum u_{1k}^2 < +\infty$, quindi

$$\sum u_{1k}^2 \frac{1}{\lambda_k} \sin^2(\sqrt{\cdot\cdot}\, t) < +\infty \quad \text{ma anche}$$

$$\sum k^2 \Big[u_{1k}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{circa } k^2}}{\frac{1}{\lambda_k}} \sin^2(\sqrt{\lambda_k}\, t) \Big] < +\infty$$

Fatto generale
$$\sum a_k^2 < +\infty \iff \sum a_k e_k(x) \in L^2$$

$$\sum k^2 a_k^2 < +\infty \iff \sum a_k e_k(x) \in H^1$$

Quindi $u_1(x) \in L^2 \Rightarrow$ soluzione in H^1

<u>Morale</u>: c'è uno sfasamento di 1 tra gli spazi, in particolare se

$u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$, allora la soluzione sta in H^1

Ancora più in generale:

se $u_0 \in H^\alpha$ e $u_1 \in H^{\alpha-1}$, allora la soluzione sta in H^α

Dove sta u_t? Nelle ipotesi di sopra sta in $H^{\alpha-1}$ perché il $\sqrt{\lambda_k} \sim k$ che esce derivando rispetto a t si "mangia" uno dei k che erano presenti.

Se voglio soluzioni abbastanza regolari, devo prendere dati abbastanza regolari.

— o — o —

SSSUP 2015 – LEZIONE 28

Titolo nota 21/04/2015

Equazione delle onde in R

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

NO B.C.

cerco una funzione $u : \underset{x}{\mathbb{R}} \times \underset{t}{[0,+\infty)}$ che risolve il problema.

Su tutto $\mathbb{R}$ cerco una soluzione del tipo

$$u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$$

per una opportuna funzione $v(z,w)$.
Calcolo u_{tt} e u_{xx} con la chain rule:

$$u_t = v_z \cdot c + v_w(-c) = c v_z - c v_w$$

$$u_{tt} = c^2 v_{zz} + c\, v_{zw}(-c) - c^2 v_{wz} + c^2 v_{ww}$$

$$\boxed{u_{tt} = c^2 v_{zz} + c^2 v_{ww} - 2c^2 v_{zw}}$$

$$u_x = v_z + v_w \quad , \quad \boxed{u_{xx} = v_{zz} + 2 v_{zw} + v_{ww}}$$

Se impongo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ resta $-2c^2 v_{zw} = 2c^2 v_{zw}$
quindi l'unica possibilità è

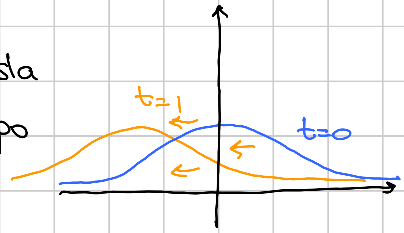
$$\boxed{v_{zw} = 0}$$

da qui si deduce $v_z = \gamma(z)$ $\quad v = f(z) + g(w)$

Ritornando in u abbiamo che

$$\boxed{u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

Come sono fatti i 2 addendi



$f(x+ct)$ = è un profilo fisso che trasla verso sx al crescere del tempo con velocità c

= TRAVELING WAVE

(profilo fisso che trasla a sx)

$g(x-ct)$ = TRAVELING WAVE che va verso destra

Ogni soluzione è somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta

Come trovo f e g sulla base delle condiz. iniziali

$$\boxed{u_0(x) = u(x,0) = f(x) + g(x)}$$

$$u_t(x,t) = c f'(x+ct) - c g'(x-ct)$$

$$\boxed{u_1(x) = u_t(x,0) = c\,[f'(x) - g'(x)]}$$

Derivo la 1ª condizione e ottengo
$$u_0'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$\frac{u_1(x)}{c} = f'(x) - g'(x)$$

Sommando: $$f'(x) = \frac{u_0'(x)}{2} + \frac{u_1(x)}{2c}$$

$$g'(x) = \frac{u_0'(x)}{2} - \frac{u_1(x)}{2c}$$

Quindi $$f(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(z)\,dz$$

$$g(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(z)\,dz$$

Potrei mettere costanti, ma alla fine se ne andrebbero

In conclusione

$$\boxed{u(x,t) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z)\,dz}$$

Caso particolare: se fosse $u_1 \equiv 0$ (velocità nulla all'inizio), sarebbe come se $u_0(x)$ si spezzasse in $\frac{u_0(x)}{2} + \frac{u_0(x)}{2}$ e i due pezzi traslano verso dx e sx.

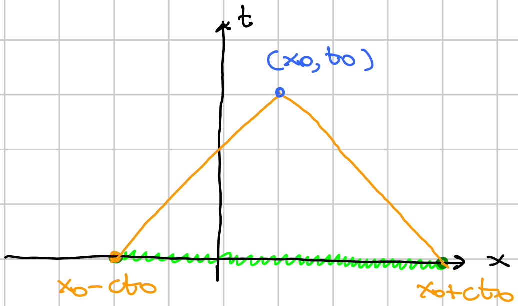
DOMINIO DI DIPENDENZA Fisso un p.to x_0 e fisso un istante t_0.

Da cosa dipende $u(x_0,t_0)$?

Risposta: dipende solo da

- due valori di $u_0(x)$ e cioè $u_0(x_0 \pm ct_0)$
- tutti i valori di $u_1(x)$ nell'intervallo $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$.

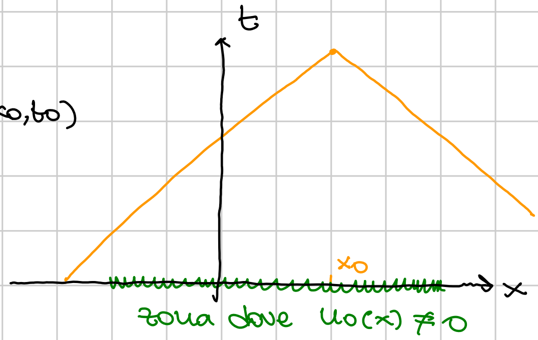
Nello spazio-tempo il valore in (x_0,t_0) dipende dai valori di $u_0(x,t)$ e $u_1(x,t)$ nel cono con vertice in (x_0,t_0) e pendenza propor. a c.



Caso particolare Supponiamo che $u_1(x) \equiv 0$ e supponiamo $u_0(x)$ nulla fuori da un intervallo.

In ogni x_0 prima o poi avremo che $u(x_0,t)=0$

Appena il cono finisce fuori, in (x_0,t_0) c'è $u=0$.



Analogamente, se anche $u_1(x) = 0$ fuori da un intervallo $[a,b]$, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si avrà che

$$u(x_0,t) = \frac{1}{2c}\int_a^b u_1(z)\,dz \qquad \forall\, t \text{ abbastanza grande}$$

non appena $[x_0-ct,\ x_0+ct] \supseteq [a,b]$

<u>Parentesi</u> In più dimensioni $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ l'equazione delle onde diventa

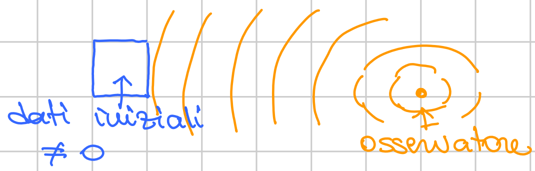
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (+\ u_{zz} \text{ in } \mathbb{R}^3)$$
$$= \Delta u$$

Ci sono formule analoghe, solo più complicate.
Vale però il discorso del dominio di dipendenza, cioè $u(x_0, t_0)$ dipende

* in $\mathbb{R}^2$ dai valori dei dati iniziali nel cerchio di centro x_0 (p.to del piano) e raggio ct_0 (idem in dim. pari)
* in $\mathbb{R}^3$ solo dai valori sulla superficie sferica (idem in dim. dispari ≥ 3)

Differenza tra dim. 2 e dim 3.
→ in dim 2 c'è dipendenza dal cerchio, interno compreso
→ in dim 3 dalla sola superficie sferica.

<u>Esempio in $\mathbb{R}^2$</u>



appena il cerchio con centro nell'osserv. e raggio ct_0 tocca la zona con dati iniz. $\neq 0$ inizia a essere $u \neq 0$ nel punto dell'osserv.

In $\mathbb{R}^3$ appena la sfera supera i dati iniziali, torna ad essere $u = 0$ nel p.to dell'osservatore.

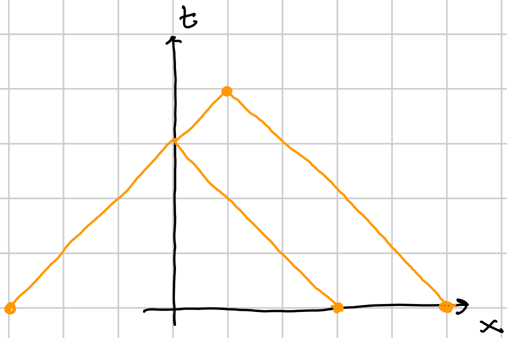
Tornando in dim. 1

La formula risolutiva permette di dare un senso alla soluzione anche se u_0 e u_1 non sono di classe C^2

Se invece di essere su tutto $\mathbb{R}$ siamo solo sulla semiretta $x \geq 0$, possiamo ancora avere una formula risolutiva?
Intanto serve una BC in $x=0$, diciamo D o N.
Facciamo che sia Neumann.

Voglio risolvere
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t \geq 0 \quad x \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \geq 0 \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \forall x \geq 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Idea: estendo $u_0(x)$ e $u_1(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per "parità".
Risolvo su $\mathbb{R}$ con i nuovi dati. Ottengo una $u(x,t)$ pari che quindi avrà per forza condiz. di N in $x=0$.



Futuro: posso usare un trucco di riflessioni multiple anche per risolvere su un intervallo

— o — o —

SSSUP 2015 — LEZIONE 29

Titolo nota 21/04/2015

Calcolo delle variazioni in più variabili

$$F(u) = \int_0^1 [\dot{u}^2 + (u - f(x))^2]\, dx$$

funzione data

Problema: $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \}$

Eulero 1ª forma: $\int_0^1 \cancel{2}\dot{u}\dot{v} + \cancel{2}(u - f(x))\, v\, dx = 0 \quad \forall v \in C^1$

Eulero 2ª forma: $\int_0^1 [-\ddot{u} + u - f]\, v\, dx + [\dot{u} v]_0^1$

Usando v nulle al bordo + lemma DBR $\rightsquigarrow$ $\ddot{u} = u - f$

Usando ora $v \neq 0$ al bordo $\rightsquigarrow$ $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$

— o — o —

Facciamo lo stesso (l'analogo) in 2 variabili.
Prendo $f(x,y)$ data e considero $u(x,y)$ che minimizza

$$F(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 + (u - f)^2\, dx\, dy$$

sotto insieme dato di $\mathbb{R}^2$ $\quad u_x^2 + u_y^2$

tra tutte le $u \in C^1(\Omega)$.

Scrivo $F(u + tv) = \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|^2 + (u + tv - f)^2\, dx\, dy$

$\nabla u + t \nabla v \qquad [(u-f) + tv]^2$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, dx\, dy$$

$$+ \int_{\Omega} (u-f)^2 + t^2 v^2 + 2t\, (u-f)\, v\, dx\, dy$$

Derivo rispetto a t e pongo $t=0$. A meno di fattori 2 resta

$$\boxed{\int_\Omega \left[\langle \nabla u, \nabla v \rangle + (u-f)\, v \right] dx\, dy = 0 \qquad \forall v \in C^1(\Omega)}$$

Eulero 1ª forma

Parentesi: formula di Gauss – Green o teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$)

$\boxed{GG1}$
$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds}_{\text{flusso di } \vec{E} \text{ sul bordo}}$$

$\boxed{GG2}$ Data una funzione u e una funzione vettoriale $\vec{V}$ (campo di vettori) si ha

$$\int_\Omega \underset{\text{numero}}{u} \cdot \underset{\text{numero}}{\operatorname{div} \vec{V}}\, dx dy = \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{n}}_{\text{prod. scalare}}\, ds - \int_\Omega \underbrace{\nabla u \cdot \vec{V}}_{\text{prod. scalare tra 2 vettori}}\, dx\, dy$$

$\boxed{GG2 \Rightarrow GG1}$ Basta prendere $\vec{E} = \vec{V}$ e $u \equiv 1$ e osservare che $\nabla u \equiv 0$.

$\boxed{GG1 \Rightarrow GG2}$ Basta prendere $\vec{E} = \underset{\text{scalare}}{u} \cdot \underset{\text{vettore}}{\vec{V}}$ e osservare che

$$\underset{\text{scalare}}{\operatorname{div}} \vec{E} = \underbrace{\nabla u \cdot \vec{V}}_{\text{prod. scalare di vettori}} + \underbrace{u \operatorname{div} \vec{V}}_{\text{prodotto di numeri}}$$

in alternativa $\quad \vec{E} = (u \cdot V_1,\, u\, V_2)$

$$\operatorname{div} \vec{E} = (u V_1)_x + (u V_2)_y$$
$$= \underbrace{u_x V_1}_{\nabla u \cdot V} + \underbrace{u V_{1x}} + \underbrace{u_y V_2}_{u \operatorname{div} \vec{V}} + \underbrace{u V_{2y}}$$

Se scrivo GG1 con questo E ottengo GG2

Torniamo alla 1ª forma di Eulero

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\,dy + \int_\Omega (u-f)\, v \, dx\,dy$$

Ora

$$\int_\Omega \underbrace{\nabla u}_{\text{derivata}} \cdot \underbrace{\nabla v}_{\text{"primitiva"}} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} v \, \nabla u \cdot \vec{n} \, ds - \int_\Omega v \, \underbrace{\operatorname{div} \nabla u}_{\Delta u} \, dx\,dy$$

Inserendolo nella 1ª forma di Eulero troviamo

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} v \, \nabla u \cdot \vec{n} \, ds}_{\text{termine di bordo}} + \int (-\Delta u + u - f)\, v \, dx\,dy$$

che è la seconda forma di Eulero.
Procedo come in dimensione 1:

→ scelgo $v = 0$ al bordo, il primo integrale sparisce, e con un lemma DBR in dim 2 trovo

$$\boxed{\Delta u = u - f}$$ Eulero in forma diff.

→ ora so che il 2° integrale è nullo, quindi deve essere nullo il 1°, quindi usando $v \neq 0$ sul bordo con una specie di lemma DBR ottengo

$$\underbrace{\nabla u \cdot \vec{n}}_{\text{derivata direzionale}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0}$$ Neumann in 2 variabili

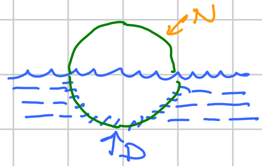
derivata direzionale normale al bordo.

Se partivo con una condizione di Dirichlet, la ritrovavo sull'equazione finale.

Oss. Se assegno D su una parte di $\partial\Omega$, sulla restante nasce N, cioè $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Nell' eq. delle onde o del calore l' equivalente di u_{xx} diventa Δu

Esempio Cocomero immerso a metà nell' acqua.



Dovrei risolvere:

$$u_t = \Delta u \qquad t \geq 0 \quad x \in \text{cocomero}$$

$u(x,0) = u_0(x) \leftarrow$ temperatura iniziale

$u(x,t) =$ temp. acqua su mezzo cocomero (superficie immersa)

$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0$ su mezzo emerso.

Per risolvere calore / onde in dim 1 su un intervallo era servita la serie di Fourier, ottenuta a partire dalle soluzioni di $\ddot{u} = -\lambda u$ con BC.

Ora si tratta di risolvere $\Delta u = -\lambda u$ in Ω con le opportune BC.

$\boxed{\text{Caso in cui } \Omega = \text{quadrato o rettangolo}}$ $\quad \Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$

Con condizioni D sono autovettori tutte le funzioni del tipo

$$u_{i,j}(x,y) = \sin(ix) \cdot \sin(jy)$$

È immediato verificare che $\Delta u_{i,j} = \underbrace{-(i^2+j^2)}_{\lambda} u_{i,j}$

Analogamente nel caso N le autofunzioni sono

$$u_{i,j}(x,y) = \cos(ix) \cdot \cos(jy)$$

Fatto meno evidente: sono tutte e sole queste, quindi sono una base ortogonale di $L^2(Q)$.

Conseguenza: ogni $f \in L^2(Q)$ la posso scrivere come

$$\sum_{i,j} c_{i,j} \sin(ix)\sin(jy)$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{\text{cost}} \int_Q f(x,y)\sin(ix)\sin(jy)\,dx\,dy$$

$$\text{cost} = \int_Q \sin^2(ix)\cdot\sin^2(jy)\,dx\,dy = \text{si calcola.}$$

Fatto generale

$$v = \sum c_i e_i$$

$$\langle v, e_i\rangle = c_i \langle e_i, e_i\rangle \implies c_i = \frac{\langle v, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

— o — o —

SSSUP 2015 – LEZIONE 30

Titolo nota 21/04/2015

Algoritmo JPEG → wiki in inglese

Compressione di immagini : ogni pixel ha un colore descritto da una terna di numeri (da 0 a 255)

Immagine : 3 matrici $i \times j$ (i e j sono le dim. orizz. e vert.)
Facciamo finta che sia una sola matrice (immagine per semplicità in B/N)
Immagine FULL HD con colore a 24 bit $\sim$ 6 MB

Prima scomposizione: dividiamo la matrice in matrici 8×8.

Tutto si riduce a comprimere blocchi 8×8.
Lo spazio delle matrici 8×8 ha dim. 64, quindi dovrei salvare 64 componenti

Strategia migliore: usare una base diversa nello spazio delle matrici e poi trasmetto solo alcune componenti rispetto a questa base, quelle "più importanti".

Sarebbe comodo avere una base ortonormale, perchè calcolo facilmente le componenti.

Idea: trovare operatore A: matrici → matrici e che verifichi le ipotesi del teo. spettrale

L'applicazione funziona così: ad ogni matrice M ne associo una nuova sostituendo ogni elemento con la somma di quelli (4) che gli stanno accanto. Bisogna vedere al bordo.

Scendiamo di una dimensione: matrici $\rightsquigarrow$ vettori

Av = sostituire ogni elemento con la somma dei 2 vicini

$$\begin{aligned} f(x) \rightsquigarrow\ & f(x+h) + f(x-h) \\ &= f(x) + h\cancel{f'(x)} + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + f(x) - h\cancel{f'(x)} + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) \\ &= 2f(x) + h^2 f''(x) \end{aligned}$$

Se cerco gli autovalori, sto cercando di risolvere

$$2f(x) + h^2 f''(x) = \lambda f(x)$$

$$f''(x) = \frac{\lambda - 2}{h^2} f(x)$$

Sui vettori

- → l'equivalente di $f'(x)$ è fare $v_{i+1} - v_i$
- → l'equivalente di $f''(x)$ è fare $v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i$

Fare gli autovalori di $f''(x)$ equivale a fare gli autovalori di $v_{i+1} - v_{i-1} = \lambda v_i$.
A livello di matrici, fare

$$\{m_{i,j}\} \rightsquigarrow \{m_{i+1,j} + m_{i-1,j} + m_{i,j+1} + m_{i,j-1} - 4m_{i,j}\}$$

è l'equivalente del laplaciano

Condizioni di Neumann equivale a riflettere sui lati

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & -1 & 7 \\ \hline 2 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 5 & 5 & & & \\ 3 & 3 & & & \end{array}$$

La base ortonormale è fatta da 64 matrici i cui elementi sono del tipo

$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{16} i\right) \cdot \cos\left((2\ell+1)\frac{\pi}{16} j\right) = \text{elemento } \underbrace{(i,j)}\text{ della base}$$

k e ℓ sono gli indici della casella (k,ℓ) della matrice

sono gli indici dell'elemento (i,j) della base

$\rightsquigarrow$ corrisponde a $\cos\left(\frac{\pi}{16} i x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16} j y\right) = e_{i,j}(x,y)$

Limitiamoci a $\cos(\alpha(2k+1)) = c_k$

$$c_{k+1} + c_{k-1} = \cos(\alpha(2k+3)) + \cos(\alpha(2k-1))$$

$$= \text{coeff.} \cos(\underbrace{\alpha(2k+1)}_{\text{semisomma}}) \cdot \cos(2\alpha)$$

$$= \text{coeff.}\ c_k$$

quindi il vettore c_k è un autovalore della derivata seconda discreta

Conclusione dell'algoritmo: ho una nuova base costituita da 64 matrici, alcune + importanti di altre (quelle con i e j piccolo sono le più importanti).

A quel p.to, se voglio risparmiare, considero solo le comp. rispetto ai primi elementi.

Scuola Superiore di Studi Universitari e di Perfezionamento S. Anna

Esame di Complementi di Analisi Matematica II

Pisa, 13 Aprile 2015

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = (3 + \sin^2 x) \cos \frac{1}{x}.$$
Calcolare liminf e limsup di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to 0^-$.

2. Consideriamo la funzione definita da
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^3 x^6}.$$
   (a) Determinare per quali valori reali di x si ha convergenza puntuale.
   (b) Dimostrare che la funzione $f(x)$, dove è definita, è continua e derivabile.
   (c) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad\qquad \lim_{x \to 0} f(x).$$

3. Consideriamo il problema di minimo
$$\min \left\{ \int_0^3 [\dot{u} + u + x]^2 \, dx : u \in C^1([0,3]),\ u(3) = 0 \right\}.$$
   (a) Determinare l'equazione di Eulero associata al problema e le relative condizioni al bordo.
   (b) Determinare se il problema di minimo ha soluzione e in caso affermativo determinare se il punto di minimo è unico.

4. Consideriamo il funzionale
$$F(u) = \int_0^1 \left[\ddot{u}^2 + \dot{u}^2 + 5xu \right] dx$$
ed il problema di minimo
$$\min \left\{ F(u) : u \in C^2([0,1]),\ u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1) \right\}.$$
   (a) Determinare l'equazione di Eulero associata al problema e le relative condizioni al bordo.
   (b) Dando per buono che l'equazione di Eulero ha soluzione (unica), dimostrare che si tratta di un punto di minimo.
   (c) Studiare il problema di minimo per $F(u)$ tra tutte le funzioni $u \in C^2([0,1])$ tali che $u'(0) = 2$.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Corso di Complementi di Analisi Matematica II by Massimo Gobbino – **Compito finale**

Compitino – Testo

SSSUP 2015 — Compitino 1

Titolo nota 18/04/2015

(1) $f(x) = (3+\sin^2 x)\cos\frac{1}{x}$ liminf / limsup a $+\infty$ e 0^-

$\boxed{\text{Per } x \to +\infty}$ $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = 4$ $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 3$

Limsup • Disug. dall'alto

$$f(x) \leq 4 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) \leq 4$$

• Succ. dal basso $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

liminf • Disug. dal basso : $3+\sin^2 x \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Per $x \geq 1$ posso molt. conservando i versi per $\cos\frac{1}{x}$

$$(3+\sin^2 x)\cos\frac{1}{x} \geq 3\cos\frac{1}{x} \qquad \forall\ x \geq 1$$

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) \geq 3$$

• Succ. dall'alto : $x_n = \pi n$

$\boxed{\text{Idem per } x \to 0^+}$

limsup $\cos\frac{1}{x} \leq 1 \qquad \forall\ x \neq 0$

Molt. per $3+\sin^2 x$ che è ≥ 0

$$f(x) \leq 3+\sin^2 x \quad \text{da cui} \quad \limsup_{x\to 0^-} f(x) \leq 3$$

— o — o —

Compitino – Traccia delle soluzioni

(2)

$$f(x) = \sum \boxed{\frac{1}{n + n^3 x^6}}_{f_n(x)}$$

Conv. puntuale $\quad x = 0$ NO $\quad \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$x \neq 0$ confr. asint. con $\sum \frac{1}{n^3}$

Conv. totale in $[A, +\infty)$ con $A > 0$

$$\sup_{x \geq A} f_n(x) = \frac{1}{n + n^3 A^3}$$

$\sum \sup < +\infty \Rightarrow$ conv. totale $\Rightarrow$ conv. unif. in $[A, +\infty)$

$\Rightarrow$ continuità del limite + teorema di scambio

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$$

garantisce anche f continua in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$,
quindi f continua in $(0, +\infty)$

$$f_n'(x) = -\frac{6n^3 x^5}{(n + n^3 x^6)^2}$$

$$\sup_{x \geq A} |f_n'(x)| = \sup_{x \geq A} \frac{6n^3 x^5}{(n + n^3 x^6)^2} \leq \sup_{x \geq A} \frac{6n^3 x^5}{n^6 x^{12}}$$

$$= \sup_{x \geq A} \frac{6}{n^3 x^7} = \frac{6}{n^3 A^7}$$

$\sum \sup |f_n'(x)| < +\infty \Rightarrow$ conv. tot. $\Rightarrow$ conv. unif
$\Rightarrow f$ derivabile in $[A, +\infty)$
per ogni $A > 0$
$\Rightarrow f$ derivabile in $x > 0$

Funzione pari $\Rightarrow$ idem in $x < 0$.

$\lim_{x \to 0} f(x)$ non posso usare thm. di scambio.

$S_n(x)$ = somme parziali $\quad f(x) \geq S_n(x) \quad \forall x \quad \forall n$

$$\liminf_{x \to 0} f(x) \geq \liminf_{x \to 0} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \forall n$$

è un limite su una somma finita

quindi $\quad \liminf_{x \to 0} f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$

— o — o —

Oss. $\quad |f_n'(x)| = \dfrac{6n^3x^5}{(n+n^3x^6)^2}$

Posso prendere $x \in [A,B]$ e dire $\quad (A>0)$

$$\sup_{x \in [A,B]} |f_n'(x)| \leq \frac{6n^3B^5}{(n+n^3A^6)^2} \sim \frac{1}{n^3}$$

$\sum \sup < +\infty \Rightarrow$ conv. tot. e unif in $[A,B]$

$\Rightarrow$ deriv. in $[A,B]$

— o — o —

③ $F(u) = \int_0^3 [\ddot{u} + u + x]^2 dx \qquad u(3) = 0$

$$F(u+tv) = \int_0^3 [\ddot{u} + t\ddot{v} + u + tv + x]^2 dx$$

$$= \int_0^3 [(\ddot{u}+u+x) + t(\ddot{v}+v)]^2 dx = \dots$$

... in alternativa $\quad [\varphi_{\ddot{u}}]'' = \varphi_u$

$$\cancel{2}(\ddot{u}+u+x)'' = \cancel{2}(\ddot{u}+u+x)$$

$$\ddddot{u} + \cancel{\ddot{u}} + 1 = \cancel{\ddot{u}} + u + x$$

$$\ddddot{u} - u = x - 1$$

Condizioni al bordo: $\begin{cases} u(3) = 0 \\ \dddot{u}(0) + \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$ vanno giustificate spiegando come scegliere v

$$u(x) = ae^x + be^{-x} + 1 - x$$

$\rightsquigarrow$ trovo a e b e ho la soluzione

Resta da dim. che è unica ed è minimo.
Ogni altra w la scrivo come $u + v = w$ spiegando come è fatta v

$$F(w) = F(u) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\text{eq. eulero in forma I}} + \underbrace{\int_0^3 (\ddot{v}+v)^2 dx}_{\geq 0}$$

$\geq F(u)$ quindi u è minimo.

Se ce ne fosse un altro dovrebbe essere $\int_0^3 (\ddot{v}+v)^2 dx = 0$, cioè

$$\ddot{v} + v = 0 \qquad \ddot{v} = -v$$

cioè $v(x) = ae^{-x}$ ma poiché $v(3) = 0$, allora $a = 0$, quindi $v(x) \equiv 0$.

Oss. Non si può dedurre l'unicità del p.to di minimo dall'unicità della sol. dell'eq. di Eulero.
Infatti solo i p.ti di min. di classe C^2 sono obbligati a risolvere Eulero. Potrebbero esserci p.ti di min. che sono solo C^1.
Il ragionamento con $w = u + v$ li esclude.

④ $$\int_0^1 [\ddot{u}^2 + \dot{u}^2 + 5xu]\,dx = F(u)$$

1ª forma di Eulero ...

$$\int_0^1 [2\ddot{u}\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{v} + 5xv]\,dx = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v(0)=0 \\ \dot{v}(0)=\dot{v}(1) \end{array}}$$

Integro per parti ...

$$\int_0^1 \underbrace{[2u^{IV} - 2\ddot{u} + 5x]}_{=0} v\,dx + [2\ddot{u}\dot{v} - 2\dddot{u}v + 2\dot{u}v]_0^1$$

$$2u^{IV} - 2u'' + 5x = 0$$

$u'''(1) = u'(1)$
$u''(0) = u''(1)$ } Nuove date

$u(0) = 0$
$u'(0) = u'(1)$ } dall'inizio

(b) $F(w) = F(u+v) = F(u) + \underbrace{\text{Eq. Eulero}}_{=0} + \underbrace{\int \ddot{v}^2 + \dot{v}^2\,dx}_{\geq 0}$

$\geq F(u)$

(c) $F(u)$ con unica condizione $u'(0) = 2$

Basta prendere $u(x) = 2x - n$ e ottengo $F(u)$ molto negativo.
Quindi $\inf = -\infty$.

—o—o—