SSSUP 2010
Corso di Complementi di Analisi Matematica I

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

S. ANNA 2010 — LEZIONE 01

Titolo nota 26/01/2010

<u>Terminologia topologica</u>   Sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$

Si dice che x è <u>interno</u> ad A se $\exists\, \varepsilon>0$ t.c. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$

" " " " " <u>aderente</u> ad A se $\forall\, \varepsilon>0$ si ha $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

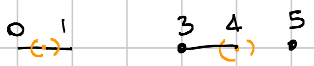
Si dice <u>parte interna</u> di A l'insieme dei punti interni ad A

" " <u>chiusura</u> " " " " " aderenti ad A.

<u>Esempio</u> $A = (0,1) \cup [3,4) \cup \{5\}$

I punti interni (si indica con $\mathring{A}$): $(0,1) \cup (3,4)$

La chiusura di A (si indica con $\bar{A}$): $[0,1] \cup [3,4] \cup \{5\}$



Si dice <u>bordo</u> di A (e si indica con ∂A) l'insieme $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Si caratterizza come l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\forall\, \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene sia p.ti di A, sia punti non di A.

Nell'esempio: $\partial A = \{0,1,3,4,5\}$ (verificare con def. e caratt.)

Si dice che un p.to $x \in \mathbb{R}$ è un <u>p.to di accumulazione</u> per l'insieme A se $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, y \in A, y \neq x$ tale che $y \in A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

(detto altrimenti: <u>ogni</u> intorno di x tocca A in un p.to $\neq x$)

Nell'esempio l'insieme dei punti di accumulazione di A è

$[0,1] \cup [3,4]$

<u>Esercizio semplice</u>: l'insieme dei p.ti di accumulazione è dato da i p.ti della chiusura meno i p.ti isolati di A ($x \in A$ si dice isolato se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x\}$

Utilità: se uno ha una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso calcolarne il limite per $x \to x_0$ purché x_0 sia di accumulazione per A.

Oss. La def. di punto di accumulazione si estende in modo ovvio da $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Ad esempio $+\infty$ è p.to di acc. per $A \Leftrightarrow \sup A = +\infty \Leftrightarrow A$ non è limitato superiormente.

La derivata solitamente si definisce solo nei p.ti interni.

Esercizio istruttivo

① Trovare un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A,\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

siano 7 insiemi distinti

② Dimostrare che se continuo ad iterare le operazioni riottengo sempre uno dei 7 precedenti

— o — o — o —

$\boxed{\text{LIMINF e LIMSUP}}$ (limite inferiore e limite superiore)

Caso delle successioni.

Linguaggio: si dice che una proprietà di $\mathbb{N}$ vale

* definitivamente se vale da un certo p.to in poi: $\exists M \in \mathbb{N}$ t.c. la proprietà vale $\forall n \geq M$;
* frequentemente se vale infinite volte. Detto altrimenti: $\forall M \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq M$ per cui vale.

LIMINF e LIMSUP esistono sempre!

Se a_n ha limite $\in \overline{\mathbb{R}}$, allora quelli sono liminf e limsup.
Se a_n non ha limite, allora brutalmente liminf e limsup sono il più grande ed il più piccolo valore verso cui oscilla.

<u>Esempio 1</u> $a_n = (-1)^n$ $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1, \quad \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +1.$

<u>Esempio 2</u> $a_n = [2+(-1)^n]^n$ $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} = 1, \quad \limsup\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

<u>Esempio 3</u> $a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vera} \\ \text{oscillazione}}}{\boxed{(-1)^n}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\dfrac{7}{n+(-1)^n}}}$ $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1, \quad \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

<u>Definizione formale</u> Data a_n successione, pongo

$$L_k := \sup\{a_n : n \geq k\} \qquad \ell_k := \inf\{a_n : n \geq k\}$$

È facile dimostrare che L_k è debolmente decrescente $(L_{k+1} \leq L_k)$
ℓ_k " " crescente

Quindi esistono:

$$\lim_{k\to+\infty} L_k = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

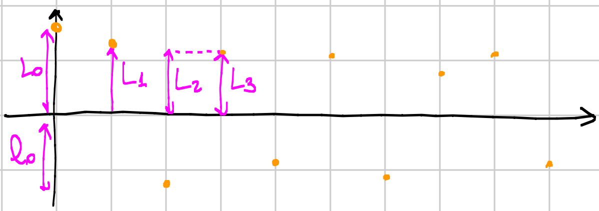
$$\lim_{k\to+\infty} \ell_k = \liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Queste definizioni sottintendono il concetto di limite in $\overline{\mathbb{R}}$ (cioè è ammesso che L_k valga $+\infty$ e ℓ_k valga $-\infty$)

Volendo avrei potuto dire:

* Se a_n non è limit. super., allora $\limsup = +\infty$, altrimenti faccio il limite degli L_k che sono ora numeri
* Idem per il liminf.

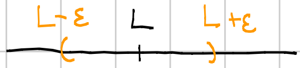
<u>Disegno</u>:



Caratterizzazione con gli ε

$a_n \to \ell$ (limite) se $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente

$\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ se $\forall \varepsilon > 0$



$a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente (perchè $L_k \leq L+\varepsilon$ defin.)

$a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente (perchè $L_k \geq L$ sempre)

Analogamente

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\quad a_n \geq \ell - \varepsilon$ definitivamente

$a_n \leq \ell + \varepsilon$ frequentemente

— o — o —

Proprietà banali

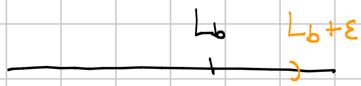
① $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$

② Se vale il segno di uguale, allora c'è il limite, ed il limite è il valore comune. (si uniscono i 2 definitivamente)

③ Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} b_n$ e

$\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} b_n$



④ $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{k \in \mathbb{R} : a_n \leq k \text{ definitivamente}\}$

$\liminf\limits_{n\to+\infty} b_n = \sup\{k \in \mathbb{R} : a_n \geq k \text{ definitivamente}\}$.

— o — o —

S. ANNA 2010 – LEZIONE 02

Titolo nota 26/01/2010

Teorema sottosuccessioni a_n succ., a_{n_k} s.succ.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \limsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

idem come per il limsup.

banale

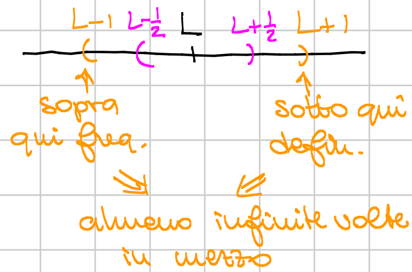
segue dalla ④ enunciata in precedenza: se $L \geq a_n$ defin., a maggior ragione $L \geq a_{n_k}$ defin.

Corollario Se esiste il limite della succ. a_n, allora i 2 estremi sono uguali, quindi è tutto uguale, quindi a_{n_k} ha limite ed il limite è lo stesso.

— o — o —

Teorema Se $L = \limsup_{n\to+\infty} a_n$, allora esiste sempre una sottosucc. a_{n_k} che ha limite, ed il limite è proprio L.

Dim. Prendo $\varepsilon = 1$. Trovo $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_1} \in (L-1, L+1)$



Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $n_2 > n_1$ e $a_{n_2} \in (L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2})$

⋮ e così via dal passo k al passo $k+1$ ...

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$. Trovo $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tale che $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \in \left(L - \frac{1}{k+1}, L + \frac{1}{k+1}\right)$. È chiaro che $a_{n_k} \to L$.

— o —

Stesso discorso vale per il liminf.

— o —

Abbiamo così dimostrato che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n$, cioè il massimo tra i limiti possibili per una sottosucc.

Analogamente $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \min\lim_{n\to+\infty} a_n$ = minimo ...

Liminf e limsup si comportano male nei teo. algebrici

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

(Pensare ad $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$ $b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$)

$$\liminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \ge \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n$$

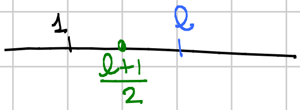
Se uno dei 2 è limite (cioè a_n o b_n hanno limite), allora vale il segno di uguale.

Con il prodotto è molto + complicato per via dei segni.

—o—o—

<u>Teorema della radice</u> Sia $a_n \ge 0$.

Se $\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \to +\infty$ (in tal caso infatti $\sqrt[n]{a_n} > \frac{\ell+1}{2}$ definitiv., quindi $a_n > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ definitiv.) $\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to +\infty$



Se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \to 0$.

Infatti $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{L+1}{2}$ defin.

dunque $0 \le a_n \le \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$

$0 \to 0$, $\left(\frac{L+1}{2}\right)^n \to 0$, $a_n \to 0$ carabinieri

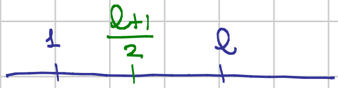
—o—o—

Teorema rapporto Sia $a_n > 0$.

Se $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora $a_n \to 0$

Se $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$, allora $a_n \to +\infty$

Dim (nel 2° caso)



Definitivamente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{\ell+1}{2}$ Supponiamo vero $\forall n \geq n_0$

Allora per induzione si dimostra che

$$\left[a_{n_0+1} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0} ; \; a_{n_0+2} \geq \frac{\ell+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 a_{n_0} ; \; \ldots \right]$$

$$\underset{\substack{\wr\\ +\infty}}{a_n} \geq a_{n_0} \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}}_{\downarrow \; +\infty}$$

(verificare per induzione)

per confronto

—o —o —

Teorema rapporto → radice Sia $a_n > 0$ una successione. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{①}{\leq} \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \underset{②}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \underset{③}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Corollario Se esiste il limite del rapporto, allora il primo e l'ultimo sono uguali, allora tutti sono uguali, dunque esiste il limite della radice ed è uguale al precedente.

—o —o —

Applicazioni ovvie: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ $[a_n = n]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = +\infty$ $[a_n = n!]$

Un po' meno ovvio: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\boxed{\frac{n^n}{n!}}_{a_n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

— o — o —

Esempio in cui esiste il limite della radice, ma non esiste il limite del rapporto

$a_n = 2, 1, 2, 1, 2, 1 \ldots$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \; ; \; \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \; ; \; \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

— o — o —

Dim. rapporto radice (disug. ③)

Ipotesi: $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ Tesi: $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le L+\varepsilon$ definitiv. Diciamo $\forall n \ge n_0$

L $L+\varepsilon$

Da qui per induzione deduciamo che $a_{n_0+1} \le (L+\varepsilon)a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \le (L+\varepsilon)^2 a_{n_0}$ e in generale

$$a_n \le (L+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$$

Facendo la radice n-esima abbiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \le \underbrace{\boxed{(L+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}}}}_{\to L+\varepsilon} \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{a_{n_0}}}}_{\to 1}$$

questo va dimostrato a parte in altro modo, (qui serve disug. BERNOULLI)

Da questa segue (per confronto) che $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L+\varepsilon$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$, è vero anche per $\varepsilon = 0$.

SSSUP 2010 – LEZIONE 03

Titolo nota 02/02/2010

Liminf e limsup di funzioni $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A.

Def. Si dice che

- $\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che

$$\sup\{f(x) : x \in ([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap A) \setminus \{x_0\}\} = +\infty$$

- $\limsup_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se

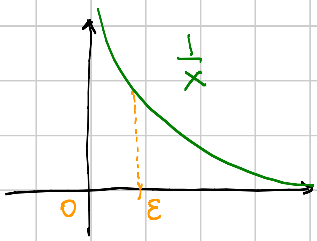
$$L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in ([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap A) \setminus \{x_0\}\}$$

Oss. Il sup scritto dentro al limite è una funzione di ε. Quando ε scende, il sup decresce, quindi il limite esiste per forza per il teo. delle funzioni monotone.

Oss. Ho dato la definizione nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$. Modifiche ovvie nel caso in cui $x_0 = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$, o ancora se faccio il limsup solo a x_0^+ o x_0^-.

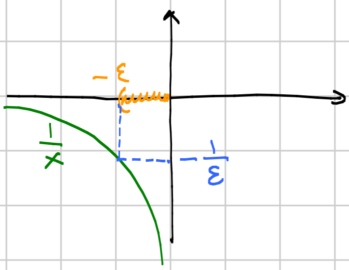
Esempio 1 $\limsup_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Infatti

$$\sup\{f(x) : x \in (0, \varepsilon)\} = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

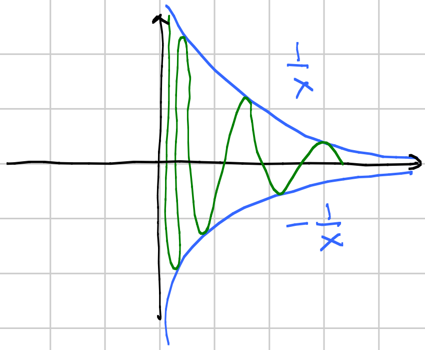


Esempio 2 $\limsup_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Infatti

$$\sup\{f(x) : x \in (-\varepsilon, 0)\} = -\frac{1}{\varepsilon}$$



Quando $\varepsilon \to 0^+$ il sup $\to -\infty$.

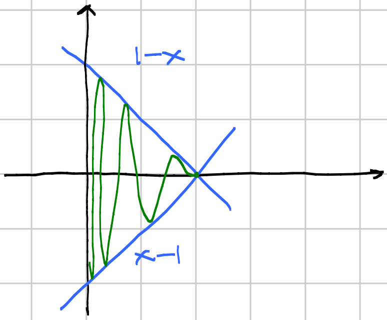


Esempio 3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ N.E.

$$\limsup_{x\to 0^+} \ldots = +\infty$$

Infatti $\forall \varepsilon>0$ si ha che

$$\sup\{f(x) : x\in(0,\varepsilon)\} = +\infty$$



Esempio 4 $\limsup_{x\to 0^+} (1-x)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1.$

Infatti in questo caso

$$\sup\{f(x) : x\in(0,\varepsilon)\} = 1 \quad \forall\varepsilon>0$$

quindi sup $\to 1$ quando $\varepsilon\to 0^+$.

— o — o —

Def. Si dice che

- $\liminf_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\inf\{f(x) : x\in([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\cap A)\setminus\{x_0\}\} = -\infty \quad \forall\varepsilon>0$$

- $\liminf_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ se

$$\ell = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in \text{come sopra}\}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Liminf, limsup, e successioni}}$ Sia $f: A\to\mathbb{R}$, sia x_0 p.to di accumulazione per A, sia x_n una successione contenuta in A tale che $x_n\to x_0$ e $x_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
Allora

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Tutto ciò $\boxed{\text{SE}}$ il limite della funzione esiste !!!

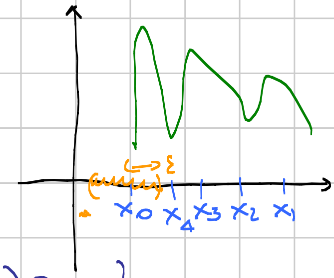
Usando liminf e limsup si avrà sempre che

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x)$$

Corollario Se esiste il limite di funzione, allora
gli estremi coincidono, allora
tutti i $\leq$ sono $=$, allora
il limite di succ. esiste e coincide col precedente.

Idea della dim. Dimostriamo solo quella + a destra.
Se il limsup della funzione è $+\infty$, non c'è nulla da dimostrare

Fisso $\varepsilon > 0$. Definitivamente la succ.
entra in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Ma allora
per k abbastanza grandi



$$\sup\{f(x_n) : n \geq k\} \leq \sup\{f(x) : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \ldots\}$$

quindi il limite del termine a sx è $\leq$ del limite del termine a destra.

— o — o —

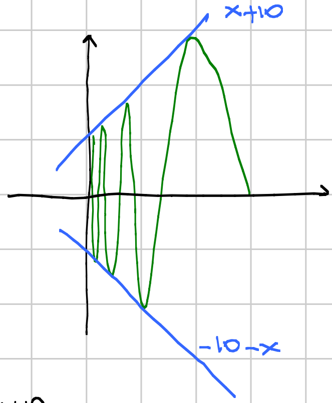
Corollario $\limsup_{x \to x_0} f(x)$ è il massimo tra tutti i limiti del tipo $\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$, dove $x_n \to x_0$. Idem per il liminf.

— o — o —

Esempio 1 Se $x_n \to +\infty$, cosa posso dire di $\lim_{n \to +\infty} \sin(x_n)$?

Risposta sbagliata: il limite non esiste !!

Risposta corretta: il limite può non esistere, oppure può essere un qualunque valore compreso tra -1 e 1.
Come già detto, il limsup è il + grande tra i limiti che esistono



<u>Esempio 2</u> $f(x) = (x+10)\sin\frac{1}{x^{20}}$. Prendo $x_n \to 0^+$.

Cosa posso dire di $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$?

Come prima:
→ o non esiste
→ o è compreso tra -10 e 10.

— o — o —

Come si dimostra rigorosamente un limsup o un liminf ?
Di solito occorre fare 2 cose:
① una stima
② trovare una successione opportuna
(La via dell'epsilon in genere è impraticabile).

Nell'esempio: ① stima $f(x) \le x+10$. A questo punto posso dire

$$\limsup_{x\to 0^+} f(x) \le \limsup_{x\to 0^+}(x+10) = \lim_{x\to 0^+}(x+10) = 10$$

↑ per i limiti ci sono molti + strumenti

② Si tratta di trovare una successione $x_n \to 0^+$ t.c. $f(x_n) \to 10$. Per questo basta fare in modo che

$$\sin\frac{1}{x_n^{20}} = 1, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{x_n^{20}} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ quindi}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[20]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}.$$

È ovvio che $x_n \to 0^+$ e $f(x_n) \to 10$ poiché

$$f(x_n) = (x_n+10)\sin\frac{1}{x_n^{20}} = (x_n+10)$$

— o — o —

Teorema di De L'Hôpital Sotto un po' di ipotesi ... si ha che

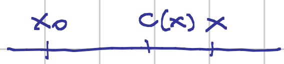
una di queste è che il limite a dx ESISTA

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In versione liminf / limsup: ferme restando tutte le ipotesi tranne l'esistenza del limite a destra si ha comunque che

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Idea del caso $\frac{0}{0}$ e $x \to x_0^+$



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

perché sono nel caso $\frac{0}{0}$, quindi $f(x_0) = g(x_0) = 0$

(posso cambiare i valori in x_0 in modo che sia vera conservando la continuità di f e g)

Quando $x \to x_0$, ho che $c(x) \to x_0$ (carabinieri), quindi

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \boxed{\le} \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e non necessariamente uguale !!!

— o — o —

Osservazione sul teorema Dove devono essere definite $f(x)$ e $g(x)$?

Risposta sbagliata: in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ di cui x_0 è p.to di accumulazione.

Risposta corretta: almeno nell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ per un opportuno $\delta > 0$.

SA 2010 — LEZIONE 04

Titolo nota 02/02/2010

Compattezza (per successioni)

Definizione Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se ogni successione a valori in A ammette almeno una sottosuccessione convergente (ad un numero reale $\in A$)

Esempio 1 $A = \mathbb{R}$ non è compatto. Basta prendere $x_n = n$

" 2 $A = (0, +\infty)$ non è compatto. Come prima.

Morale: gli insiemi non limitati non possono essere compatti

Esempio 3 $A = (0,1)$ non è compatto. Basta prendere $x_n = \frac{1}{n}$
(tutte le s.succ. tendono a $0 \notin A$)

Morale: se A non è chiuso, allora A non è compatto.

Teorema (BOLZANO-WEIERSTRASS) $A \subseteq \mathbb{R}$
A compatto $\Leftrightarrow$ A chiuso + limitato

Teorema (Weierstrass) Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo
- f continua in A;
- A compatto (cioè chiuso + limitato)

Allora f ammette max e min in A.

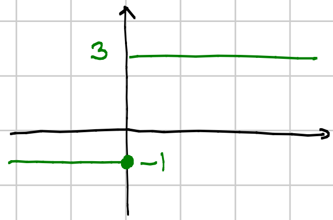
Funzioni semicontinue $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ e di accumulazione
Si dice che
- f è continua in x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f è semicontinua inferiormente in x_0 se $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

(brutalmente: al limite $f(x)$ precipita in basso)

- f è semicontinua superiormente in x_0 se $\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$

Si dice che $f(x)$ è continua, s.c.i., s.c.s. in tutto A se lo è in tutti i p.ti di A.

<u>Esempio</u> $f(x) = -1$ per $x \leq 0$
$\qquad\qquad\quad 3$ per $x > 0$



è s.c.i.
Se $f(0) \leq -1$ è s.c.i.
Se $f(0) \geq 3$ è s.c.s.
Se $-1 < f(0) < 3$ non è nessuno dei due.

<u>Teorema di Weierstrass</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Supponiamo
- A compatto
- f s.c.i. in A.

Allora f ammette per forza il minimo (risultato simmetrico ammettendo f s.c.s.)

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. B-W}}$ Ipotesi: A chiuso + limitato, x_n succ. in A
Tesi: $\exists\ x_{n_k}$ che converge ad un elemento di A.

Oss.: essendo A chiuso, basta che x_{n_k} abbia limite ed il limite starà in A.

Chi è il candidato limite? Uno possibile è

$$L = \inf \{ x \in \mathbb{R} : x_n \leq x \text{ per infiniti indici } n \}$$

① L'insieme $\{\dots\} \neq \emptyset$ perché A è limitato superiormente.

② L'inf non può essere $-\infty$ perché A è limitato inferiormente.

③ Quindi $L \in \mathbb{R}$. Trovo una s. succ. $x_{n_k} \to L$

Prendo $\varepsilon = 1$.

Esistono • infiniti n t.c. $x_n \leq L+1$ — $L-1$ (L) $L+1$

• finiti n t.c. $x_n \leq L-1$

(altrimenti L non sarebbe l' inf!!)

Quindi tra $L-1$ e $L+1$ ci sono "infiniti x_n"

Ne prendo uno e lo chiamo x_{n_1}.

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Come prima ci sono infiniti indici n per cui x_n sta in $[L-\frac{1}{2}, L+\frac{1}{2}]$. Ne prendo uno con indice $n_2 > n_1$ — $L-\frac{1}{2}$ (L) $L+\frac{1}{2}$

E così via con $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ $\left(o\ \frac{1}{2^k}\right)$.

Ottengo una $x_{n_k} \to L$ per definizione.

La chiusura la uso solo per dire che $L \in A$.

—o—o—

$\boxed{\text{Dim. W. in versione s.c.i.}}$ Ipotesi: A compatto

$f: A \to \mathbb{R}$ s.c.i.

Tesi: esiste $\min\{f(x) : x \in A\}$.

Esiste di sicuro $\inf\{f(x) : x \in A\} = m$

Per quanto ne sappiamo ora può essere $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

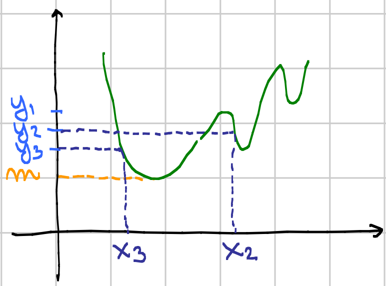
In ogni caso, per definizione di inf, esiste una successione $y_n \to m$ contenuta nell' immagine di $f(x)$.

Allora pongo $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$.

Poiché A è compatto e $x_n \in A$,

per B-W esiste una s. succ.

$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in A$



Spero che $f(x_0) = m$. Perché è vero?

So che

$$m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } m \\ \text{è l'inf.}}}{\le} f(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché} \\ f \text{ è s.c.i.}}}{\le} \liminf_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. di} \\ x_n}}{=} \liminf_{k\to+\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = m$$

definizione di y_{n_k}.

Quindi sono tutti uguale, dunque $f(x_0) = m$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Se f è s.c.s. la dimostrazione è la stessa

— o — o —

<u>Esercizio</u> Trovare una funzione $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ continua per la quale massimo e minimo in $(0,1]$ non esistono.

— o — o —

$\boxed{\text{Completezza}}$ Una successione x_n di numeri reali si dice successione di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che

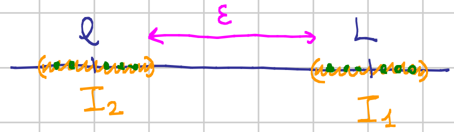
$$|x_n - x_m| \le \varepsilon \qquad \forall n \ge N, \ \forall m \ge N.$$

(Brutalmente: x_n ed x_m sono vicini se n ed m sono grandi)

<u>Teorema</u> Tutte le successioni di Cauchy convergono (lim. $\in \mathbb{R}$).
(converge tutta la succ., non solo una s. succ.)

<u>Idea della dim.</u> ① una succ. di Cauchy è limitata (basta prendere $\varepsilon = 1$ nella definizione)

② Prendo L = limsup e ℓ = liminf. Dal p.to ① so che sono che sono reali. Voglio dimostrare che sono uguali. Per assurdo sia $\ell \ne L$, cioè $\ell < L$.
Per caratterizzazione di ℓ e L si ha che



- a_n sta infinite volte in I_1 e infinite volte in I_2.

Quindi esiste un $\varepsilon > 0$ (cioè la distanza tra I_1 e I_2) ed esistono x_n con indici grandi che stanno a distanza $> \varepsilon$.
Questo contraddice la definizione.

SSSUP 2010 – LEZIONE 05

Titolo nota 03/02/2010

Uniforme continuità – Moduli di continuità
LIPSCHITZIANITÀ – HÖLDERIANITÀ

Ambientazione: $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f : A \to \mathbb{R}$

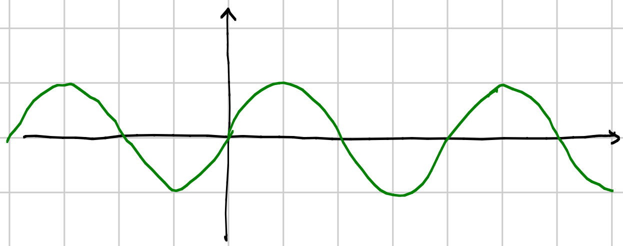
Def. 1 Si dice che f è continua in A se
$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c.
$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$$

Brutalmente: se x e y distano meno di δ, allora $f(x)$ e $f(y)$ distano meno di ε.

Def. 2 Si dice che f è uniformemente continua in A se
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c.
$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in A\ \ \forall y \in A \text{ t.c. } |x-y| \leq \delta.$$

Differenza Nella def. di funzione continua δ dipende da x e da ε. Nella def. di funzione unif. continua δ dipende solo da ε, cioè c'è un δ che va bene per tutti i punti $x \in A$.

Esempio 1 $f(x) = \sin x$ è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$



Fisso ε: voglio che $f(x)$ e $f(y)$ distino meno di ε. "Il δ che va bene nel tratto + pendente va bene ovunque.

Esempio 2 $f(x) = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$ non è uniformemente continua. Nei tratti + pendenti mi serve δ sempre + piccolo.

$\boxed{\text{Modulo di continuità}}$ Data $f: A \to \mathbb{R}$ unif. continua, il suo modulo di continuità è la funzione che ad ε associa δ.
Più rigorosamente

$$\omega(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{raggio}}}{r}) = \sup\{|f(x)-f(y)| : x \in A, y \in A, |x-y| \leq r\}$$

Questa funzione è definita per ogni $r \geq 0$ ed è finita proprio perchè f è uniformemente continua.

Se ω è il modulo di continuità di f, allora

$$\boxed{|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|) \qquad \forall x \in A, \forall y \in A}$$

Una relazione di questo tipo permette di stimare la differenza tra 2 valori di $f(x)$ nota la differenza tra gli argomenti.

Un modulo di continuità permette di stimare l'errore che si commette nel calcolare una funzione usando un valore approssimato dell'argomento.

—o —o —

Def. Una $f: A \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana in A se il suo modulo di continuità è del tipo $\omega(r) = Lr$ con $L \in \mathbb{R}$.
La più piccola costante L che va bene si dice costante di Lipschitz di f in A.

Def. $f: A \to \mathbb{R}$ si dice Hölderiana con esponente $\alpha \in (0,1)$ se il suo modulo di continuità è del tipo

$$\omega(r) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante reale}}}{H} r^{\alpha}$$

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità con esponente $\alpha = 1$.

Rapporti tra le definizioni:

Funzioni continue
$\cup|$
Funzioni unif. continue
$\cup|$
Funzioni Hölderiane (più α è vicino ad 1 e meglio è)
$\cup|$
Funzioni Lipschitziane
$\cup|$
Funzioni C^1 (derivabile con derivata continua)

Esercizio: quali sono le funzioni Hölderiane con $\alpha = 7$?
Vorrebbe dire che

$$|f(x) - f(y)| \leq H\,|x-y|^7$$

Divido per $|x-y|$ e faccio $y \to x$. Ottengo

essenziale che $\alpha > 1$.

$$|f'(x)| = \lim_{y\to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{y \to x} H\,|x-y|^6 = 0$$

Vorrebbe quindi dire che f è derivabile e la sua derivata è 0, quindi f è localmente costante (cioè costante in ogni intervallo contenuto in A).

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = |x|$ è lip., ma non C^1 in $\mathbb{R}$.
La lip. segue banalmente da

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$$

costante 1.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ in $A = [0, +\infty)$.
Questa è $\frac{1}{2}$-Hölder per via della disuguaglianza

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$$

costante 1.

Come si dimostra? Assumo WLOG (without loss of generality) che sia $x \geq y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \overset{?}{\leq} \sqrt{x-y}$

$$\cancel{x} + y - 2\sqrt{xy} \leq \cancel{x} - y, \quad \cancel{2}y \leq \cancel{2}\sqrt{xy}, \quad y^2 \leq xy, \ y \leq x \text{ Ok.}$$

Perché non è Lipschitziana? Se fosse

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x-y|$$

Prendo $y = 0$ e ottengo $\sqrt{x} \leq Lx$, cioè $1 \leq L\sqrt{x}$

ora faccio tendere $x \to 0^+$ e ho un assurdo.

— o — o —

$\boxed{\text{Lipschitzianità e derivate prime}}$

[Dopo video]

Lipschitzianità $\not\Rightarrow$ esistenza di $f'(x)$.

Tuttavia, se $f'(x)$ esiste, allora è limitata.

Dim. Hp: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$. Prendo x_0 in cui f' esiste

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{x_0 + h}}) - f(\overset{y}{\overset{\shortparallel}{x_0}})}{h} \right| \leq L.$$

— o — o —

Viceversa: se $\boxed{A \text{ è un intervallo}}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivata limitata, allora f è Lip. in A e la sua costante di Lip. è

$$L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}$$

Dim. teo Lagrange:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leq L|x-y|.$$

Questo dimostra che f è Lip. con costante L. Può essere che sia Lip. con una costante $L_1 < L$?

No! Per il p.to precedente, se f fosse Lipschitziana con costante L_1 avremmo che $|f'(x)| \leq L_1 \ \forall x \in A$, quindi L non sarebbe il sup.

Esempio 1 $f(x) = \sin x$ è Lip. con costante 1 su tutto $\mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Stessa cosa per $\cos x$ e $\arctan x$

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-100, 100]$ con costante 200

perché $200 = \sup\{|f'(x)| : x \in [-100, 100]\}$

$= \max$ "

$$|x^2 - y^2| \leq 200\,|x-y| \qquad \forall x, y \in [-100, 100].$$

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ non è Lip. in $[0, +\infty)$

" " " " $(0, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[\frac{1}{3}, +\infty)$ con costante $\frac{\sqrt{3}}{2}$

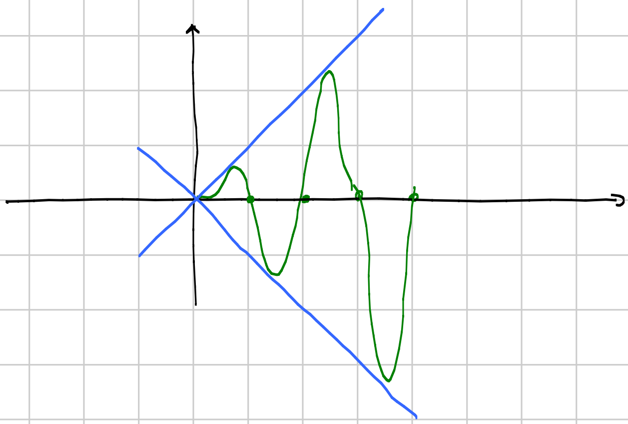
Infatti

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sup\{|f'(x)| : x \in [1/3, +\infty)\}$$

Esempio 4 $f(x) = x \sin x$ è Lip. sui compatti (perché è C^1)

Su tutto $\mathbb{R}$ non è Lip. perché

$f'(x) = \sin x + x\cos x$ non è lim. in $\mathbb{R}$



SSSUP 2010 — LEZIONE 06

Titolo nota 03/02/2010

Precisazione L'implicazione

f Lip. in $A \Rightarrow f$ $\frac{1}{2}$-Hölder in A

vale se A è $\boxed{\text{limitato}}$ (e così tutte le altre)

Dim. Hp: $|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y|$

Ts: $|f(x)-f(y)| \leq H\,|x-y|^{1/2}$

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| = \underbrace{L\,|x-y|^{1/2}}_{\leq H \text{ se } A \text{ è limitato}} \cdot |x-y|^{1/2}$$

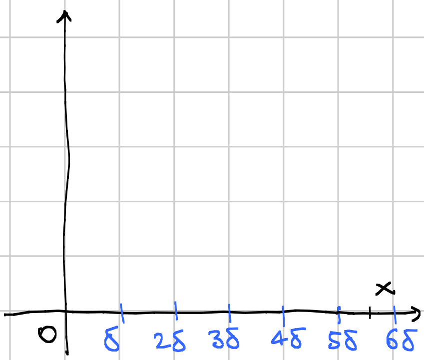
— o — o —

Esercizio Sia $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora f è sublineare, cioè esistono costanti A e B t.c.

$$f(x) \leq Ax+B \quad \text{(sta sotto una retta)}$$

Dim. uso la definizione con $\varepsilon = 1$. Allora esiste δ tale che
$|f(x)-f(y)| \leq 1$ se $|x-y| \leq \delta$

$$\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x) - f(5\delta) + && 1\\
& f(5\delta) - f(4\delta) + && 1\\
& \vdots && \vdots\\
& f(\delta) - f(0) + && 1\\
& f(0) && f(0)
\end{aligned}$$



Quindi $f(x) \leq f(0) + \left\lceil \frac{x}{\delta} \right\rceil$ parte intera superiore

$$\leq f(0) + \frac{x}{\delta} + 1$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{\delta}}}_{A} \cdot x + \underbrace{\boxed{(f(0)+1)}}_{B}$$

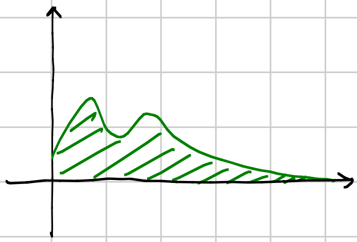
Teorema (non dimostrato) Se A è compatto e $f: A \to \mathbb{R}$ è continua, allora f è unif. continua.

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0, +\infty)$?

$\boxed{\text{SI}}$ in $[0, 10]$ è unif. continua perché è continua e l'interv. è compatto.
In $[10, +\infty)$ è Lip., dunque unif. continua
Inoltre l'uniforme continuità si può "attaccare"

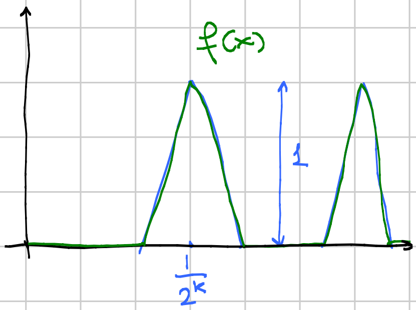
Esercizio Sia $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione con

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$



Posso concludere che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

ASSOLUTAMENTE NO!!!
Esempio: grafico = unione di triangoli "ogni tanto"
integrale = somma aree
$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots < +\infty$

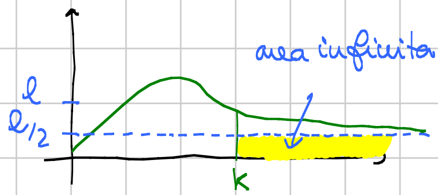


Posso anche fare altezze $= 2^k$, basi $= \frac{1}{4^k}$.
In questo modo

$$\limsup_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Posso concludere che almeno $\liminf_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

$\boxed{\text{SI}}$ Se così non fosse, vorrebbe dire che $\liminf_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$, ma allora $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ definitivamente



Terza domanda: sapendo che l'integrale è finito e $f(x)$ è uniformemente continua, possiamo dedurre che $f(x) \to 0$?

Sì! Devo dimostrare che $\limsup_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (il liminf lo so già!)

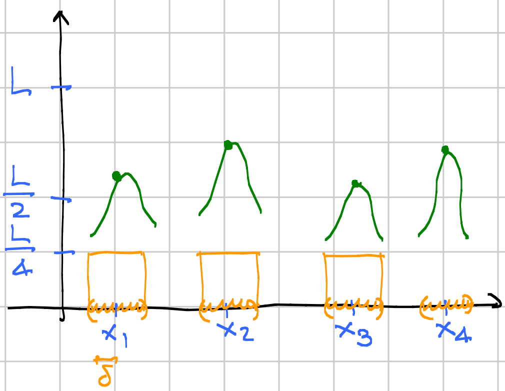
Se $\limsup_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$, vuol dire che $\exists\, x_n \to +\infty$ con $f(x_n) \geq \frac{L}{2}$

Essendo unif. continua, ci metterà un po' a tornare giù dopo x_n, quindi f si mantiene alta per parecchio tempo e quindi l'integrale diverge.

Detto bene: applico la def. di unif. continuità con $\varepsilon = \frac{L}{4}$.
Allora $\exists\, \delta > 0$ (e universale) tale che

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \frac{L}{4} \quad \text{se} \quad |x - x_n| \leq \delta$$

Quindi negli intervalli $[x_n - \delta, x_n + \delta]$ la funzione non scende sotto $\frac{L}{4}$



Quindi ciascuno di questi intervalli contribuisce con $2\delta \cdot \frac{L}{4}$ all'integrale.

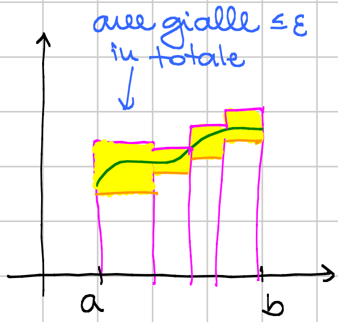
Occhio: in questo ragionamento sto assumendo che gli intervalli mi siano disgiunti. Se non lo sono, basta che prenda una s.succ. degli x_n in modo che lo siano

— o — o —

<u>Esercizio</u> Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ unif. continua.
Cosa posso dire del $\lim_{x \to 0^+} f(x)$? Esiste ?

$\boxed{\text{SI}}$ Modo per vederlo: se non esistesse avrei 2 succ. $x_n \to 0^+$ e $y_n \to 0^+$ con $f(x_n) \to L_1$ $f(y_n) \to L_2$ con $L_1 \neq L_2$, ma allora...

Esercizio Sia $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ continua (vale anche se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$). Allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono rettangoli sopra e sotto le cui aree differiscono per meno di ε.



Dim. Essendo f continua su un compatto è unif. continua.
Applico la def. con ε. Allora $\exists\, \delta > 0$ (universale) t.c.
$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ quando $|x-y| \leq \delta$.
Costruisco dei rettangoli qualunque purchè con basi di lunghezza $\leq \delta$. In ogni intervallino uso come altezze dei rettangoli il max ed il min di f nell'intervallo. Questi distano meno di ε. Quindi
avanzo = somma aree differenze
$\leq$ somma $\varepsilon \cdot$ lungh. base
$= \varepsilon \cdot (b-a)$
Questo può diventare piccolo a piacere.

—o—o—

Esercizi

① Trovare $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che sia uniformemente continua, ma non α-Hölderiana per ogni $\alpha \in (0,1)$.
(f deve tendere a 0 meno velocemente di tutte le radici n-esime)

② Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Discutere questo enunciato
f $\frac{1}{2}$-Hölder $\Leftrightarrow$ f^2 Lipschitz

③ Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. È Lip.? È Hölder per un qualche α?

SSSUP 7 — LEZIONE 07

Titolo nota 09/02/2010

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

x_0 dato, $x_{n+1} = f(x_n)$ Dipendenza solo dal termine prec. (AUTONOMA del 1° ordine)

x_0 dato, $x_{n+1} = f(x_n, n)$ Dipendenza anche da n (NON AUTONOMA del 1° ordine)

x_0, x_1 dati, $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$ NON AUTONOMO 2° ordine

Analogamente si possono pensare dipendenze da k termini precedenti.

Esempi $x_{n+1} = \arctan x_n$, $x_{n+1} = \cos x_n$

$x_{n+1} = 2x_n - n$, non autonomo

$x_0 = 3$ e $x_{n+1} = 2x_n - n$, quanto vale x_2?

$x_1 = 2x_0 - 0 = 6$, $x_2 = 2x_1 - 1 = 11$

quando calcolo x_1, ho che $n=0$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ (succ. di Fibonacci)

Domande: * è monotona?

* è limitata?

* esiste il limite? Se sì, quanto vale?

Oss. Se uno vuole calcolare un certo x_n, occorre calcolare tutti i precedenti! Eccezione: quando è possibile trovare una formula esplicita.

Utilità: Per una macchina è molto semplice calcolare i termini di una successione per ricorrenza (bastano poche righe di programma).

Casi semplici in cui si può trovare una formula esplicita

$\boxed{\text{Ricorrenze lineari del 1° ordine}}$

$\boxed{x_{n+1} = a x_n + b}$ con a, b numeri reali fissati, x_0 fissato

Calcoliamo un po' di termini: x_0, $x_1 = a x_0 + b$,

$x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

$x_4 = a x_3 + b = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b = a^4 x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$

$= a^4 x_0 + b \dfrac{a^4 - 1}{a - 1}$

Sembra ragionevole congetturare che

$$\boxed{x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}}$$

Devo anche avere $a \neq 1$ (se no è banale)
Questa formula si dimostra banalmente per induzione (farlo per esercizio!)

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ Ci sono dei punti fissi (cioè valori di x_0 che producono una succ. costante)? $x_0 = x_1 = x_2 = \dots$
Essendo autonoma basta $x_1 = x_0$ per averla sempre costante. Se ℓ è fisso, allora

$\ell = a\ell + b$, cioè $\ell(1 - a) = b$, $\ell = \dfrac{b}{1 - a}$

se posso dividere. Quindi se $a \neq 1$, ho sempre un unico punto fisso.

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Poniamo $y_n = x_n - \ell$. Cosa risolve y_n?

$y_{n+1} = x_{n+1} - \ell = a x_n + b - \ell = a(y_n + \ell) + b - \ell$

ricavo x_n

$= a y_n + \boxed{a\ell + b} - \ell = a y_n$

$= \ell$ per definizione di ℓ !!!

Quindi $y_{n+1} = a y_n$ da cui facilmente $y_n = a^n y_0$

Ora $y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - \ell) = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)$

Dalla formula esplicita per y_n ricavo quella per x_n:

$$x_n = y_n + \ell = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

che fatti i conti è la stessa formula di prima, ma ottenuta usando l'idea dei punti fissi.

— o — o —

Lineare del 1° ordine, ma non autonomo.

$x_{n+1} = 2x_n - n$. Caso più semplice $x_{n+1} = x_n - n$

x_0, $x_1 = x_0 - 0 = x_0$, $x_2 = x_1 - 1 = x_0 - 1$, $x_3 = x_2 - 2 = x_0 - 1 - 2$

$x_4 = x_3 - 3 = x_0 - 1 - 2 - 3 \dots$

Congettura:

$$x_n = x_0 - 1 - 2 - \dots - (n-1) = \boxed{x_0 - \frac{n(n-1)}{2}}$$ induzione !!!!

Domanda: esistono polinomi $p(n)$ di secondo grado che risolvono la ricorrenza? Cioè $x_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$

Proviamo

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2\alpha n^2 + 2\beta n + 2\gamma - n$$

La risposta è no perchè a sx il termine principale è αn^2, a dx è $2\alpha n^2$, quindi deve essere $\alpha = 0$

$$\beta n + \beta + \gamma = 2\beta n + 2\gamma - n$$

quindi $\beta = 2\beta - 1$, cioè $\beta = 1$ e infine $\gamma = 1$.

Verifica che $x_{n+1} = 2x_n - n$: $x_{n+1} = \beta(n+1) + 1 = n + 2$

$$n + 2 = 2(n+1) - n$$

Conclusione: esiste un polinomio di 1° grado che risolve la ricorrenza ed è $x_n = n+1$

Questa soluzione speciale gioca il ruolo del p.to fisso di prima.

Pongo ora $y_n = x_n - n - 1$ (x_n – soluzione speciale)

Cosa risolve y_n?

$$y_{n+1} = x_{n+1} - (n+1) - 1 = x_{n+1} - n - 2 \quad \text{(uso ricorrenza)}$$
$$= 2x_n - n - n - 2 = 2(x_n - n - 1) \quad \text{(uso def. di } y_n\text{)}$$
$$= 2y_n$$

Quindi $y_n = 2^n y_0 = 2^n (x_0 - 1)$, da cui

$$\boxed{x_n = y_n + n + 1 = 2^n (x_0 - 1) + n + 1}$$

Volendo si verifica per induzione !!!

— o — o —

<u>Altro esempio</u> Sia $x_{n+1} = a x_n + n^2 + 3n - 5$

Come trovare una formula esplicita?

1. Si cerca una soluzione esplicita qualunque, con un dato iniziale qualunque. Ragionevolmente sarà un polinomio di grado 2 in n. I coeff. si calcolano sostituendo nella ricorrenza.

2. Trovata la soluzione esplicita qualunque, si pone
$y_n = x_n -$ sol. esplicita
e si scopre che $y_{n+1} = a y_n$.
In questo punto è fondamentale che sia lineare la dipendenza dal termine precedente, cioè

$$x_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{a}\, x_n + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{qualunque cosa dipendente da } n \text{ e basta}}}{\text{Mostro}(n)}$$

1 + 2 $\Rightarrow$ formula esplicita.

<u>Oss.</u> Se Mostro (n) = polinomio, allora la soluzione particolare sarà un pol. dello stesso grado (o di uno superiore se $a=1$)

$\boxed{\text{Analogia con eq. diff. lineari non omogenee}}$

SSSUP 2010 – LEZIONE 08

Titolo nota 09/02/2010

Succ. per ricorrenza lineari omogenee

$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$ Dipendenza da 2 termini precedenti senza termini forzanti

Oss. 1 L'insieme di tutte le successioni è uno spazio vettoriale? Banalmente sì! È chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per una costante.

Oss. 2 L'applicazione che ad una qualunque succ. $\{x_n\}$ associa la successione $\{x_{n+2} - a x_{n+1} - b x_n\}$ è un'applicazione lineare? Banalmente sì!

Oss. 3 Le successioni che verificano la ricorrenza scritta sopra sono il ker di questa applicazione, cioè vengono mandate dall'applicazione nella successione nulla $(0, 0, 0, \dots)$.

Oss. 4 Il ker di una applicazione lineare è un s.spazio vettoriale di tutte le successioni. Questo è come dire che

→ la somma di 2 successioni che verificano la ricorrenza verifica a sua volta la ricorrenza

→ se moltiplico per una costante fissa tutti i termini di una soluzione ottengo a sua volta una soluzione.

Oss. 5 Qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni? Due! Infatti x_0 e x_1 li posso fissare come mi pare (due gradi di libertà) e a quel punto i restanti termini saranno univocamente determinati.

$\boxed{\text{Oss. 6}}$ Quindi ogni soluzione della ricorrenza si può scrivere nella forma

$$x_n = \alpha y_n + \beta z_n$$

dove α e β sono numeri reali, e y_n e z_n sono due soluzioni particolari, purchè linearmente indipendenti (cioè l'una non è multipla dell'altra)

Conclusione: basta trovare 2 soluzioni speciali e si conoscono tutte le soluzioni.

Stessa cosa in modo del tutto elementare: prendo

y_n = successione ottenuta a partire da $x_0 = 1$, $x_1 = 0$

z_n = " " " " " $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

Allora la successione ottenuta a partire da x_0 e x_1 qualunque è

$$x_n = x_0 \cdot y_n + x_1 \cdot z_n$$

(Qui si sfrutta pesantemente che la dipendenza è lineare e omogenea)

Posso ovviamente sostituire $(1,0)$ e $(0,1)$ con una coppia di vettori linearmente indip. di $\mathbb{R}^2$.

— o — o —

Tutto questo per dire: trovate y_n e z_n lin. indip. ho finito!!

Come trovarle? Se la dipendenza fosse solo dal termine prec. sarebbe banale. $x_{n+1} = a x_n \rightsquigarrow x_n = a^n$

Provo a vedere se posso trovare soluz. esponenziali anche se c'è dipendenza da 2 termini precedenti, cioè vedo se

$$x_n = R^n$$

risolve $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$. Sostituendo ottengo:

$$R^{n+1} = a R^n + b R^{n-1} \quad \text{cioè} \quad R^2 = aR + b, \quad \text{cioè} \quad R^2 - aR - b = 0$$

Caso 1 Se $\Delta > 0$, l'eq. $x^2 - ax - b = 0$ ha 2 soluzioni, dunque ho 2 valori di R che producono le 2 sol. lin. indip.
La formula generale sarà quindi

$$\boxed{x_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n}$$

dove R_1 ed R_2 sono le 2 radici del polinomio, e α e β sono numeri reali scelti in modo da soddisfare le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha R_1 + \beta R_2 = x_1 \end{cases}$$

Questo ha sempre soluzione perché $R_1 \neq R_2$ (cioè la lineare indipendenza)

Oss. Può accadere che a, b, x_0, x_1 siano interi. In questo caso è ovvio che tutti i termini della succ. saranno interi.
Tuttavia R_1 ed R_2 possono essere irrazionali, così come α e β.
Quindi la formula generale può essere piena di irrazionali che però si semplificano per ogni $n \in \mathbb{N}$!!!

Esempio (Fibonacci) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$
Polinomio: $x^2 - x - 1 = 0$, quindi

$$R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ da cui } x_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Per calcolare α e β risolvo $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, $\beta = -\alpha$

$$\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \alpha\sqrt{5} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

conta poco o nulla per n grandi

da cui

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

Formula "esplicita" per numeri di Fibonacci

<u>Esercizio</u> Sia F_n la succ. di Fibonacci. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

Dalla formula esplicita viene $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = sezione aurea

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } \Delta < 0}$ In questo caso $R_1 \neq R_2$ sono numeri complessi (coniugati)

Ottengo una formula generale dello stesso tipo

$$x_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n$$

dove α, β, R_1, R_2 stanno in $\mathbb{C}$. Tuttavia se a, b, x_0, x_1 erano reali, il risultato è per forza reale $\forall n \in \mathbb{N}$.

In alternativa: $R_1 = R e^{i\theta}$ $\qquad R_2 = R e^{-i\theta}$

$= R(\cos\theta + i \sin\theta)$

Quindi se una base era

$$R_1^n = R^n e^{in\theta} = R^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$
$$R_2^n = \quad " \quad = R^n(\cos(n\theta) - i \sin(n\theta))$$

una base sarà pure

$$R^n \cos(n\theta) \qquad R^n \sin(n\theta) \qquad (\star)$$

da cui la formula generale

$$\boxed{x_n = \alpha R^n \cos(n\theta) + \beta R^n \sin(n\theta)}$$ solo numeri reali

in cui $Re^{\pm i\theta}$ sono le radici del polinomio, e α e β sistemano i dati iniziali.

<u>Oss.</u> Il fatto che le $(\star)$ siano soluzioni della ricorrenza si può verificare direttamente per induzione, senza nemmeno sapere cosa sono i numeri complessi !!!

$\boxed{\text{Caso } \Delta = 0}$ L'equazione ha 1 radice reale R di molt. 2. Quindi R^n è un primo elemento della base. Ne serve un'altra, che è nR^n: basta sostituire nella ricorrenza e verificare (fatelo!)

La formula generale è quindi

$$\boxed{x_n = \alpha R^n + \beta n R^n}$$

— o — o —

Oss. 1 Se la ricorrenza coinvolge k termini prec., ho k radici del polinomio ed è tutto analogo (una radice di molt. 3 produce R^n, $n R^n$, $n^2 R^n$)

Oss. 2 Se ho $x_{n+1} = 3x_n - 5x_{n-1} + n^2$
cerco una soluzione speciale (di solito funziona un polinomio dello stesso grado) e poi uso il solito trucco di porre $y_n = x_n -$ sol. speciale.
Non funziona un pol. dello stesso grado (e allora bisogna salire di grado) quando $x=1$ è radice del polinomio associato (fare un paio di esempi per verificare!)

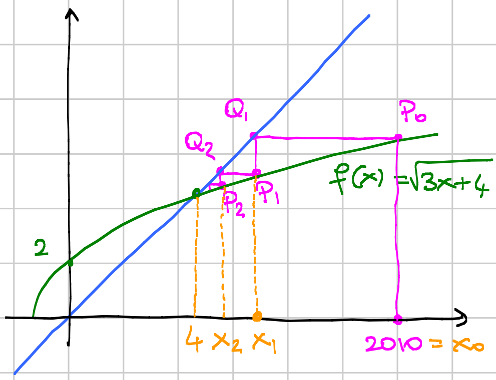
SSSUP 2010 - LEZIONE 09

Titolo nota 17/02/2010

Succ. per ricorrenza AUTONOME Metodi di monotonia.

Esempio $x_0 = 2010$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} = f(x_n)$

Interpretazione grafica: disegno $y = x$ e $y = \sqrt{3x+4}$ sullo stesso grafico



Oss. Nel disegnare i 2 grafici, devo risolvere

$f(x) = x$, $f(x) > x$, $f(x) < x$.

Considero i seguenti punti: parto da $x_0 = 2010$ e poi faccio

"VERTICALE ALLA FUNZIONE, ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE"

(ogni volta trovo uno ed un solo punto)

$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$

$Q_1 = (x_1, x_1)$ stessa $P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$

bisettrice

$Q_2 = (x_2, x_2)$ ....

In generale: $Q_n = (x_n, x_n)$, $P_n = (x_n, x_{n+1})$

Dal disegno, segue la congettura che

x_n è decrescente e $x_n \to$ intersezione $= 4$.

Bisogna avere un piano

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 4$

Piano standard con la monotonia

Ora occorre dimostrare in successione i vari punti del piano

Preliminarmente a tutto, ricordo che abbiamo già risolto

$x = \sqrt{3x+4} \iff x = 4$

$x \geq f(x) \iff x \geq 4$

Volendo abbiamo risolto anche $f(x) \geq 4 \iff x \geq 4$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione $n=0$ banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Devo risolvere $x_{n+1} \geq 4$, cioè $f(x_n) \geq 4$, vera se $x_n \geq 4$ e questo è vero per ipotesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo risolvere $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $f(x_n) \leq x_n$, ma sappiamo che questa è vera $\iff x_n \geq 4$ che è vera per il pto (i)

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Teo. succ. monotone (limitata infer. + deb. decr.)

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ $\boxed{\text{Sapendo già che } \ell \in \mathbb{R}}$ posso passare al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} \boxed{x_{n+1}} & = & \boxed{\sqrt{3x_n+4}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{3\ell+4} \end{array} \quad \leftarrow \text{continuità di } f(x)$$

Ottengo così un' eq. in ℓ che altro non è che $f(x) = x$. Questa ha come unica soluzione $\ell = 4$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. alternativa di (i)}}$ Osservo che $f(x)$ è monotona crescente in $[4, +\infty)$. Dim. che $x_n \geq 4$ per indus.

$n=0$ sempre banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Per ipotesi so che $x_n \geq 4$. APPLICO $f(x)$

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & \geq & f(4) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ x_{n+1} & \geq & 4 \end{array} \quad \text{(fondamentale } f \text{ deb. cresc.)}$$

e questa è la tesi del passaggio induttivo

$\boxed{\text{Dim. alternativa di (ii)}}$ Per induzione

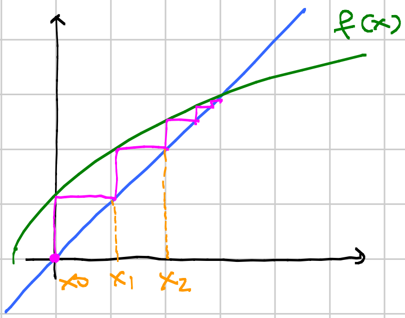
$\boxed{n=0}$ Devo dim. che $x_1 \leq x_0$: questo si fa a mano o sfruttando $f(x) \leq x$ per $x \geq 4$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Per ipotesi so che $x_{n+1} \leq x_n$. APPLICO $f(x)$

Ottengo $\underbrace{f(x_{n+1})}_{x_{n+2}} \leq \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}}$ che è la tesi del passo induttivo

— o — o —

Esempio 1 bis $\quad x_0 = 0 \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$



$\boxed{\text{PIANO}}$ serve (volendo si può mettere $-\frac{4}{3}$)

(i) $\boxed{0 \leq} x_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

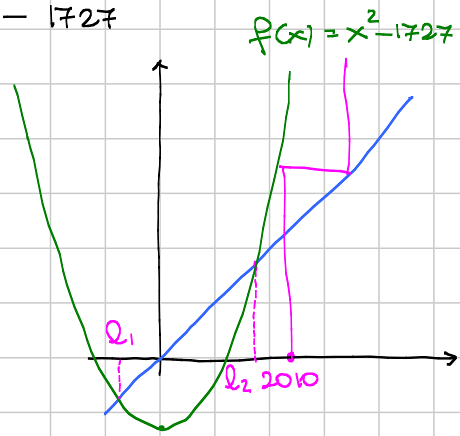
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 4$

Dim. come sopra (fare per esercizio)

— o — o —

Esempio 2 $\quad x_0 = 2010 \quad x_{n+1} = x_n^2 - 1727$



Idea: x_n cresce e $x_n \to +\infty$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $x_n \geq 2010 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim. (i)}}$ Induzione (o con disequazione, o applico $f(x)$ dopo aver osservato che è monotona crescente per $x \geq 0$)

$\boxed{\text{Dim. (ii)}}$ O uso disequazione $f(x) \geq x$
O induzione con "applico $f(x)$"

$\boxed{\text{Dim. (iii)}}$ Teo succ. monotone (qui uso la (ii), la (i) però l'ho usata nel dimostrare la (ii)).

Dim. (iv) So che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Suppongo per assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza e ottengo

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 - 1717 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 - 1717 \end{array}$$

Questa ha 2 soluzioni ℓ_1 ed ℓ_2, che sono entrambe < 2010. Quindi questi limiti non sono compatibili con p.to (i). L'unica possibilità è che sia $\ell = +\infty$.

— o — o —

Oss. Se una succ. per ric. autonoma $x_{n+1} = f(x_n)$ ha un limite reale ℓ, allora ℓ è una soluzione dell'eq

$$x = f(x)$$

(sottinteso: f è continua). Questo è il p.to (iv) del piano. Se queste soluzioni sono incompatibili per qualche motivo, allora restano aperte 3 possibilità

1: $x_n \to +\infty$

2: $x_n \to -\infty$

3: x_n non ha limite.

— o — o —

Esercizio / teorema Supponiamo di avere $x_{n+1} = f(x_n)$. Supponiamo che
- $f(x)$ è debolm. crescente in $\mathbb{R}$
- $f(x_0) < x_0$.

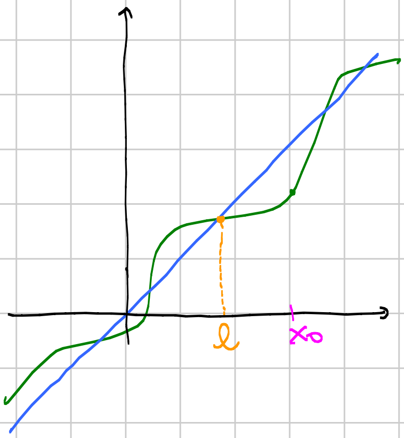
Allora ci sono solo 2 possibilità

(i) $x_n \to -\infty$

(ii) $x_n \to \ell$, dove $\ell = \max\{x \leq x_0 : f(x) = x\}$

= prima soluzione di $f(x) = x$ a sx di x_0.

La (i) si realizza $\Leftrightarrow$ l'equazione $f(x) = x$ non ha soluzioni $\leq x_0$.



<u>Dim</u> Caso 1: esistono soluzioni di $f(x)=x$ con $x<x_0$.

Sia ℓ la maggiore tra queste soluzioni. Abbiamo allora

(i) $x_n \geq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induz. + applico f)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (" ")

(iii) $x_n \to$ limite reale (teo. succ. monot.)

(iv) limite $= \ell$

Dim. (iv): ... passo al limite e ottengo $f(\ell)=\ell$, quindi ℓ risolve $f(x)=x$.

Le soluzioni $<\ell$ le escludo per il punto (i)

" " $\geq x_0$ le escludo per il punto (ii) oppure modificando il p.to (i) in $\ell \leq x_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ non esistono soluzioni di $f(x)=x$ con $x \leq x_0$

(i) $x_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sostanzialmente inutile)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(iv) $\ell = -\infty$ (se per assurdo $\ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell = f(\ell)$, ma questa non ha soluzioni $\leq x_0$ ...)

SSSUP 2010 — LEZIONE 10

Titolo nota 17/02/2010

<u>Esempio</u> $x_0 = 2010, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n+4}$.

Abbiamo visto che $x_n \to 4$ (unica sol. di $x = f(x)$; volendo si può usare una piccola modifica del teo. generale)

Domanda: quanto velocemente $x_n \to 4$?

Questo equivale a stimare $x_n - 4$.

Per capirlo, pongo $d_n := |x_n - 4|$ (distanza dal limite)

Cosa posso dire di d_n?

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| \overset{\substack{\text{serve ricorr. + } f(4)=4 \\ \downarrow}}{=} |f(x_n) - f(4)|$$

Uso Lagrange: $f(a) - f(b) = (a-b) \cdot f'(\xi)$ con ξ tra a e b.

Quindi:

$$d_{n+1} = |f(x_n) - f(4)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - 4| = \underbrace{|f'(\xi)|}\cdot d_n$$

se so stimare $f'(\xi)$ ho una stima di d_{n+1} in funz. di d_n.

Nel nostro esempio

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$. Di ξ so solo che $\xi \geq 4$, ma questo mi basta per dire che

$$|f'(\xi)| \leq \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 4 + 4}} = \frac{3}{8}$$

per avere frazione grande, metto denom. + piccolo possibile

Abbiamo così dimostrato che $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n$, da cui per induzione $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$. Quindi $d_n \to 0$ esponenzialmente (almeno).

Lezione 10 – Successioni per ricorrenza: distanza dal presunto limite

Per sapere che $d_n \to 0$ esattamente esponenzialmente, posso calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d_n}$. Per calcolare questo limite uso il criterio rapporto $\to$ radice, cioè calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-4|}{|x_n-4|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|f(x_n)-f(4)|}{|x_n-4|}$$

(Lagrange) $= \lim_{n\to+\infty} |f'(\xi_n)| = f'(4)$ come si vedeva anche da qui

$= \frac{3}{8}$, cioè f' nel punto di incontro.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Questo metodo suggerisce un altro piano per lo studio di una successione.

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$

(i) $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Pongo $d_n = |x_n - 4|$ e dimostro che $d_{n+1} \leq \boxed{\frac{3}{8}}\, d_n$ minore di 1

(iii) $d_n \to 0$, quindi $x_n \to 4$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Stesse di sempre

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Lagrange. Nota bene: il punto (i) serve a delimitare la zona in cui sta ξ, cioè la zona su cui stimare $|f'(x)|$.

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ È banale che $d_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre dal p.to (ii) ottengo per induzione che $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$, quindi

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n$$ e concludo con i carabinieri

Oss. È fondamentale che nel punto (ii) si ritrovi un coefficiente minore stretto di 1, altrimenti (iii) non funziona

—o—o—

<u>Teorema</u> Sia $f(x)$ una funzione derivabile (C^1). Supponiamo che esista un p.to $m \in \mathbb{R}$ t.c.

(i) $m = f(m)$

(ii) $|f'(m)| < 1$

Allora, se x_0 è abbastanza vicino ad m, la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ tende ad m.

<u>Dim.</u> Poichè $|f'(m)| < 1$ per continuità di $f'(x)$ esiste un intervallino $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ed esiste una costante $\delta < 1$ tali che $m \in (a,b)$ e

$$|f'(x)| \leq \delta < 1 \quad \forall x \in (a,b)$$

(Se $|f'(x)| < 1$ in $x = m$, allora è vero in un intorno di m). Se parto con $x_0 \in [a,b]$ applico il piano con la distanza

(i) $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \delta \, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \to 0$, quindi $x_n \to m$ (banale quando $\delta < 1$)

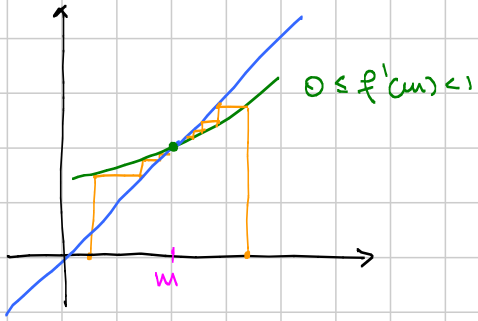
$\boxed{\text{Dim (ii)}}$: solito Lagrange

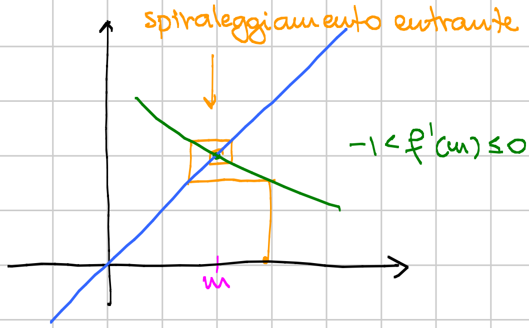
$$d_{n+1} = |x_{n+1} - m| = |f(x_n) - f(m)|$$
$$= \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq \delta \text{ perchè } \xi \in [a,b]} \cdot |x_n - m| \leq \delta \cdot d_n$$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Se ho scelto $[a,b]$ simmetrico rispetto ad m, cioè del tipo $[m-a, m+a]$, allora il p.to (i) si dimostra per induzione con lo stesso ragionamento del 2. Basta osservare che la distanza da m diminuisce ad ogni passo.

—o —o —

Non è detto che $x_n \to m$ in maniera monotona. Se lo fa o meno dipende dal segno della derivata:





Cosa succede se $f'(m) > 1$ oppure $f'(m) < -1$??
Se parto con x_0 abbastanza vicino ad m, tendo ad allontanarmi. Perché ?

Mettiamo che $|f'(m)| > 1$. Allora esiste un intorno $[m-a, m+a]$ tale che

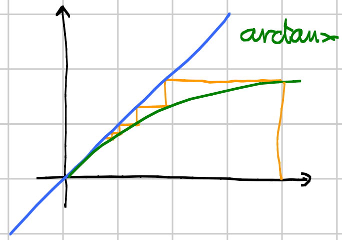
$$|f'(x)| \ge \delta > 1 \qquad \forall x \in [m-a, m+a]$$

Pongo il solito $d_n = |x_n - m|$ e ho che

$$d_{n+1} = |f(x_n) - f(m)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - m| \ge \delta \cdot d_n$$

Quindi, finché gli x_n stanno nell'intervallino, abbiamo che d_n cresce di un fattore $\delta > 1$ ad ogni passaggio, quindi $d_n \ge \delta^n \cdot d_0$ e quindi prima o poi esce dall'intornino.

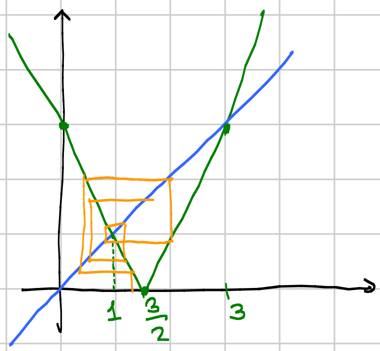
— o — o —



Esercizio 1 $\quad x_0 = 2010, \quad x_{n+1} = \arctan x_n$

È facile che $x_n \to 0$ monotona.

Stimare come tende a zero (Problema: $f'(0) = 1$)



Esercizio 2 $\quad x_0 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 3|$

Si può dim. che non ha limite.

Idee

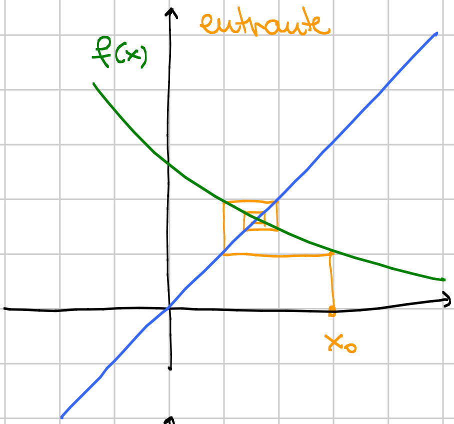
1. $0 \le x_n \le 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. se fosse $\ell \in \mathbb{R}$ sarebbe $\ell = 1$ o $\ell = 3$
3. Se prova ad avvicinarsi a 1 o 3 viene respinta
4. non può essere $x_n \in \{1, 3\}$

SSSUP 2010 — LEZIONE 11

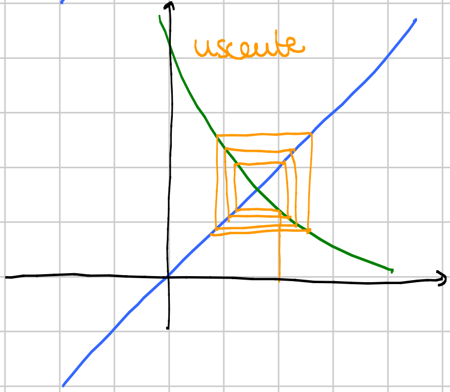
Titolo nota 01/03/2010

Successioni per ricorrenza spiraleggianti

$x_{n+1} = f(x_n)$



Spiraleggiamento $\Leftrightarrow$ decrescenza di $f(x)$ vicino all'intersezione

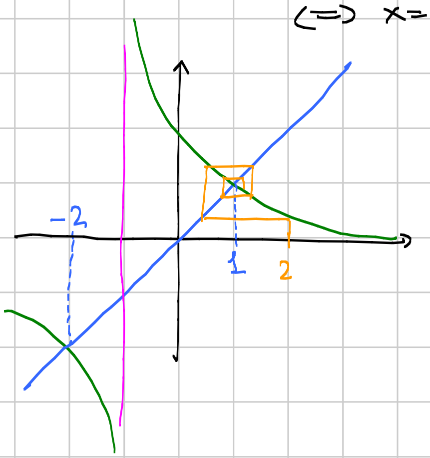


Esempio 1 $\quad x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n+1} \qquad x_0 = 2$

$f(x) = \dfrac{2}{x+1} \qquad f(x) = x \iff \dfrac{2}{x+1} = x$

$\iff 2 = x^2 + x$

$\iff x = 1\,, \; x = -2$



$\boxed{\text{Metodo 1}}$ Due sottosuccessioni

Idea: $x_{2n} \searrow 1\,, \quad x_{2n+1} \nearrow 1$

Piano

(i) $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (x_1 \leq x_n \leq x_0)$

(ii) $x_{2n+2} \leq x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\quad x_{2n+3} \geq x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$\quad x_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = m = 1$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Si può fare in almeno 2 modi, sostanzialmente x induzione.

$n = 0 \ldots$ $\quad \boxed{n \Rightarrow n+1}$ L'ipotesi è $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 2$. Applico $f(x)$ invertendo i versi: $\quad f(\frac{2}{3}) \geq \underset{\underset{x_{n+1}}{\shortparallel}}{f(x_n)} \geq f(2)$ da cui la tesi

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Semplice per induzione. $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{5}$

Allora: $1 \leq x_2 \leq x_0$ verificato a mano. Applico $f(x)$

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & \geq & f(x_2) & \geq & f(x_0) \\ \parallel & & & & \\ 1 & \geq & x_3 & \geq & x_1 \end{array} \qquad \text{Applico } f(x)$$

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & \leq & f(x_3) & \leq & f(x_1) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \leq & x_4 & \leq & x_2 \end{array}$$

Andando avanti ottengo tutte le disug. che servono.

Più formalmente dovrei dimostrare per induzione l'enunciato

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n} \\ x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \leq 1 \end{array}}$$

Al passaggio induttivo assumo la coppia per un certo n, e dimostro la coppia per $n+1$ applicando 2 volte $f(x)$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Soliti teoremi successioni monotone

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ Bisogna distinguere pari e dispari. So già che $m, \ell \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+1} & = & \dfrac{2}{x_{2n}+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \dfrac{2}{\ell+1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x_{2n+2} & = & \dfrac{2}{x_{2n+1}+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \dfrac{2}{m+1} \end{array}$$

Invece di una eq. in ℓ, ho un sistema in ℓ, m. Risolvendolo:

$$\begin{cases} m\ell + m = 2 \\ m\ell + \ell = 2 \end{cases} \Rightarrow m = \ell \Rightarrow \ell^2 + \ell = 2 \Rightarrow \ell \begin{array}{l} \nearrow -2 \leftarrow \text{NO} \\ \searrow 1 \leftarrow \text{SI} \end{array}$$

— o — o —

<u>Osservazione</u> Studiare le x_{2n} e x_{2n+1} è equivalente a studiare l'iterazione doppia. Se pongo $y_n = x_{2n}$, $z_n = x_{2n+1}$, allora

$$y_{n+1} = f(f(y_n)) \qquad y_0 = x_0$$
$$z_{n+1} = f(f(z_n)) \qquad z_0 = x_1$$

Ora $f(f(x))$ è monotona crescente vicino ad $x=1$ (composizione di 2 monotone decrescenti). Quindi y_n e z_n le posso studiare con i metodi delle volte precedenti.

— o — o —

Oss. teorica Sapendo che $x_{2n} \to 1$ e $x_{2n+1} \to 1$, si può dedurre che $x_n \to 1$

Lemma delle sottosuccessioni: prese K sottosucc. di x_n tali che
- la loro unione prende tutti gli x_n tranne un numero finito;
- tutte le k sottosucc. hanno lo stesso limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora $x_n \to \ell$.

Domanda: e se le sottosucc. sono infinite?

Metodo 2 Studio di una succ. spiraleggiante con la distanza dal presunto limite.

Pongo $d_n := |x_n - 1|$

PIANO
(i) $\frac{2}{3} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $d_{n+1} \leq \quad d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

voglio un numero minore di 1.

(iii) $d_n \leq$ numero^n d_0
(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to 1$

Il punto essenziale è il (ii)

Dim (ii)

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{x_{n+1}} - 1 \right| = \frac{|2 - x_n - 1|}{|x_n + 1|} =$$

$$= \frac{|1 - x_n|}{|x_n + 1|} = \frac{d_n}{|x_n + 1|} \leq \frac{d_n}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{3}{5} d_n$$

uso p.to (i) per mettere denom. + piccolo possibile

Il numero richiesto nel piano è $\frac{3}{5}$: va bene perché < 1.

Più in generale: $d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$ (Lagrange)
$= |f'(\xi)| \cdot |x_n - \ell| = |f'(\xi)| \cdot d_n$

Quindi numero $= \max\{ |f'(x)| : x \in$ zona ristretta al p.to (i)$\}$

Nell'esempio: numero $= \max \left\{ \frac{2}{(x+1)^2} : \frac{2}{3} \le x \le 2 \right\} = \frac{18}{25}$, che è diverso da quello ottenuto prima, ma comunque < 1.

— o — o —

Oss. Se $f(\ell) = \ell$ e $|f'(\ell)| < 1$, allora pur di partire abbastanza vicino ad ℓ, la succ. tende ad ℓ.

Se invece $|f'(\ell)| > 1$, allora se parto con $x_0 \neq \ell$, ma abbastanza vicino ad ℓ, avrò che $d_{n+1} \ge c\, d_n$ con $c > 1$ finché rimango abbastanza vicino. Quanto vicino?

In un intervallo $[a,b]$ con $\ell \in (a,b)$ e

$$\underbrace{\min \{ |f'(x)| : x \in [a,b] \}}_{c} > 1.$$

— o — o —

Esempio 2 $\quad x_{n+1} = e^{-x_n} \qquad x_0 = 2010$

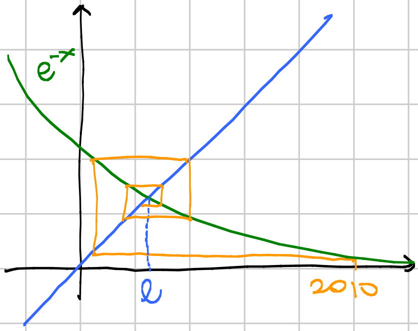
Proviamo con la distanza $d_n = |x_n - \ell|$

(i) $0 \le x_n \le 2010$

(ii) $d_{n+1} \le c\, d_n$ (serve $c < 1$)

(iii) $d_n \le c^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$, cioè $x_n \to \ell$



$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad d_{n+1} = |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$

$= |f'(\xi)| \cdot |x_n - \ell| = |f'(\xi)| \cdot d_n \le c\, d_n$

dove $\quad c = \max \{ |f'(x)| : 0 \le x \le 2010 \}$

$= \max \{ e^{-x} : 0 \le x \le 2010 \} = 1$ GROSSO GUAIO

Devo restringere il p.to (i) dimostrando che

(i-bis) $x_1 \le x_n \le 2010 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Fatto questo nel p.to (ii) possiamo usare

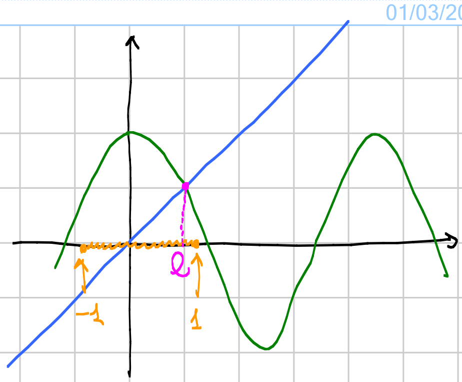
$c = \max \{ e^{-x} : x_1 \le x \le 2010 \} = e^{-x_1} < 1$ perché $x_1 > 0$.

Oss. Iterare $x_{n+1} = e^{-x_n}$ è un modo per approssimare a piacere il valore di ℓ (la distanza stima l'errore che si commette)

SSSUP 2010 – LEZIONE 12

Titolo nota 01/03/2010

<u>Esempio 1</u> $x_{n+1} = \cos x_n \qquad x_0 = 2010$



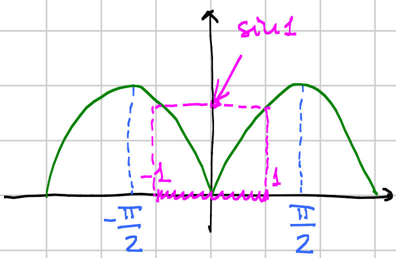
Prima cosa: l'eq. $x = \cos x$ ha un'unica soluzione $\ell \in \mathbb{R}$.
Basta dimostrare che $f(x) = x - \cos x$ è strettamente monotona (e tende a $\pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$).
$f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ e $f'(x) = 0$ "sporadicamente", cioè $f'(x)$ non si annulla in un intero intervallo.

<u>Oss.</u> $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ strett. cresc.
$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ debolm. cresc. Se $f(x)$ non fosse strett. cresc., allora ci sarebbe un tratto piatto, dunque un intervallo con $f'(x) = 0$.

Provo a studiare x_n con la distanza di ℓ: ...
... $d_{n+1} = \ldots = |f'(\xi)| \cdot d_n = |\sin \xi| \cdot d_n \leq d_n$
$c = 1$ GUAIO !!

Invece di $c = 1$ vorrei una costante $c < 1$. È possibile perché
(i) $-1 \leq x_n \leq 1$ $\boxed{\forall n \geq 1}$ (banalità)
Ora nel p.to (ii) abbiamo

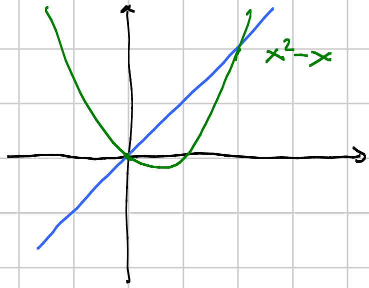
$$d_{n+1} = |\sin \xi| \cdot d_n \leq c\, d_n, \text{ dove}$$



$$c = \max\{|\sin x| : x \in [-1, 1]\}$$
$$= \sin 1 < 1.$$

Questo basta per concludere che $x_n \to \ell$ e anzi

$$d_n \leq (\sin 1)^n \cdot d_0 \quad \to \text{stima dell'errore.}$$

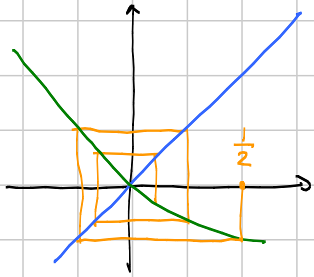


<u>Esempio 2</u> $x_{n+1} = -x_n + x_n^2$

$x_0 = \frac{1}{2}$

Guardo $f'(0)$: $f'(x) = -1+2x$

$f'(0) = -1$ GUAIO



Il piano con la distanza NON può funzionare, perché

$\max\{|f'(x)| : x \in \text{intorno di } 0\} \geq |f'(0)| = 1.$

Resta il piano con le 2 sottosuccessioni

$x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = +\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, quindi

$0 \leq x_2 \leq x_0$ Applico f e ottengo

$0 \geq x_3 \geq x_1$ " "

$0 \leq x_4 \leq x_2$ e così via

Il piano con le 2 successioni funziona permettendo di dim. che $x_n \to 0$. Occhio: serve poter applicare $f(x)$ invertendo i versi, cosa che è possibile solo nella zona in cui $f(x)$ è decrescente, cioè per $x \leq \frac{1}{2}$ (vertice). Questa va dimostrata prima di tutto.

Se invece di partire da $x = \frac{1}{2}$ si parte da $x = \frac{3}{4}$, si ricade nel caso precedente dopo un passaggio.

—o—o—

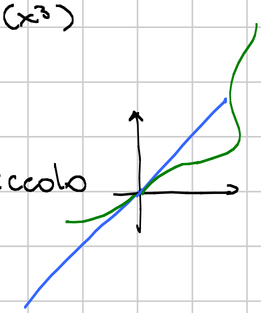
Se fosse stato $x_{n+1} = -\arctan x_n$. Ancora una volta $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1 \Rightarrow$ niente distanza.

Tutto dipende da come è messo x_2 rispetto ad x_0 (da lì in poi "applico $f(x)$" ed il comportamento si ripete). Quindi tutto dipende da come è messa $f(f(x))$ rispetto ad x.

Suppouiamo $f(x) = -x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. Allora

$$f(f(x)) = -f(x) + a f^2(x) + b f^3(x) + o(f^3(x))$$
$$= x - \cancel{ax^2} - bx^3 + a[\cancel{x^2} - 2ax^3] - bx^3 + o(x^3)$$
$$= x - (2b + 2a^2)x^3 + o(x^3)$$

Quindi tutto dipende da $b + a^2$



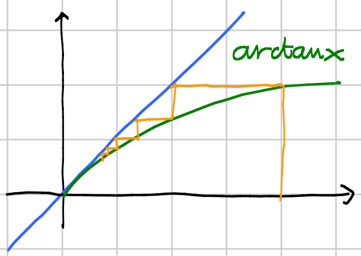
- Se $b + a^2 > 0$, allora $f(f(x)) < x$ per $x > 0$ piccolo e viceversa sui negativi. Quindi partendo vicini a zero ci sarà spiraleggiamento entrante
- Se $b + a^2 < 0$, allora tutto è al contrario.
- Se $b + a^2 = 0$, allora boh nel senso che entrano in gioco i termini successivi.

Quindi: quando f' è "border line" entrano in gioco f'' e f'''.

—o—o—

Torniamo a $x_{n+1} = \arctan x_n$ $\quad x_0 = 2010$ (o qualunque > 0)

$x_n \to 0$ (facile).



Come stimare l'errore?

Si può ad esempio dimostrare per induzione che $x_n \geq \frac{1}{n}$ (stima dal basso)

(provare per esercizio)

Forse si può anche dimostrare che $x_n \leq \frac{2010}{\sqrt[4]{n}}$ posso sperare solo in potenze con esponenti ≤ 1.

Come capire brutalmente l'andamento?

Ragionamento EURISTICO. Mettiamo che sia una potenza di n

$x_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$. Sostituisco nella ricorrenza

$$\frac{c}{(n+1)^\alpha} \sim \arctan \frac{c}{n^\alpha} \sim \frac{c}{n^\alpha} - \frac{1}{3}\frac{c^3}{n^{3\alpha}} + \dots$$

Taylor: $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

quindi $\dfrac{\cancel{c}}{(n+1)^\alpha} \sim \dfrac{\cancel{c}}{n^\alpha} - \dfrac{1}{3}\dfrac{c^{3\,2}}{n^{3\alpha}}$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = (n+1)^{-\alpha} = \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-\alpha}$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

$(1+x)^\beta \sim 1+\beta x$ Taylor perché $x \to 0$

Brutalmente: $\text{LHS} = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + \boxed{\dots}$

potenze di ordine sup.

$\text{RHS} = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{3}\dfrac{c^2}{n^{3\alpha}} + \dots$

Uguagliando i secondi termini otteniamo
$\alpha+1 = 3\alpha$, da cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\frac{c^2}{3} = \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Quindi brutalmente $\quad x_n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Come rendere rigoroso tutto ciò? Dimostrando che

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, oppure $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\, x_n^2 = \frac{3}{2}$, oppure

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\, x_n^2} = \frac{2}{3}$, oppure $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \frac{2}{3}$

Teorema di .... (Moralmente: Hôpital per successioni)

Devo fare il limite di $\frac{a_n}{b_n}$. Supponiamo che
$a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, b_n strett. cresc.
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$
se quest'ultimo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$

—o—o—

Esercizi: 1 – Dimostrare il teorema
2 – Applicarlo nell'esempio $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}$

SSSUP 2010 — LEZIONE 13

Titolo nota 11/03/2010

Hôpital per successioni (∞/∞).

Supponiamo $a_n \to +\infty$

$b_n \to +\infty$ $\boxed{b_n \text{ strett. crescente}}$

Allora $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$ se quest'ultimo esiste in $\overline{\mathbb{R}}$

In generale succederà che

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \text{ --.}$$

Dim. Dimostro la disug. + a dx. Intanto posso supporre che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L \in \mathbb{R}$$ (se $L=+\infty$ è banale, se $L=-\infty$ la dim. è analoga).

Fisso $\varepsilon>0$.

Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n \ge n_0$ si abbia

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le L+\varepsilon, \text{ da cui } \quad a_{n+1}-a_n \le (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

Ho usato la stretta crescenza di b_n.

$\forall\, n \ge n_0$.

Allora

$$a_{n+1} = a_{n+1} - a_{n_0} + a_{n_0} = a_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n} (a_{i+1}-a_i)$$

$$\le a_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n} (L+\varepsilon)(b_{i+1}-b_i)$$

$$= a_{n_0} + (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n_0})$$

Ma allora

$$\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \leq \frac{a_{m_0} + (L+\varepsilon)(b_{m+1} - b_{m_0})}{b_{m+1} - b_{m_0} + b_{m_0}} =$$

$$= \frac{\cancel{b_{m+1} - b_{m_0}}}{\cancel{b_{m+1} - b_{m_0}}} \; \frac{\overbrace{\boxed{\frac{a_{m_0}}{b_{m+1} - b_{m_0}}}}^{\to 0} + (L+\varepsilon)}{1 + \underbrace{\boxed{\frac{b_{m_0}}{b_{m+1} - b_{m_0}}}}_{\to 0}}$$

Ho usato che $b_m \to +\infty$

Passando al limsup, abbiamo che

$$\limsup_{m \to +\infty} \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \leq \limsup_{m \to +\infty} \frac{\cdots}{\cdots} = L + \varepsilon$$

Poichè la relazione vale $\forall \varepsilon > 0$, varrà anche con $\varepsilon = 0$.

— o — o —

<u>Oss.</u> In realtà non si è usato che $a_n \to +\infty$, ma solo che $b_n \to +\infty$ e b_n stretto. cresc.

— o — o —

<u>Hôpital per successioni 0/0</u>

Supponiamo $a_n \to 0$

$b_n \to 0$ e b_n stretto. decr. (in part. $b_n \to 0^+$)

Allora si ha la stessa tesi del caso precedente.

<u>Dim.</u> Supponiamo $L = \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \in \mathbb{R}$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n \geq n_0$ si ha che

$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq L + \varepsilon$, da cui $a_n - a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$

$$a_n = a_n \underbrace{- a_{n+1} + a_{n+1}}_{} \underbrace{- a_{n+2} + a_{n+2}}_{} - \ldots + a_k$$

$$= \sum_{i=n}^{k-1} (a_i - a_{i+1}) + a_k$$

$$\leq (L+\varepsilon) \sum_{i=n}^{k-1} (b_i - b_{i+1}) + a_k$$

$$= (L+\varepsilon)(b_n - b_k) + a_k \qquad (\text{questo se } k \geq n \geq n_0)$$

Ma allora

$$\frac{a_n}{b_n} \le \frac{(L+\varepsilon)(b_n-b_k)+a_k}{b_n-b_k+b_k} = \frac{\cancel{(b_n-b_k)}}{\cancel{(b_n-b_k)}}\;\frac{L+\varepsilon+\boxed{\dfrac{a_k}{b_n-b_k}}}{1+\boxed{\dfrac{b_k}{b_n-b_k}}}$$

$$\frac{a_k}{b_n-b_k} \to \frac{0}{b_n}=0 \qquad \frac{b_k}{b_n-b_k} \to \frac{0}{b_n}=0$$

Questa disuguaglianza vale $\forall n$ e $\forall k$ con $k \ge n \ge n_0$.
Ora tengo fisso n e faccio il limite per $k \to +\infty$. Ottengo

$\frac{a_n}{b_n} \le L+\varepsilon$ la quale è vera $\forall n \ge n_0$

Non resta ora che fare il $\limsup_{n\to+\infty}$ e poi mandare $\varepsilon \to 0$.

— o — o —

Oss. Abbiamo usato tutte le ipotesi ($a_n \to 0$, $b_n \to 0$, $b_n \searrow$)

— o — o —

Esercizio: rifare le 2 dimostrazioni in versione liminf.

— o — o —

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1 $\quad x_1 = 2010, \quad x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n+2}$

Idea: $x_n \to 1$ decrescendo.
(Esercizio: provare a vedere cosa succede impostando la monotonia)

PIANO (i) $1 \le x_n \le 3000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \to 1$

Dim (i) Banale induzione (occhio che $x_2 = 2012$)

Dim (ii) Banale teo. carabinieri. Infatti dal p.to (i) si ha

$$\underset{\downarrow\\1}{\boxed{1}} \le \underset{\downarrow\\1}{\boxed{x_{n+1}}} \le \underset{\downarrow\\1}{\boxed{\sqrt[n]{3002}}}$$

Oss.: se $x_{n+1} \to 1$, allora anche $x_n \to 1$.

<u>Esempio 2</u> $x_1 = 2010$ $\qquad x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4 + \sin x_n}{\sqrt{n} + \arctan(n x_n)}$

Idea: è quasi come fosse $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4}{\sqrt{n}}$

PIANO: (i) $0 \le x_n \le 3000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $x_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \ge 0$ è banale induzione

$x_n \le 3000$ si fa pure per induzione

$n = 1$ banale $\boxed{n \Rightarrow n+1}$

$$x_{n+1} = \frac{\cdots}{\cdots} \le \frac{3000 + 4 + 1}{\sqrt{n}} \overset{?}{\le} 3000$$

vero appena $n \ge 2$

Questo ci dice che il caso $n=2$ va controllato come passo base (all'inizio)!

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Carabinieri: dal p.to (i) si sa che

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \le x_{n+1} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{3005}{\sqrt{n}}}}$$

<u>Esempio 3</u> $x_1 = 2010$ $\qquad x_{n+1} = \dfrac{x_n + n}{3x_n + 5n}$

Euristica: supponiamo $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Allora passando la ricorrenza al limite

$$\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{x_{n+1}}} = \underset{\frac{1}{5}}{\underset{\downarrow}{\frac{x_n + n}{3x_n + 5n}}}$$

L'unico limite reale possibile è $\ell = \frac{1}{5}$. Sono possibili anche $+\infty$, $-\infty$, N.E.

PIANO: (i) $0 \leq x_n \leq 10.000$

(ii) $x_n \to \frac{1}{5}$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ banale induzione

$x_n \leq 10.000$ ... provo passaggio induttivo...

$$x_{n+1} = \frac{x_n + n}{3x_n + 5n} \leq \frac{10.000 + n}{5n}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2000}{n}$$

$$\leq \frac{1}{5} + 2000$$

$$\leq 10.000$$

[Da non dire nè pensare: questo $\to \frac{1}{5}$, quindi defin. è ≤ 10.000]

"DEFINITIVAMENTE" E "INDUZIONE" NON VANNO D'ACCORDO.

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Carabinieri. Come sopra dal p.to (i) deduco

$$\boxed{\frac{n}{30.000 + 5n}} \leq x_{n+1} \leq \boxed{\frac{1}{5} + \frac{2000}{n}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5}$$

SSSUP 2010 – LEZIONE 14

Titolo nota 11/03/2010

Esempio 1 $x_1 = 1$ $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n}$

Idea: $x_n \to 0$.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ (induzione banale)

(ii) $x_n \to 0$ (carabinieri)

Esempio 2 $x_1 = 2$ $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$ ← non riesce.

(ii) $x_n \to 0$ (carabinieri)

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $x_n \geq 0$ banale. $x_n \leq 10.000$ ... passaggio induttivo...

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{10^8}{n} \leq 10.000$$

↑ spero: tende a 0, quindi definitiv. è vera !!!

$\boxed{\text{PIANO BIS}}$ (i) ...

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (banale dal (ii))

(iv) $\ell = +\infty$ (se fosse $\ell \in \mathbb{R}$, passo al limite la ricorrenza e ottengo $\ell = 0$, che spero non compatibile con (i))

$\boxed{\text{Provo a dim (ii)}}$ Devo dim. $\dfrac{x_n^2}{n} \geq x_n$, cioè semplificando

(perché posso ?) $\dfrac{x_n}{n} \geq 1$, cioè $x_n \geq n$, ma se già sapessi questo non avrei bisogno di altro!

Uno vorrebbe $x_n \geq n$ al p.to (i), ma questo per induzione non viene !!!

$\boxed{\text{PIANO TER}}$ (i) $x_n \geq 2^n \quad \forall n \geq 1$

(ii) $x_n \to +\infty$ (Banale da (i))

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione... passaggio induttivo...

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n} \underset{\text{spero}}{\geq} 2^{n+1}$$

La speranza è $2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}$, cioè $2^{n-1} \geq n$, ma questo è una facile induzione a sua volta.

— o — o —

Oss. Non si riusciva a dim. che $x_n \geq n$, si riesce invece a dim. che $x_n \geq 2^n$.

Esercizio: provare cosa sarebbe successo con $x_n \geq n^2$

— o — o —

Oss. generale $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \qquad x_1 = \alpha > 0$

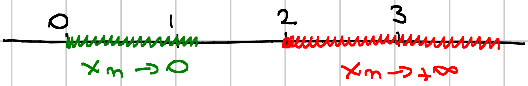
C'è uno spartiacque, cioè un valore $\alpha_0 > 0$ t.c.

- se $\alpha > \alpha_0$, allora $x_n \to +\infty$
- se $\alpha < \alpha_0$, allora $x_n \to 0$
- se $\alpha = \alpha_0$, di solito son dolori!

I p.ti fondamentali della dim. sono i seguenti

$\boxed{1}$ Se per un certo α si ha che $x_n \to +\infty$, allora la stessa cosa succede per tutti gli α successivi (idea: chiamo x_n la succ. con il primo α, y_n la succ. con l'α + grande, e dim. per induzione che $x_n \leq y_n \ \forall n \geq 1$)

$\boxed{2}$ Se per un certo α si ha $x_n \to 0$, allora idem per i precedenti



$\boxed{3}$ Pongo $\beta_0 = \sup$ zona verde

$\gamma_0 = \inf$ zona rossa

Speranza: $\beta_0 = \gamma_0$ e riuscire a stabilire cosa succede per quel valore.

Provare per esercizio !!!

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $\quad x_1 = \alpha > 0 \quad x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$

Euristica: quali sono i possibili limiti ? ... $\ell = \ell^2$ cioè $\ell = 0, 1$ (ovviamente anche $+\infty$ e N.E.)

$\boxed{\text{Domanda 1}}$ $\exists\, \alpha$ t.c. $x_n \to +\infty$? SI: basta prendere $\alpha = 2$

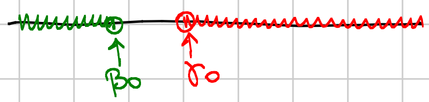
Basta dim. per induzione che $x_n \geq 2^n$ in questo caso (N.B. $x_{n+1} \geq x_n^2$)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se per un certo α si ha che $x_n \to +\infty$, allora idem per i successivi

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $\exists\, \alpha > 0$ t.c. $x_n \to 0$. Partiamo con $\alpha = \frac{1}{10}$.

Non dovrebbe essere difficile dimostrare che $x_n \leq \frac{1}{2n}$ $\forall\, n \geq 1$, da cui $x_n \to 0$.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Se per un certo α si ha che $x_n \to 0$, allora idem per i precedenti



Idea: $\beta_0 = \gamma_0$ e per quel valore $x_n \to 1$

Prendiamo γ_0. Cosa può fare x_n partendo da γ_0?
Non può tendere a $+\infty$, e anzi non può nemmeno superare 1.
Infatti: appena la successione supera 1, è obbligata a tendere a $+\infty$ (infatti $x_{n+1} \geq x_n^2$)

Oss. fondamentale: se per un certo valore di α e di $n_0 \in \mathbb{N}$ si ha che $x_{n_0} > 1$, allora anche per α vicini si avrà che $x_{n_0} > 1$. Infatti x_{n_0} è una funzione continua di α.
Quindi se per γ_0 supera 1, allora lo supera anche per valori $\alpha < \gamma_0$, dunque γ_0 non è l'inf.

Analogo: cosa può fare x_n partendo da β_0?
Non può tendere a $+\infty$.

— o — o —

Come escludere che x_n vada a 0 partendo da γ_0 o β_0?

Se $x_n \to 0$, allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$

Se $x_{n+1} < x_n \leq 1$ per un certo n, allora x_n è monotona decrescente da quel p.to in poi
(banale induzione: $x_{n+1} < x_n \leq 1 \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1} \leq 1$)

Se è definitivamente monotona, allora ha limite, ed il limite a quel p.to è 0 (non può tendere a 1 dall'alto!!)

Ora se $x_{n_0+1} < x_{n_0}$ per un certo α, allora si ha la stessa relazione per tutti gli α vicini, dunque se per un certo α si ha $x_n \to 0$, allora per tutti gli α vicini si ha che $x_n \to 0$.

— o —

Cosa può fare x_n per $\beta_0 \leq \alpha \leq \gamma_0$? Non può superare 1, non può decrescere (nemmeno per un solo valore di n). Non le resta che essere debolmente crescente, dunque avere limite che non può essere 0 o $+\infty$, dunque per forza 1.

Resterebbe solo da dimostrare che $\beta_0 = \gamma_0$, ma per questo basta osservare che nei casi in cui è monotona crescente si ha sempre che due succ. con partenza diversa tendono ad allontanarsi.

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_0 & x_{n+1} = \dots \\ y_1 = \gamma_0 & y_{n+1} = \dots \end{array} \implies y_n - x_n \geq \gamma_0 - \beta_0$$

— o — o —

<u>Esercizi</u> ① È unica la soglia per $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{n}$?

② cosa succede con partenza sulla soglia?

③ $x_{n+1} = \dfrac{n x_n}{1 + x_n^2}$ $\quad x_1 = \alpha > 0$

come si comporta ?

SSSUP 2010 – LEZIONE 15

Titolo nota 15/03/2010

Valori soglia per successioni per ricorrenza

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$ $\quad x_1 = \alpha > 0$ $\quad$ (stessa cosa per $x_{n+1} = n x_n^2$)

Notazione: indichiamo con $x_n(\alpha)$ l'n-esimo termine ottenuto partendo da α

↑ dato iniziale.

Proprietà di $x_n(\alpha)$ come funzione di α:

① $x_n(\alpha)$ è una funzione continua di α.

Si dimostra banalmente per induzione

$x_1(\alpha) = \alpha$ più continua di così... $x_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1}$, $x_3(\alpha) = \frac{\alpha^4}{2}$, ...

$x_{n+1}(\alpha) = \frac{x_n^2(\alpha)}{n}$ ← funzione continua

② $x_n(\alpha)$ è una funzione strettamente crescente di α (per $\alpha \geq 0$)

Anche questo si dimostra banalmente per induzione.

Siano infatti $\beta > \alpha \geq 0$. Allora banalmente $x_1(\beta) > x_1(\alpha)$.

Supponiamo ora per Hp induttiva che $x_n(\beta) > x_n(\alpha)$. Allora

$$x_{n+1}(\beta) = \frac{[x_n(\beta)]^2}{n} \underset{\text{Uso Hp}}{>} \frac{[x_n(\alpha)]^2}{n} = x_{n+1}(\alpha) \quad \text{(tesi induttiva)}$$

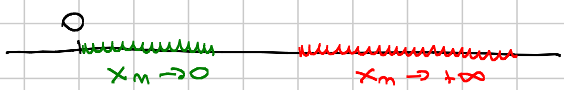
— o — o —

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $x_n(\alpha) \to +\infty$ (bastava $\alpha = 2$)

Grazie alla stretta monotonia, lo stesso vale $\forall\, \beta \geq \alpha$.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$ t.c. $x_n(\alpha) \to 0$ (bastava $\alpha = 1$)

Grazie alla stretta monotonia, idem $\forall\, \beta \in [0, \alpha]$



$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Supponiamo che per un certo $\alpha > 0$ e un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ si abbia

$$x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha)$$

Allora per lo stesso α si ha che $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha) \ \forall n \geq n_0$ (cioè da lì in poi decresce)

Dim: induzione su n.

Passo base: $n = n_0$ (che abbiamo assunto)

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Supponiamo che $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha)$ per un certo $n \geq n_0$. Allora

$$x_{n+2}(\alpha) = \frac{[x_{n+1}(\alpha)]^2}{n+1} \underset{\text{Uso Hp}}{<} \frac{[x_n(\alpha)]^2}{n+1} \underset{\text{Percorso}}{<} \frac{[x_n(\alpha)]^2}{n} = x_{n+1}(\alpha)$$

Oss. L'analogo del fatto 3 non vale con il $>$.

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ L'insieme degli $\alpha > 0$ per cui $x_n(\alpha) \to 0$ (la zona verde) è un APERTO, cioè se per un certo $\alpha > 0$ la succ. tende a zero, allora lo stesso vale per gli α abbastanza vicini.

Dim. Supponiamo che per un certo $\bar{\alpha} > 0$ si abbia $x_n(\bar{\alpha}) \to 0$. Allora $x_n(\bar{\alpha})$ non può essere debolmente crescente, ma allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c

$$x_{n_0+1}(\bar{\alpha}) < x_{n_0}(\bar{\alpha})$$

Ma le funzioni a sx e dx sono continue come funzioni di α, dunque la stessa relazione deve valere per ogni $\alpha \in$ intorno di $\bar{\alpha}$ (solita permanenza del segno). Quindi per ogni $\alpha \in$ intorno di $\bar{\alpha}$ si ha che $x_n(\alpha)$ è strett. decrescente da n_0 in poi. Una volta che $x_n(\alpha)$ è definitivamente decrescente, è banale dimostrare che $x_n(\alpha) \to 0$.

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Sia β_0 il sup della zona verde. Cosa accade partendo da β_0?

- Non può accadere che $x_n(\beta_0) \to 0$ (per il fatto 4)
- Non può accadere che $x_n(\beta)$ "torni indietro" per qualche valore di n, quindi $x_n(\beta)$ è debolmente crescente (fatti 3+4).

Di conseguenza $x_n(\beta_0)$ è debolmente crescente, dunque per i teoremi sulle succ. monotone si ha che

$$x_n(\beta_0) \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Se fosse $\ell \in \mathbb{R}$ avrei

$$x_{n+1} = \frac{\boxed{x_n^2} \to \ell^2}{\boxed{n} \to +\infty}$$

$$\ell = 0$$

da cui $\ell = 0$, che è impossibile.

Quindi $x_n(\beta_0) \to +\infty$.

Quindi

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \sup\{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \to 0\} \\ &= \inf\{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \to +\infty\} \\ &= \min\end{aligned}$$

(β_0 è in zona rossa).

— o — o —

Oss. Euristicamente si può capire chi è β_0

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \alpha^2, \quad x_3 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad x_4 = \frac{\alpha^8}{2^2 \cdot 3}, \quad x_5 = \frac{\alpha^{16}}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 4}, \quad x_6 = \frac{\alpha^{32}}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 5}$$

Congettura:

$$x_n = \frac{\alpha^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{2^{n-5}} \cdot \ldots \cdot (n-1)^{2^0}}$$

$$= \frac{\alpha^{2^{n-1}}}{\prod_{i=0}^{n-3} (n-1-i)^{2^i}}$$

(si dimostra per induzione)

È ragionevole pensare che la soglia si abbia quando num $\sim$ den.

cioè

$$\alpha^{2^{n-1}} \sim 2^{2^{n-3}} \cdot 3^{2^{n-4}} \cdot 4^{\cdots}$$

Faccio i logaritmi: $2^{n-1} \log \alpha \sim 2^{n-3} \log 2 + 2^{n-4} \log 3 + \ldots$

Divido per 2^{n-1} e ottengo

$$\log \alpha \sim \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{8} \log 3 + \frac{1}{16} \log 4 + \frac{1}{32} \log 5 + \ldots$$

$$\sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{2^k}$$ (serie convergente)

<u>Congettura</u>: $\log(\beta_0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{2^k}$.

Non dovrebbe essere difficile dimostrarlo.

— o — o — o —

<u>Esempio</u> $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$ $\quad x_1 = \alpha > 0$.

$x_n(\alpha)$ è come prima una funzione continua e strettamente crescente di α

$\boxed{\text{FATTO 1 e 2}}$ Come prima

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $x_{n_0+1}(\alpha) < x_{n_0}(\alpha)$, allora $x_{n+1}(\alpha) < x_n(\alpha)$ per ogni $n \geq n_0$

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Come prima, la zona verde è aperta

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Se $x_{n_0}(\alpha) > 1$, allora di sicuro $x_n(\alpha) \to +\infty$

$\boxed{\text{FATTO 6}}$ Se $x_{n_0}(\bar{\alpha}) > 1$ per un certo $\bar{\alpha}$, allora $x_{n_0}(\alpha) > 1$ per $\alpha \in$ opportuno intorno di $\bar{\alpha}$.
Quindi la zona rossa è aperta

$\boxed{\text{FATTO 7}}$ Sia ora β_0 un qualunque elemento che non sta né nella rossa, né nella verde (ad esempio il sup della verde o l'inf. della rossa).
Cosa sappiamo di $x_n(\beta_0)$?

- Non può tendere a 0
- " " " " $+\infty$
- Non può mai tornare indietro, quindi $x_n(\beta_0)$ è debolmente crescente (e volendo anche ≤ 1), quindi $x_n(\beta_0) \to \ell \in \mathbb{R}$ e l'unico disponibile è $\ell = 1$.

$\boxed{\text{FATTO 8}}$ Supponiamo che esistano $\beta_1 < \beta_2$ t.c.

$$x_n(\beta_1) \to 1 \quad \text{e} \quad x_n(\beta_2) \to 1$$

Voglio dire che definitivamente $x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)$ è (debolmente, ma anche strettamente) crescente. Questo impedisce alla differenza di tendere a 0.
Pongo $d_n = x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1) > 0$ $\forall n \geq 1$ per proprietà dette sopra.

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= x_{n+1}(\beta_2) - x_{n+1}(\beta_1) \\
&= [x_n(\beta_2)]^2 + \frac{1}{n} x_n(\beta_2) - [x_n(\beta_1)]^2 - \frac{1}{n} x_n(\beta_1) \\
&= \big(x_n(\beta_2) + x_n(\beta_1)\big)\big(x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)\big) + \frac{1}{n}\big(x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)\big) \\
&= \underbrace{[x_n(\beta_2) - x_n(\beta_1)]}_{d_n} \cdot \underbrace{\left[x_n(\beta_2) + x_n(\beta_1) + \frac{1}{n}\right]}_{\text{Questo tende a 2, quindi definitivamente supera 1}}
\end{aligned}$$

Quindi definitivamente si ha che $d_{n+1} > d_n$, dunque d_n non tende a zero.

— o — o —

SSSUP 2010 — LEZIONE 16

Titolo nota 15/03/2010

Equazioni differenziali

In forma generalissima un' eq. diff. di ordine 1 (derivate prime) si presenta nella forma

$$\Phi(t, u(t), u'(t)) = 0$$

dove Φ è una funzione di 3 variabili definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

Una soluzione di un' eq. diff. è una funzione $u: (a,b) \to \mathbb{R}$ che sia derivabile e per cui la relazione di sopra vale $\forall t \in (a,b)$.

Nota bene: (a,b) è tra le incognite del problema.

Esempi $\quad u' = \sin u \qquad u' = \cos u + t \qquad \cos u' = \sin(u + t^2)$

Generalizzazioni: → equazioni in cui compaiono derivate succ.,
→ sistemi con k funzioni incognite e k equazioni (di ordine 1 o superiore)

Esempio
$$\begin{cases} u' = \cos u + v^2 \\ v' = \sin u - v^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = \cos u + [v']^2 + t^2 \\ v' = \sin u \end{cases}$$

$\boxed{\text{Fatto fondamentale 1}}$ Tutto si può trasformare in un sistema di equazioni del 1° ordine.

Esempio $\quad u''' + [u'']^5 + \arctan(u' \cdot u) = t^6 \quad$ (eq. di ordine 3)

diventa
$$\left.\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= w \quad (\text{moralmente } u'') \\ w' + w^5 &+ \arctan(v \cdot u) = t^6 \end{aligned}\right\} \text{sistema di 3 equazioni in 3 incognite}$$

Conseguenza: se sappiamo risolvere i sistemi del 1° ordine, sappiamo risolvere tutto.

— o — o —

$\boxed{\text{Def.}}$ Un' eq. (o più in generale un sistema) del 1° ordine si dice in forma normale se è del tipo

$$\boxed{u' = f(u,t)}$$ derivata = funzione del resto

Oss. La stessa scrittura vale per equazioni e sistemi: basta pensare $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ e f con n componenti, ciascuna dipendente da $t, u_1(t), \dots, u_n(t)$.

— o — o —

$\boxed{\text{Problema di CAUCHY}}$

$u' = f(u,t)$ ← eq. diff.

$u(t_0) = u_0$ ← valore iniziale prescritto

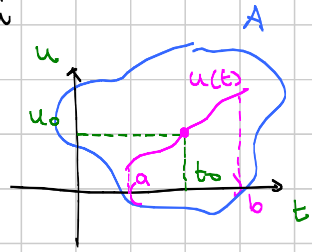
dati

Quando si tratta di sistema, il dato iniziale prescrive il valore di tutte le componenti di u per uno stesso tempo iniziale t_0.
Se il sistema arriva da un' eq. di ordine k, allora nel pb. di Cauchy si prescrivono u e tutte le sue prime $k-1$ derivate per uno stesso t_0.

— o — o —

Per semplicità mi limito al caso di equazioni

$$\begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$$



— o — o —

Altri tipi di problemi

$u'' = f(t,u,u')$ eq. diff. 2° ordine

$u(a) = \dots$

$u(b) = \dots$

} Problema di DIRICHLET: dare u per 2 valori diversi a e b

$u'' = f(t,u,u')$

$u'(a) = \dots$

$u'(b) = \dots$

Problema NEUMANN

— o — o —

Teorema di esistenza Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, sia $f: A \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{CONTINUA}}$, sia $(t_0, u_0) \in A$.

Allora il problema di Cauchy $u' = f(u,t)$ $u(t_0) = u_0$ ha $\boxed{\text{ALMENO}}$ una soluzione.

Teorema di esistenza e unicità Sia tutto come sopra. Supponiamo che f sia Lipschitziana in u uniformemente rispetto a t, cioè che $\exists\, L$ t.c.

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L\,|u_1 - u_2|$$

la costante è la stessa per ogni t

per ogni t, u_1, u_2 tali che $(t,u_1) \in A$ e $(t,u_2) \in A$. Allora la soluzione (che già esiste per il teo. precedente) è anche UNICA.

— o — o —

$\boxed{\text{Oss. importante}}$ Quando f è C^1 (derivabile con derivate continue rispetto ad u e t), allora automaticamente è Lipschiana almeno localmente (cioè a patto di restringere A). Solito Lagrange.

— o — o —

Esempi $u' = 2\sqrt{|u|}$ equazione autonoma

$f(t,u) = \sqrt{|u|}$ definita su $A = \mathbb{R}^2$.

È facile vedere che $f(t,u)$ non è Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}^2$ (ci sono problemi vicino $u=0$). Consideriamo il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è $u(t) \equiv 0$

Un'altra soluzione è "quasi" $u(t) = t^2$

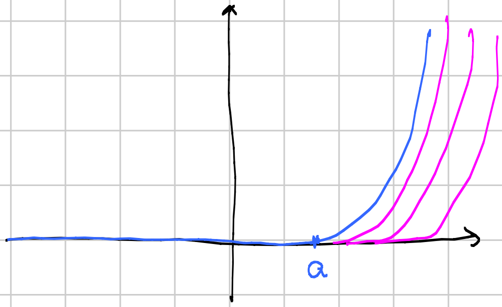
(il quasi è per colpa dei t negativi)

Una vera altra soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} t^2 & \text{per } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Nell' esempio manca la Lip., e infatti ci sono almeno 2 soluz.
In realtà ce ne sono infinite, date ad esempio dalla formula

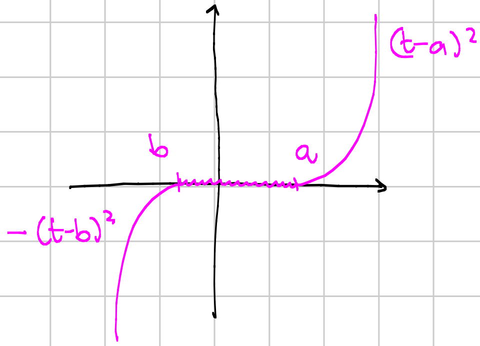
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq a \\ (t-a)^2 & \text{per } t \geq a \end{cases}$$



Si verifica direttamente nei 2 tratti che si tratta di una soluzione, qualunque sia il valore di a.

Volendo, potrei anche fare una famiglia a 2 parametri

$\boxed{\text{FATTO GENERALE 1}}$ Tutte le volte che ci sono 2 soluzioni, ce ne sono infinite che riempiono la zona fra i 2 grafici (pennello di PEANO)



$\boxed{\text{FATTO GENERALE 2}}$ Data un' eq. diff. autonoma, e data una sua soluzione $u(t)$, allora tutte le sue traslate orizzontali sono soluzioni della stessa equazione $u(t) \rightsquigarrow u(t+\alpha)$

Dim. u soluzione vuol dire $u'(t) = f(u(t))$
quindi anche $u'(t+\alpha) = f(u(t+\alpha))$ □

— o — o —

Esempio Risolvere il pb. di Cauchy $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

La soluzione del problema è $u(t) \equiv 1$ (si vede per sostituzione) ed è unica perché $\log u$ è Lipschitziana in un intorno del valore $y_0 = 1$. Posso pensare $A =$ rettangolino intorno al p.to $(0,1)$

SSSUP 2010 – LEZIONE 17

Titolo nota 22/03/2010

$\boxed{\text{Teo. esistenza per problema di Cauchy}}$
$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$f : A \to \mathbb{R}^n$ (A aperto) $\quad A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (t, $u = (u_1, \dots, u_n)$)

$t_0 \in \mathbb{R}$ $\quad u_0$ = vettore di dati iniziali $\quad u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})$

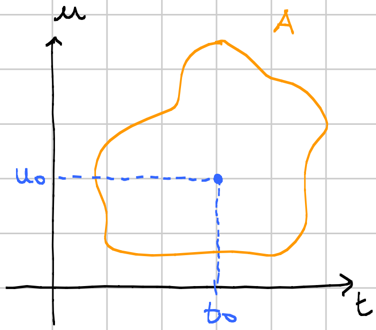
Supponiamo ovviamente $(t_0, u_0) \in A$ e $\boxed{f \text{ continua}}$

Allora il problema ha almeno una <u>soluzione locale</u>, cioè una funzione $u : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tale che $\quad (u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)))$

- u è di classe C^1 (cioè lo sono le componenti);
- $t_0 \in (a,b)$;
- $(t, u(t)) \in A$ per ogni $t \in (a,b)$
- u risolve l'equazione (cioè il sistema)

— o — o —

Per semplicità lavoriamo nel caso $n = 1$.



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ u è una soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds. \quad \text{(int)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ <u>Prima parte</u> Supponiamo che u risolva
$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$
Integrando l'equazione in $[t_0, t]$ rispetto alla variabile s, ottengo

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$
$$\| $$
$$u(t) - u(t_0) = u(t) - u_0$$

Portando u_0 a dx si ha (int)

<u>Seconda parte</u> Supponiamo che u verifichi (int). Allora
- sostituendo $t = t_0$ ottengo $u(t_0) = u_0$ (cond. iniziale)
- derivando a dx e sx rispetto a t ottengo

$$u'(t) = f(t, u(t)),$$

cioè l'equazione.

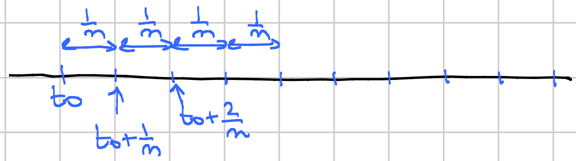
— o — o —

<u>Vantaggi del fatto 1</u>
- equazione e dato iniziale sono contenuti in un'unica relazione
- non compaiono derivate: basta trovare una funzione u CONTINUA che risolve (int) e automaticamente la stessa u sarà C^1 e risolve il problema di Cauchy.

— o — o —

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Come ottenere una soluzione approssimata? Con una DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE.



Voglio trovare il valore approssimato della soluzione per $t = t_0 + \frac{k}{n}$

L'idea è di porre u_n = soluzione approssimata data da
$u_n(t_0) = u_0$
In t_0 so che $u_n'(t_0) = f(t_0, u_0)$. Faccio finta che la derivata rimanga la stessa in tutto l'intervallo $[t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$

$$u_n\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = \underbrace{u_0}_{\substack{\text{valore}\\ \text{all'inizio}\\ \text{dell'interv.}}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\text{lungh.}\\ \text{intervallo}}} \underbrace{f(t_0, u_0)}_{\substack{\text{valore derivata all'inizio}\\ \text{dell'intervallo.}}}$$

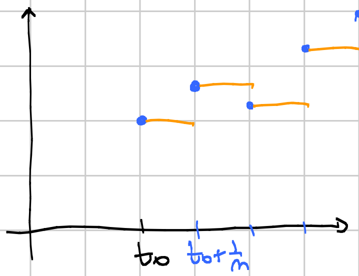
$$u_n\left(t_0 + \frac{2}{n}\right) = u_n\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(t_0 + \frac{1}{n}, u_n\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

Procedendo in maniera ricorsiva si pone

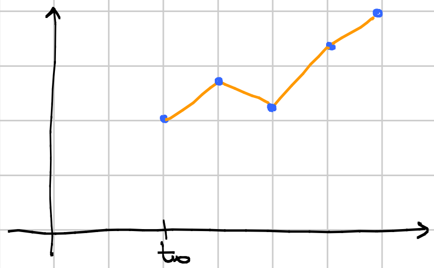
$$u_m\left(t_0+\frac{k+1}{m}\right)=u_m\left(t_0+\frac{k}{m}\right)+\frac{1}{m}\,f\left(t_0+\frac{k}{m},\,u_m\left(t_0+\frac{k}{m}\right)\right)$$

nuovo valore = vecchio valore + (lungh. step) × derivata nel vecchio valore

Nota tecnica: finora u_m è definita solo nei punti del tipo $t_0+\frac{k}{m}$ con $k\in\mathbb{N}$. Si può estendere a tutti i numeri reali intermedi ponendola costante o affine a tratti:



costante a tratti



affine a tratti

$\boxed{\text{IDEA}}$ Quando $m\to+\infty$, le $u_m(t)$ costruite come sopra tendono (in qualche senso) ad una soluzione del problema di Cauchy (o per lo meno ad una soluzione del pbm. scritto in forma integrale).

$\boxed{\text{Oss.}}$ Visto che il problema può avere più di una soluzione, può accadere che il limite di $u_m(t)$ non esista, ma s.succ. diverse convergano a soluzioni diverse.

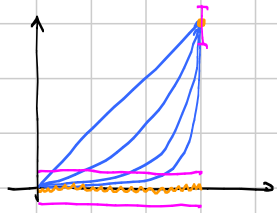
$\boxed{\text{Nota}}$ In che senso una funzione $u_m(t)$ tende ad una funzione $u(t)$?

- <u>Convergenza puntuale</u>: per ogni t fissato, $u_m(t)\to u(t)$ come succ. di numeri
- <u>Convergenza uniforme</u>: per ogni $\varepsilon>0$ si ha che $|u(t)-u_m(t)|<\varepsilon$ definitivamente (stesso defin. per ogni t)

Esempio $u_n : [0,1] \to [0,1]$ $\quad u_n(t) = t^n$

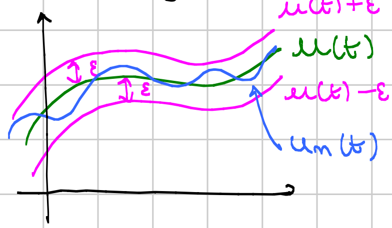
Quando $n \to +\infty$ si ha che

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1) \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$



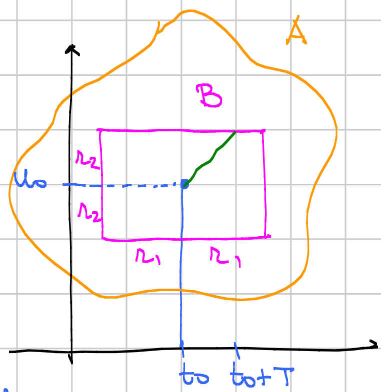
Le $u_n(t)$ tendono puntualmente al limite, ma non uniformemente

Convergenza uniforme vuol dire che il grafico delle $u_n(t)$ sta definitivamente in un intorno del grafico del limite



— o — o —

Siamo sicuri che le $u_n(t)$ costruite sopra siano ben definite? Detto altrimenti: siamo sicuri che non scappano dall'insieme A in cui è definita $f(t,u)$, almeno per t vicino a t_0?



Poichè A è aperto esisterà un rettangolo

$$B = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2] \subseteq A$$

Sia $M = \max\{ |f(t,u)| : (t,u) \in B \}$

esiste per Weierstrass 2 dimensionale

Finchè u o u_n resta in B, la sua derivata è limitata tra $-M$ ed M. Questo garantisce un tempo minimo di permanenza in B. Questo tempo è

$$T = \min\left\{ r_1, \frac{r_2}{M} \right\}$$

per $t > r_1$ non garantisco di stare in A

se una funzione ha derivata $\pm M$ in questo tempo scappa da A.

SSSUP 2010 – LEZIONE 18

Titolo nota 22/03/2010

$\boxed{\text{Teorema di ASCOLI-ARZELÀ}}$

Siano $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni.
Supponiamo che

① Esiste una costante C tale che

$$|u_n(t)| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b]$$

(EQUILIMITATEZZA)

② Esiste una costante L tale che

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, t_2 \in [a,b]$$

(EQUILIPSCHITZIANITÀ)

Allora esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge verso una funzione limite $u(t)$ anche lei Lipschitziana.
La convergenza è uniforme.

— o — o —

Siano ora u_n le funzioni costruite prima con la discretizzazione temporale + interpolazione affine a tratti. Dico che queste verificano le ipotesi di A.A. pur di aver preso l'insieme di definizione $[a,b]$ abbastanza piccolo in modo che non scappino da B.

Infatti

- equilimitatezza segue dallo stare in B
- equilipschitzianità segue dal fatto che la costante di Lip. di una affine a tratti è il max delle pendenze dei vari tratti e queste sono tutte $\leq M$ finché si sta in B.

— o — o —

Vorremmo dimostrare che il limite $u(t)$ risolve

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

Che cosa risolve $u_n(t)$? Circa la stessa cosa. Vediamo cosa accade nei nodi $t_0+\frac{k}{n}$

$$u_n\left(t_0+\frac{1}{n}\right) = u_0 + \frac{1}{n} f(t_0,u_0)$$
$$= u_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} f(s,u_n(s))\,ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} \{f(t_0,u_0) - f(s,u_n(s))\}\,ds$$

$$u_n\left(t_0+\frac{2}{n}\right) = \underbrace{u_n\left(t_0+\frac{1}{n}\right)} + \underbrace{\frac{1}{n} f\left(t_0+\frac{1}{n}, u_n\left(t_0+\frac{1}{n}\right)\right)}$$
$$= \underbrace{u_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} f(s,u_n(s))\,ds} +$$
$$+ \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} \{\ldots\}} + \underbrace{\int_{t_0+\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{2}{n}} f(s,u_n(s))\,ds}$$
$$\underbrace{+\int_{t_0+\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{2}{n}} \{f(t_1,u_1) - f(s,u_n(s))\}\,ds}$$

In generale avremo:

$$u_n\left(t_0+\frac{k}{n}\right) = u_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{k}{n}} f(s,u_n(s))\,ds + \int_{t_0}^{t_0+\frac{k}{n}} \text{resti}\ldots$$

da cui

$$u_{n_k}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u_{n_k}(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \text{resti}\ldots$$

Considero la sottosuccessione u_{n_k} e vedo cosa succede quando $k\to+\infty$.

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u(t) = & u_0 & ?\ \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds & ?\ 0 \text{ (spero)} \end{array}$$

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $$\int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s))\,ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

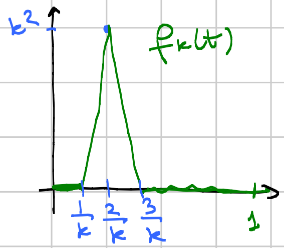
cioè
$$\int_{t_0}^{t} f(s,u(s)) - f(s, u_{n_k}(s))\,ds \to 0$$

Parola magica: f è continua in B, B è compatto, quindi f è uniform. continua in B, cioè
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$$|f(s,a) - f(s,b)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |a-b| < \delta$$

Grazie alla convergenza uniforme so che $|u(s) - u_{n_k}(s)| < \delta$ $\boxed{\text{per ogni } t}$ purché k sia abbastanza grande.

<u>Occhio</u>: non è vero questo enunciato: se $f_k(t) \to 0$ per ogni $t \in [0,1]$, allora $\int_0^1 f_k(t)\,dt \to 0$.

$f_k \to 0$ puntualmente, ma non uniformemente
$\int f_k \to +\infty$



$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Tutti i resti sono piccoli. Come sono fatti i resti? Sono espressioni del tipo:
$$f(t_k, u_k) - f(s, u_n(s))$$

con s vicino a t_k (s sta tra t_k e t_{k+1}) e $u_n(s)$ sta vicino a u_k (ricordo che $u_n(s)$ interpola u_k e u_{k+1}).

Ancora una volta per uniforme continuità
$$|f(t_1,a) - f(t_2,b)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |t_2 - t_1| + |b-a| < \delta$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. Ascoli – Arzelà}}$

Prendo i numeri razionali in $[a,b]$, cioè $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ e li numero $[a,b] \cap \mathbb{Q} = q_1, q_2, q_3, \dots$

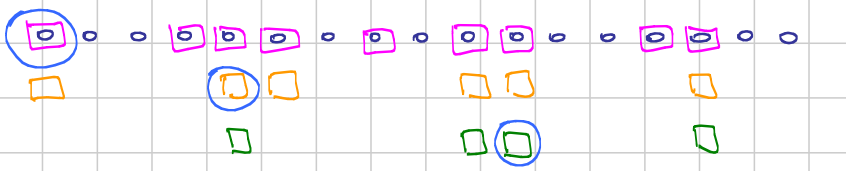
Prendo $u_n(q_1)$, questi sono numeri $\subseteq [-c,c]$. Quindi $\exists$ una s. successione convergente.

Prendo q_2. Ancora una volta $u_n(q_2) \subseteq [-c,c]$. Quindi $\exists$ una s. successione convergente, che sia s.succ. della prec.

$u_n(q_1) \rightsquigarrow$ s. succ. conv.
$u_n(q_2) \rightsquigarrow$ s.succ. della prec. che converge

Procedendo così per ogni k trovo una sottosuccessione delle $u_n(t)$ che converge per $t = q_1, q_2, \dots, q_k$.
Ora posso in realtà trovare una s.succ. che va bene per tutti i q_k $\boxed{\text{insieme}}$

$$u_{n_1}(q_1),\ u_{n_2}(q_1),\ u_{n_3}(q_1),\ \dots \longrightarrow u(q_1)$$



Ok per q_1
Ok per q_2
Ok per q_3

Procedimento diagonale: prendo il primo della prima, il secondo della seconda, il terzo della terza e così via.
Così ottengo una s.succ. di tutte le s.succ. costruite strada facendo (da un certo punto in poi).
In questo modo ho trovato una s.succ. u_{n_k} t.c.
$u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ per ogni $t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$.
Afferma che la stessa u_{n_k} va bene per tutti i restanti valori di t.

Idea: prendo un s che sta in $[a,b]$, ma non in $\mathbb{Q}$.
Allora

$$|u_{n_k}(s) - u(s)| =$$

$$\leq \underbrace{|u_{n_k}(s) - u_{n_k}(q_i)|}_{\substack{\text{piccolo perche} \\ u_{n_k} \text{ è Lip.}}} + \underbrace{|u_{n_k}(q_i) - u(q_i)|}_{\substack{\text{piccolo perché in} \\ \mathbb{Q} \text{ ho converg.}}} + \underbrace{|u(q_i) - u(s)|}_{\substack{\text{piccolo perché} \\ u \text{ è Lip}}}$$

SSSUP 2010 – LEZIONE 19

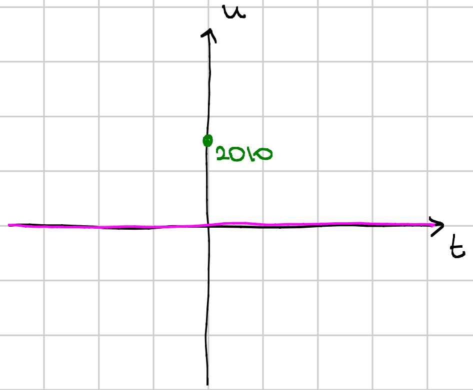
Titolo nota 15/04/2010

Studio qualitativo eq. diff. = disegnare la soluzione senza risolvere l'equazione.

Caso di equazioni del 1º ordine

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 2010 \end{cases}$



Domande:

- la soluzione è globale?
- la soluzione è monotona?
- come è fatto il grafico all'incirca?

Guardo: dove u' è >0, <0, $=0$. In questo caso

$u' = \arctan u$ >0 se $u>0$ (u cresce dove è positiva)

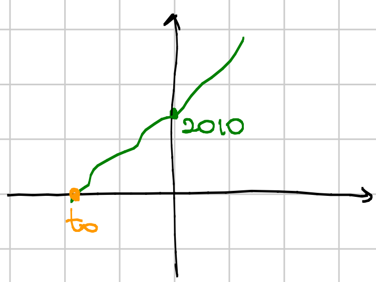
$=0$ se $u=0$ ($u(t) \equiv 0$ è una sol. dell'eq.)

<0 se $u<0$ (u decresce dove è negativa)

Per il teorema di unicità sappiamo che il problema (con ogni dato iniziale $u(t_0) = u_0$) ha soluzione unica (questo perchè $\arctan u$ è una funzione localmente lipschitziana).

Conseguenza: la soluzione con $u(0) = 2010$ non potrà mai annullarsi.

Perchè? Se si annullasse in un certo t_0, allora il problema con dato iniziale $u(t_0) = 0$ avrebbe almeno 2 soluzioni.



Oss. generale. Tutte le volte che ho unicità, ho che 2 soluzioni o coincidono o sono sempre diverse.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ La soluzione del problema originario è sempre $\neq 0$, dunque sempre > 0, quindi sempre strettamente crescente ovunque sia definita

Domanda: u è globale?

— o — o —

Parentesi su esistenza globale. Per il teorema di esistenza un problema di Cauchy ha (almeno) una soluzione u definita su un intervallo (a,b) tale che $t_0 \in (a,b)$.

A seconda dei casi, può succedere che

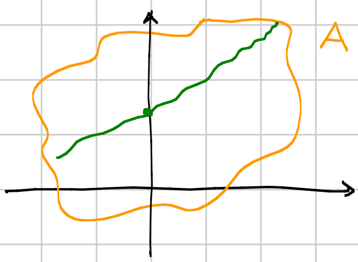
① $b = +\infty$: si dice che c'è esistenza globale nel futuro
$a = -\infty$ " " nel passato

② $b < +\infty$.

Supponiamo che (a,b) sia l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione. Allora se $b < +\infty$ ci sono solo 2 possibilità

- BLOW-UP : $\limsup_{t \to b^-} |u(t)| = +\infty$
- BREAK-DOWN: in generale $\limsup_{t \to b^-} |u'(t)| = +\infty$, ma

rigorosamente si definisce così: supponiamo $f(t,u)$ definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\liminf_{t \to b^-} \operatorname{dist}((t,u(t)), \partial A) = 0$$

(u(t) tende ad uscire dall'insieme di definizione di $f(t,u)$)

Morale: se voglio dimostrare l'esistenza globale devo escludere blow-up e break-down.

— o — o —

Tornando all'esempio:

* non si può avere break-down perchè $f(t,u) = \arctan u$ è definita ovunque
* non si può avere blow-up perchè $\arctan u$ è limitata, quindi u' è limitata, quindi in un tempo finito non può tendere a $+\infty$ (volendo u è lipschitziana).

<u>Teorema di esistenza globale</u> Supponiamo $f(t,u)$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata. Allora per qualunque dato iniziale il problema di Cauchy ha soluzione globale (nel passato e nel futuro).

In realtà basta un'ipotesi più debole e cioè f sublineare, cioè esistono 2 costanti A e B tali che

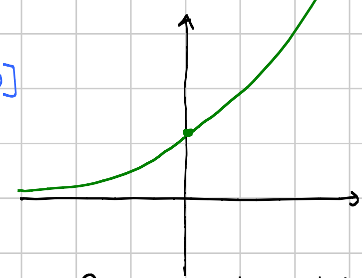
$$|f(t,u)| \leq A + B|u|.$$

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ La soluzione del problema iniziale è globale

Essendo monotona esistono

$\lim_{t\to+\infty} u(t) \in [0, +\infty]$ (2010) $\quad \lim_{t\to-\infty} u(t) \in [0, 2010]$



Vorremmo dimostrare che sono $+\infty$ e 0.

<u>Teorema dell'asintoto</u> Sia $u : [t_0, +\infty)$ una funzione derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow \text{non esiste} \end{cases}$$

[Idem a $-\infty$]

<u>Esempio</u> $u(t) = \dfrac{\sin(t^{20})}{t}$ $\qquad \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$

$$u'(t) = -\frac{\sin(t^{20})}{t^2} + 20t^{18}\cos(t^{20}) \to \text{limsup } +\infty \text{ e liminf } -\infty$$

(il primo termine $\to 0$)

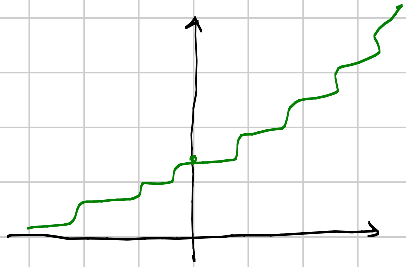
Come si applica nell' esempio ?
Supponiamo per assurdo che $\lim_{t \to +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$.

Allora, grazie all' equazione differenziale, si avrebbe che

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \arctan l.$$

Allora per il teo. dell'asintoto il limite di u' deve essere 0, quindi $\arctan l = 0$, quindi $l = 0$, il che è incompatibile con la monotonia. L'unica possibilità è dunque $l = +\infty$.

Ragionamento analogo mostra che $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$.



$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Abbiamo determinato i limiti a $\pm\infty$.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ u è convessa. Infatti

$$u'' = (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$
$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \arctan u > 0 \quad \Rightarrow \text{convessa}$$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ u cresce come una retta. Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}, \text{ quindi faccio Hôpital}\right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Come si comporta $u(t)$ per $t \to -\infty$?

Brutalmente: per $u \sim 0$ è come se fosse $u' \sim u$, questa si risolve esplicitamente e le soluzioni sono del tipo ke^t.

SSSUP 2010 – LEZIONE 20

Titolo nota 15/04/2010

Dim. teo. asintoto Ipotesi: $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

Applico Lagrange nell'intervallo $[n, n+1]$:

$$u(n+1) - u(n) = u'(c_n)\cdot 1 \qquad \text{dove} \quad c_n \in (n, n+1)$$

È chiaro che $c_n \to +\infty$ (volendo perché $c_n \geq n$) e inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} u'(c_n) = \ell - \ell = 0 \qquad \text{(qui è fondamentale che } \ell \in \mathbb{R})$$

Occhio: non ho dimostrato che $\lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0$, ma solo che questo è vero lungo la successione c_n.
Posso quindi solo concludere che

$$\boxed{\liminf_{t\to+\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t\to+\infty} u'(t)}$$

o anche che

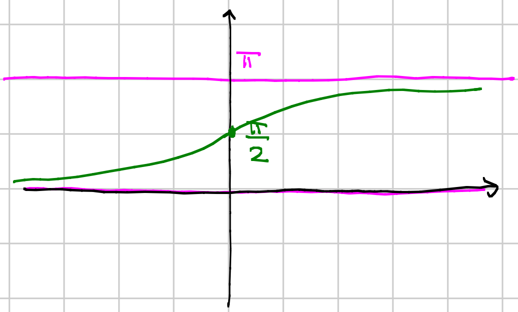
$$\boxed{\liminf_{t\to+\infty} |u'(t)| = 0}$$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Fatto 1 La soluzione esiste, è UNICA ed è globale

Fatto 2 Le funzioni costanti $u(t) \equiv k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) sono soluzioni dell'equazione.
Quindi



$$0 < u(t) < \pi \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(se toccasse una delle 2 rette ci sarebbe non unicità)

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $u(t)$ è strettamente crescente, poichè

$u'(t) = \sin u(t) > 0$ quando $0 < u(t) < \pi$.

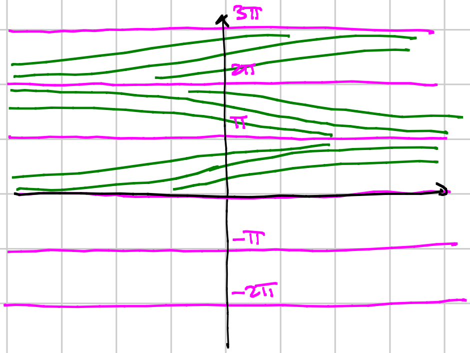
$\boxed{\text{Fatto 4}}$ $\lim_{t \to +\infty} u(t) = \pi$ $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$

Dim. Il primo. Per monotonia sappiamo che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$ (monotonia + limitatezza)
Dall' eq. deduciamo che $\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \sin u(t) = \sin \ell$ quindi esiste.
Ma per il teo. asintoto il limite deve fare 0, quindi $\sin \ell = 0$, quindi $\ell = k\pi$, ma l' unico compatibile è π.

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Convessità? $u'' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos u \cdot \sin u$

$\cos u \cdot \sin u \nearrow \begin{array}{lll} > 0 & \text{in } (0, \frac{\pi}{2}) & \iff t < 0 \\ < 0 & \text{in } (\frac{\pi}{2}, \pi) & \iff t > 0. \end{array}$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Più in generale, le sol. dell' eq. saranno



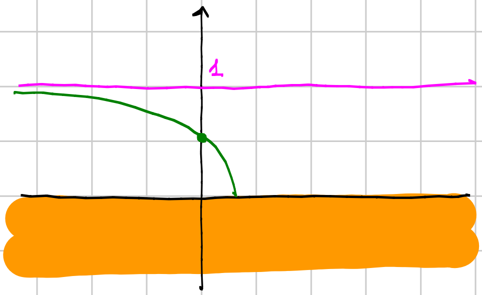
$\boxed{\text{Fatto 7}}$ Poniamo $v(t) = \pi - u(t)$
Cosa risolve $v(t)$?

$$\begin{aligned} v'(t) = -u'(t) &= -\sin u(t) \\ &= -\sin(\pi - v(t)) \\ &= -\sin v(t) \end{aligned}$$

Quindi $v(t)$ risolve $v' = -\sin v$. Da qui si vede che l'andamento di $u(t)$ per $t \to -\infty$ è analogo all' andamento di $v(t)$ per $t \to +\infty$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $u(t) \equiv 1$ è sol. stazionaria



Quindi $u(t) < 1$ finché esiste

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ $\log u$ ha problemi per $u \leq 0$

Quindi $0 < u(t) < 1$ finché esiste.

Quindi $u'(t) < 0$ finché esiste.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per $t < 0$ si ha che $\frac{1}{2} \leq u(t) < 1$ quindi non possono esserci blow-up e break-down, quindi la soluzione esiste globalmente e tende a 1 (teo. asintoto)

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Per $t > 0$ abbiamo 2 possibilità: esistenza globale o break-down.

Supponiamo che esista globalmente.

Allora $u(t) \to \ell \in [0, \frac{1}{2}]$ per $t \to +\infty$

Allora $u'(t) \to \log \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Allora per il teo. asintoto si ha $\log \ell = 0$, cioè $\ell = 1$ che è incompatibile.

Quindi c'è per forza break-down.

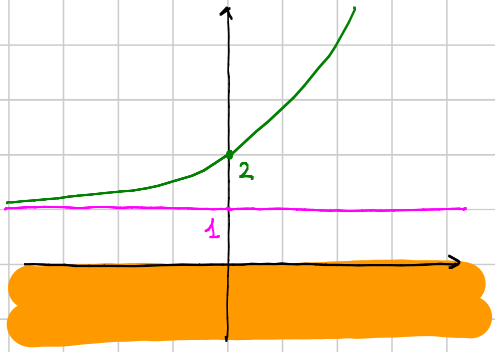
$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Convessità? $u'' = (\log u)' = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{\log u}{u} < 0$ perché $u \in (0,1)$.

Quindi u è concava. Essendo concava, $u(t)$ sta sotto la sua tangente in $t = 0$, che è la retta

$$y = u(0) + t\,u'(0)$$
$$= \frac{1}{2} - (\log 2)\, t$$

Questo permette (volendo) di stimare dall'alto il tempo di vita.

Esempio 4 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases}$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Finché è definita si ha che $u(t) > 1$, quindi $u'(t) > 0$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Per $t < 0$ la soluzione esiste globalmente e tende a 1 (solito asintoto)

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per $t > 0$ la soluzione esiste globalmente perché $\log u$ sta sotto una retta per $t \to +\infty$. Inoltre $u(t) \to +\infty$ per il solito asintoto.
Volendo è anche convessa

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Come cresce $u(t)$ all'infinito ?

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = (\text{Hôpital}) = \lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \log u(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\log u(t)}{2t} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{u'}{u}}{2} =$$

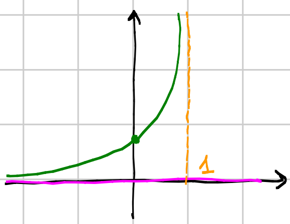
$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\log u(t)}{u(t)} = 0$$

Quindi cresce + di una retta, ma meno di una parabola.

Esercizio Confrontare con t^α per $1 < \alpha < 2$.

— o — o —

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ Per stabilire se c'è esistenza globale per $t > 0$ bisogna risolvere esplicitamente.



$$\frac{u'}{u^2} = 1 \qquad \int \frac{u'}{u^2} = \int 1 \;, \quad -\frac{1}{u} = t + c \qquad u = \frac{1}{1-t}$$

Esercizio Studiare $u' = u^p$, $u(0) = 1$ con $p > 1$.

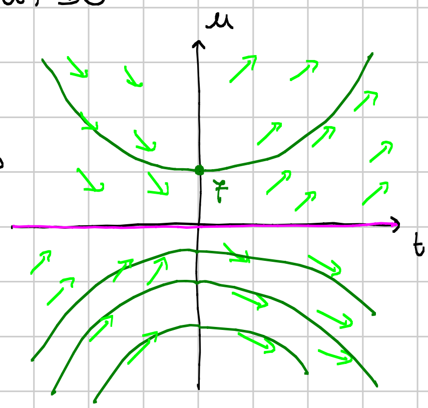
SSSUP 2010 — LEZIONE 21

Titolo nota 22/04/2010

Eq. Diff. non autonome

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan(tu) \\ u(0) = 7 \end{cases}$ Ci sono soluzioni stazionarie? SI. $u(t) \equiv 0$

$\Rightarrow$ La soluzione sarà sempre > 0.



Fatto 2 $|f(t,u)| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ no blow-up
$\Rightarrow$ esistenza globale

Studio il segno di $f(t,u)$ per vedere dove u cresce e dove u decresce.

$f(t,u) > 0 \iff tu > 0$

Fatto 3 $\lim_{t \to +\infty} u(t)$ esiste per monotonia ($\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) ed è ≥ 7.

Applico il teo. dell'asintoto. Supponiamo per assurdo che $\lim = l \in \mathbb{R}$
Allora

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = (\text{o non esiste o è } 0)$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \arctan(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{t}\, \underset{\substack{\downarrow \\ l}}{u(t)}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{Assurdo!}$$

Analogamente: $\lim_{t \to -\infty} u(t) = +\infty$.

Fatto 4 Sarà convessa? $\boxed{\text{SI}}$

$$u''(t) = [\arctan(tu(t))]'$$
$$= \frac{1}{1+t^2u^2}(tu)' = \underbrace{\frac{1}{1+t^2u^2}}_{>0}(\overset{>0}{u} + \overset{>0}{\underset{+\,\cdot\,+}{tu'}})$$

>0

Oss. Non è + vero che le soluzioni si ottengono le une dalle altre per traslazione. Tutte le soluzioni hanno asint. obliquo.

Fatto 5 Si può dire che $u(t)$ è pari? Pongo $v(t) = u(-t)$

Che cosa risolve $v(t)$?

$$v'(t) = -u'(-t) = -\arctan((-t)\,u(-t)) = -\arctan(-t\,v(t))$$
$$= \arctan(t\,v(t))$$

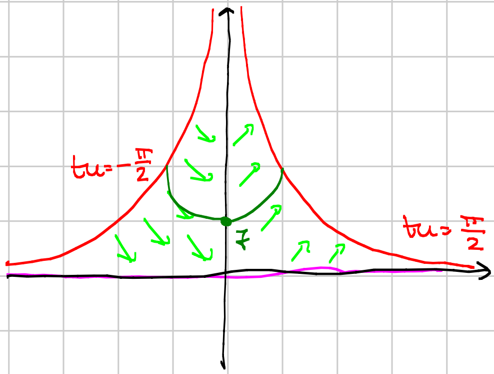
Quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione con lo stesso dato iniziale, quindi per unicità $u(t) = v(t) = u(-t) \Rightarrow u$ è pari.

Esercizio La soluzione con $u(0) = -7$ è $-$ sol. con $u(0) = 7$.

— o — o —

Esempio 2 $u' = \tan(tu)$

$u(0) = 7$

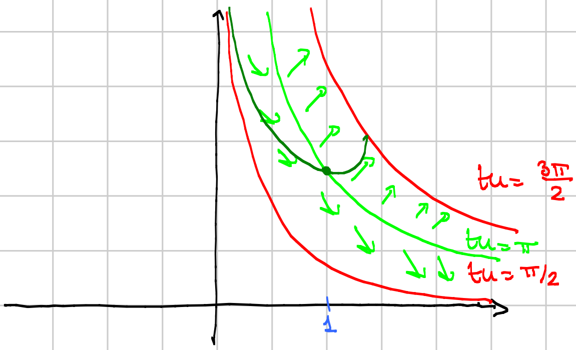


$u(t) \equiv 0$ è soluzione come prima.

Inoltre $\tan(tu)$ non è definita quando $tu = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\tan(tu) > 0$. L'esistenza è solo locale e la soluzione ha break-down in tempo finito nel passato e nel futuro ($u'(t) \to \pm\infty$).

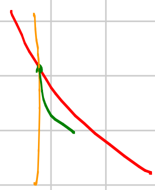
Esempio 3 $\begin{cases} u' = \tan(tu) \\ u(1) = \pi \end{cases}$



$\tan(tu) > 0$ (nella zona in questione) $\Leftrightarrow \pi < tu < \frac{3\pi}{2}$

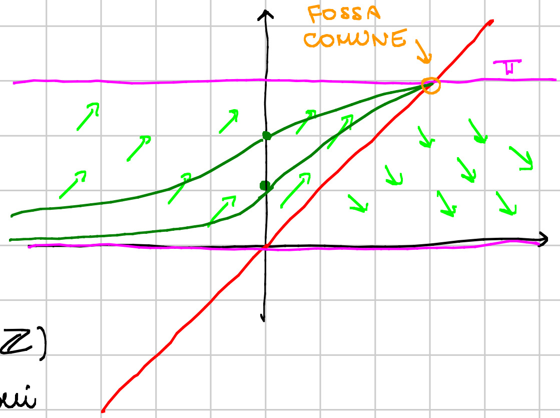
Per $t > 1$ la soluzione ha break-down in tempo finito (con $u' \to +\infty$)

Per $t < 1$ la soluzione "potrebbe" schiantarsi contro $tu = \frac{\pi}{2}$, ma lo dovrebbe fare con derivata $\to -\infty$, e questo non è possibile perché andrebbe fatto "da sotto".



Quindi la soluzione esiste fino al tempo $t=0$ in cui ha blow-up a $+\infty$

— o — o —



Esempio 4 $\quad u' = \dfrac{\sin u}{u-t}$

$u(0)=1$

Zona rossa = retta $u=t$

Soluzioni stazionarie:

$u(t)\equiv 0$, ma anche $u(t)=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

(occhio: burocraticamente le soluzioni stazion. non esistono globalmente)

$\boxed{t \text{ negativi}}$ La soluzione esiste globalmente (blow-up e break down esclusi) ed è monotona.

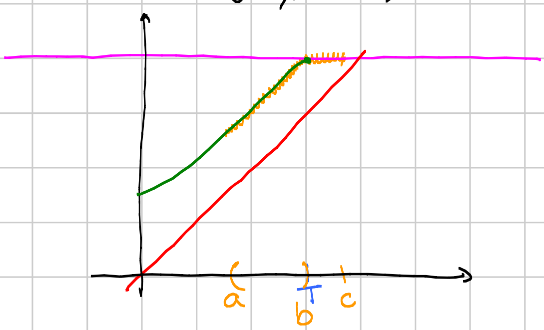
Nota bene: tutti i limiti in $[0,1)$ sono compatibili con il teo. dell'asintoto !!

$\boxed{t \text{ positivi}}$ $u(t)$ non può toccare la retta π (prima di $t=\pi$) per ragioni di unicità

$u(t)$ non può toccare la retta $u=t$ (prima di $t=\pi$) perché dovrebbe farlo con derivata $+\infty$, dunque da sotto

Quindi la soluzione ha per forza break-down per $t=\pi$, cioè tende al punto (π,π). NB:

$u' \not\to \pm\infty$.



Lemma di rincollamento:
data una soluzione in (a,b) e una soluzione in (b,c). Se queste hanno i limiti che coincidono in b (e vivono lontano dal dom. di $f(t,u)$), allora la loro unione è sol. in (a,c)

Dim. lemma di rincollamento: basta dimostrare che la u "rincollata" risolve l'equazione anche per $t=b$.

Oss. Il lemma di rincollamento serve per dire che una soluzione che non ha blow-up e non tocca zone vietate (no break-down) può essere prolungata.

Tornando all'esempio, cosa possiamo dire del limite a $-\infty$?

Brutal-mode: supponiamo $u(t) \to \ell > 0$ ($e < 1$).
Allora

$$u'(t) \sim \frac{\sin \ell}{\ell - t} \sim -\frac{1}{t}$$

Ma una funzione con $u'(t) \sim \frac{1}{t}$ non può avere asintoto orizzontale, perché moralmente $u(t) \sim \log t$

Rigorosamente: $u(0) = u(t) + \int_t^0 u'(s)\,ds \quad \forall\, t<0$
Passo al limite

$$\underset{\text{Num.}}{\underset{\downarrow}{u(0)}} = \underset{\text{Num.}}{\underset{\downarrow}{\ell}} + \int_{-\infty}^{0} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{u'(s)\,ds}}$$

L'integrale improprio diverge per confronto asintotico con $\frac{1}{t}$

SSSUP 2010 – LEZIONE 22

Titolo nota 22/04/2010

Sopra e sottosoluzioni Consideriamo il problema $\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Si dice soprasoluzione una qualunque funzione $v(t)$ tale che

$$\begin{cases} v' > f(t,v) \\ v(0) > u_0 \end{cases} \quad \text{(dove } v \text{ è definita)}$$

Brutalmente v parte sopra u e cresce di più.

Teorema Per $t \geq 0$ si ha che $v(t) > u(t)$ finché sono definite.

Sottosoluzioni $\begin{cases} w' < f(t,w) \\ w(0) < u_0 \end{cases}$ **Teorema** Per $t \geq 0$ si ha che $w(t) < u(t)$ dove definite.

Oss. Sopra e sottosoluzioni servono a delimitare le zone in cui $u(t)$ può andare.

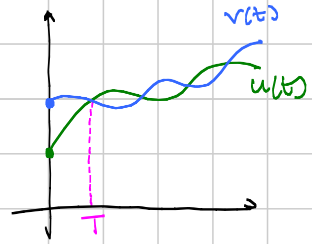
Oss. importante Se metto disuguaglianze $\geq$ e $\leq$ i teoremi continuano a valere con $\geq$ e $\leq$ purché $f(t,u)$ soddisfi le ipotesi del teo. di unicità

$\boxed{\text{Dim. del teorema con soprasoluzioni}}$ Occhio: non posso confrontare $f(t,u)$ e $f(t,v)$ in generale

Supponiamo per assurdo che non sia vero che $v(t) > u(t)$.

Pongo allora

$$T = \inf\{t \geq 0 : v(t) \leq u(t)\}$$



Considero la funzione

$$w(t) = v(t) - u(t)$$

È facile dimostrare che

$$w'(T) \leq 0$$

D'altra parte

$$w'(T) = v'(T) - u'(T) > f(T, v(T)) - f(T, u(T)) = 0,$$

uguali in T

Assurdo $\square$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - e^t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Domanda: esistono valori di $\alpha > 0$ per cui ho blow-up?

Basta trovare una sottosoluzione che ha blow-up!!!

Come trovarla?

Penso al problema $u' = u^2$. Le soluzioni di questo hanno blow-up e sono della forma

$$u(t) = \frac{1}{c-t}.$$

Ora provo a giocare sui parametri $w(t) = \frac{1}{a-tb}$ $(a>0, b>0)$

Sarà vero che questa è sottosoluzione del problema originario (fino a quando esiste?). Sostituisco

$$w'(t) = \frac{b}{(a-tb)^2} < w^2 - e^t = \frac{1}{(a-tb)^2} - e^t \quad \text{per } 0 \leq t < \frac{a}{b}$$

Devo quindi sperare che

$$\frac{b}{(a-tb)^2} < \frac{1}{(a-tb)^2} - e^t \qquad \forall\, 0 \leq t < \frac{a}{b}$$

Questo può succedere per valori "piccoli" di b

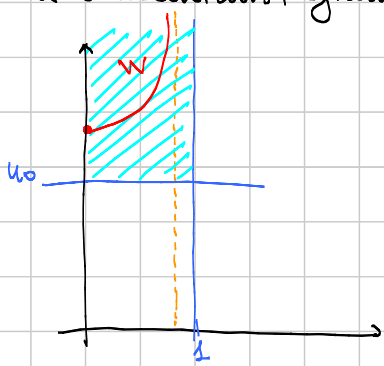
— o — o —

Altro modo di vedere la stessa cosa. Consideriamo $0 \leq t \leq 1$. Allora

$$u' = u^2 - e^t > u^2 - e > \frac{u^2}{2} \quad \text{se } u \text{ è abbastanza grande}$$

cioè $u \geq u_0$

Risolvo $w' = \frac{w^2}{2}$. Le soluzioni di questa hanno tutte blow-up e più parto in alto, prima ho il blow-up (c'è la formula esplicita).



Dunque esiste una soluzione di $w' = \frac{w^2}{2}$ che vive tutta nella zona tratteggiata

Dico che $w(t)$ è una sottosoluzione del problema originario.
Infatti banalmente si ha che

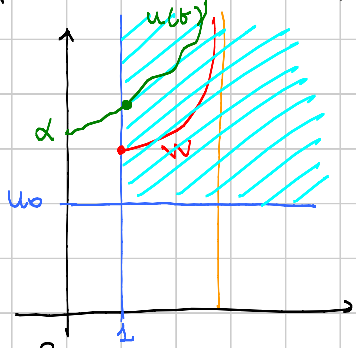
$$w'(t) = \frac{w^2}{2} < w^2 - e \leq w^2 - e^t$$

occhio: questo vale solo nella zona tratteggiata

— o — o —

Esempio 2 $\quad u' = e^{tu} \qquad u(0) = \alpha$

Esistono valori per cui si ha blow-up



$$u' = e^{tu} \geq e^{u} \geq u^2$$

qui serve $t \geq 1$

forse sempre, ma per lo meno per $u \geq u_0$

Ora considero il problema $w' = w^2$, con $w(1) = \beta$
Questa ha tante soluzioni che hanno blow-up nella zona tratteggiata.
Per trovare una u che scoppia basta che parta per $t=1$ sopra la w. Tornando indietro fino a $t=0$ trovo l'α richiesto.

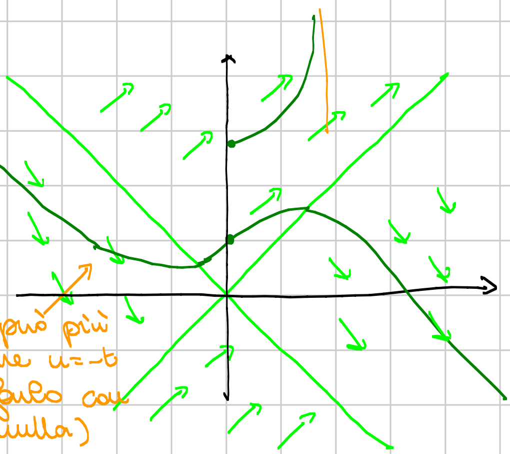
Cosa da dimostrare è che w è sottosoluzione nella zona tratteggiata, cioè

$$w' = w^2 \leq e^w \leq e^{tw}$$

— o — o —

Esempio 3 $\quad u' = u^2 - t^2 \qquad u(0) = \alpha$

esistenza globale con limite $+\infty$



Segno di u'.
Possibilità per $t > 0$

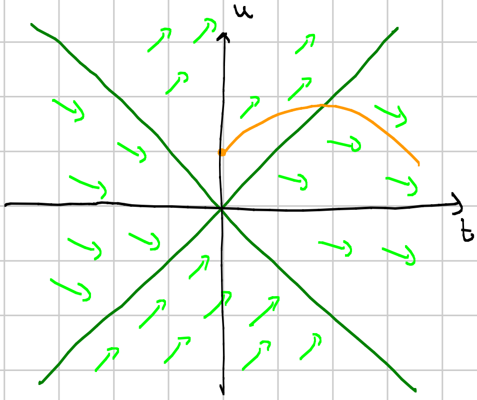
non può più toccare $u = -t$ (dovrebbe farlo con derivata nulla)

1. tocca e poi scende per sempre
2. non tocca + blow-up (succede)
3. non tocca + esistenza globale

SSSUP 2010 – LEZIONE 023

Titolo nota 28/04/2010

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Dim. che esiste $\alpha > 0$ t.c. il problema ha soluzione globale (per $t \geq 0$) monotona crescente.



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Ci sono soluzioni che toccano $u = t$ poi scendono e hanno esistenza globale per $t \geq 0$.

Perché ci sono? Basta partire dalla bisettrice.

Perché hanno esistenza globale?

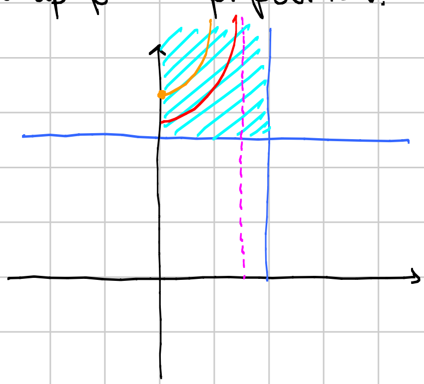
Non possono toccare la retta $u = -t$ perché dovrebbero arrivare da sopra con derivata $= 0$.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se per un certo $\alpha > 0$ ho il comp. descritto al fatto 1, allora ho lo stesso per tutti i $\beta \in (0, \alpha)$.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Esistono soluzioni che hanno blow-up per tempi positivi.

La colpa è di u^2.

$$u' = u^2 - t^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{serve} \\ t \leq 1}}{\geq} u^2 - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{serve} \\ u \text{ grande}}}{\geq} \frac{u^2}{2}$$



Risolvo il problema $v' = \frac{v^2}{2}$.

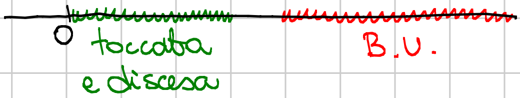
Volendo trovo esplicitamente le soluzioni e scopro che hanno tutte blow-up e più il dato è grande, e più il tempo di BU è piccolo (tende a 0 quando il dato tende a $+\infty$). Quindi ci sono soluz. nella zona tratt.

In quella zona v è sottosoluz. dell'eq. iniziale: infatti

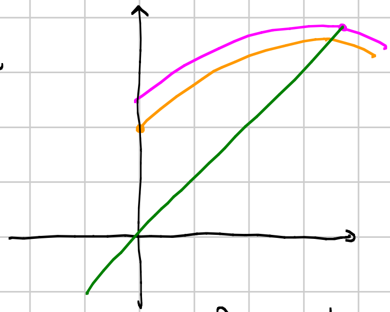
$$v' = \frac{v^2}{2} \leq v^2 - 1 \leq v^2 - t^2 \quad \text{(conto di sopra).}$$

Le soluzioni che partono sopra hanno per forza blow-up.

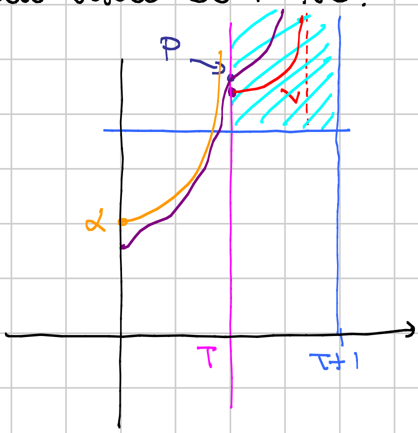
$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Se per un certo $\alpha > 0$ c'è BU, allora c'è per tutti i $\beta > \alpha$.



$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Un α "in mezzo" (tra sup verdi e inf rossi) può essere verde? NO! Basterebbe partire da un pto di $u = t$ + alto e avrei che α non è $\geq$ del sup. dei verdi.
Questo dice che la zona verde è aperta.



$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Partendo da un α in mezzo, ci può essere BU? NO!
Idea: se ci fosse BU, allora ci sarebbe anche partendo un po' sotto.
Idea: parto molto alto dall'asintoto.



$$u' = u^2 - t^2 \underset{0 \le t \le T+1}{\geq} u^2 - (T+1)^2 \underset{u \text{ grande}}{\geq} \frac{u^2}{2}$$

ancora una volta risolvo $v' = \frac{v^2}{2}$
con dato $v(T)$ = abbastanza grande.
In questo caso la sol. ha BU prima di $T+1$
Considero la sol. u che passa per P. Questa
* per $t \geq T$ è costretta ad avere BU prima di $T+1$ (sta sopra v)
* per $t \leq T$ esisterà tranquilla stando sotto quella arancio.

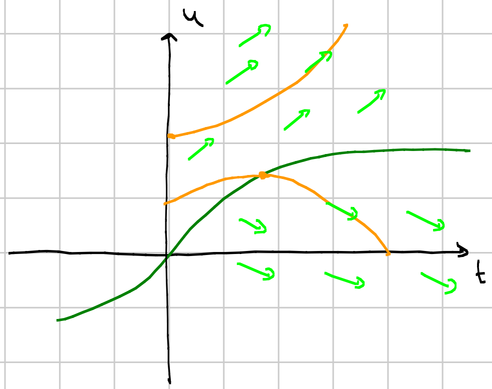
Quindi abbiamo trovato una soluz. con BU e dato $< \alpha$.
Anche la zona rossa è aperta.

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ Per sup verdi $\leq \alpha \leq$ inf rossi si ha che
* la soluzione non ha B.U. (sarebbe rossa)
* la soluzione non tocca $u = t$ (sarebbe verde)

L'unica possibilità è che sia globale e crescente

Fatto 8 C'è un unico α con la proprietà data, cioè il sup e l'inf. coincidono.
Vediamo la stessa cosa in un caso più semplice

— o — o —



Esempio 2 $\begin{cases} u' = u - \arctan t \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

Fatto 1 L'esistenza globale è gratis

$$|f(t,u)| \leq A|u| + B.$$

In questo caso

$$|u - \arctan t| \leq |u| + |\arctan t| \leq |u| + \frac{\pi}{2}.$$

Fatto 2 Esistono α per cui la sol. non è monotona: basta partire dalla curva $u = \arctan t$. Se per un α succede, succede per quelli prima

Fatto 3 Esistono α per cui $u(t)$ è strett. cresc. e tende a $+\infty$. Basta prendere $\alpha = 10$ (serve teo. asintoto ...). Se per un α succede, succede per quelli dopo.

Fatto 4 Che succede in mezzo?

* Non può toccare $u = \arctan t$ (altrimenti riparto un po' sopra sulla curva ...)
* Non può toccare $u = \pi/2$, perché potrei trovare una soluzione che parte sotto e ancora tende a $+\infty$

L'unica possibilità è che tenda a $\frac{\pi}{2}$ crescendo.

Fatto 5 Questo α è unico. Supponiamo che ci siano 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ che tendono a $\frac{\pi}{2}$, e supp. $u(0) < v(0)$.

Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. Che cosa risolve $w(t)$?

$$w'(t) = v'(t) - u'(t) = v(t) - \cancel{\arctan t} - u(t) + \cancel{\arctan t}$$

$$w'(t) = v(t) - u(t) > 0$$

perché essendo $v(0) > u(0)$ si avrà sempre $v(t) > u(t)$

Quindi $w(0) > 0$ e cresce. Ma allora non è possibile che $\lim_{t \to +\infty} w(t) = 0$.

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ α si riesce "quasi" a calcolare perché l'equazione è lineare.

$u' = u - \arctan t$, $\quad u' - u = -\arctan t$ Moltiplico per e^{-t}

$$u'e^{-t} - ue^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$(ue^{-t})' = -\arctan t \cdot e^{-t} \qquad \text{quindi integrando in } [0,t]$$

$$u(t)e^{-t} - \underbrace{u(0)}_{\alpha} = -\int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds$$

$$u(t)e^{-t} = \alpha - \int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{u(t) = e^t \left\{ \alpha - \int_0^t \arctan s \cdot e^{-s}\, ds \right\}}$$

Formula esplicita, modulo l'integrale

Quando $t \to +\infty$, tutto dipende da

$$\alpha \gtreqless \underbrace{\int_0^{+\infty} \arctan s \cdot e^{-s}\, ds}_{\text{Integrale improprio convergente}}$$

$\alpha > \dots \quad u(t) \to +\infty$

$\alpha < \dots \quad u(t) \to -\infty$

$\alpha = \dots \quad u(t) \to \frac{\pi}{2}$

Si vede anche dalla formula che per α critico $u(t) \to \frac{\pi}{2}$.

Infatti

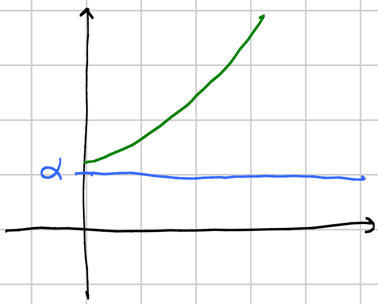
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha - \int_0^t \dots}{e^{-t}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{-\arctan t \cdot e^{-t}}{-e^{-t}} = \frac{\pi}{2}.$$

SSSUP 2010 – LEZIONE 24

Titolo nota 28/04/2010

Esercizio: provare a dim. l'unicità della soglia in $u' = u^2 - t^2$.

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u^2+t^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$



$\boxed{\text{Fatto 1}}$ L'esistenza globale è quasi gratis (per tempi ≥ 0). Infatti sarà $u(t) \geq \alpha$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$$u' = \frac{1}{t^2+u^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \qquad \text{Derivata limitata} \Rightarrow \text{esistenza globale}$$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Cosa posso dire di $\lim_{t \to +\infty} u(t)$? Se fosse $\ell \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \to 0$ e questo è compatibile ...

[Oss. / ripasso: se fosse $u' = \dfrac{1}{u^2+t}$, allora ℓ non può essere reale. Infatti brutalmente sarebbe

$$u' \sim \frac{1}{\ell^2+t} \sim \frac{1}{t}, \quad \text{quindi } u \sim \log t \text{ e questa non ha limite reale }].$$

Nell'esempio $u' \sim \dfrac{1}{t^2}$, il che è compatibile con un limite $\in \mathbb{R}$

In questo caso il limite è finito per ogni $\alpha > 0$!!! Infatti

$$u(t) - u(1) = \int_1^t u'(s)\,ds = \int_1^t \frac{1}{u^2(s)+s^2}\,ds \leq \underbrace{\int_1^t \frac{1}{s^2}\,ds}$$

Quando $t \to +\infty$ questo converge ad un numero K

Quindi $u(t) \leq u(1) + K$ e non può tendere a $+\infty$.

Domanda: esiste un dato iniziale per cui il limite è 2010?
Idea: trovare dati per cui $\ell > 2010$ e dati per cui $\ell < 2010$.
In mezzo ...

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Esistono dati per cui $\ell > 2010$ (basta partire sopra...)
Se succede per α, succede dopo

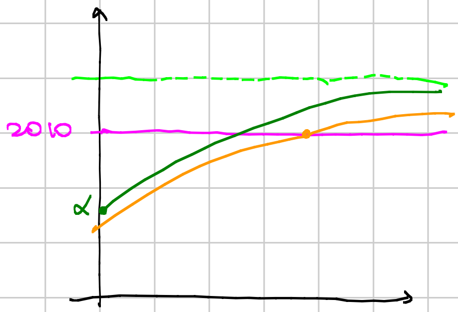
$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Esistono dati per cui $\ell < 2010$? SI: partiamo da $\alpha = 1$
Infatti

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds = 1 + \int_0^t \frac{1}{u^2(s) + s^2}\,ds$$

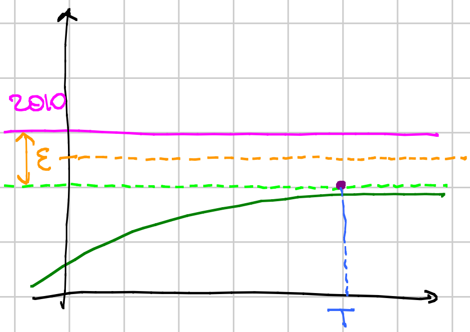
$$\leq 1 + \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\,ds \leq 1 + \frac{\pi}{2} \leq 2010$$

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Prendiamo un α in mezzo. Non può essere che
$\lim_{t \to +\infty} u(t) > 2010$

Si trova facilmente un α + piccolo per cui il limite è ancora > 2010



$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Può essere un limite < 2010?



Idea: trovare soluzione + grande che ha limite ancora < 2010
Parto sulla retta $u = 2010 - \varepsilon$ con T abbastanza grande. Allora

$$u(t) - u(T) = \int_T^t u'(s)\,ds = \int_T^t \frac{1}{u^2+s^2}\,ds$$

$$\leq \int_T^t \frac{1}{s^2}\,ds \leq \underbrace{\int_T^{+\infty} \frac{1}{s^2}\,ds}_{\text{se } T \text{ è abbastanza grande, questo è } \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

Questo dice che

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) \leq u(T) + \frac{\varepsilon}{2} < 2010$$

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ Partendo in mezzo, l'unica possibilità rimasta è che sia $\ell = 2010$

$\boxed{\text{Fatto 8}}$ Unicità. Supponiamo che ci siano 2 soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ che tendono a zero, e supponiamo $u(t) < v(t)$.
Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. È chiaro che $w(t) > 0$ e $w(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

$$w'(t) = v'(t) - u'(t) = \frac{1}{v^2+t^2} - \frac{1}{u^2+t^2} = \frac{u^2+\cancel{t^2}-v^2-\cancel{t^2}}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)} =$$

$$= \frac{(u+v)\overbrace{(u-v)}^{-w(t)}}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)} \leq 0 \qquad \text{Acc...}$$

Però... $w'(t) = -w(t)\cdot \text{roba}(t)$
Questa è un'eq. diff. lineare che si può "risolvere"

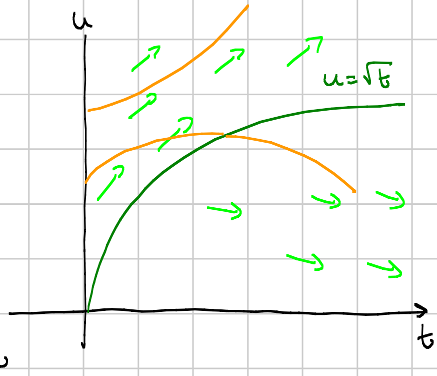
$$w(t) = w(0)\cdot e^{-\text{Roba}(t)}$$
primitiva di roba (t)

Cosa succede quando $t \to +\infty$? Tutto dipende da $\lim_{t\to+\infty} \text{Roba}(t)$, cioè da

$$\int_0^{+\infty} \text{roba}(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u+v}{(v^2+t^2)(u^2+t^2)}\,dt}_{=I} < +\infty$$
perché u e v sono limitate e c'è t^4 sotto

Ma allora $\lim_{t\to+\infty} w(t) = w(0)\cdot e^{-I} \neq 0$ il che è assurdo.

— o — o —



Esempio 2 $\begin{cases} u' = \arctan(u^2-t) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Esistenza globale gratis.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Ci sono soluzioni non monotone (basta partire su $u=\sqrt{t}$)

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Ci sono soluzioni monotone?
Se ci sono, al max crescono come rette con coeff. al + $\pi/2$

Idea: trovare una sottosoluzione che non tocca.
La cerchiamo del tipo $v(t) = t + \alpha$ con α da scegliere bene.
Impongo che sia una sottosoluzione:

$$v' \leq \arctan(v^2 - t) \qquad \text{cioè}$$

$$1 \leq \arctan(t^2 + 2\alpha t + \alpha^2 - t) = \arctan(t^2 + (2\alpha - 1)t + \alpha^2)$$

La disuguaglianza deve valere $\forall\, t \geq 0$.
Basta scegliere α in modo tale che $2\alpha - 1 \geq 0$ e $\arctan \alpha^2 \geq 1$.
Infatti a quel punto

$$\arctan(\ldots) \geq \arctan(t^2 + \alpha^2) \geq \arctan \alpha^2 \geq 1.$$

Inoltre, sempre per α grande si ha che $t + \alpha$ sta sempre sopra $u = \sqrt{t}$.

<u>Question</u>: cosa succede in mezzo.

SSSUP 2010 – LEZIONE 25

Titolo nota 29/04/2010

Esercizio Dimostrare che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge

Se fosse $\int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ basterebbe dire che

$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Allora

$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge $\Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ converge $\Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge

esponente $2>1$ — confronto tra integrali con integranda positiva — Assoluta convergenza (integrab.)

Da non dire mai

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ converge per confronto}$$

— o —

Se fosse $\int_0^{10} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ diverge per confronto asintotico con $\int_0^{10} \frac{dx}{x^2}$.

— o —

Se provo l'assoluta integrabilità per $\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ mi ritrovo alla fine con $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Questo diverge, quindi non si può dire nulla!!

In questo caso funziona l'integrazione per parti

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{10}}_{\text{Numero}} + \int_{10}^{+\infty}$$ ← basta studiare questo

Numero: $\frac{\sin x}{x}$ è funzione limitata!

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{10}^{A} \underset{G}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{f}{\sin x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\underset{G}{\frac{1}{x}}\underset{F}{(-\cos x)}\right]_{10}^{A} - \int_{10}^{A} \underset{g}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{F}{(-\cos x)} \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \boxed{\frac{-\cos A}{A}} + \frac{\cos 10}{10} - \int_{10}^{A} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right\} = \frac{\cos 10}{10} - \underbrace{\int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{converge: visto sopra!}}$$

$\boxed{\frac{-\cos A}{A}} \to 0$

Esercizio Usare lo stesso metodo per dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \underbrace{2x \sin x^2}_{f}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} 2x \cos x^2\, dx \qquad \text{convergono}$$

Vedere con quali altri esponenti (invece di x^2) la cosa funziona.

—o—o—

Esercizio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ stessi problemi di sopra

Idea: " integrazione per parti " sulle serie

Siano a_n e b_n 2 successioni. Sia $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $(A_0 = 0)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i + A_n b_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_{i+1} - \underbrace{A_0 b_1}_{=0}$$

$$= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1})$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1})}$$

Proprietà delle sommatorie

Facciamo 2 ipotesi:

① $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|A_n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② La successione b_n è positiva, deb. decr. e $b_n \to 0$

Allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge

Dim. Devo fare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\{ \underbrace{\boxed{A_n b_n}}_{\to 0} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \right\}$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_i (b_i - b_{i+1}) \leftarrow \text{devo dim. che converge}$$

La seconda serie converge assolutamente. Infatti

$$|A_i| \cdot |b_i - b_{i+1}| \leq \underset{①}{M} \; \underbrace{(b_i - b_{i+1})}_{②}$$

e questa è una serie telescopica $b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cancel{b_3} - \dots$

— o — o —

Applico il criterio a $\sum \frac{\sin n}{n}$ con $b_n = \frac{1}{n}$ (ipotesi ok) e $a_n = \sin n$. Devo verificare l'ipotesi ①, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo si dimostra con i numeri complessi. Prendo $x = e^i$. Allora $x^k = e^{ki} = \cos k + i \sin k$

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = (\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n) + i(\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n)$$
$$= x \frac{x^n - 1}{x - 1} = e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1} = z_n$$

Devo stimare $\operatorname{Im}(z_n)$ e la stimo con $|z_n|$

$$|z_n| = \underbrace{|e^i|}_{1} \frac{|e^{ni} - 1|}{\underbrace{|e^i - 1|}_{\text{numero} \neq 0}} \leq \frac{|e^{ni}| + 1}{|e^i - 1|} = \frac{2}{|e^i - 1|} = M$$

Come sottoprodotto abbiamo ottenuto che le successioni

$$\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n \qquad \text{e} \qquad \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$$

sono limitate.

— o — o —

Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$. Più in generale calcoliamo

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} \, dx$$

Brutalmente: $\boxed{1}$ $F(0)$ è quello che voglio calcolare

$\boxed{2}$ Calcoliamo $F'(\lambda)$. Brutalmente

$$F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\cancel{x}} \underbrace{e^{-\lambda x} (-\cancel{x})}_{\text{derivata rispetto a } \lambda} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot \sin x \, dx$$

$$\int \underset{G}{e^{-\lambda x}} \underset{f}{(-\sin x)} dx = \underset{G}{e^{-\lambda x}} \underset{F}{\cos x} - \int \underset{g}{(-\lambda e^{-\lambda x})} \underset{F}{\cos x} \, dx$$

$$= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda \int \underset{G}{e^{-\lambda x}} \underset{f}{\cos x} \, dx$$

$$= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda \left\{ e^{-\lambda x} (\sin x) - \int (-\lambda e^{-\lambda x})(\sin x) \right\}$$

$$= e^{-\lambda x} \cos x + \lambda e^{-\lambda x} \sin x + \lambda^2 \int e^{-\lambda x} \sin x \, dx$$

Di conseguenza

$$(\lambda^2+1) \int e^{-\lambda x} \sin x \, dx = -e^{-\lambda x} (\cos x + \lambda \sin x)$$ (controllare i segni)

Integrando in $[0, +\infty)$ ottengo

$$(\lambda^2+1) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin \, dx = 1$$

Quindi alla fine $\quad F'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2+1} \quad$ (per $\lambda > 0$)

Quindi $F(\lambda) = -\arctan \lambda + c$

$\boxed{3}$ Per calcolare c faccio $\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = \int_0^{+\infty} 0 \, dx = 0$

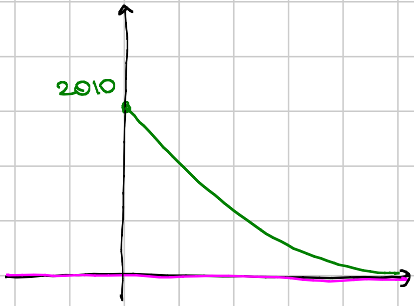
Quindi $c = \frac{\pi}{2}$, ma allora $F(0) = c = \frac{\pi}{2}$.

SSSUP 2010 — LEZIONE 26

Titolo nota 29/04/2010

Esercizio $\begin{cases} u' = -\dfrac{e^{2u}-1}{e^{4u}} \\ u(0) = 2010 \end{cases}$

Eq. autonoma: bene!!
$u(t) \equiv 0$ soluzione stazionaria



Esistenza globale gratis perchè è decrescente e non può scendere sotto 0 (questo nel futuro).
È globale anche nel passato perchè

$|f(u)| \leq$ costante per $u \geq 0$. (sugli $u<0$ non ci va)
perchè $f(0)=0$ e $f(u) \to 0$ per $u \to +\infty \Rightarrow f$ è limitata

Per $t \to +\infty$ si ha che $u(t) \to 0$ perchè è l'unico compatibile con teo. asintoto.
Come tende a zero $u(t)$?
Oss. Quando $u \sim 0$ si ha che $-\dfrac{e^{2u}-1}{e^{4u}} \sim -\dfrac{\cancel{1}+2u-\cancel{1}}{1} = -2u$

Quindi è come se fosse $u' \sim -2u$ che ha come soluzioni $u(t) = c e^{-2t}$ (si risolve esplicitamente).

—o—o—

Esercizio $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2010} e^{-t}\, dt$ converge perchè c'è e^{-t}
Formalmente: confr. asint. con $\frac{1}{t^2}$.

Per calcolarlo studio in generale

$$\int \underset{G}{t^k}\, \underset{f}{e^{-t}}\, dt = \underset{G}{t^k}\, \underset{F}{(-e^{-t})} - \int \underset{g}{t^{k-1}(k)}\, \underset{F}{(-e^{-t})}\, dt$$

$$= -t^k e^{-t} + k\int t^{k-1} e^{-t}\, dt$$

Quindi $\underbrace{\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt}_{I_k} = -\underbrace{\left[t^k e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + k\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\,dt$

$I_k = k\, I_{k-1}$

da cui facilmente $I_k = k!\cdot \underbrace{I_0}_{=1} = k!$

Oss. La funzione $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$

è una funzione definita per ogni $\alpha \geq 0$ reale (anche per $\alpha > -1$) che sugli interi coincide con il fattoriale (cioè $I(\alpha) = \alpha!$ per $\alpha \in \mathbb{N}$)

Esercizio Calcolare $\int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx = S_k$

Facile: $S_0 = \frac{\pi}{2}$, $S_1 = 1$. Successivamente

$$\int \sin^k x\,dx = \int \underset{f}{\sin x}\cdot \underset{G}{\sin^{k-1} x} = -\cos x\cdot \sin^{k-1} x - \int (-\cos x)\cdot(k-1)\sin^{k-2} x\cdot \cos x\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{k-1} x + (k-1)\int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\cdot \sin^{k-2} x\,dx$$

$$= -\cos x\cdot \sin^{k-1} x + (k-1)\int \sin^{k-2} x\,dx - (k-1)\int \sin^k x\,dx$$

Quindi $k\int \sin^k x\,dx = -\cos x\cdot\sin^{k-1} x + (k-1)\int \sin^{k-2} x\,dx$

Integrando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ otteniamo

$$k\,S_k = (k-1)\,S_{k-2} \quad \text{quindi} \quad S_k = \frac{k-1}{k}\,S_{k-2}$$

Esempi $S_{2010} = \frac{2009}{2010}\,S_{2008} = \frac{2009}{2010}\,\frac{2007}{2008}\,S_{2006}$

$$= \dots = \frac{(2009)!!}{(2010)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

Più in generale $S_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}$; $S_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$

Da queste formule è possibile ottenere valori approssimati di π

$$\frac{S_{2k+1}}{S_{2k}} = \frac{(2k)!!\,(2k)!!}{(2k-1)!!\,(2k+1)!!} \cdot \frac{2}{\pi}$$

Si tratterebbe ora di capire a cosa tende $\frac{S_{2k+1}}{S_{2k}}$.
Mettiamo che tenda ad 1. Allora
la frazione con i fattoriali $\to \frac{\pi}{2}$ per $k \to +\infty$.

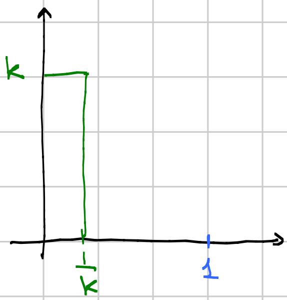
Perché tende ad 1? Boh !!!

Più semplice: $\lim_{k\to+\infty} S_k = 0$. Brutalmente

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^k x\, dx \underset{\text{Speranza}}{=} \int_0^{\pi/2} \lim_{k\to+\infty} \sin^k x\, dx$$

Cose di questo tipo in generale sono false.
Esempio

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{se } x \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$



$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$ per ogni $x > 0$
(fissato $x > 0$ si ha $f_k(x) = 0$ definitivamente)

Tuttavia

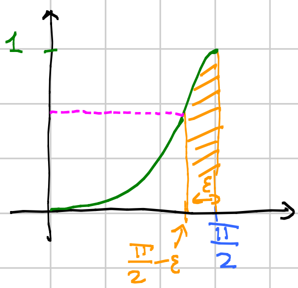
$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = 1$$

Limite integrali $\neq$ integrale del limite

Perché funziona nell'esempio?
Fisso $\varepsilon > 0$

$$0 \le \int_0^{\pi/2} \sin^k x\, dx = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^k x\, dx + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\, dx}_{\text{metto 1 al posto di sin}}$$

$$\le \underset{\substack{\text{stima}\\ \text{della base}}}{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^k\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\substack{\text{max della funzione}\\ \text{nell'intervallo } [0, \frac{\pi}{2}-\varepsilon]}} + \varepsilon$$



Faccio liminf e limsup tenendo fisso ε. Ottengo

$$0 \le \liminf_{k\to+\infty} S_k \le \limsup_{k\to+\infty} S_k \le \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\frac{\pi}{2}\sin^k\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}_{\to 0 \quad a^k \text{ con } a<1} + \varepsilon$$

Quindi dato ε > 0 ho che $0 \le \liminf \le \limsup \le \varepsilon$

Essendo ε > 0 arbitrario, allora è tutto 0.

<u>Teorema</u> Il limite degli integrali è uguale all'integrale del limite se tutte le $f_k(x)$ sono tali che

$$|f_k(x)| \le g(x)$$

dove $g(x)$ è una funzione integrabile fissa (indipendente da k)

<u>Oss.</u> Esiste un teorema simile che dice

"la derivata dell'integrale (dipendente da un param. λ)

= integrale della derivata rispetto a λ dell'integranda"

Si tratta solo di vedere la derivata come limite del rapporto incrementale e applicare teo. sui limiti.

AGGIUNTE POST VIDEO

$\boxed{1}$ Perché $\frac{S_{k+1}}{S_k} \to 1$? Intanto è facile vedere che

$$\frac{S_{k+2}}{S_k} \leq \frac{S_{k+1}}{S_k} \leq 1$$

Il termine di sinistra si calcola esplicitamente e va a 1.
La conclusione è con i Carabinieri

$\boxed{2}$ $u' = u^2 - t^2$ Perché la sol. globale monotona (con $\alpha > 0$) è unica ?

Siano u e v due sol. di questo tipo, con $v > u$. Allora $w = v - u$ risolve

$$w' = v^2 - u^2 = \underbrace{(v+u)}_{\geq w}\underbrace{(v-u)}_{= w} \geq w^2$$

ma allora w ha blow-up in tempo finito, mentre u e v no!