

**SSSUP 2012**  
**Corso di Complementi di**  
**Analisi Matematica II**  
**Stampato integrale delle lezioni**

Massimo Gobbino



# Indice

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Lezione 01 – Analisi in infinite dimensioni – Spazi metrici . . . . .                          | 4   |
| Lezione 02 – Dagli spazi metrici agli spazi topologici – Completezza . . . . .                 | 8   |
| Lezione 03 – Spazi di Banach e spazi di Hilbert . . . . .                                      | 12  |
| Lezione 04 – Teorema di Weierstrass per successioni e sue varianti . . . . .                   | 16  |
| Lezione 05 – Completezza e compattezza in $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ . . . . .             | 20  |
| Lezione 06 – Teorema delle contrazioni in spazi metrici . . . . .                              | 24  |
| Lezione 07 – Convergenza puntuale e uniforme di funzioni . . . . .                             | 28  |
| Lezione 08 – Teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali . . . . .             | 32  |
| Lezione 09 – Teorema di Ascoli-Arzelà . . . . .                                                | 36  |
| Lezione 10 – Teorema di sola esistenza per equazioni differenziali . . . . .                   | 41  |
| Lezione 11 – Compattezza in spazi metrici . . . . .                                            | 44  |
| Lezione 12 – Uniforme continuità – Teorema di Heine-Cantor . . . . .                           | 48  |
| Lezione 13 – Derivata di Gateaux ed equazione di Eulero . . . . .                              | 52  |
| Lezione 14 – Esempi di funzionali integrali . . . . .                                          | 57  |
| Lezione 15 – Funzionali integrali dipendenti dalla sola derivata (caso convesso) . . . . .     | 60  |
| Lezione 16 – Funzionali integrali dipendenti dalla sola derivata (caso non convesso) . . . . . | 64  |
| Lezione 17 – Condizioni al bordo di Dirichlet e di Neumann . . . . .                           | 68  |
| Lezione 18 – Funzionali integrali dipendenti da derivate di ordine successivo . . . . .        | 72  |
| Lezione 19 – Metodi diretti nel calcolo delle variazioni – Spazi $L^2$ e $H^1$ . . . . .       | 77  |
| Lezione 20 – Basi algebriche vs basi Hilbertiane . . . . .                                     | 81  |
| Lezione 20bis – Mancata compattezza forte delle palle in dimensione infinita . . . . .         | 84  |
| Lezione 21 – Compattezza debole delle palle negli spazi di Hilbert . . . . .                   | 88  |
| Lezione 22 – Caratterizzazioni equivalenti dello spazio di Sobolev $H^1$ . . . . .             | 93  |
| Lezione 23 – Esempio standard di metodo diretto nel calcolo delle variazioni . . . . .         | 97  |
| Lezione 24 – Serie di Fourier come base Hilbertiana di $L^2$ . . . . .                         | 101 |
| Lezione 25 – Equazione del calore risolta mediante serie di Fourier . . . . .                  | 104 |
| Lezione 26 – Teorema spettrale per operatori compatti in spazi di Hilbert . . . . .            | 108 |
| Lezione 27 – L'equazione delle onde . . . . .                                                  | 111 |
| Lezione 28 – Problema di minimo legato ai fili inestensibili . . . . .                         | 115 |
| Lezione 29 – Equazioni di Eulero per funzionali in più variabili . . . . .                     | 119 |
| Lezione 30 – Equazione $\Delta u = f(x)$ . . . . .                                             | 123 |

## SSSUP 2012 - LEZIONE 01

Titolo nota

16/01/2012

Analisi 1 : funzioni di 1 variabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Analisi 2 : funzioni di un numero finito di variabili  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Analisi 3 : funzioni di infinite variabili  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f: X \rightarrow Y$ dove  $X$  e  $Y$  sono "spazi" di dimensione infinita.

## Problemi classici di analisi 1

\* problemi di minimo  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\min \{f(x) : x \in A\}$ 

→ esistenza : Weierstrass e sue varianti (il che implica compattezza, continuità, limiti)

→ ricerca tra i pti stazionari: calcolo differenziale ed equazioni del tipo  $f'(x) = 0$ .\* problemi di evoluzione : equazioni diff. del tipo  $u' = f(t, u)$   
o di ordine superiore. L'incognita è  $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 

## Stessa cosa in analisi 2

\* problemi di minimo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\min \{f(x) : x \in A\}$ ....  $\nabla f(x) = 0$  ← equazione vettoriale (n equazioni in n incognite)

... il bordo è un po' più complicato → parametrizzazioni e/o moltiplicatori di Lagrange.

\* problemi di evoluzione L'incognita è  $U: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$  $U' = f(t, U)$  ← sistema di n equazioni differenziali  
Le incognite sono le n componenti di  $u$



Stessa cosa in analisi 3 → Problemi di minimo  
→ Problemi di evoluzione

Esempio 1  $\min \left\{ \int_0^1 |f'(x)|^2 dx : f \in C^1([0,1]), f(0)=0, f(1)=7 \right\}$

Notazione:  $C^k([a,b])$  o  $C^k(a,b)$  è l'insieme delle funzioni  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  che sono continue insieme alle loro prime  $k$  derivate.

Questo si può vedere come  $\min \{ F(u) : u \in X \}$  dove  
 $X =$  insieme delle funzioni  $\in C^1([0,1])$  t.c.  $u(0)=0$  e  $u(1)=7$   
 $F(u) = \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$

L'insieme su cui si lavora è uno spazio di funzioni, cioè un oggetto di dimensione infinita. La funzione che vogliamo minimizzare prende in input delle funzioni (gli elementi di  $X$ ) e restituisce numeri reali  
 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Di solito  $F$  si chiama FUNZIONALE, cioè una funzione che ha come argomento delle funzioni.

Altro esempio:  $\min \left\{ \int_0^1 [|u'(x)|^4 + |u''(x)|^8 - \sin u(x)] dx : u(0)=u(1)=0 \right\}$   
 $u \in C^2([0,1])$

Problemi di evoluzione L'incognita è una funzione

$u: (a,b) \rightarrow X$   
↑ intervallo temporale      ↑ spazio infinito-dimensionale, ad esempio uno spazio di funzioni

Esempio classico Parametrizziamo una sbarra con un intervallo  $x \in [0,1]$ . La temperatura della sbarra è una funzione  $u(t,x)$ , dove  $u(t,x)$  è un numero reale che indica la temperatura al tempo  $t$  nel p.to  $x$ . Allo stesso modo la posso pensare come  $u(t)$ ,

dove ora  $u: (a,b) \rightarrow$  spazio delle funzioni  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

in output ho  $u(b, \cdot)$ .

L'equazione del calore è  $u_t = u_{xx} \leftarrow$  equazione differenziale alle derivate parziali

Tipico problema:  $u_t = u_{xx} \quad t \geq 0, x \in [0,1] \leftarrow$  eq. diff.  
 $u(0,x) = u_0(x) \leftarrow$  condizione iniziale  
 $u(b,0) = u(b,1) = 0 \leftarrow$  condizione al bordo

Caso tipico: cocomero messo in frigo. Conosco la temperatura iniziale di tutto il cocomero, e conosco la temperatura al bordo per tutti  $t \geq 0$ . Voglio sapere come si evolve la temperatura del cocomero in tutti i pti e per tutti i  $t \geq 0$ .

### Strumenti per affrontare questi problemi

Sense della struttura sull'insieme  $X$

- $\rightarrow X$  insieme (nessuna struttura)
- $\rightarrow X$  spazio topologico
- $\rightarrow X$  spazio metrico  $\leftarrow$  TRATTEREMO
- $\rightarrow X$  spazio di BANACH
- $\rightarrow X$  spazio di HILBERT  $\leftarrow$  TRATTEREMO
- $\rightarrow X = \mathbb{R}^n$  (analisi 2)

Spazio metrico È un insieme  $X$  su cui è definita una distanza.

Una distanza è una funzione  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  con queste proprietà

- (D1)  $d(x,y) \geq 0$  per ogni  $x \in X, y \in X$ ,
- (D2)  $d(x,y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ,
- (D3)  $d(x,y) = d(y,x)$  (simmetria)  $\forall x \in X \quad \forall y \in X$ ,
- (D4)  $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$   $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ .  
 (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio metrico si indica con  $(X,d)$ .

Esempio 1  $X = \mathbb{R}$   $d(x, y) = |y - x|$

Esempio 2  $X = \mathbb{R}^n$   $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

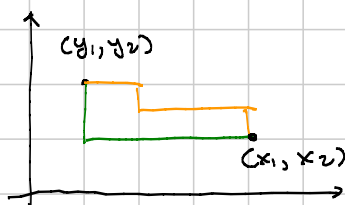
Esempio 3  $X =$  insieme qualunque

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Esempio 4  $X = \mathbb{R}$   $d(x, y) = \arctan |y - x|$

Esempio 5  $X = \mathbb{R}$   $d(x, y) = |\arctan y - \arctan x|$

Esempio 6  $X = \mathbb{R}^2$   $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$   $x = (x_1, x_2)$   
 (TAXI DRIVER DISTANCE)  $y = (y_1, y_2)$



Esempio 7  $X = C^0([0, 1])$  Date  $u \in X, v \in X$  definisco

$$d(u, v) = \max \{ |u(x) - v(x)| : x \in [0, 1] \}$$

Esempio 8  $X = C^0([0, 1])$   $d(u, v) = \int_0^1 |u(x) - v(x)|^2 dx$

Esercizio Dimostrare che quelle scritte sono distanze

Esercizio  $X = \mathbb{R}$  Per quali funzioni  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si ha che  
 $d(x, y) = \varphi(|y - x|)$  oppure  $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$   
 sono distanze su  $\mathbb{R}$ ?

## SSSUP 2012 - LEZIONE 02

Titolo nota

16/01/2012

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.

Def. Dato  $x_0 \in X$  e  $r > 0$  definiamo

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad \text{palla aperta con centro in } x_0 \text{ e raggio } r$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \quad \text{palla chiusa}$$

Esercizio È possibile in uno spazio metrico che ci sia una palla contenuta propriamente (cioè  $\subsetneq$ ) in una palla di raggio strettamente inferiore?

Dalle palle seguono insiemi aperti, chiusi, intorni...

Def. Sia  $A \subseteq X$  e sia  $x_0 \in X$ . Si dice che

- $x_0$  è interno ad  $A$  se  $\exists r > 0$  t.c.  $B(x_0, r) \subseteq A$
- $x_0$  è aderente ad  $A$  se  $\forall r > 0$  si ha che  $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$
- $x_0$  è sul bordo di  $A$  se  $\forall r > 0$  si ha che  $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$  e  $B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$
- $x_0$  è di accumulazione per  $A$  se  $\forall r > 0$  si ha che  $\{B(x_0, r) \cap A\} \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Def. Sia  $A \subseteq X$ . Allora si definisce

- $\overset{\circ}{A}$  la parte interna di  $A$ , cioè l'insieme dei pti interni ad  $A$
- $\bar{A}$  la chiusura di  $A$ , cioè " " aderenti ad  $A$
- $\partial A$  la frontiera di  $A$ , cioè l'insieme dei pti sul bordo di  $A$ .

Esercizio Si ha che  $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  per ogni  $A \subseteq X$ .

Def. Sia  $A \subseteq X$ . Si dice che

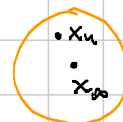
- $A$  è aperto se  $A = \overset{\circ}{A}$
- $A$  è chiuso se  $A = \bar{A}$

Tutto ciò produce il concetto di successione convergente.

Si dice che una successione  $\{x_n\} \subseteq X$  converge ad un certo  $x_\infty \in X$  se

$\forall \varepsilon > 0$  si ha che  $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$  definitivamente

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  b.c.  $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$



Questo è analogo a dire che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_\infty) = 0$   
*limite di numeri*

Esercizi ① Dimostrare che l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto. E se fossero infiniti?

② Dimostrare che l'unione di una famiglia qualunque di aperti è un aperto. Sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  la famiglia, ad esempio insieme di indici

in  $\mathbb{R}$   $\{(x, x+3)\}_{x \in \mathbb{R}}$  è una famiglia di aperti.

③ Osservare che  $\emptyset$  e  $X$  sono aperti "gratis"

④ Riformulare i p.ti precedenti per i chiusi.

③.5 Osservare che  $A$  è aperto se e solo se  $X \setminus A$  è chiuso.  
 — o — o —

Spazio topologico È una coppia  $(X, \tau)$ , dove  $X$  è un insieme e  $\tau$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  (quindi  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ , cioè  $\tau$  è contenuto nell'insieme delle parti di  $X$ ) tali che

( $\tau_1$ )  $\emptyset \in \tau$ ,  $X \in \tau$ ,

( $\tau_2$ ) l'intersezione FINITA di elementi di  $\tau$  sta ancora in  $\tau$ ,

( $\tau_3$ ) l'unione QUALUNQUE di elementi di  $\tau$  sta ancora in  $\tau$ .

*Brutalmente: gli elementi di  $\tau$  sono i sottoinsiemi di  $X$  che io considero aperti*

Esercizio Ridare tutte le definizioni di p.ti interni, aderenti, ... nel contesto topologico.

Esempio Sia  $\{x_n\} \in X$  una successione. Si dice che  $x_n \rightarrow x_\infty \in X$  se  
 $\forall B \in \tau$  con  $x_\infty \in B$  si ha che  $x_n \in B$  definitivamente



Esercizio sui metrici Sia  $(X, d)$  metrico e siano  $x_0 \neq y_0$  due  
 pti distinti di  $X$ . Allora  $\exists r > 0$  t.c.  $B(x_0, r) \cap B(y_0, r) = \emptyset$

[Hint:  $r = \frac{1}{2} d(x_0, y_0)$  + usare la triangolare]

Definizione Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Una successione  $\{x_n\} \in X$   
 si dice di Cauchy se  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq m_0$

Esercizio Se una successione converge, allora di sicuro è di Cauchy.

[Hint: se  $m$  ed  $n$  sono grandi, allora  $x_m$  ed  $x_n$  sono vicini al  
 limite  $x_\infty$ , dunque sono vicini tra di loro]

In generale non vale il viceversa.

Definizione Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice COMPLETO se tutte  
 le successioni di Cauchy a valori in  $X$  convergono.

Esempio 1  $\mathbb{N}$  con la distanza classica è completo (una successione  
 di Cauchy a valori in  $\mathbb{N}$  è definitivamente costante)

Esempio 2  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  con la distanza classica non è completo  
 (la successione  $\frac{1}{n}$  è di Cauchy, ma non converge)

Esempio 3  $\mathbb{Q}$  con la distanza classica non è completo (basta prendere  
 una successione di razionali che tenda a  $\sqrt{2}$ )

Esempio 4  $\mathbb{R}$  con la dist. classica è completo

Esempio 5  $\mathbb{R}^n$  con la distanza classica è completo  
(esercizio: basta passare alle componenti)

Esempio 6  $\mathbb{R}^n$  con la taxi driver è completo  
(esercizio: come sopra)

Osservazione Il concetto di suce. di Cauchy è metrico, non topologico.  
Il concetto di continuità è topologico.  
Il concetto di uniforme continuità è metrico.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 03

Titolo nota

24/01/2012

→ Insieme

→ Spazio Topologico

→ Spazio Metrico

→ Spazio di BANACH

→ Spazio di Hilbert

→  $\mathbb{R}^n$ Spazio Metrico  $(X, d)$  dove

- $X$  è un insieme
- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  è una distanza su  $X$

Def. Una successione  $\{x_n\}$  a valori in  $X$  si dice successione di CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0.$$

Def. Uno spazio metrico si dice COMPLETO se tutte le successioni di Cauchy a valori in  $X$  convergono (cioè hanno un limite in  $X$ ).

Oss. Se una successione  $x_n$  a valori in uno sp. metrico converge, allora di sicuro è di Cauchy. [Esercizio]

Data una metrica, abbiamo aperti, chiusi, intorni, bordi, ... e abbiamo una nozione di succ. convergente:  $x_n \rightarrow x_\infty$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Spazio topologico. Insieme  $X$  più un sottoinsieme  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  che verifica tre proprietà (brutalmente:  $\tau$  è l'insieme degli aperti)

Oss. Data una topologia, abbiamo le successioni convergenti:  $x_n \rightarrow x_\infty$  se  $\forall A \in \tau$  con  $x_\infty \in A \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n \in A \quad \forall n \geq n_0.$

METAPROGRAMMA Lo scopo è quello di avere una nozione di convergenza per successioni. Da questa si ottengono CONTINUITÀ, COMPATTEZZA, TEO. DI WEIERSTRASS quindi teoremi di esistenza per max e min.



**SPAZI DI BANACH** Sia  $X$  uno spazio vettoriale.

Def. Una norma su  $X$  è una funzione  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  con queste proprietà

- (N1)  $\|x\| \geq 0$  per ogni  $x \in X$ ,
- (N2)  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ,
- (N3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (N4)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  per ogni  $x \in X$ ,  $y \in X$ .

Brutalmente: norma = "lunghezza" di un vettore.

Fatto generale. Data una norma su uno sp. vett.  $X$ , possiamo definire una distanza ponendo

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

[Esercizio: verificare che si tratta proprio di una distanza]

Definizione Uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma che lo rende uno spazio metrico completo. Occhio! lo spazio è sempre una coppia (insieme, norma) oppure (insieme, distanza)

**SPAZI DI HILBERT** Sia  $X$  uno sp. vettoriale.

Def. Un prodotto scalare definito positivo è una funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che}$$

- (PS1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in X$ , simmetria
- (PS2)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (PS3)  $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall (x, y, z) \in X^3$ , Bilinearità
- (PS4)  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ ,
- (PS5)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . definito positivo.

Fatto generale:  $\|x\| := [\langle x, x \rangle]^{1/2}$  è una norma su  $X$  (esercizio!)

Def. Uno spazio di Hilbert è uno sp. vett. su cui è definito un prodotto scalare che produce una norma che produce una distanza che lo rende uno spazio metrico completo.

Esempio 1  $X = \mathbb{R}^2$  Dato  $p \geq 1$  poniamo

$$\|(x, y)\|_p := [ |x|^p + |y|^p ]^{1/p} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Nel caso  $p=2$  otteniamo il classico  $\mathbb{R}^2$  con la classica distanza (spazio di Hilbert)

Nel caso  $p=1$  otteniamo  $\mathbb{R}^2$  con la distanza "taxi driver". Si tratta di uno spazio di Banach.

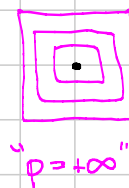
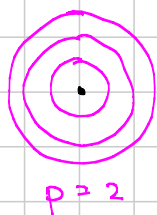
Osservazione Le due norme con  $p=1$  e con  $p=2$  inducono la stessa topologia, cioè una successione converge in un caso se e solo se converge nell'altro.

Motivo brutale: in ogni  $\circ$  ci sta un  $\diamond$  e viceversa

Motivo rigroso: esistono 2 costanti  $C_1 > 0$  e  $C_2 > 0$  t.c.

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Oss. Come sono fatte le palle centrate in un pto rispetto alle  $\|\cdot\|_p$ ?



Oss. • La (N3) si traduce nel fatto che le palle sono ovoidali (se una rispetto alle altre ( $\lambda > 0$ ) e simmetriche rispetto all'origine (se  $x \in B(0, r)$ , allora  $-x \in B(0, r)$ ).

• La (N4) si traduce nella convessità delle palle.

$$\left[ \text{Brutalmente: } \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x+y\| \leq \frac{1}{2} \|x\| + \frac{1}{2} \|y\| \leq 1 \right]$$

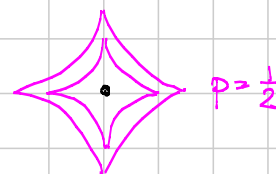
$\downarrow$   
 $\leq 1$

[Esercizio: dimostrare la stessa cosa per tutto il segmento di estremi  $x$  e  $y$ ]

Oss. Dare una norma in uno spazio vettoriale è equivalente a dare un convesso che contenga l'origine e sia simmetrico rispetto all'origine stessa (Brutalmente: sarebbe la palla con centro nell'origine e raggio 1).

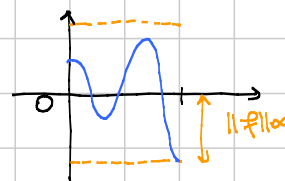
Esercizio Dimostrare che  $\mathbb{R}^2$  con  $\|\cdot\|_p$  è uno spazio di Hilbert se e solo se  $p=2$ .

Oss. Per  $p < 1$  le palle non sono più convesse



Esempio 2  $X = C^0([0,1])$ . Si verifica che

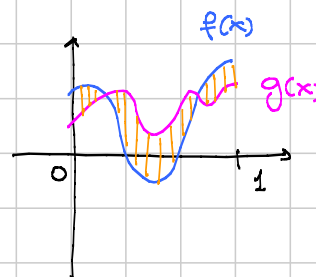
$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$   
 = minima "semicampiera" di una striscia centrata sull'asse  $x$  che contiene il grafico



è una norma su  $X$  (Esercizio).

La distanza indotta è

$d(f,g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,1] \}$   
 = più lungo segmento verticale tra i grafici  
 =  $\|f - g\|_\infty$



Oss. I sup sono in realtà dei max.

—  $\infty$  —  $\infty$  —

## SSSUP 2012 - LEZIONE 04

Titolo nota

24/01/2012

Def. Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici, e sia  $f: X \rightarrow Y$  una funzione

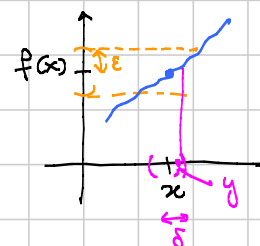
Si dice che  $f$  è continua in  $X$  se per ogni successione  $x_n \rightarrow x_\infty$  (convergente in  $X$ ) si ha che  $f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$  (convergenza in  $Y$ ).

Achtung! Quella che ho definito è la **CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI**

Def. Se  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  sono spazi metrici, si dice che  $f: X \rightarrow Y$  è continua se

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.

$$d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



Questa definizione si può estendere anche in un contesto topologico, portando alla definizione vera di **CONTINUITÀ**

- Fatti generali
- Nel contesto metrico la continuità  $\varepsilon$ - $\delta$  è equivalente alla continuità per successioni (*esercizio fattibile*)
  - Nel contesto topologico non sono equivalenti (*non provarli*)

Definizione Uno spazio metrico od uno spazio topologico  $X$  si dicono **COMPATTI PER SUCCESSIONI** se ogni successione a valori in  $X$  ammette una s. succ. convergente.

Definizione Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  <sup>in arrivo</sup>.

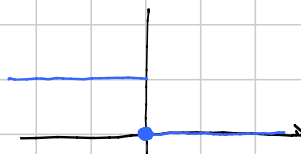
Si dice che  $f$  è semicontinua inferiormente in  $X$  (s.c.i.) se per ogni successione  $x_n \rightarrow x_\infty$  convergente in  $X$  si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Brutalmente: al limite  $f$  può solo "crollare"

Esempio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$



È semicontinua inferiormente.

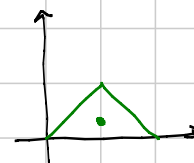
Teorema di WEIERSTRASS Sia  $X$  uno sp. top. compatto per successioni.

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione s.c.i.

Allora esiste di sicuro.

$$\min \{f(x) : x \in X\}$$

Oss.1 L'esistenza del max non è garantita



Esercizio Una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice s.c.s. (semicontinua superiormente) se

$$\forall x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \text{ si ha che } \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x_\infty).$$

Enunciare e dimostrare un te. di Weierstrass per funzioni s.c.s.

[Dim. W s.c.i.] Considero  $l := \inf \{f(x) : x \in X\}$ .

Per una proprietà generale dell'inf. esiste una successione  $x_n \in X$  tale che  $f(x_n) \rightarrow l$

Poiché  $X$  è compatto, la successione  $\{x_n\}$  ha una s.succ. convergente, cioè  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ .

Ma allora grazie alla semicontinuità inferiore sappiamo che

$$l \leq f(x_\infty) \stackrel{\text{s.c.i.}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

↑  
perché  $l$  è  $l$ 'inf.

Dunque  $f(x_\infty) = l$ , quindi  $x_\infty$  è un pto di minimo.  $\square$

Discorso filosofico Domanda: conviene avere tante successioni convergenti o poche?

→ Se io metto tante succ. convergenti in  $X$ , sarà più facile che  $X$  sia compatto (è più facile trovare s.succ. convergenti), ma è più difficile che  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  sia s.c.i. (devo controllare tante volte la disuguaglianza con il liminf).  
Si tratta di trovare il giusto equilibrio.

Def. Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è **COERCIVA** se i sottolivelli di  $f$  sono compatti, cioè se  $\forall M \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{x \in X : f(x) \leq M\}$  è compatto.

Teo. di W. generalizzato Sia  $X$  topologico (non necessariamente compatto) e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  s.c.i. e coerciva. Allora esiste.  
$$\min \{f(x) : x \in X\}$$

Dim. Prendo  $x_0 \in X$  qualunque. Prendo  $M = f(x_0)$ . Considero  
 $\{x \in X : f(x) \leq M\} = S_M$   
Questo è compatto perché  $f$  è coerciva. ↑ per avere il sotto livello non vuoto  
Allora per W classico esiste  
$$\min \{f(x) : x \in S_M\}$$
  
Questo minimo è anche minimo su tutto  $X$ .  $\square$

Oss. Nella dimostrazione ho usato solo che esiste almeno un valore  $M \in \mathbb{R}$  per cui  $S_M$  è compatto e non vuoto.

Esercizio Stessa cosa in versione s.c.s.

Compattezza in  $\mathbb{R}^n$ . Un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto se e solo se

- \*  $A$  è chiuso
- \*  $A$  è limitato

Compattezza in generale Sia  $X$  un metrico, e sia  $A \subseteq X$ .

Allora è ancora vero che

\*  $A$  compatto  $\Rightarrow A$  chiuso [ se non è chiuso esiste  $\{x_n\} \subseteq A$  t.c.  $x_n \rightarrow x_\infty \notin A$ , ma allora questa non può avere s.succ. conv. in  $A$  ]

\*  $A$  compatto  $\Rightarrow A$  limitato [ esercizio: se  $A$  non è limitato esiste una succ. in  $A$  in cui  $d(x_n, x_m) \geq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$  ... ]

Non è vero però che  
chiuso + limitato  $\Rightarrow$  compatto

Esempio  $X := \mathbb{N}$   $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

$X$  è limitato (è tutto contenuto nella palla con centro in 2012 e raggio 3)

$X$  è chiuso (tutto lo spazio è sempre chiuso)

Però  $X$  non è compatto perché la successione  $x_n = n$  non può avere s.succ. convergenti (se avesse una s.succ. conv., questa sarebbe di Cauchy, ma la distanza tra 2 qualunque elementi è sempre 1).

— o — o —

## SSSUP 2012 - LEZIONE 05

Titolo nota

31/01/2012

Teorema 1 (Bolzano-WEIERSTRASS) Dato  $A \subseteq \mathbb{R}$  si ha che  
 $A$  compatto (per successioni)  $\Leftrightarrow A$  chiuso e limitato  
 Ogni successione  $x_n$  a valori in  $A$   
 ammette almeno una s. succ. convergente ad un elemento di  $A$

Teorema 2  $\mathbb{R}$  è completo (rispetto alla metrica standard)

Dim. teo. 1 Via ordinamento Basta dimostrare  $\Leftarrow$

Basta dimostrare che ogni succ.  $x_n$  a valori in  $A$  ammette s. succ. conv.  
 Il fatto che il limite sia in  $A$  segue dalla chiusura.  
 Essendo  $A$  limitato, esistono  $M_1$  ed  $M_2$  t.c.

$$M_1 \leq x \leq M_2 \quad \forall x \in A$$

Sia  $x_n$  una successione qualunque. Pongo

$$L := \inf \{ a \in \mathbb{R} : x_n \leq a \text{ per infiniti } n \}$$

- ① L'insieme di cui faccio l'inf è  $\neq \emptyset$  (c'è  $M_2$ )
- ②  $L \in \mathbb{R}$  (nell'insieme non ci sono  $a < M_1$ ).
- ③ Dico che esiste una s. succ.  $x_{n_k} \rightarrow L$ . La costruisco così

Fisso  $\varepsilon = 1$ . La successione sta

- definitivamente  $\geq L-1$
- infinite volte  $\leq L+1$

Quindi trovo  $x_{n_1} \in [L-1, L+1]$

Fisso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Come prima la succ. sta

$\infty$  volte in  $[L-\frac{1}{2}, L+\frac{1}{2}]$ . Trovo quindi  $n_2 > n_1$

t.c.  $x_{n_2} \in [L-\frac{1}{2}, L+\frac{1}{2}]$

E così via per inductione (completare i dettagli).

La successione  $x_{n_k}$  converge ad  $L$  perché per costruzione

$$L - \frac{1}{2^k} \leq x_{n_k} \leq L + \frac{1}{2^k},$$

quindi Cauchyiani...

Solo alla fine  $L \in A$  perché  $A$  è chiuso.  $\square$



Dim. teo. 2Via liminf e limsupSia  $x_n$  una succ. di CauchyStep 1 Basta dimostrare che una s.succ. converge.

Sia  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ . Fisso  $\varepsilon > 0$ . Per  $k$  abbastanza grande si ha che  $d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Inoltre per  $n$  abbastanza grande si ha che  $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  purché  $n \geq n_0, m \geq n_0$ .

Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha che

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \varepsilon$$

$$\underbrace{\leq \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{vera se } n_k \text{ ed } n \text{ sono grandi}} \quad \underbrace{\leq \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{vera se } n_k \text{ è grande}}$$

Se  $n \geq n_0$ , allora scelgo  $n_k \geq n_0$  in modo che valga la primaStep 2 Una successione di Cauchy è per forza limitata.

Uso la definizione con  $\varepsilon = 1$ . Esiste  $n_0$  t.c.  $d(x_n, x_m) \leq 1$  per ogni  $n \geq n_0, m \geq n_0$ . In particolare  $d(x_{n_0}, x_m) \leq 1$  per ogni  $m \geq n_0$ . Quindi tutti gli elementi di  $x_n$  stanno in  $\bar{B}(x_{n_0}, 1)$  tranne un numero finito...



Step 3 Tornando in  $\mathbb{R}$ , una successione  $x_n$  di Cauchy è limitata, quindi  $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R}$ . Ma il limsup è anche maxlim, cioè esiste una s.succ.  $x_{n_k} \rightarrow L$ .

Dim. Teo. 2 via compattezzaSia  $x_n$  una succ. di Cauchy in  $\mathbb{R}$ ,

Per lo step 2 di prima so che è limitata, quindi  $M_1 \leq x_n \leq M_2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Per il teorema 1, applicato in  $[M_1, M_2]$  so che  $x_n$  ammette una s.succ. convergente. Ma per lo step 1 basta una s.succ. convergente per avere la convergenza di tutta la succ.  $x_n$ .

— o — o —

Dim. teo. 1 via completezza Data  $x_n$  a valori in  $A$ , devo trovare una s. succ. convergente.

Grazie alla completezza, mi basta trovare una s. succ. di Cauchy.

Essendo  $A$  limitato so che  $\exists M_1, M_2$  t.c.  $M_1 \leq x_n \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Divido  $[M_1, M_2]$  in 2 parti uguali:



almeno una delle 2 metà contiene

infiniti termini della successione. Ne scelgo una. La ridivido e ripeto il ragionamento ... Ottengo una succ. di intervalli inestesi, ciascuno dei quali contiene  $\infty$  termini della successione.

Siano  $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$  gli intervalli. Scelgo  $x_{n_k}$  in modo tale che  $x_{n_k} \in I_k$  e  $n_{k+1} > n_k$ .

Questa sottosuccessione è di Cauchy perché dato  $\varepsilon > 0$  scelgo  $k$  in modo tale che l'ampiezza di  $I_k$  sia  $\leq \varepsilon$ . Definitivamente tutti i termini della s. succ. stanno in  $I_k$ , quindi a distanza  $\leq \varepsilon$ .

— o — o —

Teorema 1 (in  $\mathbb{R}^n$ )  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto  $\Leftrightarrow$  limitato + chiuso

Teorema 2 (in  $\mathbb{R}^n$ )  $\mathbb{R}^n$  è completo.

Dim. teo. 2 in  $\mathbb{R}^2$  Sia  $x_n$  una succ. di Cauchy in  $\mathbb{R}^2$ . Allora posto  $x_n = (x_n, y_n)$  si ha che  $x_n$  e  $y_n$  sono a loro volta di Cauchy (perché  $d_{\mathbb{R}}(x_n, x_m) \leq d_{\mathbb{R}^2}(x_n, x_m)$  e idem in  $y$ ...). Ma allora per la completezza di  $\mathbb{R}$  si ha che

$x_n \rightarrow x_\infty$  e  $y_n \rightarrow y_\infty$ . Da qui è facile verificare che

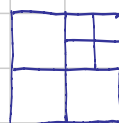
$x_n = (x_n, y_n) \rightarrow x_\infty := (x_\infty, y_\infty)$

Stesso ragionamento in  $\mathbb{R}^k$ .

Dim. teo. 1 in  $\mathbb{R}^2$  via completezza Data  $x_n$  a valori in un  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  chiuso e limitato, devo trovare una s. succ. convergente.

Basta trovare una s. succ. di Cauchy.

Basta suddividere un quadrato iterativamente.



Dim. teo. 1 alternativa in  $\mathbb{R}^2$  Data  $X_n = (x_n, y_n)$  a valori in  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  chiuso e limitato.

La successione  $x_n$  e la successione  $y_n$  sono limitate (in  $\mathbb{R}$ ).

Quindi procedo così

- scelgo  $n_k$  in maniera tale che  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$  in  $\mathbb{R}$
- scelgo una s.succ. di questa, diciamo  $n_{k_i}$  in maniera tale che  $y_{n_{k_i}} \rightarrow y_\infty$  in  $\mathbb{R}$ .

Si verifica facilmente che  $X_{n_{k_i}} \rightarrow X_\infty := (x_\infty, y_\infty)$

Stesso discorso in  $\mathbb{R}^n$ : basta ogni volta estrarre dalla precedente.  
— o — o —

## SSSUP 2012 - LEZIONE 06

Titolo nota

31/01/2012

Teorema (in  $\mathbb{R}$ ) Sia  $a_n$  una successione. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dim. via ordinamento

$$\begin{aligned} a_n &= |a_n| + a_n - |a_n| \\ &= |a_n| - (|a_n| - a_n) \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$$

Se le 2 serie al RHS convergono, allora converge quella iniziale. La 1ª serie al RHS converge per ipotesi. Per la 2ª si ha che

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|,$$

quindi la 2ª serie al RHS converge per confronto con la serie di  $2|a_n|$  (occhio, posso fare il confronto perché si tratta di serie a termini  $\geq 0$ ).

Dim. via completezza

Devo dim. che la succ. delle somme parziali

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

converge. Per far questo, basta dim. che  $S_n$  è di Cauchy. Ora supponiamo  $n > m$ . Allora

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| \\ &= \hat{S}_n - \hat{S}_m, \end{aligned}$$

dove  $\hat{S}_n := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$ . Ora

$\sum |a_n|$  converge per ipotesi, quindi  $\hat{S}_n$  è di Cauchy, quindi dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $\hat{S}_n - \hat{S}_m \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq n_0, m \geq n_0$ , quindi la stessa cosa vale per  $S_n$ .

Teorema (Serie assolutamente convergenti in spazi di Banach)

Sia  $a_n$  una successione a valori in un Banach  $X$ . Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \text{ converge}}_{\substack{\text{serie delle norme, cioè} \\ \text{una serie di numeri } \geq 0}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}}_{\substack{\text{serie a valori nel Banach } X \\ (\text{convergere vuol dire che le sue somme} \\ \text{parziali } S_n \text{ convergono ad un certo } S_0 \in X)}}$$

Dim. riscrivere quella di sopra ed accorgersi che funziona!  
 — o — o —

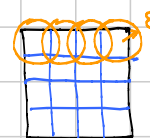
Teorema falso  $X$  metrico,  $A \subseteq X$  chiuso e limitato  $\Rightarrow A$  compatto  
Controesempio alla lezione 4.

Def. Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice totalmente limitato se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero finito di palle  $B_1, \dots, B_k$  di raggio  $\leq \varepsilon$  che ricopre  $A$ . Ovviamente  $k$  può dipendere da  $\varepsilon$ .

Oss. 1 Totalmente limitato  $\Rightarrow$  limitato

Oss. 2 Non vale il viceversa (N con  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  è limitato, ma non tot. limitato)

Oss. 3 In  $\mathbb{R}^n$  limitato  $\Rightarrow$  totalmente limitato  
 (in  $\mathbb{R}^2$  basta ricoprire con un quadrato, e poi suddividerlo quanto serve)



Teorema Sia  $X$  metrico completo e sia  $A \subseteq X$ .

Allora  $A$  è compatto  $\Leftrightarrow A$  è chiuso e totalmente limitato

Dim. Data  $x_n$  a valori in  $A$ , basta trovare una s.suc. di Cauchy.

Esiste una palla  $B_0$  di raggio 1 che contiene  $\infty$  el. della successione (qui uso la totale limitatezza con  $\varepsilon = 1$ ).

Esiste una palla  $B_1$  di raggio  $\frac{1}{2}$  che contiene  $\infty$  el. DEI PRECEDENTI.

Per induzione: esiste una palla  $B_k$  di raggio  $\frac{1}{2^k}$  che contiene  $\infty$  el. DEI PRECEDENTI, cioè di quelli che stavano in una stessa palla di raggio  $\frac{1}{2^{k-1}}$

Ora scelgo  $n_k$  in maniera tale che

- $n_{k+1} > n_k$
- $x_{n_k} \in B_k$

Questa si vede facilmente essere di Cauchy (completare i dettagli). Così ho dimostrato la freccia  $\Leftarrow$ .

Quell'altra serve meno (e non è banale).  
— o — o —

**Teorema delle CONTRAZIONI** Sia  $X$  uno spazio metrico completo.

Sia  $f: X \rightarrow X$  una funzione tale che esiste  $L < 1$  per cui

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

(una tale  $f$  si dice contrazione: è una  $f: X \rightarrow X$  Lipschitziana con costante di Lipschitz STRETTAMENTE minore di 1).

Allora  $f$  ammette un unico p.to fisso, cioè esiste un unico  $x_0 \in X$  tale che  $f(x_0) = x_0$ .

**Dim. Unicità**: se ce ne fossero 2, diciamo  $x_1$  e  $x_2$ , avremmo che

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2)$$

perché  $f(x_1) = x_1$   
 $f(x_2) = x_2$

perché è una  
contrazione

cioè  $\underbrace{(1-L)}_{\neq 0} d(x_1, x_2) \leq 0$ , cioè  $d(x_1, x_2) \leq 0, \dots$

**Esistenza** Devo risolvere  $f(x) = x$ . Prendo  $a_0$  a caso. Costruisco per ricorrenza la successione  $a_{n+1} = f(a_n)$   $a_0$  dato.

**Se**  $a_n$  ha un limite  $l$  in  $X$ , allora passando da ricorrenza al limite si ha che

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & f(l) \end{array}$$

cioè  $l$  è un p.to fisso (occhio: ho usato che  $f(x)$  è continua,

ma questo segue banalmente (provare!) dalla Lipschitzianità).

Per dimostrare che  $a_n$  ha un limite in  $X$ , basta che dimostri che è di Cauchy.

Fisso  $\varepsilon > 0$  e calcolo (supposto  $n > m$ )

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_m, a_{m+1}) + d(a_{m+1}, a_{m+2}) + \dots + d(a_{n-1}, a_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } d(a_n, a_{n+1}) &= d(f(a_{n-1}), f(a_n)) \\ &\leq L d(a_{n-1}, a_n) \\ &\leq L^2 d(a_{n-2}, a_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq L^k d(a_0, a_1) \quad \leftarrow \text{si dimostra formalmente per induzione} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq L^m d(a_0, a_1) + L^{m+1} d(a_0, a_1) + \dots + L^{n-1} d(a_0, a_1) \\ &= d(a_0, a_1) L^m (1 + L + L^2 + \dots + L^{n-1-m}) \\ &= d(a_0, a_1) L^m \sum_{k=0}^{\infty} L^k \\ &= d(a_0, a_1) L^m \boxed{\frac{1}{1-L}} \quad \downarrow \text{serie geometrica} \end{aligned}$$

Se  $m$ , quindi anche  $n$ , è abbastanza grande, il RHS è  $\leq \varepsilon$   
 $\Rightarrow$  la succ. è di Cauchy.

Esercizi Vedere che la tesi è falsa

- se  $X$  non è completo
- se  $L = 1$
- se anche  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  per ogni  $x \in X, y \in X$ .

## SSSUP 2012 - LEZIONE 07

Titolo nota

09/02/2012

Convergenza puntuale e uniforme di funzioni

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ , e sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $f_n: A \rightarrow X$  una successione di funzioni, e sia  $f_\infty: A \rightarrow X$ .

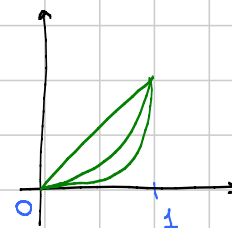
Def. Si dice che  $f_n \rightarrow f$  PUNTALMENTE se  
 $\forall x \in A$  si ha che  $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$  (convergenza in  $X$ )

Si dice che  $f_n \rightarrow f$  UNIFORMEMENTE se  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A$

Oss. Convergenza uniforme  $\Rightarrow$  convergenza puntuale  
 $\nLeftarrow$

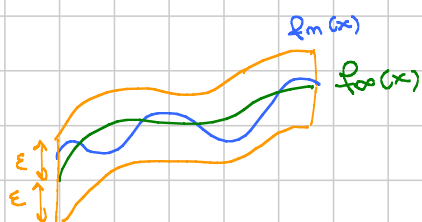
Esempio  $A = [0, 1]$ ,  $X = \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$

Si verifica che  $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

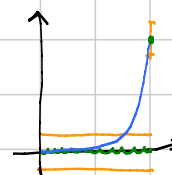


nel senso della convergenza puntuale

Convergere uniformemente = "definitivamente cadere in una striscia centrata in  $f_\infty$  di ampiezza  $\varepsilon$ "



Nell'esempio questo non succede



Brutalmente: nella convergenza uniforme c'è un  $n_0$  che va bene per tutti gli  $x \in A$ .



Oss. La convergenza puntuale la posso definire per funzioni

$f_n : A \rightarrow X$ , dove

- $A$  può essere un insieme qualunque
- $X$  è un qualunque ambiente in cui hanno senso i limiti di successioni.

Per la convergenza uniforme posso spingermi fino a

- $A$  insieme qualunque
- $X$  metrico.

Oss. Se  $A$  è un insieme,  $X$  è un metrico, allora posso definire una distanza tra funzioni  $f : A \rightarrow X$ ,  $g : A \rightarrow X$  come

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ \underbrace{d(f(x), g(x))}_{\text{distanza in } X} : x \in A \}$$

*distanza tra le funzioni*

Questa distanza "metrizza" la convergenza uniforme, cioè  $f_n \rightarrow f_0$  uniformemente  $\Leftrightarrow \text{dist}(f_n, f_0) \rightarrow 0$ .

Achtung! Affinchè  $\text{dist}(f, g)$  sia ben definita occorre che il sup non faccia  $+\infty$ , il che avviene ad esempio se  $f$  e  $g$  sono limitate.

Teorema Sia  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo compatto.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.

Sia  $C^0(I; X)$  l'insieme delle funzioni continue  $f : I \rightarrow X$ .

Allora  $C^0(I; X)$  è uno spazio metrico rispetto a  $\text{dist}(f, g)$

Se  $X$  è completo, allora  $C^0(I; X)$  è completo.

Dim. Che si tratti di un metrico è banale (esercizio: occhio alla triangolare!)

Perchè è completo? Devo dimostrare: data una qualunque succ. di funzioni di Cauchy rispetto a  $\text{dist}$ , allora  $f_n \rightarrow$  ad una

certa  $f_\infty \in C^0(I; X)$ .

Per ogni  $x \in I$  ho che  $f_n(x)$  è una succ. di Cauchy in  $X$ .

Infatti  $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \text{dist}(f_n, f_m)$ .

Questo basta per dire che  $f_n(x) \rightarrow$  ad un certo valore che chiamo  $f_\infty(x)$ . Devo dimostrare

① che il limite è continuo

② che la convergenza avviene nel senso di  $\text{dist}$

Dim. di ② Sia dato  $\varepsilon > 0$ . Scelgo  $n_0 \in \mathbb{N}$  b.c.  $\text{dist}(f_n, f_m) \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq n_0, m \geq n_0$ . Allora per ogni  $x \in A$  ho che

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$  ottengo che

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in I, \forall n \geq n_0,$$

il che equivale a dire che  $\text{dist}(f_n, f_\infty) \leq \varepsilon$ .

Dim. di ① Devo dim. che  $f_\infty(x)$  è continuo. Fisso  $x_0 \in I$  e fisso  $\varepsilon > 0$ . Devo trovare  $\delta > 0$  tale che

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow d(f_\infty(x), f_\infty(x_0)) \leq \varepsilon$$

Ora

$$\begin{aligned} d(f_\infty(x), f_\infty(x_0)) &\leq d(f_\infty(x), f_n(x)) + \\ &\quad + d(f_n(x), f_n(x_0)) + \\ &\quad + d(f_n(x_0), f_\infty(x_0)) \end{aligned}$$

Scelgo  $n$  abbastanza grande in modo che il 1° ed il 3° siano  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$  (è possibile perché so che sono  $\leq \text{dist}(f_n, f_\infty)$ )

Fissato un  $n$  abbastanza grande, scelgo  $\delta$  in modo che il 2° sia  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$  (posso perché  $f_n$  è continua).  
— o — o —

Oss. Dello altrimenti, il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

Questo non vale per la convergenza puntuale.

Oss. Supponiamo che  $X$  sia un Banach. Allora  $C^0(I; X)$  è un Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{C^0(I; X)} = \sup \{ \|f(x)\|_X : x \in I \}$$

Fatto generale Data una successione  $a_n$  a valori in un Banach  $X$  si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_X < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Def. Data una successione di funzioni  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e  $f_n$  continua si dice che  $\sum f_n$  converge totalmente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in I \} < +\infty$$

Teorema Data una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  con  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, si ha che

CONVERGENZA TOTALE  $\Rightarrow$  CONVERGENZA UNIFORME  
 convergenza di una serie di numeri  $\geq 0$       convergenza di una serie di funzioni, cioè convergenza uniforme della successione delle somme parziali

Dim. Estendiamo l'enunciato a funzioni  $f_n: I \rightarrow X$  sp. di Banach. La tesi è dire che  $\sum f_n$  converge in  $C^0(I; X)$ .

Ora

$$\|f_n\|_{C^0(I; X)} = \sup \{ \|f_n(x)\|_X : x \in I \}$$

e il fatto generale ci dice che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{C^0(I; X)} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ converge in } C^0(I; X).$$

## SSSUP 2012 - LEZIONE 08

Titolo nota

09/02/2012

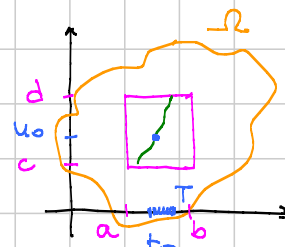
Teorema di esistenza ed unicità per eq. diff.

Consideriamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  sia un aperto,  
 $(t_0, u_0) \in \Omega$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  
 Lipschitziana in  $u$  uniformemente rispetto a  $t$ .

Allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

Dim. Mi riduco ad un rettangolo che contiene il dato iniziale.A tal fine considero un rettangolo  $[a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$   
 con  $t_0 \in (a, b)$  e  $u_0 \in (c, d)$ .Per l'ipotesi su  $f$  sappiamo che  $\exists L \in \mathbb{R}$  t.c.

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall (t, u_1, u_2) \in [a, b] \times [c, d]^2$$

Voglio trovare

- un  $T \in [t_0, b]$
- una funzione  $u: [t_0, T] \rightarrow [c, d]$  che risolve l'equazione.

Passo 1 "Da equazione differenziale ad equazione integrale".Una funzione  $u(t)$  risolve l'equazione + cond. iniziale se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \text{per ogni } t \in [t_0, T].$$

Supponiamo che  $u$  verifichi l'equazione differenziale. Allora

$$\begin{array}{c}
 \text{cond. iniz.} \\
 \downarrow \\
 u(t) - u_0 = u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \\
 \begin{array}{c}
 \text{u è int.} \\
 \text{di u'} \\
 \downarrow \\
 \text{uso eq. diff.}
 \end{array}
 \end{array}$$

Viceversa: supponiamo che  $u$  verifichi l'equazione integrale.

Allora  $u(t_0) = u_0$ , cioè  $u$  verifica la condizione iniziale.

Inoltre per il te. fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

Vantaggi della formulazione integrale:

- ① contiene al suo interno sia l'eq. diff., sia dato iniziale
- ② è equivalente al problema di Cauchy
- ③ richiede solo la continuità di  $u$ , perché poi la derivabilità è una conseguenza.

**Passo 2** Consideriamo l'insieme delle funzioni continue

$$f: [t_0, T] \rightarrow [c, d]$$

Questo è uno spazio di Banach che indichiamo con  $X_{[t_0, T], [c, d]}$ .

Consideriamo, per ogni  $u \in X_{\dots}$ , la funzione

$$F(u) \text{ definita da } [F(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Quindi  $F$  prende in input funzioni  $[t_0, T] \rightarrow [c, d]$  e fornisce in output funzioni  $[t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ora l'equazione integrale ha una soluzione  $u$  se e solo se  $F(u) = u$ , cioè se e solo se  $F$  ha un pto fisso. Programmiamo

- ① mostrare che se  $T$  è abbastanza vicino a  $t_0$ , allora  $F: X_{\dots} \rightarrow X_{\dots}$  (cioè nello stesso spazio)
- ② mostrare che  $F$ , per  $T$  abbastanza piccolo, è una contrazione.

Verifica di ① : sia  $M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in [a, b] \times [c, d] \}$

Allora

$$\begin{aligned} |[F(u)](t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^T f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^T |f(s, u(s))| ds \\ &\leq M(T - t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} d \\ | \\ u_0 \\ | \\ c \end{array}$$

Basta scegliere  $M(T - t_0) \leq \min \{d - u_0, u_0 - c\}$  e siamo sicuri che

$$F : X_{[t_0, T], [c, d]} \rightarrow X_{[t_0, T], [c, d]}$$

Da questo momento in poi,  $F$  manda uno spazio in sé.

Verifica di ② Devo verificare che per  $T$  abbastanza vicino a  $t_0$  si ha che  $F$  è una contrazione, cioè che esiste  $\nu < 1$  b.c.

$$\text{dist}(F(u_1), F(u_2)) \leq \nu \text{dist}(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in X_{\dots}$$

Per ogni  $t \in [t_0, T]$  si ha che

$$\begin{aligned} |[F(u_1)](t) - [F(u_2)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_2(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t \{ f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)) \} ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \\ &\stackrel{(\text{uso unif. Lip.})}{\leq} L \int_{t_0}^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}(u_1, u_2) ds \\ &\leq L(T - t_0) \text{dist}(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che, per ogni  $t \in [t_0, T]$ , si ha che

$$|F(u_1)(t) - F(u_2)(t)| \leq L(T-t_0) \text{dist}(u_1, u_2)$$

Facendo il sup rispetto a  $t$  otteniamo che

$$\text{dist}(F(u_1), F(u_2)) \leq \boxed{L(T-t_0)} \text{dist}(u_1, u_2)$$

Basta scegliere  $T$  in maniera tale che  $L(T-t_0) < 1$  (ad es.  $= \frac{1}{2}$ ).  
Questo completa la dimostrazione.

— o — o —

Oss. sull'unicità Ho dimostrato l'unicità?

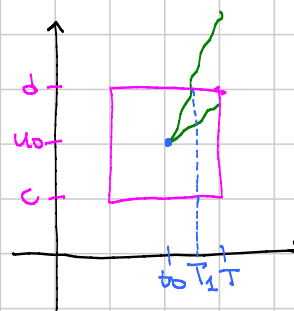
**[N]** Ho dimostrato che esiste un'unica soluzione in  $X_{[t_0, T], [c, d]}$  pur di scegliere  $T$  come pare a me ...

Potrebbe esserci un'altra soluzione che "scappa" da  $[c, d]$  prima di  $T$ ...

Sia  $T_1$  il tempo in cui scappa. Allora avrei 2 soluzioni in

$$X_{[t_0, T_1], [c, d]}$$

ma  $F$  è una contrazione anche in questo spazio, perché bastava  $T \leq$  qualcosa, quindi se  $T$  va bene, anche  $T_1$  va bene.



Esercizio Enunciare e dimostrare il teorema nel caso dei sistemi.

Cosa cambia?

$$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$[c, d]$  = palla chiusa con centro in  $u_0$  e un certo raggio

$X$  = funzioni continue da  $[t_0, T]$  a valori nella palla

## SSSUP 2012 - LEZIONE 09

Titolo nota

17/02/2012

Teoremi di esistenza per equazioni differenziali (anche con derivate parziali)

Via punto fisso (contrazione in uno spazio metrico completo)

Via compattezza: si introducono delle "quasi-soluzioni" e si fa vedere che convergono ad una sol. vera

**Teorema di ASCOLI-ARZELÀ** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo, e sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Sia  $f_n$  una successione di funzioni  $f_n: I \rightarrow X$

Supponiamo che

- (i) per ogni  $t \in I$  si ha che la successione  $\{f_n(t)\}$  è relativamente compatta, cioè ogni sua sottosuccessione ammette a sua volta una sottosuccessione convergente, **COMPATTEZZA A  $t$  FISSATO**
- (ii) le funzioni  $f_n(t)$  sono equicontinue **EQUICONTINUITÀ**

Allora  $f_n$  ammette una s.succ. convergente UNIFORMEMENTE, cioè esiste una successione  $n_k$  strett. crescente di interi positivi, ed esiste  $f_\infty: I \rightarrow X$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$  uniformemente.

Oss. La funzione limite  $f_\infty$ , essendo lim. unif. di fnc. continue, è a sua volta continua.

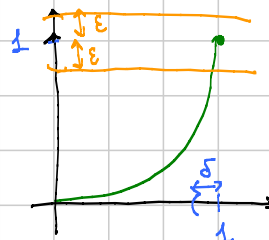
Def. Siano  $f_n: I \rightarrow X$  delle funzioni ( $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $(X, d)$  è metrico). Si dice che sono una successione **EQUICONTINUA** se  $\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $d(f_n(t), f_n(t_0)) \leq \varepsilon$  per ogni  $t \in I$  b.c.  $|t - t_0| \leq \delta$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$[n \in \mathbb{N}, |t - t_0| \leq \delta \Rightarrow d(f_n(t), f_n(t_0)) \leq \varepsilon]$$



Oss. La cosa importante è che c'è un  $\delta$  che va bene per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

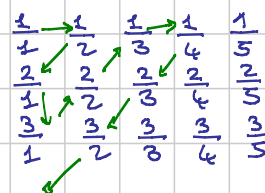
Esempio Se prendo  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(t) = t^n$ ,  $I = [0, 1]$  non si tratta di funzioni equicontinue. Il problema è in  $t_0 = 1$ , dove sono sempre più pendenti, quindi per ogni  $n \in \mathbb{N}$  servirebbe un  $\delta$  sempre più piccolo.



Oss. La definizione di equicontinuità si può dare per una qualunque successione di funzioni tra due spazi metrici.

Def. Un insieme si dice numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$ .

Ad esempio,  $\mathbb{Q}$  è numerabile perché c'è il serpentine



Un sottoinsieme  $D \subseteq I$  si dice denso se per ogni  $t \in I$  ed ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $d \in D$  t.c.  $|t - d| \leq \varepsilon$ . Equivalentemente: se  $I \subseteq \bar{D}$ .

(La definizione si estende a sottoinsiemi  $D$  di un qualunque spazio topologico)

Step 1 Considero un qualunque sottoinsieme  $D \subseteq I$  che sia DENS0 e NUMERABILE

Oss. ci sono vari modi di dimostrare che tali sottoinsiemi esistono

① prendere  $D := I \cap \mathbb{Q}$ ,

② divido  $I$  in 2 parti uguali e prendo un pto per parte, poi

" " " 3 " "

" " " 4 " "

e così via.

Esercizio Ogni sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  contiene un denso  $D$  finito o numerabile.

**STEP 2** Esiste una sottosuccessione  $f_{n_k}$  tale che  $f_{n_k}(t)$  converge a qualcosa per ogni  $t \in D$ .

Per farlo:

- numero gli elementi di  $D$ :  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$
- per l'ipotesi (i) esiste una s.succ.  $f_{n_k}$  t.c.  $f_{n_k}(d_1) \rightarrow \text{qualcosa}$
- " " " " " "  $f_{n_{k_1}}$  della precedente tale che  $f_{n_{k_1}}(d_2) \rightarrow \text{qualcosa}$
- e così via...

Concludo con il **PROCEDIMENTO DIAGONALE**

Schema generale:

\* ho una successione in cui succede una certa cosa ( $P_1$ )

\* " " sottosucc. della precedente in cui succede ( $P_2$ )

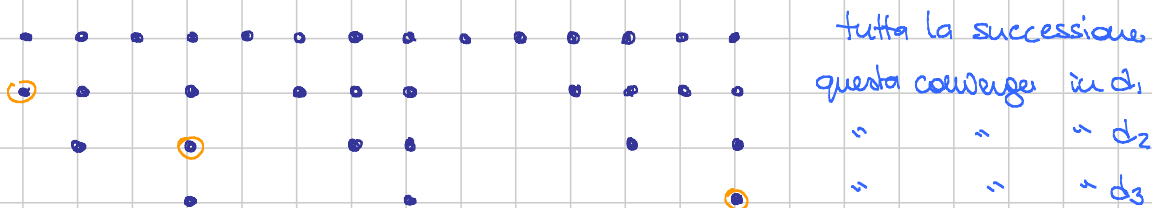
⋮

( $P_n$ ) succede in una s.succ. di quella in cui vale ( $P_k$ )

Come trovare una sottosuccessione in cui succedono tutte le ( $P_i$ )?

Basta prendere il 1° el. della prima succ., il 2° elemento della 2° succ., e così via !!!

Quella che ottengo è una s.succ. di tutte quante, quindi gode di tutte quante le proprietà



**Step 3** Sia  $f_n$  la sottosuccessione (ho eliminato i termini inutili) che converge a qualcosa per ogni  $d \in D$ .

Voglio dimostrare che  $f_n(t)$  converge a qualcosa per ogni  $t \in I$ , senza ulteriormente estrarre sottosuccessioni

Fisso  $t_0 \in I$ . Se dimostro che  $f_n(t_0)$  è di Cauchy ho finito perché

- per l'ipotesi (i) ho che  $f_n(t_0)$  ha una s.succ. convergente

- essendo di Cauchy, se ha una s.succ. convergente, allora converge tutta.

Obiettivo: dimostrare che  $f_n(t_0)$  è di Cauchy.

Prendo  $\varepsilon > 0$ , prendo il  $\delta > 0$  dell'equicontinuità corrispondente ad  $\varepsilon/3$ , prendo  $d \in D$  tale che  $|t_0 - d| \leq \delta$ .

Osservo che  $f_n(d)$  è di Cauchy perché già so che converge.

Prendo  $d'$  no corrispondente a questa succ. di Cauchy e  $\frac{\varepsilon}{3}$ .

Allora per ogni  $n \geq n_0$ ,  $m \geq n_0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} d(f_n(t_0), f_m(t_0)) &\leq d(f_n(t_0), f_n(d)) + d(f_n(d), f_m(d)) + d(f_m(d), f_m(t_0)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

**Step 4** Ora so che per ogni  $t \in I$  si ha che  $f_n(t) \rightarrow$  qualcosa, che chiamo  $f_\infty(t)$ .

Dunque  $f_\infty(t)$  è il limite puntuale della succ., che in realtà è una s.succ. di quella originaria,  $f_n(t)$ .

Essendo le singole funzioni continue, resta da dimostrare che la convergenza è uniforme.

Fatto da accettare: supponiamo che l'intervallo  $I$  sia chiuso, cioè del tipo  $[a, b]$ . Allora l'ipotesi (ii) implica in realtà

l'EQUI UNIFORME CONTINUITÀ, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$n \in \mathbb{N}, |t_1 - t_2| \leq \delta, t_1, t_2 \in I \Rightarrow d(f_n(t_1), f_n(t_2)) \leq \varepsilon.$$

Allora si dimostra "facilmente" che  $f_n(t) \rightarrow f_\infty(t)$  uniformemente.

Sia  $\varepsilon > 0$ . Prendo  $\delta > 0$  che corrisponde ad  $\varepsilon/3$  nell'uniforme continuità. Ricopro  $I$  con un numero finito di sottointervalli  $I_1, \dots, I_k$  di ampiezza  $\leq \delta$ . In ciascuno di tali sottointervalli individuo un elemento  $d_k \in D$ .

Ora  $f_n(d_i) \rightarrow f_\infty(d_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Quindi esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$d(f_\infty(d_i), f_n(d_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni } n \geq n_0, i = 1, \dots, k$$

(qui è fondamentale che  $i$  ha un numero finito di possibili valori). Preso un qualunque  $t$ , questo starà in un certo intervallo  $I_j$ , e quindi per  $n \geq n_0$  si ha che

$$\begin{aligned} d(f_\infty(t), f_n(t)) &\leq d(f_\infty(t), f_\infty(d_j)) + \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad + d(f_\infty(d_j), f_n(d_j)) + \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad + d(f_n(d_j), f_n(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{perché } |d_j - t| \leq \delta \end{aligned}$$

Perché il termine della prima riga è  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ ?

Dall'uniforme equicontinuità si ha che

$$d(f_n(t), f_n(d_j)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{in quanto } t \text{ e } d_j \text{ sono vicini}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene la stima voluta.

— o — o —

Esercizio Vedere lo stesso teorema per funzioni  $f_n: Y \rightarrow X$ , dove  $Y$  è un metrico.

Quali ipotesi dobbiamo fare su  $Y$ ?

## SSSUP 2012 - LEZIONE 10

Titolo nota

17/02/2012

Teorema di esistenza (e basta) per equazioni differenziali

In ipotesi semplificate  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua  
 $t_0 \in \mathbb{R}$  dato,  $u_0 \in \mathbb{R}$  dato.

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione locale, cioè esiste  $\delta > 0$  ed esiste  $u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  che lo risolve.

Perché ipotesi semplificate? ①  $f$  potrebbe essere definita solo in un intorno di  $u_0$

② potrebbe essere un sistema ( $u_0 \in \mathbb{R}^n$ )

③ potrebbe essere un'eq. non autonoma  
 $u' = f(t, u)$ .

**Step 1** Ho risolto il problema se trovo una funzione  $u$  che soddisfa la formulazione integrale

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Esattamente come l'altra volta.

**Step 2** Fisso  $n$  intero  $> 0$  e procedo a tratti lunghi  $\frac{1}{n}$

$$t_0 \quad t_0 + \frac{1}{n} \quad t_0 + \frac{2}{n}$$

definendo una soluzione approssimata  $u_n(t)$ .

Inizio ponendo  $u_n(t) = u_0$  per ogni  $t \leq t_0$

Per ogni  $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$  pongo

$$u_n(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(\underbrace{u_n(s - \frac{1}{n})}_{\text{coinvolge valori di } u_n \text{ per } t \leq t_0}) ds$$

Per ogni  $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$  pongo la stessa cosa

$$u_n(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(\underbrace{u_n(s - \frac{1}{n})}_{\text{coinvolge valori di } u_n(t) \text{ per } t \leq t_0 + \frac{1}{n}}) ds$$

Di questo passo ottengo una soluzione approssimata  $u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Obiettivo:

- ① trovare un  $\delta > 0$  tale che in  $[t_0, t_0 + \delta]$  siano verificate le ipotesi di Ascoli-Arzelà
- ② prendere il limite  $u_\infty(t)$  di una opportuna s.succ. e sperare che  $u_\infty(t)$  sia soluzione del problema iniziale.

Il pto ② è ragionevole che succeda perché la formulazione integrale è stabile per passaggio al limite (mentre non lo sarebbe quella differenziale !!)

**Step 3** Sistemazione del pto ①. Prendo il rettangolo

$[u_0 - 1, u_0 + 1]$ . Questo sarà  $X$ . Pongo

$$L := \max \{ |f(x)| : x \in [u_0 - 1, u_0 + 1] \}.$$

Prendo  $\delta := \frac{1}{L}$ .

Dico che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  si ha che

$u_n(t) \in [u_0 - 1, u_0 + 1] \rightarrow$  garantisce la compattezza a  $t$  fisso

$$|u'_n(t)| \leq L$$

$\rightarrow$  garantisce che tutte le  $u_n(t)$  sono lipschitziane con costante  $L$  indep. da  $n$ .

Per dimostrare la 1ª basta osservare che

$$\begin{aligned}
 |u_n(t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(u_n(s - \tfrac{1}{n})) \, ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{|f(u_n(s - \tfrac{1}{n}))|}_{\text{se sapessi che } \leq L \text{ avrei}} \, ds \\
 &\leq L(t - t_0) \\
 &\leq L\delta \\
 &= L \cdot \frac{1}{L} \leq 1
 \end{aligned}$$

Il ritardo ci salva dal "mangiarsi la coda". Formalmente la dimostrazione viene fatta per induzione sui sottointervalli  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$  ( $n$  fisso, induzione su  $k$ ).

Per dimostrare che  $|u'_n(t)| \leq L$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e ogni  $t \in [t_0, t_0 + 1]$  basta osservare che

$$u'_n(t) = f\left(\underbrace{u_n(t - \tfrac{1}{n})}_{\text{sta in } [u_0 - 1, u_0 + 1]}\right)$$

## SSSUP 2012 - LEZIONE 11

Titolo nota

02/03/2012

Teorema di compattezza in spazi metriciDefinizioni Uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice

- compatto per successioni se per ogni successione  $x_n$  in  $X$  esiste una s.succ.  $x_{n_k}$  che converge ad un certo  $x_\infty \in X$
- compatto per ricoprimenti se ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento finito, cioè se per ogni famiglia  $\{U_a\}_{a \in A}$  con  $U_a$  aperto per ogni  $a \in A$  tale che  $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq X$  si ha che esistono  $a_1, \dots, a_k \in A$  tali che

$$\bigcup_{i=1}^k U_{a_i} \supseteq X$$

Oss. Entrambe le definizioni si applicano in realtà in spazi topologiciOss. Un sottoinsieme  $Y \subseteq X$  si dice compatto in uno dei 2 sensi, quando è compatto come spazio metrico o topologico visto come sottospattoEsempio  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  è compatto nei 2 sensi. Non è vero che ogni ricoprimento chiuso ammette un sottoricoprimento finito

- Modo 1  $[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} \{x\}$  ← ricoprimento chiuso senza sotto-ricoprimenti finiti

- Modo 2   $U_k = \left[ \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right]$  e poi aggiungo  $\{0\}$

Teorema Per uno spazio metrico  $X$  i seguenti fatti sono equivalenti

- (1)  $X$  è compatto per ricoprimenti,
- (2)  $X$  è compatto per successioni,
- (3)  $X$  è completo e totalmente limitato,
- (4)  $X$  è completo e totalmente limitato in senso debole



- Ricordo
- $X$  è totalmente limitato se per ogni  $r > 0$  esiste un numero finito di p.ti  $x_1, \dots, x_k$  b.c.  $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, r) = X$ .  
In maniera equivalente: ogni p.to  $x \in X$  dista  $\leq r$  da almeno uno degli  $x_i$ .
  - $X$  è totalmente limitato in senso debole se per ogni  $r > 0$  esiste un compatto  $K \subseteq X$  (compatto in qualunque senso) tale che ogni p.to  $x \in X$  dista  $\leq r$  da almeno un p.to di  $K$ .

Dom (3)  $\Rightarrow$  (4) Banale (gli insiemi finiti sono compatti)

(3)  $\Rightarrow$  (2) Prendo una successione  $x_n$  e voglio trovare una s.succ. convergente. Per la completezza basta che trovo una s.succ. di Cauchy. Costruisco sottosuccessioni  $N = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \dots$  in questo modo

- $A_1 = N$
- $A_2 =$  ricopro  $X$  con un numero finito di palle di raggio  $\frac{1}{2}$  (posso per la totale limitatezza) e avrò che  $x_n$  è una di queste palle per infiniti indici  $n$ . Allora  $A_2$  è l'insieme di questi indici.
- $A_{k+1} =$  ricopro ... raggio  $\frac{1}{k+1}$  (posso ...) e avrò che  $x_n$  è una di queste palle per infiniti indici  $n \in A_k$ . Allora  $A_{k+1} \dots$ .

Ora scelgo la succ. di indici  $n_k$  in maniera tale che  $n_k \in A_k$  e  $n_{k+1} > n_k$  (posso perchè tutti gli  $A_i$  sono infiniti).

È facile verificare che  $x_{n_k}$  è di Cauchy.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sia  $x_n$  una succ. di Cauchy. Per ipotesi (2) questa ha una s.succ. convergente. Ma allora converge tutta (fatto generale: se una succ. di Cauchy ha una s.succ. convergente, allora converge essa stessa).

Così ho dimostrato che (2)  $\Rightarrow$  completo

Dimostriamo ora che (2)  $\Rightarrow$  totalmente limitato.

Fisso raggio  $r > 0$ . Definisco  $x_n$  in questo modo

- scelgo  $x_1$  a caso
- scelgo  $x_{k+1}$  in modo che disti  $> r$  da tutti i precedenti  $x_1, \dots, x_k$

Se strada facendo mi blocco, cioè non riesco a trovare  $x_{k+1}$ , vuol dire che  $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, r) \supseteq X$

La successione  $x_n$  non è di Cauchy, perché  $d(x_n, x_m) > r$  per ogni  $n$  ed  $m$ . Quindi non può avere s.succ. convergenti, in quanto ogni s.succ. avrebbe la stessa proprietà.

Lemma (Raggio magico) Sia  $X$  compatto per successioni, e sia  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ricoprimento aperto.

Allora  $\exists r > 0$  con questa proprietà:

per ogni  $x \in X$ , esiste  $\alpha \in A$  tale che  $B(x, r) \subseteq U_\alpha$ .

Dato il lemma, vediamo che  $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ .

Prendo un qualunque ricoprimento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  di  $X$ . Voglio trovare un s.ric. finito.

Step 1 Prendo il raggio  $r$  magico dato dal lemma

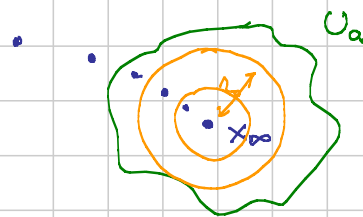
Step 2 Prendo  $x_1, \dots, x_k$  in maniera che  $B(x_i, r)$  per  $i = 1, \dots, k$  ricoprono tutto  $X$  (uso che (2)  $\Rightarrow$  (3), quindi  $X$  è totalmente limitato)

Step 3 Per il lemma, ciascuna di queste palle  $B(x_i, r)$  è contenuta in un certo  $U_{\alpha_i}$ . Questo è il sottoricoprimento finito cercato.

Dim. Lemma Supponiamo che non sia vero. Allora tutti gli  $r = \frac{1}{k}$  vanno male, cioè per ogni  $k$  esiste un pto  $x_k$  tale che  $B(x_k, \frac{1}{k})$  non è contenuta in nessuno degli  $A_i$ . Per la (2) si ha che  $x_k$  ha una s.succ. convergente, che per semplicità non rinominiamo.

Detto per bene:  $x_k \rightarrow x_\infty$ .

- $\exists r_0 > 0 \exists a \in A$  t.c.  $B(x_\infty, r_0) \subseteq U_a$
- Definitivamente  $x_k \in B(x_\infty, \frac{r_0}{2})$
- Per tutti gli  $x_k$  precedenti il raggio  $\frac{r_0}{2}$  va bene, il che è contro l'ipotesi che  $\frac{1}{k}$  non andasse bene.



(1)  $\Rightarrow$  (2) Data una succ.  $x_n$ , voglio trovare una s.succ. convergente.

Osservazione: se esiste un pto  $x_\infty \in X$  t.c. per ogni  $r$  si ha che  $B(x_\infty, r)$  contiene infiniti elementi della succ., allora esiste una s.succ.  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ .

Quindi, se non esiste una s.succ. convergente, vuol dire che per ogni  $x \in X$  esiste una pallina  $B(x, r)$  aperta, con raggio eventualmente dipendente da  $x$ , che tocca solo un numero finito di elementi della successione.

Ma tutte queste palline costituiscono un ricoprimento aperto di  $X$ , che dunque ammette un s. ricopr. finito.

Quindi ho un numero finito di palle, ciascuna delle quali contiene solo un numero finito di  $x_n$ , il che è impossibile.

Esercizio Dimostrare che (4)  $\Rightarrow$  uno qualunque degli altri 3...

## SSSUP 2012 - LEZIONE 12

Titolo nota

02/03/2012

Teorema (HEINE - CANTOR) Sia  $X$  uno spazio metrico compatto, e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è uniformemente continua.

Dim. Ipotesi: per ogni  $x \in X$ , per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  b.c.  
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  ( $\delta$  dipende da  $\varepsilon, x$ )  
 Tesi: per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  b.c.  
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  ( $\delta$  dipende solo da  $\varepsilon$ )

Via compattezza per successioni Per assurdo. Supponiamo che  $f$  non sia uniformemente continua. Allora  $\exists \varepsilon_0 > 0$  per cui nessun  $\delta > 0$  va bene. In particolare non vanno bene i  $\delta$  del tipo  $\frac{1}{k}$ , cioè esistono  $x_k, y_k$  tali che

$$d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \quad \text{MA} \quad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon_0$$

A meno di s. successioni abbiamo che  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty, y_{n_k} \rightarrow y_\infty$ .

Ora  $x_\infty = y_\infty$  perché

$$\begin{array}{ccc} d(x_{n_k}, y_{n_k}) & \leq & \frac{1}{n_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(x_\infty, y_\infty) & \leq & 0 \end{array}$$

$$\text{Ma allora } |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 = |f(x_\infty) - f(y_\infty)| \geq \varepsilon_0 > 0 \Rightarrow \text{assurdo.}$$

Via compattezza per ricoprimenti Fisso  $\varepsilon > 0$ . Devo trovare un  $\delta > 0$  universale. Per ipotesi per ogni  $x \in X$  trovo un  $\delta_x$ , cioè un  $\delta$  dipendente da  $x$ , tale che  $d(x, y) \leq \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . Ora  $B(x, \delta_x)$  costituiscono un ricoprimento aperto di  $X$ , che quindi ammette un sottoricoprimento finito.

$$B(x_1, \delta_1), B(x_2, \delta_2), \dots, B(x_k, \delta_k)$$

Dico che  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k \} \cdot \frac{1}{2}$  è quello che va bene.  
 Infatti, dati  $x$  e  $y$  in  $X$  con  $d(x, y) \leq \delta$ , è facile verificare  
 che  $x$  e  $y$  stanno in una stessa palletina...

— o — o —

Passaggio al limite negli integrali.

Problema generale Siano  $f_n$  una succ. di funzioni continue in  
 un intervallo  $[a, b]$ . Supponiamo che  $f_n(x) \rightarrow$   
 $f_\infty(x)$  in qualche senso. Possiamo concludere che

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx \quad ?$$

Fatto 1 La convergenza puntuale NON basta. Prendiamo  $[a, b] = [0, 1]$   
 e  $f_n(x)$  fatte così come in figura

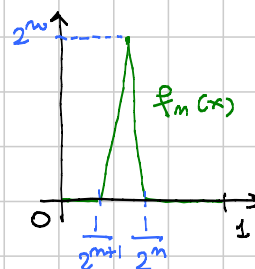
Si verifica che

- $f_n(x) \rightarrow 0$  puntualmente

(banale per  $x=0$ , ogni  $x>0$  è  
 definitivamente a dx del triangolo)

- L'integrale delle  $f_n(x)$  = area triangolo  
 $= \frac{1}{4}$

ma  $\int$  del limite  $= 0$ .



Fatto 2 La convergenza uniforme basta, almeno se le approssimanti  
 sono continue. Infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$  abbiamo che  
 definitivamente si ha che

$$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \forall x \in [a, b],$$

quindi

$$\int_a^b f_\infty(x) dx + \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b f_\infty(x) dx + \varepsilon(b-a)$$

il che dice che  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$

Esercizio (delicato) Sia  $f_n(x)$  una succ. di funzioni integrabili secondo Riemann. Supponiamo che  $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$  uniformemente.

Allora  $f_\infty(x)$  è integrabile secondo Riemann e vale il passaggio al limite.

Fatto 3 (Non dimostrato) Convergenza puntuale + limitatezza (equilimitatezza) bastano.

Convergenza uniforme e composizioni. Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Siano  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  delle funzioni continue che convergono uniformemente ad una certa  $f_\infty: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Cosa posso dire di  $g(f_n(x))$ ?

È ovvio che  $g(f_n(x)) \rightarrow g(f_\infty(x))$  puntualmente per la continuità di  $g$ . Sarà uniforme?

Supponiamo che  $g$  sia uniformemente continua. Allora

- fisso  $\varepsilon > 0$  e so che esiste  $\delta > 0$  t.c.

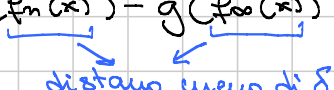
$$|y_1 - y_2| \leq \delta \Rightarrow |g(y_1) - g(y_2)| \leq \varepsilon$$

- per la convergenza uniforme delle  $f_n(x)$  sappiamo che esiste  $m_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \delta \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq m_0$$

Ma allora per ogni  $n \geq m_0$  e ogni  $x \in [a, b]$  avremo che

$$|g(f_n(x)) - g(f_\infty(x))| \leq \varepsilon$$


 distanza meno di  $\delta$

Ora l'immagine di  $f_\infty(x)$  è un compatto perché  $[a, b]$  è compatto (quello che conta è che l'immagine è contenuta in un intervallo  $[A, B]$  con ad esempio  $A = \min$   $B = \max$ ), quindi definitivamente l'immagine di  $f_n$  è contenuta in  $[A-1, B+1]$  quindi in senso l'uniforme continuità di  $g$  s.d.o. in  $[A-1, B+1]$ ,

ma questo è un compatto, dunque l'uniforme continuità segue dalla continuità.

Esercizio Supponiamo che  $f_n \rightarrow f_\infty$  uniformemente in  $[a, b]$   
 Estendiamo le  $f_n$  come costanti per  $x \leq a$ .

Allora posto

$$f_n(x - \frac{1}{n}) = g_n(x)$$

si ha che

$$g_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \text{uniformemente in } [a, b]$$

Notare che questo fatto generale sistema il passaggio al limite nell'integrale per il teo. di esistenza per eq. diff.

Esercizio Trovare l'errore nella 2ª dim. di Heine - Cantor ed aggiustarlo.

— o — o —

## SSSUP 2012 - LEZIONE 13

Titolo nota

06/03/2012

CALCOLO DELLE VARIAZIONI

$X$  insieme,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\min \{ f(x) : x \in X \}$

Problemi con funzionali integrali  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  intervallo

$$\min \left\{ \int_a^b \varphi(x, u(x), u'(x)) dx : u \in X \right\}$$

dove  $X =$  certo insieme di funzioni  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\varphi =$  funzione data

Più in generale possiamo considerare 
$$\underbrace{\int_a^b \varphi(x, u, u'(x), u''(x), \dots, D^{(k)} u(x)) dx}_{F(u)}$$

Input:  $u \in X =$  spazio di funzioni

Output:  $F(u) \in \mathbb{R}$

— o — o —

→ Metodi indiretti: candidati + lotta di fortuna.

→ Metodi diretti: Weierstrass → esistenza → candidati → minimo

Esempio  $\min \{ \underbrace{x^2 + y^2 + 3x - 2y}_{f(x,y)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Metodo diretto

①  $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty \Rightarrow$  Weierstrass generalizzato  $\Rightarrow$  esistenza

② So che il minimo sarà in uno dei pti in cui  $\nabla f = 0$

$$\nabla f(x, y) = (2x+3, 2y-2) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

Essendo unico è per forza il pto di minimo.



Metodo indiretto  $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

Sostituisco

$$f\left(-\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{2} - 2 = -\frac{9}{4} - 1 = -\frac{13}{4}$$

Sarà vero che  $f(x,y) \geq -\frac{13}{4}$  per ogni  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ?

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = \underbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}_{\text{completing square}} - \frac{9}{4} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{\text{completing square}} - 1$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{13}{4} \geq -\frac{13}{4} \text{ con il segno}$$

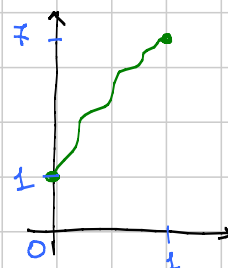
di = che vale se e solo se  $x = -\frac{3}{2}$  e  $y = 1$ .

Esempio 0  $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2(x) dx}_{F(u)} : u \in \underbrace{C^1([0,1])}_X \right\}$

È evidente che  $\min = 0$  e i pti di minimo sono tutte le  $u$  costanti.

Esempio 1  $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2(x) dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^1([0,1]), u(0)=1, u(1)=7}_X \right\}$

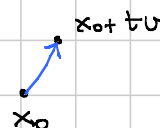
Il metodo indiretto richiede di calcolare la "derivata" o il "gradiente" di  $F$  rispetto ad  $u$ .



Breutesi. Sia  $X$  uno spazio vettoriale, e sia  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Sia  $x_0 \in X$ .

Dato un qualunque  $v \in X$ , posso provare a calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$



Se esiste è la derivata direzionale di  $F$  nel p.to  $x_0$  rispetto alla direzione  $v$ . Qui si chiama DIFFERENZIALE SECONDO GATEAUX.

Teorema (facile facile) Se  $x_0$  è un p.to di minimo (o di max) per  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ , allora tutte le derivate direzionali di  $F$  in  $x_0$ , SE ESISTONO, sono nulle.

Achtung! Può essere che  $x_0$  è p.to di minimo e tutte le derivate direzionali non esistono.

Oss. Il limite è un limite in  $\mathbb{R}$ . Ho usato solo che  $X$  è uno spazio vettoriale.

Più in generale, se anche  $X$  non è uno spazio vettoriale, possiamo considerare una qualunque CURVA  $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x_0$ , poi considerare  $F(\gamma(t)): (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  per cui ha senso provare a calcolare la derivata per  $t=0$ !

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(x_0)}{t}$$

Se esiste, è la "derivata" di  $F$  in  $x_0$  lungo la curva  $\gamma(t)$ .

Teorema Se  $x_0$  è di minimo per  $F$ , allora tutte le derivate lungo curve, se esistono, sono nulle.

Tornando all'esempio 1, prendo

- una  $u$  in  $X$  (p.to in cui calcolare la derivata)
  - una qualunque  $v \in C^1([0,1])$  con  $v(0) = v(1) = 0$  (direzione)
- Calcolo (se esiste)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^1 (u + tv)^2 dx - \int_0^1 u^2 dx \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 (\cancel{\dot{u}^2} + 2t \dot{u} \dot{v} + t^2 \dot{v}^2 - \cancel{\dot{u}^2}) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 (2\dot{u} \dot{v} + t \dot{v}^2) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx + \underbrace{t \int_0^1 \dot{v}^2 dx}_{\downarrow 0} = 2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx
\end{aligned}$$

Quindi: SE  $u$  è un p.to di minimo per  $F(u)$ , allora  
DEVE SUCCEDERE che

$$\int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^1([0,1]) \text{ b.c. } v(0) = v(1) = 0$$

EQUAZIONE DI EULERO: tutte le derivate direzionali = 0

Facciamo finta che  $u$  sia  $C^2([0,1])$ . Integrando per parti abbiamo che

$$0 = \int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = \underbrace{[\dot{u}(x) v(x)]_0^1}_{=0 \text{ perché } v \text{ è nulla al bordo}} - \int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx$$

Nuova versione dell'eq. di Eulero: se  $u \in C^2$  è un p.to di min, allora

$$\int_0^1 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^1 \text{ b.c. } v(0) = v(1) = 0.$$

**Lemma fondamentale** Sia  $[a,b]$  un intervallo, e sia  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b g(x) \cdot f(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } f \in C^1 \text{ con } f(a) = f(b) = 0.$$

Allora  $g(x) = 0$  per ogni  $x \in [a,b]$

Dati: supponiamo per assurdo che  $\exists x_0 \in (a,b)$  t.c.  $g(x_0) > 0$ .  
 Allora per continuità  $\exists \delta > 0$  t.c.  $g(x) > 0$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

L'unica "seccatura" è fare la  
 $f(x)$  di classe  $C^1$ .



Oss. Vale lo stesso lemma se impongo la condizione  
 per ogni  $f \in C^\infty$ ...

Tornando all'esempio 1, abbiamo ottenuto che  
 il p.to di minimo è  $C^2 \Rightarrow \ddot{u} = 0 \Rightarrow u$  è la retta

Sia ora  $u$  la retta buona  $u(x) = 6x + 1$ .

Prendo una qualunque altra  $w \in X$ , che posso scrivere come  
 $w = u + v$  con  $v$  che soddisfa  $v(0) = v(1) = 0$ . Allora

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u} + \dot{v})^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} + \underbrace{2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx}_0 + \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Il centrale è 0 sia per l'eq. di Eulero, sia per calcolo diretto

$$\int_0^1 \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = \underbrace{6}_{\text{---}} \underbrace{\int_0^1 \dot{v}(x) dx}_{\text{---}} = 6 [v(1) - v(0)] = 6(0 - 0) = 0.$$

## SSSUP 2012 — LEZIONE 14

Titolo nota

06/03/2012

Esempio 1  $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 dx : u \in C^1([0,1]), u(0)=1, u(1)=7 \right\}$

Metodo diretto: cerco una metrica, o topologia, o nozione di convergenza in  $X$  che mi garantisca

- $F(u)$  è semicontinuo inferiormente s.c.i.
- i sottolivelli di  $u$  sono compatti.

Possibilità 1  $d_1(u,v) := \sup \{ |u(x) - v(x)| : x \in [0,1] \}$   
 $+ \sup \{ |\dot{u}(x) - \dot{v}(x)| : x \in [0,1] \}$

Ottima notizia:  $F(u)$  è continuo. Infatti se  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $X$  rispetto alla  $d_1$ , cioè  $d_1(u_n, u_\infty) \rightarrow 0$ , questo vuol dire in particolare che  $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$  uniformemente, dunque posso passare al limite negli integrali perché anche  $\dot{u}_n^2 \rightarrow \dot{u}_\infty^2$  unif.

$$F(u_n) = \int_0^1 [\dot{u}_n(x)]^2 dx \rightarrow \int_0^1 \dot{u}_\infty^2(x) dx$$

Il fatto che  $u_n \rightarrow u_\infty$  unif. garantisce che  $u_\infty$  rispetti la condizione al bordo.

Pessima notizia: i sottolivelli non sono compatti.

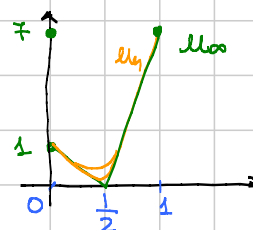
Dico che

$$\{u \in X : F(u) \leq 77\}$$

non è compatto rispetto a  $d_1$ . Basta trovare una successione che non abbia s.succ. convergenti.

Le  $u_n$  hanno derivata equiboundata, quindi di sicuro  $F(u_n) \leq 77$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Se convergono a q.c., convergono a  $u_\infty$  che  $\notin X$ .



Possibilità 2  $d_0(u, v) := \sup \{ |u(x) - v(x)| : x \in [0, 1] \}$

I sottolivelli sono compatti? No, perché c'è lo stesso esempio di prima:  $F(u_n) \leq 7$ , ma  $u_n \rightarrow u_\infty \notin X$  anche rispetto a  $d_0$ .

Come aggiustare le cose ROAD MAP

- ① Cercare un ambiente più grande  $\bar{X} \supseteq X$  con una qualche struttura
- ② Estendere  $F$  da  $X$  a  $\bar{X}$ , cioè trovare un'altra funzione  $\bar{F} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$
- ③ Sperare di poter applicare W. generalizzato a  $\bar{F}$  su  $\bar{X}$ , trovando così dei pti di minimo  $\bar{x}_0 \in \bar{X}$
- ④ Sperare che  $\bar{x}_0$  è in realtà sol  $X$  e sia p.to di min per  $F$ , ad esempio perché per puro caso  $F(x) = \bar{F}(x)$  per ogni  $x \in X$ .

Esempio 2  $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 u^4 dx}_{F(u)} : \underbrace{u(0)=0, u(1)=7, u \in C^1([0,1])}_X \right\}$

Prendo  $v \in C^1([0,1])$  b.c.  $v(0) = v(1) = 0$ . Calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{ (u+tv)^4 - u^4 \} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 (u^4 + 4tu^3v + o(t) - u^4) dx = 4 \int_0^1 u^3 v dx \end{aligned}$$

Facciamo finta che sia  $u \in C^2$  e integriamo per parti

$$\int_0^1 [u(x)]^3 v(x) dx = \underbrace{\left[ u^3(x) v(x) \right]_0^1}_0 - \int_0^1 3u(x)^2 \ddot{u}(x) v(x) dx$$

$$\boxed{\int_0^1 [u(x)]^2 \ddot{u}(x) \cdot v(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^1([0,1]) \text{ con } v(0) = v(1) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{E.Q.} \\ \text{EULERO} \end{array}$$

Per il lemma fondamentale:  $[u'(x)]^2 u''(x) = 0$  per ogni  $x \in [0, 1]$   
 Le uniche soluzioni  $C^1$  di questa equazione sono le rette.  
 Lo stesso trucco dell'esempio 1 permette di dimostrare che  
 è effettivamente il minimo (esercizio).

Esempio 3  $\min \left\{ \int_0^1 \sin(u) dx : u(0)=0, u(1)=\pi \right\}$

Come sempre  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\sin(u+tv) - \sin u] dx = \int_0^1 \frac{\sin(u+tv) - \sin u}{t} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 [\sin u \cdot \cos(tv) + \cos u \cdot \sin(tv) - \sin u] dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \left[ \sin u \cdot \frac{[\cos(tv) - 1]}{t} + \cos u \cdot \frac{\sin(tv)}{t} \right] dx$$

$$= \int_0^1 (\cos u) \cdot v dx \quad \text{Per parti...}$$

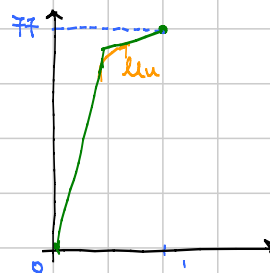
$$= [\cos u(x) \cdot v(x)]_0^1 + \int_0^1 \sin u(x) \cdot u''(x) \cdot v(x) dx$$

Eq. di Eulero  $\int_0^1 \sin u(x) \cdot u''(x) \cdot v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \dots$

... Ancora una volta viene la retta. **Assolutamente NO !!!**

Idea: il minimo NON esiste e l'inf è  $-1$ , che meno non si può. Uso 2pendenze in cui  $\sin(u) = -1$  e faccio la spazzata.

Il costo dei raccordi è piccolo a piacere!



## SSSUP 2012 - LEZIONE 15

Titolo nota

14/03/2012

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \varphi(\dot{u}(x)) dx}_{F(u)} : u(a) = A, u(b) = B, u \in C^1([a,b]) \right\}$$

Teorema Se  $\varphi''(s) > 0$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$  (in particolare  $\varphi$  è strettamente convessa), allora il minimo esiste e l'unico p.to di min è la retta passante per  $(a, A)$  e  $(b, B)$ .

Dim. Determino l'equazione di Eulero. Data  $u \in C^1([a,b])$  e  $v \in C^1([a,b])$  con  $v(a) = v(b) = 0$ , calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^b [\varphi(\dot{u} + t\dot{v}) - \varphi(\dot{u})] dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\varphi(\dot{u}(x) + t\dot{v}(x)) - \varphi(\dot{u}(x))}{t} dx = \int_a^b \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

$\leftarrow$  per ogni  $x$  fisso  $\varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x)$ 
 $\uparrow$  per questo serve un teorema di scambio tra limite ed integrale

Supposto buono il te. di scambio, arriviamo a

$$\boxed{\int_a^b \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx = 0 \quad \forall v \text{ scelta come sopra}} \quad \begin{array}{l} \text{Eq.} \\ \text{Eulero} \end{array}$$

Integrando per parti, e supponendo  $u$  e  $\varphi$  regolari quanto serve

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(\dot{u}(x)) \dot{v}(x) dx &= \underbrace{[\varphi'(\dot{u}(x)) v(x)]_a^b}_{=0 \text{ perché } v(a)=v(b)=0} - \int_a^b [\varphi'(\dot{u}(x))] v(x) dx \\ &= - \int_a^b \varphi''(\dot{u}(x)) \ddot{u}(x) v(x) dx \end{aligned}$$

quindi questo è = 0

Per il lemma fondamentale si ha che  $\underbrace{\varphi''(\dot{u}(x))}_{>0} \ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Quindi  $\ddot{u}(x) = 0$  in  $[a,b] \Rightarrow u$  è la retta.



Dimostro che la retta è meglio di tutto. Sia  $\bar{u}(x)$  la retta.  
Sia  $w$  un'altra funzione  $C^1$  con  $w(a) = A$  e  $w(b) = B$ .  
Posso pensare  $w = \bar{u} + v$  con  $v \in \dots$ . Allora

$$\begin{aligned} F(w) - F(\bar{u}) &= F(\bar{u} + v) - F(\bar{u}) \\ &= \int_a^b [\varphi(\bar{u} + \dot{v}) - \varphi(\bar{u})] dx = (*) \end{aligned}$$

Per la convessità di  $\varphi$  si ha che

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi'(x)y + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) y^2 \quad (\text{Taylor-Lagrange}) \\ &\geq \varphi(x) + \varphi'(x)y \quad \text{Ho usato la convessità} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &\geq \int_a^b \varphi'(\bar{u}(x)) \dot{v}(x) dx \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. ang.} \\ \text{della retta}}}{\varphi'(m)} \int_a^b \dot{v}(x) dx = \varphi'(m) [v(x)]_a^b = 0 \end{aligned}$$

Questo dimostra che  $F(w) \geq F(\bar{u})$  e inoltre vale il segno di uguale  $\Leftrightarrow$  c'è l'uguaglianza nel passaggio dopo Taylor-Lagrange, il che vale  $\Leftrightarrow v(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , cioè  $\Leftrightarrow w = \bar{u}$ .

Quindi la retta è l'unico minimo.

Osservazione 1 La seconda pagina, da sola, basta per dimostrare il teorema, anche senza l'esistenza iniziale.

Osservazione 2 Se  $\varphi''(s) < 0$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ , allora lo stesso argomento mostrerebbe che la retta è l'unico punto di massimo per  $F(u)$ .

Sistemazione rigorosa del passaggio al limite nell'integrale

$$\int_a^b \frac{\varphi(\bar{u} + t\bar{v}) - \varphi(\bar{u})}{t} dx \rightarrow \int_a^b \varphi'(\bar{u}) \bar{v} dx$$

Dim Taylor - Lagrange!  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi'(x)y + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)y^2$   
quindi

$$\varphi(\underbrace{\bar{u}(x)}_x + t\underbrace{\bar{v}(x)}_y) = \varphi(\bar{u}(x)) + \varphi'(\bar{u}(x))t\bar{v}(x) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)t^2\bar{v}(x)^2$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\varphi(\bar{u}(x) + t\bar{v}(x)) - \varphi(\bar{u}(x))}{t} - \varphi'(\bar{u}(x))\bar{v}(x) &= \int_a^b \frac{1}{2}\varphi''(\xi) t [\bar{v}(x)]^2 dx \\ &= t \frac{1}{2} \int_a^b \varphi''(\xi) [\bar{v}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

dipende da  $x$  e  $t$   
↓

Ora  $|\bar{v}(x)|$  è limitato perché  $\bar{v}$  è continua in  $[a, b]$

$\xi$  è limitato perché sta tra  $\bar{u}(x)$  e  $\bar{u}(x) + t\bar{v}(x)$ , ed entrambi sono limitati

$\varphi''(\xi)$  è limitato perché  $\varphi''$  è continua e  $\xi$  è limitato.

Quindi differenza =  $t \cdot \text{cosa limitata} \rightarrow 0$ .

Osservazione Nel passaggio al limite, non ho usato la convessità di  $\varphi$ , ma solo il suo essere  $C^2$ .

Cosa succede se  $\varphi''(s) \geq 0$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ ?

Dipende dagli annullamenti di  $\varphi''(s)$ .

Vale ancora che la retta è un p.to di minimo (la dim. è la stessa del caso precedente, 2ª pagina).

Potrebbe non essere l'unico p.to di minimo, e qui entrano in gioco gli annullamenti.

**Caso 1**  $\varphi''(\sigma)$  si annulla "sporadicamente", cioè l'insieme  $\{\sigma \in \mathbb{R} : \varphi''(\sigma) = 0\}$  non contiene intervalli.

Questo è equivalente a dire che  $\varphi(\sigma)$  è STRETTAMENTE crescente. Ora l'eq. di Eulero è

$$\varphi''(u) \dot{u} = 0, \text{ cioè } [\varphi'(u)]' = 0, \text{ cioè}$$

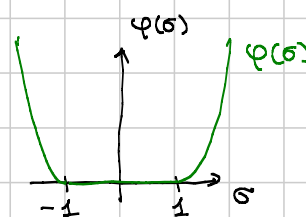
$$\varphi'(u(x)) = \text{costante}$$

Essendo  $\varphi'$  strett. cresc., è pure iniettiva, quindi questo basta a garantire  $u(x) = \text{costante}$ , cioè  $u = \text{retta}$ .

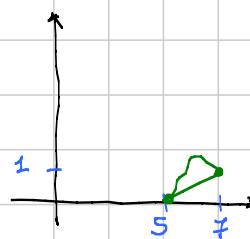
Quindi la retta è l'unico minimo.

**Caso 2**  $\varphi''(\sigma)$  si annulla in un intero intervallo. Ora basta che  $u(x)$  è intervallo di annullamento di  $\varphi''(\sigma)$  e l'eq. di Eulero è automatica.

**Esempio 1**  $\min \left\{ \int_5^7 \varphi(u) : u \in C^1([5,7]) \right.$   
 $\left. u(5)=0, u(7)=1 \right\}$



La retta è un p.to di minimo. Ce ne sono altri? Sì: tutte le funzioni per i due punti con  $|derivata| \leq 1$  ovunque



**Esempio 2**  $\min \left\{ \int_5^7 \varphi(u) : u \in C^1 \dots \right.$   
 $\left. u(5)=0, u(7)=3 \right\}$

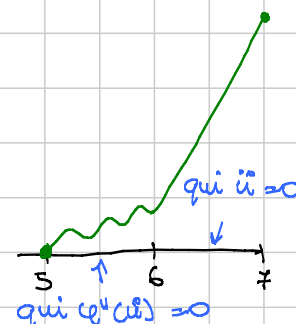
La retta è un p.to di minimo, ma ha  $u(x) = \frac{3}{2}$ , che sta fuori dalla zona di annullamento.

È unico? In linea teorica potrei

- perdere tempo tra  $x=5$  e  $x=6$  con  $|derivata| \leq 1$
- poi andare "a retta" fino a  $x=7$

Così facendo sono soluzioni dell'eq. di Eulero

Non sarai  $C^1$  ovunque, ma ovunque tranne in 6...



## SSSUP 2012 - LEZIONE 16

Titolo nota

14/03/2012

Esercizio Dimostrare che nell'ultimo esempio la retta è l'unico pto di minimo, anche se si ammettono "competitori" che sono  $C^1$  solo ovunque tranne un numero finito di punti.

[Hint: usare il solito Taylor-Lagrange e scoprire che non si può avere uguaglianza per ogni  $x \dots$ ]

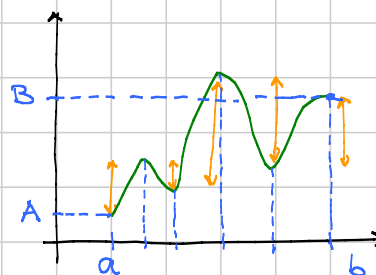
Esempio 1  $\min \left\{ \int_a^b |u'(x)| dx : u \in C^1([a,b]), u(a)=A, u(b)=B \right\}$

Ora  $\varphi(\sigma) = |\sigma|$  e non è nemmeno  $C^1 \dots$  e  $\varphi'(\sigma) = 0$  per  $\sigma \neq 0 \dots$   
Cosa rappresenta il funzionale?

Se non ci fosse il valore assoluto, sarebbe la differenza tra i valori di  $u$  agli estremi. Stessa cosa se c'è  $1 \cdot 1$ , ma  $u' \geq 0$  sempre o  $u' \leq 0$  sempre.

Se  $u'$ , cambia segno, applico i ragionamenti precedenti in tutti i sottointervalli

$F(u)$  = somma dei dislivelli, contati tutti con segno positivo.



Quindi

$$1 - \min F(u) = |B-A|$$

2 - i pti di minimo sono tutte e sole le funzioni monotone

Esercizio Fare una dimostrazione rigorosa con una specie di Taylor-Lagrange applicato a  $\varphi(\sigma) = |\sigma|$

— o — o —

Esempio 2 Solito problema con  $\varphi(\sigma) = (\sigma^2 - 1)^2$

$$\min \left\{ \int_0^1 \varphi(u(x)) dx : u(0) = 0, u(1) = 2 \right\}$$



L'unico minimo è la retta.

Considero la più grande funzione convessa  $\bar{\varphi}(\sigma)$  che sta sotto  $\varphi(\sigma)$ .

Pongo  $F(u) = \int_0^1 \varphi(u(x)) dx$   $\bar{F}(u) = \int_0^1 \bar{\varphi}(u(x)) dx$

Sia  $\bar{u}$  la retta.

Fatto 1 Per ogni  $u \in \dots$  si ha che  $F(u) \geq \bar{F}(u)$

Fatto 2 La  $\bar{u}$  è un minimo per  $\bar{F}(u)$

Fatto 3 La  $\bar{u}$  è un minimo per  $F(u)$

Dim. Prendo una qualunque altra  $w$ . Allora

$$F(w) \underset{\textcircled{1}}{\geq} \bar{F}(w) \underset{\textcircled{2}}{\geq} \bar{F}(\bar{u}) = F(\bar{u})$$

$\uparrow$  perché  $\bar{u}$  ha pendenza  $u=2$  e  $\varphi(2) = \bar{\varphi}(2)$

Fatto 4 La  $\bar{u}$  è l'unico minimo di  $\bar{F}(u)$  (vedi es. precedente)

Fatto 5 La  $\bar{u}$  è l'unico minimo per  $F(u)$  (stessa dim. del fatto 3 con il segno  $>$  dove uso  $\textcircled{2}$ ).

Tecnica astratta Siano  $F$  e  $G$  due funzionali. Supponiamo che

- 1-  $F(u) \geq G(u)$  per ogni  $u$
- 2-  $u_0$  p.to di minimo di  $G(u)$
- 3-  $F(u_0) = G(u_0)$

Allora  $u_0$  è p.to di minimo di  $F(u)$ .

Se  $u_0$  è unico nell'ipotesi 2, allora è l'unico p.to di minimo.

Dim. come sopra.

Esempio 3 Stessa  $\varphi(\sigma) = (\sigma^2 - 1)^2$ .

$$\min \left\{ \int_0^1 \varphi(u(x)) dx : u(0) = 0, u(1) = \frac{1}{2} \right\}$$

Se invece di  $\varphi$  avessi  $\bar{\varphi}$ , allora il minimo sarebbe  $= 0$ , realizzato dalla retta, e da tutte le  $u$  con  $|derivata| \leq 1$ .

Per nessuno di questi piti di minimo per  $\bar{F}$  si ha  $F(u) = \bar{F}(u)$ .

Indizio per dire che  $\inf F(u) = 0$  e  $\min F(u)$  non esiste.

Devo dimostrare 2 cose,

1 - Non esiste nessun competitor per cui  $F(u) = 0$

Dim. Dovrebbe essere  $u'(x) = \pm 1$  per ogni  $x \in [0, 1]$  (sempre lo stesso), ma allora le condizioni al bordo non sono rispettate.

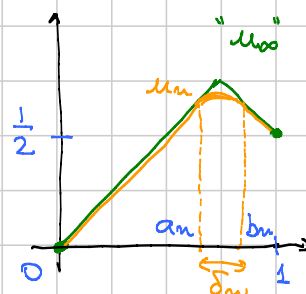
2 - Esiste una successione  $u_n$  di competitori t.c.  $F(u_n) \rightarrow 0$ .

Basta che il tratto di transizione  $\delta_n$  abbia ampiezza che tende a 0.

$$F(u_n) = \int_{a_n}^{b_n} \varphi(\underbrace{u_n(x)}_{u \in [-1, 1]}) dx$$

$$\leq (b_n - a_n) \max_{\sigma \in [-1, 1]} \varphi(\sigma)$$

— 0 — 0 —

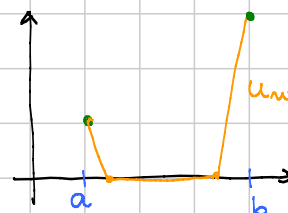


Osservazione Se ammetto come competitori tutte le  $u \in C^0([0, 1])$  che sono  $C^1$  ovunque tranne in un pto, allora  $u_0$  diventa un pto di min. ammissibile.

— 0 — 0 —

Esempio 4  $\min \left\{ \int_a^b u^2(x) dx : u(a) = A, u(b) = B \right\}$

L'inf è 0, ma è minimo  $\Leftrightarrow A = B = 0$



Oss. In generale il problema  $\min \left\{ \int_a^b \varphi(u(x)) dx : u(a) = A, u(b) = B \right\}$

"costringe"  $u(x)$  ad andare il più in fretta possibile nel p.to di minimo di  $\varphi(s)$

Esempio 5  $\min \left\{ \int_0^1 u^2(x) dx : \int_0^1 u(x) dx = 8, u \in C^0([0,1]) \right\}$

$$\min \left\{ \int_0^1 |u(x)|^{1/2} dx : \int_0^1 u(x) dx = 8 \right\}$$

Trucco: sia  $v(x)$  una primitiva di  $u(x)$ , per fissare le idee, quella che fa 0 in  $x=0$ . Allora

$$F(u) = \int_0^1 u^2(x) dx = \int_0^1 [v'(x)]^2 dx$$

Il vincolo  $\int_0^1 u(x) dx = 8$  diventa  $v(1) - v(0) = 8$ .

Facendo l'equazione di Eulero trovo che  $v(x)$  è una retta, quindi  $u(x)$  è una costante (l'unica che rispetta il vincolo)

Esercizio Dimostrarlo rigorosamente con la disuguaglianza  
Capire anche il caso con  $|u(x)|^{1/2}$ .

SSSUP 2012

LEZIONE 17

Titolo nota

b

22/03/2012

Funzioni del tipo  $F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u}) dx$

Esempio  $F(u) = \int_0^1 \{ [\dot{u}(x)]^2 + [u(x)]^2 - \tau u(x) \} dx$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]), u(0) = u(1) = 0 \} \quad (D)$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \} \quad (N)$$

Metodo indiretto: derivata direzionale. Fisso  $v \in C^1([0,1])$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{ (\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 - \tau(u+tv) - \dot{u}^2 - u^2 + \tau u \} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{ \cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + \cancel{u^2} + 2t\dot{u}v + t^2v^2 - \cancel{\tau u} - \tau tv \} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv - \tau v) dx + \underbrace{t \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2) dx}_{\rightarrow 0}$$

Equazione di Eulero:  $\int_0^1 (2\dot{u}\dot{v} + 2uv - \tau v) dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0,1])$   
+ event.  $v(0) = v(1) = 0$

Ora integro per parti il 1° termine  $\int_0^1 \dot{u}\dot{v} dx = \underbrace{[\dot{u}v]_0^1}_{=0 \text{ se } v(0)=v(1)=0} - \int_0^1 \ddot{u}v dx$

Quindi se  $v(0) = v(1) = 0$  posso riscrivere l'eq. di Eulero come

$$\int_0^1 (-2\ddot{u}v + 2uv - \tau v) dx = 0, \text{ cioè } \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - \tau) \cdot v dx = 0$$

da cui (solito lemma):  $\boxed{-2\ddot{u} + 2u - \tau = 0}$



Risolvere l'equazione  $\ddot{u} - u + \frac{x}{2} = 0$

La soluzione generale è  $u(x) = \frac{x}{2} + a e^x + b e^{-x}$

Determino  $a$  e  $b$  imponendo le condizioni al bordo  $u(0) = u(1) = 0$   
(non è detto in generale che la soluzione esista e/o sia unica)

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + a + b = 0 \\ \frac{x}{2} + e a + e^{-1} b = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{in questo caso c'è soluzione unica}$$

(la matrice dei coeff. ha rango 2).

Sia  $\bar{u}(x)$  l'unica sol. dell'eq. con i dati al bordo. Dico che  $\bar{u}$  è l'unico pto di min per il problema (D). Prendo una qualunque  $w \in C^1([0,1])$ , la scrivo come  $w = \bar{u} + v$  e sostituisco

$$\begin{aligned} F(w) &= F(\bar{u} + v) = \int_0^1 \left\{ (\dot{\bar{u}} + \dot{v})^2 + (\bar{u} + v)^2 - \frac{x}{2}(\bar{u} + v) \right\} dx \\ &= \int_0^1 (\dot{\bar{u}}^2 + 2\dot{\bar{u}}\dot{v} + \dot{v}^2 + \bar{u}^2 + 2\bar{u}v + v^2 - \frac{x}{2}\bar{u} - \frac{x}{2}v) dx \\ &= F(u) + \underbrace{\int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2) dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 (2\dot{\bar{u}}\dot{v} + 2\bar{u}v - \frac{x}{2}v) dx}_{=0 \text{ per l'Eq. di Eulero (scarico...)}} \\ &\geq F(u) \end{aligned}$$

con uguaglianza  $\Leftrightarrow v(x) \equiv 0$ .

Problema (N) Ora sono ammissibili anche perturbazioni con  $v \neq 0$  al bordo

Come prima arrivo a  $\int_0^1 (2\dot{\bar{u}}\dot{v} + 2\bar{u}v - \frac{x}{2}v) dx = 0$ .

lo scrivo come

$$\int_0^1 (2\bar{u}v - \frac{x}{2}v) dx = - \int_0^1 2\dot{\bar{u}}\dot{v} dx = -[2\dot{\bar{u}}v]_0^1 + 2 \int_0^1 \ddot{\bar{u}} v dx$$

Usando solo perturbazioni con  $v(0) = v(1) = 0$  ottengo  
 l'uguaglianza del termine a sx e dell'ultimo a dx, da cui  
 come prima  $-2\ddot{u} + 2u - \frac{7}{2} = 0$ , cioè

$$\int_0^1 (-2\ddot{u} + 2u - \frac{7}{2}) v \, dx = -[2\dot{u}v]_0^1$$

$= 0$   $\leftarrow$  indipendentemente dal sapere che  $v(0) = v(1) = 0$ .

Ora so che

$$[2\dot{u}v]_0^1 = 2(\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0)) = 0$$

per ogni  $v$ , anche non nulla al bordo.

Uso una  $v(x)$  t.c.  $v(0) \neq 0$ ,  $v(1) = 0$  e ottengo  $\dot{u}(0) = 0$

" " " "  $v(0) = 0$ ,  $v(1) \neq 0$  " "  $\dot{u}(1) = 0$ .

Ho così ottenuto che  $u$  risolve

$$\begin{cases} -2\ddot{u} + 2u - \frac{7}{2} = 0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

Ora si trova la soluzione (che non è obbligata ad esistere o essere unica)

$$u(x) = \frac{7}{2} + ae^x + be^{-x} \quad \dot{u}(x) = ae^x - be^{-x}$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ ea - e^{-1}b = 0 \end{cases} \quad \text{La soluzione è } a = b = 0, \text{ quindi } u(x) \equiv \frac{7}{2}$$

È immediato verificare con la disuguaglianza che è l'unico p.to di minimo.

— 0 —

### TERMINOLOGIA

- Problema di DIRICHLET : equazione di ordine 2 + fissare i 2 valori di  $u$  al bordo
- Problema di NEUMANN : equazione di ordine 2 + valori di  $\dot{u}$  al bordo.

In generale:

- problema di minimo per funzionale con  $\int \varphi(\ddot{u}, u, x)$   
 $\leadsto$  equazione di Eulero di ordine 2.
- condizioni al bordo nel problema  $\leadsto$  condizioni di D  
sull'equazione
- assenza di condizioni al bordo nel problema  $\leadsto$  condizioni di N  
sull'equazione

— o — o —

Se l'esempio fosse stato  $\min \{F(u) : u \in C^1([0,1]),$   
 $u(0) = 5\}$

si trovava da risolvere

$$\begin{cases} -2\ddot{u} + 2u - 7 = 0 \\ u(0) = 5 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione unica !!!}$$

Per esercizio ripetere il ragionamento!

— o — o —

$$F(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 - u^2) dx \quad \min \{F(u) : u \in C^1([0,\pi])$$

$$u(0) = u(\pi) = 0\}$$

L'Equazione di Eulero diventa  $\begin{cases} \ddot{u} + u = 0 & (\text{ricavare}) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$

La soluzione generale è  $u(x) = a \cos x + b \sin x$ .

Impongo le condizioni al bordo:

$a = 0$  (2 volte...) Quindi ci sono infinite soluzioni

$$u(x) = b \sin x.$$

Se le condizioni fossero state  $u(0) = 0, u(\pi) = 1$  l'equazione era impossibile.

Se invece di  $\pi$  avessi avuto qualcosa  $\neq k\pi$ , allora era possibile risolvere.

Achtung! No teoremi di esistenza e unicità per problemi D o N.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 18

Titolo nota

22/03/2012

Esempio

$$F(u) = \int_0^1 [\ddot{u}(x)]^2 + 5x^2 u(x) dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0)=0, u(1)=7 \}$$

Perturbazioni :  $v \in C^2([0,1])$  t.c.  $v(0)=v(1)=0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \{ \cancel{\ddot{u}^2} + 2t \ddot{u} \ddot{v} + t^2 \ddot{v}^2 + \cancel{5x^2 u} + 5t x^2 v - \cancel{5x^2 u} \} dx \\ &= \int_0^1 (2 \ddot{u} \ddot{v} + 5x^2 v) dx = 0 \end{aligned}$$

Integro per parti il 1° termine

$$\int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} dx = \underbrace{[\ddot{u} \dot{v}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \ddot{u} \dot{v} dx$$

$=0$  se uso perturbazioni con  $\dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0$

$$= - \int_0^1 \ddot{u} \dot{v} dx = - [\ddot{u} v]_0^1 + \int_0^1 u^{(4)} v dx = 0$$

Quindi, assumendo  $v(0)=v(1)=\dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0$  ottengo che

$$\int_0^1 (2u^{(4)} \cdot v + 5x^2 v) dx = 0, \text{ cioè } \int_0^1 (2u^{(4)} + 5x^2) v dx = 0$$

Per il solito Lemma (achtung! ora serve anche  $\dot{v}(0)=\dot{v}(1)=0$ ) si ha che  $u$  risolve

$$2u^{(4)} + 5x^2 = 0 \quad (\text{ordine eq.} = 2 \text{ ordine del funzionale})$$

$$u(0)=0, u(1)=7 \quad (\text{Dirichlet ereditate dal funzionale})$$

$$\ddot{u}(0)=\ddot{u}(1)=0 \quad (\text{Neumann che compaiono})$$

Come nascono le Neumann? Riscrivendo

$$\int_0^1 (2\ddot{u}\dot{v} + 5x^2v) dx = 0 \quad \forall v \in C^2 \text{ b.c. } v(0) = v(1) = 0 \text{ e basta}$$

come

$$\int_0^1 \underbrace{(2\ddot{u}\dot{v} + 5x^2v)}_0 dx \pm \underbrace{[\ddot{u}v]_0^1}_0 \pm \underbrace{[\dot{u}\dot{v}]_0^1}_0 = 0$$

perché  $v(0) = v(1) = 0$

Deve essere  $= 0 \quad \forall v \in \dots$   
da cui  $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(1) = 0$ .

Nell'esempio si trova esplicitamente la soluzione che è un polinomio di 6° grado. Si verifica con la disuguaglianza che è l'unico pto di minimo.

— 0 — 0 —

Osservazione Per un problema di minimo con  $\ddot{u}$  posso assegnare, volendo, i valori di  $u$  e  $\dot{u}$  al bordo

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0)=0, u(1)=7, \dot{u}(0)=3, \dot{u}(1)=-6 \}$$

Ancora una volta le perturbazioni ammissibili hanno  $v(0) = v(1) = \dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0$ .

— 0 — 0 —  
b

Caso generale  $F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u}) dx$

Come ricavare l'eq. di Eulero. Come sempre  $v(a) = v(b) = 0$

$$F(u+tv) = \int_a^b \varphi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx = (*)$$

Taylor-Lagrange:  $\varphi(x, u+\eta, w+\theta) = \varphi(x, u, w) + \eta \varphi_u(x, u, w) + \theta \varphi_{\dot{u}}(x, u, w) + \frac{1}{2} \eta^2 \varphi_{uu}(x, u+\xi, w+\eta) + \eta\theta \varphi_{u\dot{u}}(x, u+\xi, w+\eta) + \frac{1}{2} \theta^2 \varphi_{\dot{u}\dot{u}}(x, u+\xi, w+\eta) + \dots$

Quindi

$$\varphi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) = \varphi(x, u, \dot{u}) + tv\varphi_u(x, u, \dot{u}) + t\dot{v}\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u}) + t^2 \cdot \text{r.o.b.a.}$$

$$\star = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u}) dx + t \int_a^b \varphi_u(x, u, \dot{u}) v dx + t \int_a^b \varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u}) \dot{v} dx + t^2 \cdot \text{r.o.b.a.}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \int_a^b \varphi_u(x, u, \dot{u}) v dx + \int_a^b \varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u}) \dot{v} dx$$

Integro per parti il 2° termine:

$$\int_a^b \varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u}) \dot{v} dx = [\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u}) v]_a^b - \int_a^b [\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u})]' v dx$$

$= 0$  &  $v(a) = v(b) = 0$

Otengo

$$\int_a^b \{ \varphi_u(x, u, \dot{u}) - [\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u})]' \} v dx = 0$$

Il solito Lemma porta all'equazione

$$[\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u})]' = \varphi_u(x, u, \dot{u})$$

$$= \varphi_{\dot{u}x}(x, u, \dot{u}) + \varphi_{\dot{u}u}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + \varphi_{\dot{u}\dot{u}}(x, u, \dot{u}) \ddot{u} = \varphi_u(x, u, \dot{u})$$

Esempio:  $\varphi(x, u, \dot{u}) = \dot{u}^2 + u^2 - 7u$

$$\varphi_u = 2u - 7$$

$$\varphi_{\dot{u}} = 2\dot{u}$$

$$\varphi_{\dot{u}\dot{u}} = 2$$

$$2\ddot{u} = 2u - 7$$

— 0 — 0 —

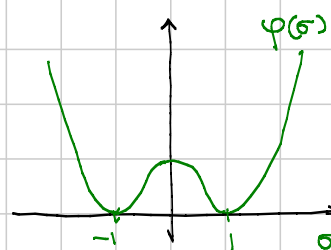
$$F(u) = \int (\dot{u}^4 + 3u^2 - 7 \cos x \cdot \arctan u) dx$$

$$\varphi_{\dot{u}} = 4\dot{u}^3 \quad \varphi_u = 6u - 7 \frac{\cos x}{1+u^2} \quad \varphi_{\ddot{u}} = 12\dot{u}^2$$

$$12\dot{u}^2 \ddot{u} = 6u - 7 \frac{\cos x}{1+u^2} \quad \text{Eq. di Eulero.}$$

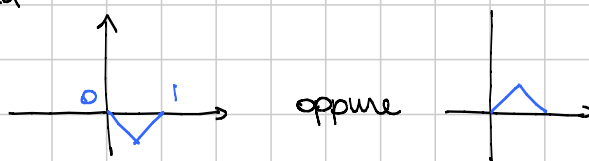
Esempio  $\min \{ F(u) : u(0) = u(1) = 0 \}$

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u})$$



Se impongo  $u \in C^1([0,1])$  il problema non ha soluzione.

L'inf. è 0 ed è approssimato da una successione  $u_n$  che approssima

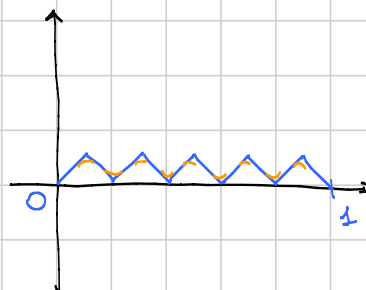


$$F(u) = \int_0^1 (\varphi(\dot{u}) + u^2) dx, \text{ sempre con condizioni } u(0) = u(1) = 0.$$

Come prima: il minimo non esiste, l'inf. è 0, ed è realizzato da una successione di questo tipo

Due livelli di approssimazione

- prima scegliere la "sega" fitta a sufficienza in modo da avere  $\int u^2$  basso



- poi smussare gli angoli pagando poco con  $\int \varphi(\dot{u})$

Se invece ho  $\int_0^1 (\varphi'(u) + f u) dx$

Se faccio l'equazione di Eulero... ottengo

$$\int_0^1 (\varphi'(u) v' + f v) dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } v(0)=v(1)=0$$

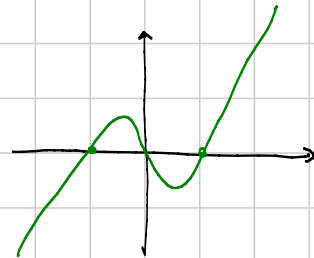
Integrando per parti:  $\int_0^1 ([\varphi'(u)]' - f) v = 0$

Solito lemma  $\Rightarrow [\varphi'(u)]' = f$  o volendo  $\varphi''(u) u' = f$

Da cui  $\varphi'(u) = f x + c$  per una opportuna  $c$

Se  $f x + c$  fosse enorme (o molto negativo), potrei ricavare  $u$  inserendo la  $\varphi'$ .

C'è speranza di avere una soluzione regolare...



— o — o —



SSSUP 2012

- LEZIONE 19

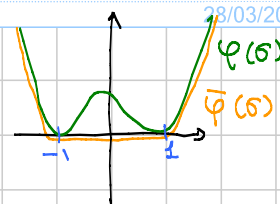
Titolo nota

28/03/2012

Esempio

$$F(u) = \int_{-1}^1 \{\varphi(u) + u\} dx$$

$$G(u) = \int_{-1}^1 \{\varphi(u) + u^2\} dx$$



$\min \{ G(u) : u(-1) = u(1) = 0, u \in C^1([-1, 1]) \}$  non esiste

$\min \{ F(u) : u(-1) = u(1) = 0, u \in C^1([-1, 1]) \}$  ESISTE

tranne al max un pto

Chiamo  $\bar{F}(u)$  il funzionale con la  $\bar{\varphi}$ .

Supponendo che il minimo esista, l'eq. di Eulero diventa

$$-[\bar{\varphi}'(u)]' + 1 = 0 \quad \text{cioè} \quad [\bar{\varphi}'(u)]' = 1$$



cioè  $\bar{\varphi}'(u(x)) = x + c \leftarrow$  aggiustare in modo che  $u(0) = u(1) = 0$

È ragionevole che sia  $c = 0$ , così  $u(x)$  diventa dispari. Quindi devo risolvere  $\bar{\varphi}'(u(x)) = x$

Ora posso quindi definire  $u(x)$  per ogni valore  $x \neq 0$ . Inoltre sarà  $u(x)$  dispari e

$$u(x) \leq -1 \quad \text{per } x < 0$$

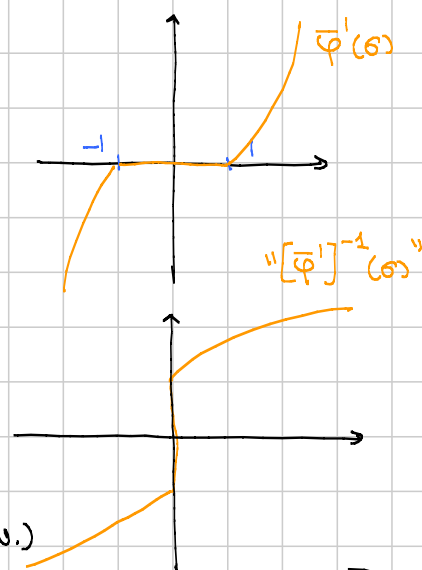
$$u(x) \geq 1 \quad \text{per } x > 0$$

Basta ora prendere  $\bar{u}(x)$  come la primitiva di  $u(x)$  che fa 0 in  $\pm 1$ .

Ora si dimostra che

①  $\bar{u}$  è p.to di minimo per  $\bar{F}(u)$  (dis. + conv.)

②  $\bar{u}$  è " " " per  $F(u)$  ( $F(u) \geq \bar{F}(u)$  sempre e  $F(\bar{u}) = \bar{F}(\bar{u})$ )



## METODI DIRETTI NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Obiettivo: dimostrare l'esistenza del minimo senza dover calcolare i punti di minimo.

Metodo: estendere i funzionali dall'ambiente primordiale ad un ambiente "naturale" dove ci sia

- \* semicontinuità inferiore
- \* compattezza dei sottolivelli.

Spazi di SOBOLEV. Spazi  $L^2$  e  $H^1$ .

Sia  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Si definisce  $L^2(a, b)$  l'insieme delle funzioni  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty$$

Più in generale si definisce  $L^p(a, b)$  imponendo  $\int_a^b [f(x)]^p dx < +\infty$ .

**Fatto**  $L^2(a, b)$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Dal prodotto scalare seguono la norma

$$|f|^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

e la distanza tra due funzioni

$$d(f, g) = |f - g| = \left\{ \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}$$

- Cose non ovvie
- ① si verifica la disuguaglianza triangolare
  - ② Il prodotto scalare è ben definito, cioè l'integrale converge
  - ③ Richiè  $L^2$  è completo.

Dim di ②  $|2AB| \leq A^2 + B^2$  per ogni  $A \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , quindi

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2} [f(x)]^2 + \frac{1}{2} [g(x)]^2$$

Dim di ① Prodotto scalare definito positivo  $\Rightarrow$   
disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \text{in ogni Hilbert}$$

$$P(t) := |f + tg|^2 \geq 0 \text{ sempre}$$

$$= \|f\|^2 + 2t \langle f, g \rangle + t^2 \|g\|^2$$

Polinomio di 2° grado  $\geq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow \dots$  CS.  
A questo punto con qualche calcolo segue ②.

Dim ③ DIFFICILE !!!

— o — o —

Derivata debole di una funzione

Se  $u \in C^1((a,b))$  e  $v \in C^1((a,b))$  e  $v(a) = v(b) = 0$ , allora vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

" Sia ora  $u$  qualunque. Dico che  $u$  è derivabile debolmente e  $w$  è la derivata debole di  $u$ , se accade che

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b w(x) v(x) dx \quad \forall v \in C^1((a,b)) \text{ con } v(a) = v(b) = 0 "$$

Esempio 1 Se  $u \in C^1$ , allora  $u$  è derivabile debolmente e  $w = u'$

Esempio 2 Se  $u(x) = |x|$ , allora  $u$  è derivabile debolmente e vale

$$w(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(fare la verifica!)

Esercizio La derivata debole, se esiste, è unica.

(supponiamo che  $w_1$  e  $w_2$  siano 2 derivate deboli.

Facilmente si arriva a

$$\int_a^b (w_1(x) - w_2(x)) \cdot v(x) dx = 0 \quad \forall v \dots$$

Da qui servirebbe il solito lemma imponendo solo che  $w_1(x) - w_2(x)$  sia integrabile, e non continua ...)

Esempio 3  $u(x) = \sqrt{|x|}$ . La sua derivata debole sarà  $\frac{1}{2\sqrt{|x|}} = w(x)$

Ora  $w(x)$  scoppia per  $x=0$ , ma l'integrale improprio converge...

Definizione  $H^1((a,b))$  è l'insieme delle funzioni  $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$u \in L^2((a,b))$$

$$u' \in L^2((a,b))$$

↑ derivata debole di  $u$ .

Osservazione  $H^1$  è l'ambiente "naturale" in cui trattare

$$F(u) = \int_a^b (u'^2 + u^2) dx$$

Achtung!  $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \neq & \text{se } x > 0 \end{cases}$  Non è derivabile debolmente!

## SSSUP 2012 — LEZIONE 20

Titolo nota

28/03/2012

Def. Si indica con  $\ell^2$  l'insieme delle successioni  $\{a_n\}$  di numeri reali tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Per familiarizzare:

- 0 - dim. che è un prodotto scalare
- 1 - dim. che la norma è triangolare
- 2 - DIFFICILE: dim. che è completo.

Brutalmente, è un'estensione di  $\mathbb{R}^n$  con infinite componenti.

Base algebrica di uno spazio vettoriale. Insieme  $\mathcal{B}$  di vettori linearmente indipendenti tali che ogni vettore dello spazio è combinazione lineare finita di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Base Hilbertiana di uno spazio vettoriale. Insieme  $\mathcal{B}$  di vettori lin. indip. t.c. ogni elemento dello spazio è serie di combinazioni lineari di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Occhio: l'indipendenza lineare rimane un concetto FINITO  
(ogni comb. lin. finita è 0  $\Leftrightarrow$  i coeff. sono tutti 0)

Esempio In  $\ell^2$  i vettori  $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{posiz. } n}{1}, 0, \dots)$

costituiscono una base ortonormale NUMERABILE.

Fatto : se in un Hilbert qualunque esiste una base Hilbertiana ortonormale, allora quell'Hilbert è come se fosse  $\ell^2$ .

Se  $\{e_n\}$  è la base, allora le componenti di un generico  $v$  rispetto alla base si calcolano con i prodotti scalari !

$$a_n = \langle v, e_n \rangle = \text{numero}$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 vettore                      numero                      vettore

Domanda : è vero che  $\{v \in H : |v| \leq 1\}$  è compatto ?

In dimensione infinita NO !!

Basta prendere una base Hilbertiana ortonormale  $\{e_n\}$  per avere che non è una successione di Cauchy, in quanto  $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$  per ogni  $n \neq m$ , quindi non può avere s. succ. convergenti

Osservazione Il classico procedimento di ortonormalizzazione permette, in ogni spazio di Hilbert, di avere

→ o dimensione finita

→ o un insieme  $\{e_n\}$  numerabile di vettori l.c.

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= 0 & \text{se } n \neq m \\ &= 1 & \text{se } n = m \end{aligned}$$

Questo basta per avere la non compattezza delle palle in dimensione infinita

— o — o —

Convergenza DEBOLE Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $x_n$  una successione di elementi di  $H$ . Si dice che  $x_n$  converge debolmente ad  $x_\infty \in H$ , e si scrive  $x_n \rightharpoonup x_\infty$  se

$$\langle x_n, v \rangle \longrightarrow \langle x_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Numeri che convergono a numeri

Esempio  $H = \ell^2$ ,  $x_n = n$ -esimo elemento della base Hilbertiana  
 $\langle x_n, v \rangle = n$ -esima componente di  $v$ ,  
 quindi poiché

$$\sum \langle x_n, v \rangle^2 < +\infty$$

per definizione stessa di stone in  $\ell^2$ , avremo che  $\langle x_n, v \rangle \rightarrow 0$ ,  
 quindi  $x_n \rightarrow 0$ .

Teorema 1  $\{v \in H: |v| \leq 1\}$  è compatto debolmente

Teorema 2 La norma è

- \* continua fortemente
- \* non continua debolmente
- \* semicontinua inferiormente debolmente.

Dim. teo. 2 Se  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $H$ , allora  $|u_n| \rightarrow |u_\infty|$ .

Basta dimostrare che  $|u_n|^2 \rightarrow |u_\infty|^2$ .

Basta dimostrare che  $|u_n|^2 - |u_\infty|^2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |u_n|^2 &= |u_n - u_\infty + u_\infty|^2 \\ &= \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché } u_n \rightarrow u_\infty}} + |u_\infty|^2 + \underbrace{2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle}_{\substack{\text{per C.S.} \\ |\langle \dots, \dots \rangle| \leq |u_n - u_\infty| \cdot |u_\infty| \\ \downarrow 0 \quad \downarrow \text{Fisso}}} \end{aligned}$$

Per dimostrare che non è continua debolmente basta l'esempio della base Hilbertiana  $|e_n| = 1$ ,  $|\text{limite debole}| = 0$

Per l'ultimo punto bisogna dimostrare che, se  $u_n \rightarrow u_\infty$ , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n|^2 \geq |u_\infty|^2$$

$$\begin{aligned} |u_n|^2 &= |u_\infty|^2 + 2 \underbrace{\langle u_n, u_\infty \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \langle u_\infty, u_\infty \rangle \\ \text{per conv. debole}}} - 2 \cancel{\langle u_\infty, u_\infty \rangle} + \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\geq 0 \text{ sempre, quindi} \\ \text{al limite da' il } \geq \dots}} \end{aligned}$$

## SSSUP 2012 - LEZIONE 20 bis

Titolo nota

04/04/2012

Base algebrica / base Hilbertiana in uno sp. di Hilbert

Indipendenza Lineare Sia  $V$  uno sp. vett. Un sottoinsieme  $B \subseteq V$  si dice linearmente indipendente se e solo se ogni combinazione lineare finita di elementi di  $B$  è 0  $\Leftrightarrow$  tutti i coeff. sono nulli.

In simboli

$\forall n \geq 1, \forall v_1, \dots, v_n \in B$  distinti,  $\forall c_1, \dots, c_n$  reali si ha

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Base algebrica Un insieme  $B \subseteq V$  è una base algebrica se è linearmente indipendente e genera tutto  $V$ , cioè per ogni  $v \in V$ , esiste  $n \geq 1$  ed esistono  $v_1, \dots, v_n \in B$  ed esistono  $c_1, \dots, c_n$  reali t.c.

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i. \quad (*)$$

In altri termini: ogni elemento  $v \in V$  è combinazione lineare finita di elementi di  $B$ .

Fatto generale La scrittura (\*) è unica (se ce ne fossero due diverse, parto dalla stessa parte ed arrivo che  $B$  non è lin. indep.).

Fatto generale In ogni sp. vett.  $V$  esistono basi algebriche, anzi per ogni insieme  $B \subseteq V$  che sia linearmente indep., esiste almeno una base algebrica  $B' \supseteq B$ .

[Dim. basta prendere un insieme  $B' \supseteq B$  che sia linearmente indep. e massimale (se aggiungo ancora qualcosa, perdo la lin. indep.). Questa è la base cercata. Il problema è dim. che il massimale esiste...]



Base Hilbertiana Sia  $H$  uno spazio di Hilbert. Una base Hilbertiana numerabile è un insieme numerabile di vettori  $\{e_n\} \subseteq H$  (volendo una successione) tale che

(i) sono ortonormali, cioè  $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(ii) per ogni  $v \in H$ , esiste una successione  $\{a_n\}$  di numeri reali b.c.

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 coefficienti,      vettori  
 cioè numeri

Gli  $a_n$  si dicono coefficienti o componenti di  $v$  rispetto alla base  $\{e_n\}$ .

Fatti generali Se  $\{e_n\}$  è una base Hilbertiana, allora la scrittura di sopra è unica e  $a_n = \langle v, e_n \rangle$ . Inoltre

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \quad (\text{Pitagora negli Hilbert}).$$

Achtung! Se  $\{e_n\}$  è una base Hilbertiana, allora una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

← serie di vettori

converge se e solo se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

← serie di numeri

Dim. Poichè  $S_n := \sum_{i=1}^n a_i e_i$        $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^n a_i^2$ . Allora

Serie dei vettori converge  $\Leftrightarrow S_n$  converge  
 $\Leftrightarrow S_n$  è di Cauchy ( $H$  è completo)  
 $\Leftrightarrow \bar{S}_n$  è di Cauchy  
 $\Leftrightarrow \bar{S}_n$  converge  
 $\Leftrightarrow$  serie dei numeri converge

$$\text{dist}^2(S_i, S_k) \stackrel{i < k}{=} |a_{i+1} e_{i+1} + \dots + a_k e_k|^2 = a_{i+1}^2 + \dots + a_k^2 = \text{dist}(\bar{S}_i, \bar{S}_k).$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 distanza in  $H$       distanza in  $\mathbb{R}$

Esempio Sia  $H$  lo spazio di Hilbert costituito dalle successioni  $\{a_n\}$  di numeri reali t.c.  $\sum a_n^2 < +\infty$ . Il prodotto scalare tra  $v = \{a_n\}$  e  $w = \{b_n\}$  è dato da

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

Si dimostra che

- (i) il prodotto scalare è ben definito (cioè se  $v \in H$  e  $w \in H$ , allora la serie che definisce  $\langle v, w \rangle$  converge); F
- (ii) ha le proprietà di un prodotto scalare (bilineare, def. positivo) F
- (iii)  $H$  risulta un Hilbert (Difficile: completezza).

Di solito questo spazio si indica con  $\ell^2$ .

Una base Hilbertiana di  $\ell^2$  è data dai vettori

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \dots)$$

Algebra lineare Fissata una base algebrica in uno spazio vettoriale  $V$  di dim. finita  $k$ , accade che ad ogni elemento  $v \in V$  possiamo associare  $k$ -numeri reali  $(a_1, \dots, a_k)$ , cioè lo spazio risulta isomorfo ad  $\mathbb{R}^k$ .

Negli spazi di Hilbert Se esiste una base Hilbertiana  $\{e_n\}$ , allora ad ogni  $v \in H$  possiamo associare la successione  $\{a_n\}$  delle sue componenti, che per quanto detto prima sta in  $\ell^2$ . In altre parole: se c'è la base Hilb., lo spazio è isomorfo ad  $\ell^2$ .  
— o — o —

Compattezza negli spazi di Hilbert

Brutta notizia In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita le palle chiuse non sono compatte

$$\{v \in H : \|v\| \leq 1\}$$

"Dim." Supponiamo che esista una base Hilbertiana  $\{e_n\}$ . Allora tutti i suoi elementi stanno in  $\overline{B}_1(0)$  = palla con centro in 0 e raggio 1 chiusa.

Barba che dim. che  $\{e_n\}$  non può avere s.succ. convergenti. Se ci fosse una s.succ. convergente, questa sarebbe di Cauchy, ma non è possibile perché la distanza tra 2 elementi qualunque è sempre  $\sqrt{2}$ .

Dim. In realtà non ho usato che  $\{e_n\}$  è una base Hilbertiana, ma solo che sono vettori ortonormali.

Questi si possono ottenere facilmente per involuzione sfruttando il procedimento di ortonormalizzazione dell'algebra lineare

Analogamente gli insiemi del tipo  $\{v \in H : |v| = 1\}$  non sono compatti.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 21

Titolo nota

04/04/2012

**CONVERGENZA DEBOLE** Obiettivo: risolvere le palle compatte.Def. Sia  $H$  un Hilbert, e sia  $\{v_n\}$  una successione in  $H$ .Si dice che  $v_n$  converge debolmente a  $v_\infty$ , e si scrive

$$v_n \rightharpoonup v_\infty$$

se per ogni  $v \in H$  si ha che

$$\langle v_n, v \rangle \longrightarrow \langle v_\infty, v \rangle \quad (\text{limite di numeri})$$

Osservazione Se  $v_n \rightarrow v_\infty$  (convergenza forte, nel senso della metrica di  $H$ ), allora  $v_n \rightharpoonup v_\infty$ .Dim. Per ogni  $v \in H$  si ha che

$$|\langle v_n, v \rangle - \langle v_\infty, v \rangle| = |\langle v_n - v_\infty, v \rangle| \stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|v_n - v_\infty\| \cdot \|v\|$$

$\downarrow$   
 0      numero fisso.

Osservazione Ci sono esempi in cui c'è convergenza debole, ma non convergenza forte. Prendiamo  $H = \ell^2$  e  $v_n =$  base Hilbertiana canonica.Questa succ. non converge forte a nulla, né converge alcuna sua s.succ. Tuttavia  $v_n \rightarrow 0$ . MotivoFissato un qualunque  $v \in H$ , devo dim. che

$$\langle v_n, v \rangle \longrightarrow \langle 0, v \rangle = 0$$

componente  $n$ -esimadi  $v$ , e queste tendono a 0 perché la serie dei loro quadrati converge.Fatto generale difficile: se  $v_n \rightharpoonup v_\infty$ , allora  $v_n$  è limitata

Viceversa Ogni successione  $v_n$  limitata ammette almeno una s.succ. debolmente convergente, cioè le palle chiuse negli spazi di Hilbert sono debolmente compatte.

"Dim". Supponiamo che esista una base Hilbertiana  $\{e_n\}$ .  
Sia  $\{v_n\}$  una successione limitata in  $H$ . Devo trovare una s.succ., che chiamo ancora  $v_n$ , b.c.  $\langle v_n, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$

Step 1 Posso trovare una s.succ. che verifica la richiesta per tutti gli elementi  $\{e_i\}$  della base Hilbertiana.

Fisso  $e_1$ . Considero  $\langle v_n, e_1 \rangle$ : questa è una successione limitata di numeri reali, dunque ammette una s.succ. convergente ad un certo  $a_1$ .

Fisso  $e_2$ , ed estraggo dalla precedente una s.succ. b.c.  $\langle v_n, e_2 \rangle \rightarrow$  ad un certo  $a_2$

E così via...

Il vettore  $v_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$  è il candidato limite debole della successione.

Commento: ho ottenuto  $v_\infty$  facendo il limite componente per componente.

Step 2 La s.succ. trovata allo step 1 e  $v_\infty$  verificano la richiesta per ogni  $v$  che sia comb. lineare finita di elementi della base Hilbertiana. Sia

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k$$

$$\begin{aligned} \langle v_n, v \rangle &= \langle v_n, c_1 e_1 + \dots + c_k e_k \rangle \\ &= c_1 \langle v_n, e_1 \rangle + \dots + c_k \langle v_n, e_k \rangle \\ &\rightarrow c_1 a_1 + \dots + c_k a_k \\ &= c_1 \langle v_\infty, e_1 \rangle + \dots + c_k \langle v_\infty, e_k \rangle \\ &= \langle v_\infty, c_1 e_1 + \dots + c_k e_k \rangle \end{aligned}$$

**Step 3** La s.succ. trovata allo step 1 e  $v_\infty$  verificano la richiesta per ogni  $v \in H$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, v \rangle = \langle v_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Fisso  $\varepsilon > 0$ , e scelgo un  $w$  b.c.  $|v-w| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  e  $w$  sia combinazione lineare finita di elementi di  $e_n$  (basta prendere un'opportuna somma parziale della serie che scrive  $v$  in termini della base...). Allora

$$\begin{aligned} |\langle v_n, v \rangle - \langle v_\infty, v \rangle| &= |\langle v_n - v_\infty, v \rangle| \\ &= |\langle v_n - v_\infty, v - w + w \rangle| \\ &= |\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle + \langle v_n - v_\infty, w \rangle| \\ &\leq |\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle| + \boxed{|\langle v_n - v_\infty, w \rangle|} \end{aligned}$$

Sul primo pezzo uso c.s. ed il fatto che  $v_n$  e  $v_\infty$  sono limitati, quindi

$$\begin{aligned} |\langle v_n - v_\infty, v - w \rangle| &\leq \underbrace{|v_n - v_\infty|} \cdot \underbrace{|v - w|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leq \underbrace{(|v_n| + |v_\infty|)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

piccolo se  $v_n$  e  $v_\infty$  sono limitati.

↓  
tende a 0 per lo step 2, essendo  $w$  comb. lin. finita, quindi è  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$  per  $w$  grande.

**Step 4** Perché dalla limitatezza di  $v_n$  posso dedurre la limitatezza di  $v_\infty$ ? Perché

$$|v_\infty|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Se questa fosse grande, sarebbe grande una somma parziale fino ad un certo  $N$ , ma

$$\sum_{n=1}^N a_n^2 = \dots$$

Fatti generali

- ① Se  $v_m \rightarrow v_\infty$ , allora  $|v_m| \rightarrow |v_\infty|$   
 ② Se  $v_m \rightarrow v_\infty$ , allora non è detto che  $|v_m| \rightarrow |v_\infty|$   
 ③ Se  $v_m \rightarrow v_\infty$ , allora  

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} |v_m| \geq |v_\infty|$$

Dim.: ① Basta dimostrare che  $|v_m|^2 \rightarrow |v_\infty|^2$ .

$$|v_m|^2 = |\underbrace{v_m - v_\infty}_a + \underbrace{v_\infty}_b|^2 = \underbrace{|v_m - v_\infty|^2}_0 + |v_\infty|^2 + 2 \underbrace{\langle v_m - v_\infty, v_\infty \rangle}_0$$

$\rightarrow |v_\infty|^2$

N.B. Ho usato che  $|\langle v_m - v_\infty, v_\infty \rangle| \leq |v_m - v_\infty| \cdot |v_\infty|$  (c.s.)

② Basta pensare all'esempio della base Hilbertiana

③ Stesso p.to di partenza di ①:

$$\begin{aligned} |v_m|^2 &= |v_m - v_\infty|^2 + |v_\infty|^2 + 2 \langle v_m - v_\infty, v_\infty \rangle \\ &\geq |v_\infty|^2 - 2 \langle v_m - v_\infty, v_m \rangle \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$  per definizione di convergenza debole

quindi

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} |v_m|^2 \geq |v_\infty|^2$$

che dimostra il p.to (iii).

Esempio classico

$$F(u) := \int_a^b [u(x)]^2 dx$$

Sia  $u_m$  una successione b.c.  $F(u_m) \leq k$  e  $u_m(x) \rightarrow v$  debolmente in  $L^2(a,b)$ . Allora

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} F(u_m) \geq \int_a^b [v(x)]^2 dx$$

(banale conseguenza del precedente)

Teorema Consideriamo

$$F(u) := \int_a^b \varphi(u(x)) dx$$

Supponiamo che

(i)  $u_n \rightarrow u_\infty$  debolmente in  $L^2$

(ii)  $\varphi$  convessa.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Dim.  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)b + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) b^2$

$$\geq \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot b \quad \text{per ogni } a \text{ e } b.$$

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \int_a^b \varphi(u_n(x)) dx \\ &= \int_a^b \varphi(u_\infty(x) + u_n(x) - u_\infty(x)) dx \\ &\geq \underbrace{\int_a^b \varphi(u_\infty(x)) dx}_{F(u_\infty)} + \underbrace{\int_a^b \varphi'(u_\infty(x)) \cdot (u_n(x) - u_\infty(x)) dx}_{\langle \varphi'(u_\infty(x)), u_n(x) - u_\infty(x) \rangle} \end{aligned}$$

↑  
prodotto scalare  
in  $L^2(a,b)$

↓  
0

Quindi  $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u_\infty).$

— 0 — 0 —



## SSSUP 2012 - LEZIONE 22

Titolo nota

04/04/2012

Sia  $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $p \geq 1$  reale

$$L^p(a,b) := \text{funzioni } f \text{ b.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

Spazi di Sobolev. Sia  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Sono fatti equivalenti i seguenti.

① Esiste  $w \in L^p(a,b)$  b.c.

$$\int_a^b f(x) \cdot \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$$

per ogni  $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  e b.c.  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

② Esiste una successione di funzioni  $f_n$  di classe  $C^1$  b.c.  
 $f_n \rightarrow f$  in qualche senso forte (uniformemente, o in  $L^2$ )  
 e  $\|f_n'\|_{L^2} \leq \text{costante}$

③ I rapporti incrementali  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = R_h(x)$

sono tali che  $R_h(x) \rightarrow \text{qualcosa}$  (debole in  $L^2$ )

④ I rapporti incrementali sono tali che  $\|R_h(x)\|_{L^2} \leq \text{costante}$ .

Se  $f$  verifica una qualunque delle proprietà di sopra si dice che  $f \in H^1(a,b)$ .

**Oss.** ④ e ③ sono la stessa cosa per la debole compattezza delle palle in  $L^2(a,b)$ . Anche ② ed ① sono la stessa cosa per lo stesso motivo.

Dim. che ② implica ③ Sappiamo che  $f_n \rightarrow f$  forte e  $|f'_n|$  sono limitate.

A meno di s.succ. avremo che  $f'_n \rightarrow w$ . Dico che  $w$  fa funzionare l'integrazione per parti. Infatti per ogni  $n$  ho che

$$\int_a^b f_n(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'_n(x) \cdot \varphi(x) dx$$

$\downarrow$  ← per questa bastava che  $f_n \rightarrow f$  debole  $\downarrow$

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$$

Dim. che ④ implica ③

$$\int_a^b \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\text{hanno norma limitata in } L^2 \\ \text{dunque hanno un limite debole a meno di s.succ., che} \\ \text{chiamo } w}} \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \underbrace{\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}}_{\substack{\varphi'(x) \text{ per ogni } x}} dx$$



A questo p.to LHS  $\rightarrow \int_a^b w(x) \cdot \varphi(x) dx$   
 RHS  $\rightarrow - \int_a^b f(x) \cdot \varphi'(x) dx$

Fatto misterioso Se  $f(x) \in H^1(a,b)$ , allora " $f$  è l'integrale della sua derivata debole", cioè per ogni  $[c,d] \subseteq (a,b)$  si ha che

$$f(d) - f(c) = \int_c^d w(x) dx$$

Conseguenza Se  $f \in H^1(a,b)$ , allora  $f$  è continua, ma è  $\frac{1}{2}$  Hölder con costante dipendente da  $|w|_{L^2}$ .

Dim.  $|f(d) - f(c)| = \left| \int_c^d w(x) dx \right|$

$$= \left| \int_c^d w(x) \cdot 1 dx \right|$$

$$= |\langle w, 1 \rangle_{L^2((c,d))}|$$

c.s.  
↓

$$\leq |w|_{L^2((c,d))} \cdot |1|_{L^2((c,d))}$$

$$\leq |w|_{L^2((a,b))} \cdot \sqrt{|d-c|}$$

Esempio  $F(u) = \int_a^b (u'^2 + \sin u) dx$

$$\min \{ F(u) : u(a) = 5, u(b) = 7 \}$$

Metodo diretto Sia  $I = \inf \{ F(u) : u(a) = 5, u(b) = 7, u \in H^1((a,b)) \}$

È chiaro che  $I$  non è  $-\infty$ . Prendo una successione  $u_n$  t.c.  $F(u_n) \rightarrow I$ . Allora è facile vedere che

$$\int_a^b [u'_n(x)]^2 dx \text{ sono limitati in quanto}$$

$$\int_a^b [u'_n(x)]^2 dx = F(u_n) - \int_a^b \sin(u_n) dx \leq F(u_n) + \int_a^b 1 dx$$

$$\leq I + 57 + (b-a)$$

Per la conseguenza di prima so che le  $u_n$  sono  $\frac{1}{2}$  Hölder con controllo sulla costante di Hölder uniforme in  $n$ .

Ora

(i) le  $u'_n(x)$  sono equilimitate in  $L^2$ , dunque a meno di s.succ. convergono ad una certa  $w$  debole  $u'_n \rightharpoonup w$

(ii) Sulle  $u_n(x)$  uso Ascoli - Arzelà. Infatti sono

- equi  $\frac{1}{2}$ -Hölder
- equilimitate in quanto  $u_n(a) = \text{valore fisso}$  e poi la costante di Hölder è limitata.

A meno di s.succ.  $u_n \rightarrow u_\infty$  uniformemente.

Ovviamente  $w_\infty$  sarà la derivata debole di  $u_\infty$ . La dim. è banale

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b u_n'(x) \cdot \varphi(x) dx \\ &\downarrow \\ \int_a^b u_\infty(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b w_\infty(x) \cdot \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b [u_n'(x)]^2 dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin u_n(x) dx$$

uso che  
lemma è s.c.t.  $\int$

$$\geq \int_a^b [w_\infty(x)]^2 dx + \int_a^b \sin(u_\infty(x)) dx = F(u_\infty)$$

Questo dimostra che  $u_\infty$  è un pto di minimo, dunque il minimo esiste.

Oss. ① Sul secondo addendo c'è il limite, dovuto alla convergenza uniforme.

② Sul primo addendo c'è solo il liminf, e lo avrei avuto anche se c'era una  $\varphi(x)$  con  $\varphi$  convessa.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 23

Titolo nota

18/04/2012

$H$  sp. di Hilbert,  $B \subseteq H$  base Hilbertiana numerabile  
 Allora ogni successione limitata ha una s.suc. debolmente convergente.

Esempio classico  $F(u) = \int_a^b [u'(x)]^2 dx + \int_a^b g(u(x), x) dx$

Voglio dimostrare che esiste  $\min \{ F(u) : u \in H^1(a, b) \}$ .

Supponiamo che  $g(u, x) \geq 0$  sempre.

Considero un sottolivello  $\{u : F(u) \leq k\}$  per un certo  $k$ .

L'ipotesi su  $g$  implica che

$$\int_a^b [u'(x)]^2 dx \leq k$$

per ogni  $k$  che sta nel sottolivello.

Detto meglio: prendiamo una successione  $\{u_n\} \subseteq H^1(a, b)$  b.c.

$$F(u_n) \rightarrow \inf \{ F(u) : u \in \dots \} \quad (\text{successione minimizzante})$$

Posso dire che

$$\int_a^b [u_n'(x)]^2 dx \leq \inf \{ F(u) : u \in \dots \} + 25$$

Quindi la successione  $u_n(x)$  ha una sottosuccessione (che non rinomino) tale che  $\tilde{u}_n(x) \rightarrow v(x)$  (convergenza debole)

Visto che  $u_n(x)$  è una successione limitata in  $L^2$ , per quanto visto prec. si ha che le  $u_n(x)$  sono  $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante equilimitata.

Supponiamo ora che qualche ipotesi permetta di limitare i valori assunti da  $u_n(x)$ . Allora Ascoli - Arzelà permette di concludere che  $u_n(x)$  ha una sottosuccessione che converge uniformemente ad una certa  $u_0(x)$ .

Ipotesi che permettono di limitare  $u_n(x)$ :

- \* condizione al bordo  $u(a) = A$
- \* qualche ipotesi che dice che  $g(u, x)$  è enorme quando  $u$  è enorme (tipo  $g(u, x) = \sin^2 x + u^4$ )

Speranza:  $v(x)$  è la derivata debole di  $u_\infty(x)$

Dim. per ogni  $\Phi \in C^1([a, b])$  nulla al bordo si ha che

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n(x) \cdot \Phi'(x) dx &= - \int_a^b u_n(x) \cdot \Phi(x) dx \\ &\quad \downarrow \text{per conv. uniforme} \quad \downarrow \text{per conv. debole} \\ \int_a^b u_\infty(x) \cdot \Phi'(x) dx &= - \int_a^b v(x) \cdot \Phi(x) dx \end{aligned}$$

Questo dice che  $v(x)$  è la derivata debole di  $u_\infty(x)$ .

Ora  $u_\infty(x)$  è il candidato ad essere il p.to di minimo per  $F$ .

Basta dimostrare che  $F(u_\infty) \leq \inf \{F(u_n) : \dots\}$ .

Per questo basta che

$$F(u_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \quad (\text{semicontinuità inferiore})$$

$$F(u_n) = \int_a^b [u_n'(x)]^2 dx + \int_a^b g(u_n(x), x) dx$$

Vediamo separatamente i 2 termini:

- Poiché  $u_n(x) \rightarrow u_\infty(x)$  uniformemente, abbiamo che  $g(u_n(x), x) \rightarrow g(u_\infty(x), x)$  uniformemente, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(u_n(x), x) dx = \int_a^b g(u_\infty(x), x) dx$$

- Poiché  $u_n'(x) \rightarrow v(x) = u_\infty'(x)$ , per la semicontinuità della norma si ha pure che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^b |\dot{u}_n(x)|^2 dx}_{= \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2} \geq \int_a^b |\dot{u}_\infty(x)|^2 dx$$

Mettendo insieme i 2 p.ti ottengo proprio la semicontinuità.

Domanda: se  $u_n(x)$  avevano delle condizioni al bordo (dipende dal problema...), è vero che  $u_\infty(x)$  continua a rispettarle? Sì, perché le  $u_n$  convergono uniformemente, quindi tutte le info. puntuali passano al limite.

Osservazione Al posto di  $\int_a^b |\dot{u}(x)|^2 dx$  posso mettere  $\int_a^b \varphi(\dot{u}(x)) dx$

perché  $\varphi$  sia convessa. Questa è la condizione che garantisce la semicontinuità debole del termine con la derivata.

### Esempio di convergenza debole

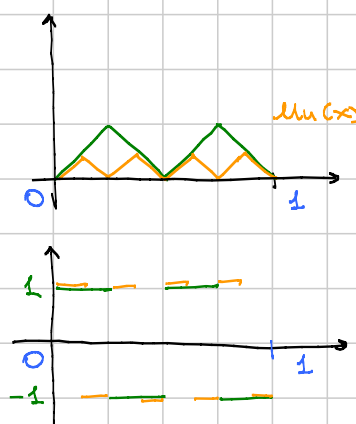
Nell'esempio:

$u_n(x) \rightarrow 0$  uniformemente

$\dot{u}_n(x)$  non convergono a 0

fortemente, poiché  $\|\dot{u}_n - 0\|_{L^2} = 1$

$\dot{u}_n(x) \rightarrow 0$  debolmente, in un certo senso "mediando +1 e -1".



Se considero una qualunque  $\phi$  e faccio

$\int_0^1 \dot{u}_n(x) \phi(x) dx$  questo tende a 0 per ogni  $\phi \in L^2(0,1)$

- ok se  $\phi$  è  $C^1$  e nulla al bordo (int. per parti)
- poi si usa che ogni funzione  $L^2$  è approx con  $C^1$  nulle al bordo.

In alternativa

- OK se  $\phi$  è costante in un intervallo e 0 altrove,
- OK se  $\phi$  è costante a tratti (step functions),
- ogni funzione  $L^2$  si approx con costanti a tratti.

Teorema generale

$$F(u) = \int_a^b \varphi(u, u, x) dx$$

Supponiamo che

- (i)  $\varphi$  è continua in tutte le variabili,
- (ii)  $\varphi$  è convessa nella variabile  $u$  per ogni scelta di  $(u, x)$
- (iii)  $\varphi(u, u, x) \geq c_1 |u|^2 - c_2$  con  $c_1 > 0$  e  $c_2$  reale.

Allora esiste sempre

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(a, b), \underbrace{u(a) = A, u(b) = B}_{\text{possono essere sostituite da qualunque condizione che limiti le un di una successione minimizzante in almeno un pto.}} \}$$

possono essere sostituite da qualunque condizione che limiti le un di una successione minimizzante in almeno un pto.

L'esempio iniziale è la dimostrazione nel caso speciale

$$\varphi(u, u, x) = \underbrace{f(u)}_{\text{convessa}} + \underbrace{g(u, x)}_{\text{continua.}}$$



## SSSUP 2012 - LEZIONE 24

Titolo nota

18/04/2012

Esistenza di basi Hilbertiane

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert. Supponiamo che esista  $D \subseteq H$  numerabile e denso (cioè per ogni  $v \in H$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $w \in D$  t.c.  $\|v - w\| \leq \varepsilon$ ).

Allora  $H$  ammette una base Hilbertiana numerabile.

(Idea della dimostrazione: solito metodo di ortogonalizzazione a partire da  $D = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ ).

**SERIE DI FOURIER**  $(a, b) = (0, 2\pi)$  Considero  $L^2((0, 2\pi))$ 

Una possibile base Hilbertiana è costituita dalle funzioni

$$u_n(x) = c_n \sin(nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v_n(x) = d_n \cos(nx) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dove i coefficienti  $c_n$  e  $d_n$  sono scelti in maniera tale che

$$\int_0^{2\pi} [u_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [v_n(x)]^2 dx = 1$$

Fatti da controllare:

① Devono avere norma 1: banale

② Devono essere a 2 a 2 ortogonali, cioè

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{per ogni } m \text{ ed } n$$

③ Ogni funzione  $f(x) \in L^2((0, 2\pi))$  si deve poter scrivere come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n v_n(x) \quad (\text{con convergenza in } L^2)$$

[Dau.: difficile]

Potò che sia una base Hilbertiana, adesso che

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x) u_n(x) dx$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} f(x) v_n(x) dx$$

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx = \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$$

Teorema 1 Supponiamo che  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e periodica di periodo  $2\pi$ . Allora la serie di Fourier di  $f(x)$ , cioè la serie i cui coeff. ciónti sono dati dagli integrali di sopra, converge uniformemente ad  $f(x)$  su tutto  $\mathbb{R}$  (basta in  $[0, 2\pi]$  + periodicità).

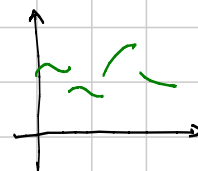
Teorema 0.5 Supponiamo che  $f \in C^1$  a tratti e  $2\pi$ -periodica (quindi può esserci un numero finito di p.ti di discontinuità per  $f(x)$  e/o  $f'(x)$ , ma in quei p.ti esistono i limiti da dx e sx).

Allora  $f(x)$  converge puntualmente

la serie di Fourier di

- ad  $f(x)$  all'interno dei tratti
- alla media tra limite dx e sx nei p.ti di discontinuità.

— o — o —



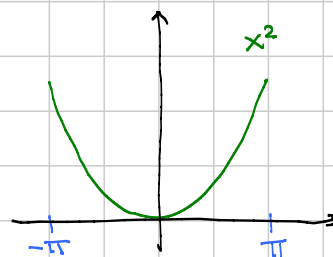
Osservazione Se invece di  $(0, 2\pi)$  ho  $(0, a)$  basta riscalare tutto usando  $\sin(n \frac{2\pi}{a} x)$   $\cos(n \frac{2\pi}{a} x)$

Esercizio Dimostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Consideriamo  $f(x) = x^2$ , pensata in  $[-\pi, \pi]$  e ripetuta per periodicità.

Considero la sua serie di F. (di soli cos)

I coeff. li posso calcolare... È  $C^1$  a tratti, quindi uso il Teorema 0.5. Sostituisco  $x = \pi$  e viene il risultato...



Esercizio bis Calcolare  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$   
 — o — o —

Considero ora  $L^2((0, \pi))$ . Allora posso fare una base Hilbertiana fatta di soli sin o soli cos, cioè ad esempio una base del tipo

$$u_n(x) = \boxed{C_n} \sin(nx) \quad n=1, \dots$$

↑ rendendo la norma = 1.

I p.ti ① e ② sono banali. Resta il p.to ③.

Prendo una qualunque  $f \in L^2((0, \pi))$ .

La estendo in  $(-\pi, 0)$  in modo che sia dispari.

Volendo la estendo ad  $\mathbb{R}$  in modo che sia  $2\pi$ -periodica.

La sviluppo come  $2\pi$ -periodica usando sin e cos.

Osservo che i coeff. dei cos sono = 0 perché è dispari.

Osservo che la convergenza in  $L^2((0, \pi))$  segue da quella in  $L^2((-\pi, \pi))$ , che a sua volta è equivalente a quella in  $(0, 2\pi)$ .

Oss. Se voglio fare lo stesso in  $[0, T]$  devo usare  $\sin(n \frac{\pi}{T} x)$   
 — o — o —

Fatto generale Se  $f(x) = \sum a_n \text{"cos(mx)" + } b_n \text{"sin(mx)"}$   
 sto usando per il coeff. che li rende di norma 1

allora  $f'(x)$ , se esiste, è dato da

$$f'(x) = \sum (-na_n) \text{"sin(mx)" + } nb_n \text{"cos(mx)"}$$

e la serie converge  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2) < +\infty$   
 — o — o —

Osservazione Consideriamo l'applicazione  $f \rightarrow f''$ .

Gli autovettori sono proprio  $\sin(mx)$  e  $\cos(mx)$

## SSSUP 2012 - LEZIONE 25

Titolo nota

24/04/2012

Problemi di evoluzione Equazioni alle derivate parziali (PDE)

$$\begin{array}{l} \text{Equazione del calore: } u_t = u_{xx} \\ \text{Equazione delle onde: } u_{tt} = u_{xx} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u_{tt} = u_{xx} \end{array}} \right\} \text{incognita } u(x, t)$$

$x \in [a, b]$   $t \geq 0$

Problema generale:

- { Eq. diff.
- { condizioni al bordo (nella  $x$ )
- { condizioni iniziali (nella  $t$ )

$\downarrow$  in numero uguale all'ordine dell'equazione in  $t$ .

Esempi

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t \geq 0, x \in [0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{Condizioni di DIRICHLET} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{Condizione iniziale} \end{cases}$$

$\uparrow$  funzione data della  $x$ .

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0, x \in [0, 1] \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{Condizioni di NEUMANN} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \uparrow \text{funzioni date della } x \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \downarrow \end{cases}$$

Perché la serie di Fourier aiuta?

Data  $u \in L^2((0, 1))$  posso scriverla come  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n = u$

$\uparrow$  numeri  $\uparrow$  el. di una base Hilbertiana

Se come base Hilbertiana ho preso quella coinvolta nella serie di Fourier, ho che

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 a_n e_n$$

con varianti a seconda che ci siano solo sin, solo cos, o entrambi

Data una funzione  $u(x, t)$ , definita per  $x \in [0, 1]$  e  $t \geq 0$ ,  
la posso pensare come

$$u: [0, +\infty) \rightarrow L^2((0, 1)).$$

Interpretato in serie di Fourier diventa

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{u_n(t)} e_n$$

↙ funzioni  $u_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

È intuitivo che sarà  $u_t(x, t) = u'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t) e_n$

A questo punto l'equazione  $u_t = u_{xx}$  diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t) e_n = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 u_n(t) e_n$$

Le due serie hanno la stessa somma se e solo se hanno gli stessi coefficienti, quindi

$$u'_n(t) = -n^2 u_n(t) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0.$$

La soluzione di queste è  $u_n(t) = u_n(0) e^{-n^2 t} \quad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$   
dove  $u_n(0)$  sono le componenti di F. del dato iniziale, cioè

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) e_n.$$

Come si risolve il problema per l'equazione del calore?

- Data una cond. iniziale  $u_0(x) \in L^2((0, 1))$ , la scrivo in serie di F. ottenendo i suoi coeff.  $u_n(0)$
- Calcolo  $u_n(t) = u_n(0) e^{-n^2 t}$
- Allora la soluzione è

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) e^{-n^2 t} \cdot e_n$$

Che fine fanno le condizioni al bordo? Incidono sul tipo di serie di Fourier da utilizzare.

Condizioni classiche:

- Dirichlet omogenea  $u(a,t) = u(b,t) = 0$
- Neumann omogenea  $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$
- Periodiche  $u(a,t) = u(b,t), u_x(a,t) = u_x(b,t)$

**Periodiche** con  $(a,b) = (0, 2\pi)$ . Uso la serie di Fourier classica con sia  $\sin(nx)$  sia  $\cos(nx)$ . Questo garantisce che la soluzione rispetta le condizioni al bordo periodiche.

**Dirichlet** con  $(a,b) = (0, \pi)$ . Uso la serie di F. con soli  $\sin(nx)$  ottenuta dopo aver esteso  $u$  a  $(-\pi, \pi)$  per "disparità".

**Neumann** con  $(a,b) = (0, \pi)$ . Uso solo  $\cos(nx)$  aggiunto dopo video e  $n$  dispari per rispettare Neumann in  $\frac{\pi}{2}$ .

**Dirichlet a  $sx$ , Neumann a  $dx$**  con  $(a,b) = (0, \frac{\pi}{2})$ .  
Uso una serie di F. con soli  $\sin(nx)$  dopo aver esteso a  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  per "parità" e a  $(-\pi, 0)$  per "disparità".

In che senso la condizione al bordo è soddisfatta dalla soluzione?

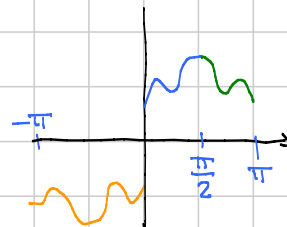
Per parlare di valori tipo  $u(a,t)$  oppure  $u_x(a,t)$  servirebbe una qualche forma di continuità...

Effetto regolarizzante Per  $t=0$  ho che  $u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)$  e  
e so soltanto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_n(0)]^2 < +\infty$$

Per  $t$  positivo ho che  $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) e^{-n^2 t}$  e  
nuovi coefficienti

Quindi è ovvio intanto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_n(0) e^{-n^2 t}]^2 < +\infty$$


ma anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n^k u_n(0) e^{-n^2 t}]^2 < +\infty \quad \text{per ogni } k$$

Per  $k=1$  ottengo che  $u(t) \in H^1((0,1))$  per ogni  $t>0$ , quindi grazie ho che  $u(t)$  è continua come funzione della  $x$ , anche se  $u_0(x)$  era solo  $L^2$ .

Per  $k=2$  ottengo che  $u(t) \in H^2((0,1))$  per ogni  $t>0$ , quindi  $u_x \in H^1$ , quindi  $u_x$  è continua come funzione della  $x$ .

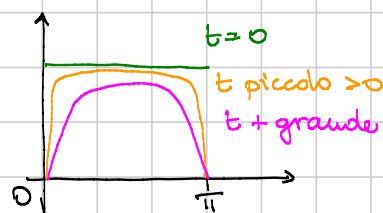
Osservazione

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } [0, \pi] \times [0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = 1 & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Parto con una distribuzione di temperatura uniforme  $\equiv 1$ , e vedo come evolve ponendo dato nullo al bordo.

Nota bene: la condizione iniziale ed il dato al bordo sono incoerenti

Esercizio: calcolare esplicitamente i coefficienti, quindi la soluzione.



Nota bene I coefficienti decadono molto velocemente per colpa di  $e^{-n^2 t}$ , quindi bastano poche componenti per approssimare bene una soluzione.

Osservazione "Non si può" risolvere l'eq. del calore per tempi  $t \leq 0$ , a meno che i coeff. iniziali  $u_n(0)$  non siano molto decadenti.

Morale: se una serie converge, quando la moltiplico per  $e^{-n^2 t}$  con  $t < 0$  non è detto che converga.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 26

Titolo nota

24/04/2012

**Teorema spettrale in  $\mathbb{R}^n$**  Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dim. finita, sia  $A: V \rightarrow V$  lineare, e sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un prodotto scalare in  $V$  definito positivo.

Supponiamo che  $A$  sia simmetrica rispetto al prodotto scalare, cioè  
 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  per ogni  $x \in V, y \in V$ .

Allora  $V$  ammette una base ortonormale costituita da autovettori di  $A$ .

Situazione classica  $V = \mathbb{R}^n$  con prodotto scalare classico,  $A$  dato da una matrice simmetrica. Allora  $A$  è diagonalizzabile, cioè esiste  $M$  tale che  
 $M^{-1} A M = \text{matrice diagonale}$   
 e le colonne di  $M$  sono vettori ortonormali.

**Teorema spettrale in dim. infinita** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert separabile (in cui esiste un sottospazio denso numerabile).

Sia  $A: H \rightarrow H$  un'applicazione lineare simmetrica, cioè

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H$$

Supponiamo che  $A$  sia un operatore COMPATTO (vedi dopo).

Allora  $H$  ammette una base Hilbertiana finita o numerabile costituita da autovettori di  $A$ .

Def. Un operatore (applicazione lineare) si dice compatto se manda successioni limitate in successioni relativamente compatte, cioè per ogni successione  $\{v_m\} \subseteq H$  limitata esiste una s. successione  $v_{m_k}$  tale che  
 $Av_{m_k}$  converge a qualcosa



Esempio classico  $H = L^2((a,b))$

Per ogni  $v \in H$  definiamo  $Av$  come la primitiva di  $v$  che si annulla in  $a$ .

È chiaramente lineare. Perché è compatto?

Perché le primitive sono equi-Hölder ed equilimitate per i soliti motivi, quindi... Ascoli-Arzelà.

Altro esempio  $H = L^2((a,b))$ ,  $Av =$  funzione 2 volte la primitiva di  $v$  con 2 condizioni al bordo (ad esempio Dirichlet, Neumann, o periodiche).

Applicazione del teorema spettrale Consideriamo l'esempio precedente, ad esempio con condizioni di Dirichlet. Chi sono gli autovalori e gli autovettori?

Se  $\lambda$  è autovalore e  $u$  è un autovettore corrispondente, allora

$$Au = \lambda u$$

Derivando due volte:  $u = \lambda u''$ , cioè  $u'' = \frac{1}{\lambda} u$ , cioè

se  $\lambda$  è negativo

$u(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x\right)$  che si può anche scrivere volendo come

$$u(x) = A \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} x + \theta\right)$$

Se ora impongo il dato nullo al bordo, trovo che non tutti i  $\lambda$  vanno bene. Per semplicità prendiamo  $(a,b) = (0, 2\pi)$ .

$$\boxed{x=0} \quad c_1 = 0$$

$$\boxed{x=2\pi} \quad c_2 \sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\lambda|}}\right) = 0$$

Poiché  $u \neq 0$  (essendo autovettore) dovrà essere  $c_2 \neq 0$ , quindi deve per forza essere

$$\frac{2\pi}{\sqrt{|\lambda|}} = m\pi, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} = \frac{m}{2}, \quad \text{cioè} \quad |\lambda| = \frac{4}{m^2}, \quad \text{cioè} \quad \lambda = -\frac{4}{m^2}$$

Allo stesso modo si vede che tutti i  $\lambda$  positivi non vanno bene.  
Gli autovettori corrispondenti sono proprio sin ( $n\pi$ )

Fatto generale Le varie serie di F. considerate precedentemente sono le basi Hilbertiane che si ottengono applicando il teo. spettrale in  $L^2((a,b))$  all'operatore  $A =$  doppia primitiva con opportune condizioni al bordo.

Domanda: perché l'operatore è simmetrico? Integrazione per parti (verificare)!

Idea dim. Teo. spettrale Schema generale

- ① Trovo un autovalore  $\lambda$  ed il corrispondente autovettore  $u_1$  ↓ Delicato
- ② Scrivo  $V = \text{Span}(u_1) \oplus$  ortogonale  $V'$
- ③ Dimostro che  $A$  manda  $V'$  in  $V'$ , quindi per restrizione ↑ Facile posso considerare  $A$  come operatore simmetrico  $A: V' \rightarrow V'$
- ④ Su  $V'$  ho la base di autovettori per ipotesi inductiva.

Il punto delicato è, sia in dim. finita, sia in dimensione infinita, dimostrare che esiste almeno un autovalore.

Caratterizzazione variazionale degli autovalori

$$\min_{\max} \{ \langle Av, v \rangle : v \in V, \|v\| \leq 1 \}$$

Per W. max e min esistono. Sorpresa: max e min sono il + grande ed il + piccolo autovalore, ed i pti di max/min sono i rispettivi autovettori. Dim: esercizio di analisi 2 con i moltiplicatori di Lagrange.

In dim. infinita è la stessa cosa, solo che la palla è compatta solo debolmente, per cui bisogna usare W. rispetto alla topologia DEBOLE. Se  $v_n \rightarrow v_\infty$ , per compattessa  $Av_n \rightarrow Av_\infty$ , quindi  $\langle Av_n, v_n \rangle \rightarrow \langle Av_\infty, v_\infty \rangle$  il che dà la continuità rispetto alla debole.

## SSSUP 2012 - LEZIONE 027

Titolo nota

09/05/2012

Equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0, x \in (a, b) \\ + \text{condizioni al bordo (Dir. Neu. Per.)} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Con le serie di Fourier: penso  $u: [0, +\infty) \rightarrow L^2((a, b))$  e  
la scrivo come

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_n(t)}_{\substack{\uparrow \text{coeff.} \\ \uparrow \text{funzioni della } x \text{ che costituiscono una} \\ \text{base Hilbertiana di } L^2(a, b)}} e_n$$

Importante: scelgo la base Hilbertiana in modo che siano autovettori dell'operatore "fare 2 volte la primitiva con le condizioni al bordo date". In questo modo gli  $e_n$  sono pure autovettori dell'operatore  $u \rightarrow u_{xx}$ , quindi avremo che

$$[u(t)]_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \lambda_n e_n$$

$\uparrow$   
autovalore corrispondente  $\sim -n^2$

$$[u(t)]_{tt} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(t) e_n$$

Imporre  $u_{tt} = u_{xx}$  si traduce in  $u_n''(t) = \lambda_n u_n(t)$  per ogni  $n$ .  
Le condizioni iniziali si scrivono come

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0,n} \cdot e_n \quad u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1,n} \cdot e_n$$

Devo risolvere i p.m.

$$\begin{cases} u_n''(t) = \lambda_n u_n(t) \\ u_n(0) = u_{0,n} \\ u_n'(0) = u_{1,n} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Eq. lineari 2°} \\ \text{ordine a coeff.} \\ \text{costanti} \end{array} \right\}$$

Le soluzioni sono del tipo  $u_n(t) = a_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t)$   
 La soluzione generale è quindi del tipo

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \} e_n$$

Domanda: è periodica in  $t$ ? Dipende se i  $\sqrt{\lambda_n}$  sono tutti multipli di qualcosa.

Domanda 2: sono sicuro che la serie converga a  $t$  fissato?  
 Dipende dalla serie dei quadrati dei coeff.

$$(a_n \cos + b_n \sin)^2 = \underbrace{a_n^2 \cos^2}_{\leq a_n^2} + \underbrace{2a_n b_n \cos \sin}_{\leq a_n^2 + b_n^2} + \underbrace{b_n^2 \sin^2}_{\leq b_n^2}$$

Se so che  $\sum a_n^2$  e  $\sum b_n^2$  convergono, allora so che converge la serie che definisce  $u(t)$  per ogni  $t \geq 0$ .

Dovrei scrivere  $a_n$  e  $b_n$  in funzione dei dati iniziali (esercizio)  
 La conclusione è che  $\sum a_n^2$  e  $\sum b_n^2$  convergono se e solo se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n^2 < +\infty$$

meno della convergenza della serie di  $u_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$$

equivalente al fatto che la serie di  $u_n(x)$  converge

Se voglio anche che  $u_{xx}$  abbia senso, devo imporre che converga la stessa serie con i coeff. moltiplicati per  $\lambda_n$ , il che si traduce in

$$\sum \lambda_n u_n^2 < +\infty$$

$H^1(a,b)$

$$\sum \lambda_n^2 u_n^2 < +\infty$$

$H^2(a,b)$

In ogni caso c'è uno "sfasamento di  $\lambda_n$ " tra la richiesta su  $u_0(x)$  e quella su  $u_1(x)$ .

Achtung! Contrariamente all'eq. del calore  $u(x,t)$  non è più bella di  $u(x,0)$ , cioè non converge meglio la sua serie.

Soluzioni definite per  $x \in \mathbb{R}$ . Cerco come sono fatte tutte le  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $u_{tt} = u_{xx}$ .

Uso come variabili  $\xi = x+t$   $\eta = x-t$   $x = \frac{\xi+\eta}{2}$   
 $t = \frac{\xi-\eta}{2}$

$$u_{\xi} = u_x \cdot x_{\xi} + u_t \cdot t_{\xi} = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_t$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(u_x + u_t)_{\eta} = \frac{1}{2}(u_{xx} \cdot x_{\eta} + u_{xt} \cdot t_{\eta} + u_{tx} \cdot x_{\eta} + u_{tt} \cdot t_{\eta})$$

$$= \frac{1}{2} \left( u_{xx} \cdot \frac{1}{2} + u_{xt} \left(-\frac{1}{2}\right) + u_{tx} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_{tt} \right)$$

Quindi  $u_{tt} = u_{xx} \Leftrightarrow u_{\xi\eta} = 0$

Quindi  $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ , quindi

$$u(x, t) = \underbrace{f(x+t)}_{\substack{\text{funzione della sola } x \\ \text{che trasla a } sx}} + g(x-t) \quad \rightarrow \text{idem a dx}$$

Come trovare  $f$  e  $g$ ? Con le condizioni iniziali

$$u_0(x) = u(x, 0) = f(x) + g(x) \quad u'_0(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$u_1(x) = u_t(x, 0) = f'(x) - g'(x)$$

Dati  $u_0(x)$  e  $u_1(x) \leadsto$  calcolo  $f' + g'$  e  $f' - g' \leadsto$  calcolo  $f$  e  $g$ .

Osservazione 1 Se l'equazione è  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  la soluzione viene del tipo

$$u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

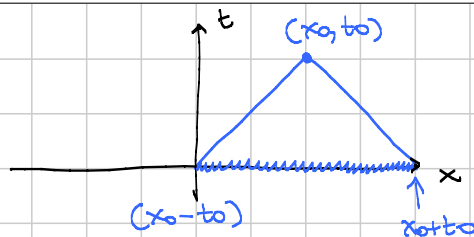
Quindi  $c$  è la "velocità di propagazione".

Domínio di dipendenza

Quando calcolo  $f(x+to)$  in un certo punto  $(x_0, to)$ , questo dipende solo da  $f(x_0+to)$

Quindi  $u(x_0, to)$  dipende solo dal valore di  $f$  in  $(x_0+to)$  e dal valore di  $g$  in  $(x_0-to)$

Risaleudo alle formule per  $f$  e  $g$  si ha che  $u(x_0, to)$  dipende solo dai valori di  $u_0(x)$  e  $u_1(x)$  nell'intervallo di estremi  $(x_0-to)$  e  $(x_0+to)$ . VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE FINITA



Osservazione Ci sono formule esplicite + complicate per le soluzioni dell'eq. delle onde in dimensione + alta. In generale  $u(x_0, to)$  dipende dai dati iniziali

- in tutta la palla di centro  $x_0$  e raggio  $ct$  se  $n$  pari
- solo sul bordo della palla se  $n$  è dispari

L'equazione diventa  $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \dots$

SSSUP 2012

—

LEZIONE 028

Titolo nota

09/05/2012

Che forma assume un filo sospeso tra 2 pali.

Filo INESTENSIBILE = curva di lunghezza data

Semplificazione 1. Il filo è una curva cartesiana di lunghezza data

$X = \{u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ "abbastanza regolari" t.c. } u(a) = A, u(b) = B\}$

$$\left. \int_a^b \sqrt{1+u^2} dx = L \right\}$$

lunghezza curva  
cartesiana.

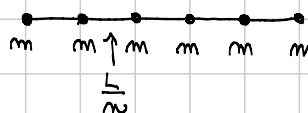
Modello: il filo cerca di stare "più basso possibile", cioè la  $y$  del baricentro deve essere minima.

$$y_{\text{baricentro}} = \frac{1}{L} \int_a^b y ds = \frac{1}{L} \int_a^b u \sqrt{1+u^2} dx$$

Il problema si è ridotto a fare

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b u \sqrt{1+u^2} dx}_{F(u)} : u \in X \right\}$$

Esercizio Sostituire il filo con  $n$  palline uguali separate da una corda di lunghezza  $\frac{L}{n}$ .  
La posizione di equilibrio è quella per cui la  $y$  del baricentro è minima



Si tratta di minimizzare  $F(u)$  con il vincolo al bordo + un vincolo del tipo  $G(u) = L$ , con

$$G(u) = \int_a^b \sqrt{1+u^2} \, dx$$

Moltiplicatori di Lagrange In dimensione finita ci si riduce a risolvere  $\nabla F = \lambda \nabla G$ , cioè a trovare i pti stazionari di  $F - \lambda G$ .

Ora si tratta di risolvere l'equazione di Eulero del funzionale  $F - \lambda G$

$$(F - \lambda G)(u) = \int_a^b (u \sqrt{1+u^2} - \lambda \sqrt{1+u^2}) \, dx = \int_a^b (u - \lambda) \sqrt{1+u^2} \, dx$$

visto a suo tempo

Così è fatta l'eq. di Eulero?  $\int \varphi(x, u, u') \, dx \rightsquigarrow (\varphi_{u'})' = \varphi_u$

Nel nostro caso  $\varphi$  non dipende da  $x$ :  $\varphi(u, u')$

$$\frac{d}{dx} [\varphi_{u'}(u, u')] = \varphi_u(u, u')$$

$$\varphi_{u'u}(u, u') u' + \varphi_{u'u'}(u, u') u'' - \varphi_u(u, u') = 0$$

Moltiplico per  $u'$ :  $\underbrace{\varphi_{u'u} u'^2 + \varphi_{u'u'} u'' u' - \varphi_u u'} = 0$

$$\frac{d}{dx} [u' \varphi_{u'}(u, u') - \varphi(u, u')] = 0$$

$$\cancel{u'' \varphi_{u'u}} + u' \varphi_{u'u} u' + u' \varphi_{u'u'} u'' - \varphi_u u' - \cancel{\varphi_{u'} u'}$$

Fatto generale: se nel funzionale ho  $\varphi(u, u')$ , cioè senza  $x$ , l'Equazione di Eulero diventa

$$u' \varphi_{u'} - \varphi = c$$



Vediamo che succede con  $\varphi(u, \dot{u}) = (u - \lambda) \sqrt{1 + \dot{u}^2}$

$$\frac{\dot{u} (u - \lambda) \dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} - (u - \lambda) \sqrt{1 + \dot{u}^2} = c$$

Moltiplico

$$\dot{u}^2 (u - \lambda) - (u - \lambda) (1 + \dot{u}^2) = c \sqrt{1 + \dot{u}^2}$$

$$- (u - \lambda) = c \sqrt{1 + \dot{u}^2}$$

$$(u - \lambda)^2 = c^2 (1 + \dot{u}^2)$$

Volendo potrei ricavare  $\dot{u}$  direttamente, ma ottengo una equazione con delle radici.

In alternativa derivo tutto:

$$2(u - \lambda) \dot{u} = c^2 2 \dot{u} \ddot{u} \quad \leadsto \quad c^2 \ddot{u} = u - \lambda$$

$$\leadsto \ddot{u} = \frac{1}{c^2} u - \frac{\lambda}{c^2} \quad \leadsto \text{equazione del 2° ordine lineare}$$

$$u(x) = a \sinh\left(\frac{x}{c}\right) + b \cosh\left(\frac{x}{c}\right) + \lambda$$

Apparentemente ho 4 parametri. Come li scelgo?

Ho 3 condizioni (2 al bordo + la lunghezza)

Se mi fossi fermato all'eq. del 1° ordine avrei avuto solo 3 parametri, quindi verificare l'eq. del 1° ordine fissa un ulteriore parametro (o meglio, basta considerare l'eq. del 1° ordine per  $x = a$  (estremo dell'intervallo) e si ottiene un legame tra  $u(a)$  e  $\dot{u}(a)$  che si traduce in un legame tra il parametro  $a$  ed il parametro  $b$ ).

Passaggi abusivi:  $\rightarrow$  uso dei moltiplicatori in dim. infinita

$\rightarrow$  uso metodo indiretto (chi dice che le soluzioni ottenute siano minimi?)

Non si può ambire a calcolare  $F(u+v)$  con  $u$  soluzione di Eulero e sperare che sia  $\geq F(u)$ , perché non è detto che  $u+v$  rispetti ancora il vincolo. Questo è facile solo per vincoli lineari del tipo  $\int u \, dx = \text{costante}$ .

Altra possibilità: sperare che il min. esista per motivi suoi (tipo metodo diretto), poi sperare che l'eq. di Eulero abbia solut. unica. A quel p.to la solut. sarebbe l'unico p.to di min.

Per quanto visto

- semicontinuità richiede la convessità dell'integranda
  - la coercività richiede la crescita quadratica di  $\varphi$
- Entrambe però non sono facili da verificare (la seconda è proprio falsa...) e in + c'è il vincolo.

## SSSUP 2012

## — LEZIONE 29

Titolo nota

16/05/2012

Eq. onde in dim. = 2

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & t \geq 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y) \end{cases}$$

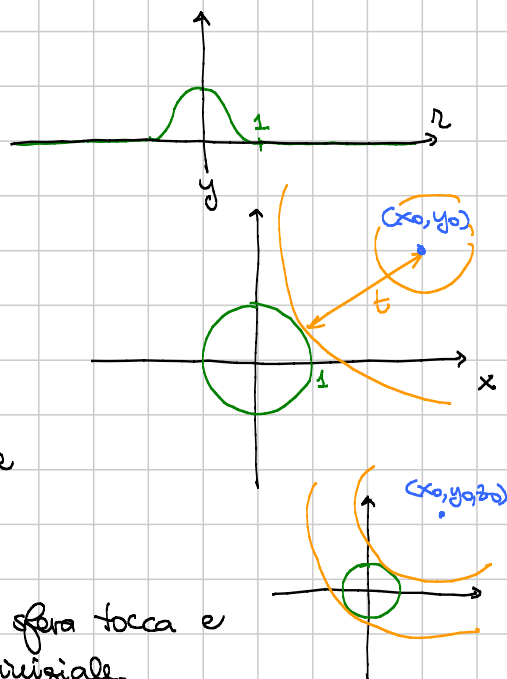
Fatto: esiste una formula che esprime  $u(x,y,t)$  che dipende da integrali di  $u_0(x,y)$  e  $u_1(x,y)$  su tutta la palla con centro in  $(x,y)$  e raggio  $t$ . Questa palla è il "dominio di dipendenza" della soluzione.

In altre parole se cambio  $u_0$  e  $u_1$  con due funzioni  $\bar{u}_0$  e  $\bar{u}_1$  che coincidono con  $u_0$  e  $u_1$  nella palla, allora la soluzione in quel dato  $(x,y,t)$  non cambia.

Fatto: se siamo in  $\mathbb{R}^3$ , ed in generale in  $\mathbb{R}^n$  con  $n$  dispari  $\geq 3$ , allora la formula dipende da integrali solo sul bordo della palla.

Esempio del sasso Se prendo in  $\mathbb{R}^2$   $u_1(x,y) = 0$  e  $u_0(x,y) =$  funzione radiale del tipo.

Se ci mettiamo in p.to  $(x_0, y_0)$  del piano, l'onda arriverà quando il dominio di dipendenza tocca la zona vicina all'origine in cui  $u_0 \neq 0$ . Da quel momento in poi "ci sarà sempre movimento in  $(x_0, y_0)$ ". Ovviamente c'è un abbattimento man mano che il tempo passa.



In  $\mathbb{R}^3$  invece l'onda inizia quando la sfera tocca e termina quando ha inglobato la zona iniziale.

## CALCOLO DELLE VARIAZIONI IN PIÙ VARIABILI (in partenza)

Funzionali in cui l'ambiente sono funzioni  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Caso tipico:  $\Omega =$  cerchio o un quadrato in  $\mathbb{R}^2$ ,  $u(x, y)$ .

Classico funzionale integrale

$$\int_{\Omega} \varphi(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

$\uparrow$  numero  
 $\uparrow$  vettore  
 $\uparrow$  vettore  
 $\uparrow$  vettore  
 $\uparrow$  integrale doppio, triplo, ecc...

Esempio principale:  $F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$

La condizione di Dirichlet diventa  $u(x, y) = u_0(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$

"Fisicamente": trovare come si dispone una "pelle di tamburo" fissata il bordo.

### Metodo indiretto applicato al problema di Dirichlet

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}_{F(u)} : u \in C^1(\bar{\Omega}), \underbrace{u|_{\partial\Omega} = u_0(x)}_{u \text{ ristretta a } \partial\Omega} \right\}$$

$\uparrow$  funzione data

Supponiamo che esista  $u$  che risolve il problema di minimo.

Prendiamo  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  con  $v|_{\partial\Omega} = 0$ . Calcoliamo  $F(u+tv)$ .

Se  $u$  è un pto di minimo, allora questa funzione di  $t$  ha la derivata che si annulla per  $t=0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla(u+tv)|^2 - |\nabla u|^2) dx \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\cancel{|\nabla u|^2} + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \cancel{|\nabla u|^2}) dx \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \end{aligned}$$

Quindi, se  $u$  è una soluzione del problema, allora

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0 \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ t.c. } v|_{\partial\Omega} = 0$$

Equazione di Eulero in forma integrale.

Integrazione per parti in più variabili: Gauss-Green

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

*integrale sul bordo*  
*normale esterna al bordo*

$f(x,y) \quad \vec{E}(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y))$

Applico Gauss-Green con  $f = v$  ed  $\vec{E} = \nabla u$ . Ottengo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx &= - \int_{\Omega} v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) dx + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &\quad \langle \vec{E}, \nabla f \rangle \quad f \cdot \operatorname{div} \vec{E} \quad f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \\ &= - \int_{\Omega} v \cdot \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{derivata direzionale nella direzione normale al bordo} \end{aligned}$$

Avevamo preso  $v \equiv 0$  su  $\partial\Omega$ , il termine di bordo non c'è e otteniamo

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} v \cdot \Delta u dx = 0$$

Il solito lemma fondamentale (in versione  $n$ -dimensionale) ci dice che deve essere

$$\Delta u = 0$$

Equazione di Eulero in forma differenziale

Morale:  $u''$  in 1 variabile diventa  $\Delta u$  in  $n$  variabili.

Supponiamo ora di non avere condizioni di Dirichlet, dunque non siamo costretti ad usare  $v \equiv 0$  su  $\partial\Omega$ . Si procede così.

① L'eq. di Eulero integrale dice che  $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0 \quad \forall v$

② Usando Gauss-Green e tutte le  $v \equiv 0$  su  $\partial\Omega$  otteniamo che  $\Delta u = 0$

③ Ora l'eq. di Eulero diventa  $0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$

Usando il lemma fondamentale sul bordo scopriamo che deve essere

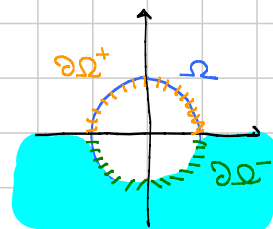
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \rightarrow \text{CONDIZIONE DI NEUMANN.}$$

— 0 — 0 —

Osservazione Hanno senso anche condizioni miste, cioè D su un pezzo di  $\partial\Omega$  e N sul resto di  $\partial\Omega$ .

Esempio

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} & \text{in } \Omega \\ u(x, y, t) = 0 & \text{su } \partial\Omega^- \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = 0 & \text{su } \partial\Omega^+ \\ u(x, y, 0) = 1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$



Cocomero in acqua : temperatura iniziale uniforme = 1  
 bordo in acqua a temperatura 0  
 bordo in alto senza condizioni, o meglio isolato termicamente in modo che non ci sia scambio con l'esterno. (NO FLUX).

SSSUP 2012

LEZIONE 30

Titolo nota

16/05/2012

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Questa è l'equazione di Eulero del problema di minimo

$$\min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f u dx}_{F(u)} : u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{F(u+tv) - F(u)\} &= \frac{1}{t} \frac{1}{2} \int \{t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla v, \nabla u \rangle + t f v\} dx \\ &= \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Quando  $t \rightarrow 0$  ottengo

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla v, \nabla u \rangle + f v) = 0$$

Integro per parti:

$$\int_{\Omega} -v \cdot \Delta u + f v = 0 = \int_{\Omega} (-\Delta u + f) v = 0$$

Solito lemma  $\Rightarrow \Delta u = f$

Più in generale se ho  $F(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u, \nabla u) dx$

L'equazione di Eulero diventa

$$\operatorname{div}(\nabla_{\xi} \varphi(x, u, \nabla u)) = \varphi_u(x, u, \nabla u)$$

Eq. di  
Eulero in  
generale

Osservazione

Supponiamo che  $u$  sia soluzione di  $\Delta u = f$  con  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Allora  $u$  è l'unico minimo del funzionale, ed in particolare la soluzione è unica. Infatti basta fare la disuguaglianza:

$$\begin{aligned} F(\underbrace{u+v}_{\text{generico competitor}}) &= F(u) + \underbrace{\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} f v}_{\int_{\Omega} (-\Delta u + f) \cdot v dx = 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

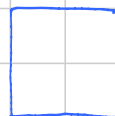
Quindi l'esistenza del minimo e l'esistenza della soluzione del problema sono equivalenti.

I metodi diretti forniscono ancora (però senza spazi di Sobolev in più dimensioni...) e forniscono l'esistenza del minimo.

Come in una variabile, è ancora vero che esiste una base ortonormale di  $L^2(\Omega)$  formata da autovalori del Laplaciano, cioè da funzioni  $u_n(x,y)$  t.c.  $\Delta u_n(x,y) = -\lambda_n u_n(x,y)$  con  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , e opportune condizioni al bordo (cond. diverse danno basi diverse). Questa base serve poi per risolvere problemi dinamici (eq. calore, eq. onde).

Esempio  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$

Condizioni di Neumann. Cerco autovalori del Laplaciano, cioè  $\Delta u = -\lambda u$ , con  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ .



Considero funzioni del tipo  $u_{m,n}(x,y) = \sin(mx) \cdot \sin(ny)$   
 $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$  gratis

$$\begin{aligned}\Delta u_{m,n}(x,y) &= -n^2 \sin(mx) \cdot \sin(ny) - u^2 \sin(mx) \cdot \sin(ny) \\ &= -(n^2 + m^2) u_{m,n}(x,y)\end{aligned}$$

Questo dice che le  $u_{m,n}(x,y)$  sono autovettori con  $\lambda = -(n^2 + m^2)$ .  
 Sono ortogonali tra loro?

$$\int u_{m,n}(x,y) \cdot u_{a,b}(x,y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{se } (m,n) \neq (a,b)$$

banalmente vero e segue dall'analogo 1-dim. Dividendolo per un opportuno coeff. diventiamo di norma 1.

È vero che ogni  $u(x,y) \in L^2(\Omega)$  si scrive come

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_{m,n}}_{\substack{\text{coeff. ottenuti da prodotto scalare} \\ \uparrow}} \cdot \sin(mx) \cdot \sin(ny)$$



Idea: basta saper approssimare funzioni che valgono 1 in un quadratino e 0 altrove, ma queste sono prodotto di una funzione della sola  $x$  ed una funzione della sola  $y$ .

A questo p.to posso risolvere l'eq. del calore su  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ .  
Scrivo

$$u(x, y, t) = \sum \sum a_{m,n}(t) \sin(mx) \sin(my)$$

Impone  $u_t = \Delta u$  diventa (stessi passaggi che in 1 variabile)

$$a_{m,n}'(t) = -(m^2 + n^2) a_{m,n}(t), \text{ da cui risolvendo}$$

$$a_{m,n}(t) = a_{m,n}(0) \cdot e^{-(m^2 + n^2)t}$$

da cui la soluzione

$$u(x, y, t) = \sum \sum \underbrace{a_{m,n}(0)}_{\substack{\text{coeff. di F. della condizione iniziale} \\ \text{fattore normalizzazione}}} \cdot e^{-(m^2 + n^2)t} \sin(mx) \cdot \sin(my)$$

$$= \frac{1}{\int_{\Omega}} \int_{\Omega} u_0(x, y) \sin(mx) \cdot \sin(my) dx dy$$

fattore  
normalizzazione

Idem per l'eq. delle onde. le condizioni al bordo sono inserite nella base !!

Se fosse  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$   
potrei usare come base ortogonale  
(poi da normalizzare)

$$u_{m,n}(x, y) = \sin(mx) \cdot \sin(my) \quad \text{con } m \geq 1 \text{ intero e } n \geq 1 \text{ intero DISPARI (per avere N. in } \frac{\pi}{2} \text{).}$$



Oss. La serie di  $F$  può essere utile per risolvere  $\Delta u = f$ .

Scrivo  $f$  in serie di  $F$ .  $f(x, y) = \sum \sum f_{m,n} \underbrace{u_{m,n}(x, y)}_{\sin(mx) \cdot \sin(ny)}$

A questo p.to la soluzione del problema è

$$u(x, y) = - \sum \sum \frac{f_{m,n}}{(m^2 + n^2)} u_{m,n}(x, y)$$

La serie che definisce  $u$  converge a maggior ragione di quella che definisce  $f$ . Un'approssimazione di  $f$  con un numero finito di componenti fornisce una migliore approssimazione di  $u$ .

— o — o —