

Syllabus [2.0]

Massimo Gobbino

Aggiornato al 6 settembre 2026

Sommario

Questa nota nasce dall'esigenza di dare una descrizione concreta e dettagliata dei prerequisiti per uno studente che si accinge a frequentare un corso di studi universitario con alto contenuto di tipo scientifico (ad esempio matematica, fisica o ingegneria). Il pubblico a cui è rivolta va dagli studenti di scuola superiore ai docenti dei primi anni di università, passando per i docenti di scuola superiore. In particolare, questa nota vuole essere

1. un promemoria per gli studenti che stanno per iscriversi all'università e desiderano affrontare la nuova sfida con una adeguata preparazione,
2. una guida per gli insegnanti di scuola superiore che vogliano avere un'idea precisa dei contenuti che i loro studenti dovrebbero assolutamente padroneggiare,
3. un riferimento per gli estensori dei quesiti di ammissione o verifica dei prerequisiti per vari corsi universitari,
4. una base per i docenti che si trovano a tenere corsi di recupero/orientamento per studenti già immatricolati, ma con evidenti carenze di prerequisiti.

Gli argomenti qui elencati dovrebbero essere tutti e soli i contenuti matematici che nei corsi universitari si danno di solito per acquisiti, limitandosi al più a qualche veloce richiamo. Per questo è importante che su questi argomenti, nessuno escluso, lo studente abbia la massima sicurezza e capacità operativa.

Al contrario, volutamente non c'è qui nessun accenno ad argomenti quali la logica delle proposizioni, la teoria degli insiemi, il concetto astratto di funzione, la descrizione precisa degli insiemi numerici, argomenti ai quali di solito sono dedicate le prime lezioni dei corsi universitari di matematica di base. Men che meno si parla qui di limiti, derivate, integrali, matrici.

Nella presentazione non c'è nessuna pretesa, e nemmeno intenzione, di sistematicità o consequenzialità. Si tratta di una guida al ripasso e all'inquadramento delle conoscenze, pensata per chi più o meno ha già visto in vita sua gli argomenti, quindi è normale che una certa sezione contenga richiami o faccia riferimento a concetti che compariranno solo in sezioni successive.

Il materiale è diviso per comodità in 20 categorie tematiche, tra le quali vale una sorta di "par condicio". Operativamente, questo vuol dire che, tutte le volte che si prepara un test di verifica dei prerequisiti, sarebbe ragionevole fare in modo che le varie categorie fossero parimenti rappresentate. Un discorso analogo dovrebbe valere per un ipotetico corso di preparazione o di recupero (anche se alcune categorie richiedono, obiettivamente, più tempo di altre per essere trattate).

Indice

Categoria 01 – Matematizzazione: introduzione di variabili	3
Categoria 02 – Matematizzazione: conteggi e percentuali	4
Categoria 03 – Aritmetica	5
Categoria 04 – Polinomi	6
Categoria 05 – Numeri: potenze e radici	7
Categoria 06 – Numeri: logaritmi	8
Categoria 07 – Algebra basic	9
Categoria 08 – Funzioni: funzioni polinomiali	10
Categoria 09 – Funzioni: espressioni fratte	11
Categoria 10 – Funzioni: esponenziali e logaritmi	12
Categoria 11 – Funzioni: valori assoluti e radici	13
Categoria 12 – Trigonometria: elementi di base	14
Categoria 13 – Trigonometria: manipolazione di espressioni	15
Categoria 14 – Trigonometria: applicazioni in geometria	16
Categoria 15 – Geometria analitica: punti e rette	17
Categoria 16 – Geometria analitica: circonferenze	18
Categoria 17 – Geometria analitica: tutto il resto	19
Categoria 18 – Geometria piana: poligoni	20
Categoria 19 – Geometria piana: circonferenze, trasformazioni	22
Categoria 20 – Geometria solida	23

Categoria 01 – Matematizzazione: introduzione di variabili

Parole chiave

Modello, variabili, proporzione, variabili direttamente/inversamente proporzionali

Modellizzazione Saper introdurre opportune variabili per tradurre situazioni enunciate in linguaggio naturale in opportune equazioni o sistemi di equazioni (o disequazioni).

Proporzionalità Aver chiaro il concetto di variabili direttamente proporzionali e di variabili inversamente proporzionali. Più in generale, aver chiaro cosa vuol dire che una variabile è proporzionale a un'opportuna potenza di un'altra variabile. Saper tradurre semplici situazioni del mondo reale in termini di variabili direttamente o inversamente proporzionali.

Categoria 02 – Matematizzazione: conteggi e percentuali

Parole chiave

Modello, conteggio, percentuale, probabilità

Conteggi classici Saper contare semplici configurazioni descritte in linguaggio naturale, ad esempio quelle che si riducono alle seguenti tipologie:

- quanti menù di 3 portate possiamo comporre potendo scegliere tra a primi, b secondi e c dessert,
- quanti sono gli anagrammi di una parola data, anche con lettere ripetute,
- quante sono le permutazioni di un insieme di n elementi,
- quanti sono tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi,
- in quanti modi possiamo formare una squadra di k elementi attingendo da un gruppo di n persone,
- quanti incontri di calcio ci sono in un girone di n squadre in cui ogni squadra incontra una volta tutte le altre,
- in quanti modi k bambini possono scegliere tra n giocattoli (se anche più bambini possono scegliere lo stesso giocattolo),
- in quanti modi k bambini possono scegliere tra n giocattoli (se bambini diversi devono scegliere giocattoli diversi).

Unione/intersezione di insiemi Sapere quali relazioni legano il numero di elementi di due insiemi e della loro unione e intersezione. Saper estendere il risultato al caso di tre o più insiemi. Saper tradurre semplici situazioni e conteggi del mondo reale in termini di unione/intersezione di insiemi.

Percentuali Aver chiaro il concetto di percentuale e come si calcola. Saper calcolare percentuali di percentuali. Aver chiaro cosa vuol dire aumentare o diminuire una certa grandezza di una data percentuale. Saper calcolare di quanto bisogna aumentare o diminuire una quantità data per ottenerne un'altra. Saper modellizzare semplici situazioni del mondo reale (ad esempio tassi di interesse o sconti) in termini di percentuali.

Probabilità Aver chiaro il concetto di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili (quando i casi possibili sono un numero finito e sono pensati come equiprobabili tra di loro). Saper calcolare la probabilità di semplici eventi, ad esempio:

- ottenere un numero pari/dispari lanciando un dado,
- ottenere una certa somma lanciando due o tre dadi,
- ottenere un certo numero di teste/croci lanciando un certo numero di monete.

Categoria 03 – Aritmetica

Parole chiave

Numero primo, fattorizzazione, divisibilità, divisione con resto, massimo comun divisore, minimo comune multiplo, rappresentazione decimale, rappresentazione in base b .

Numeri primi Aver chiaro il concetto di numero primo. Sapere come procedere per stabilire se un intero positivo è primo oppure no, e saperlo fare effettivamente in un range ragionevole (ad esempio per interi di due o tre cifre).

Fattorizzazione Saper determinare la fattorizzazione di un numero intero. Saper stabilire se due interi a e b sono l'uno multiplo dell'altro basandosi sulla loro fattorizzazione.

Divisione con resto Saper effettuare la divisione con resto tra 2 interi positivi a e b , avendo chiaro che il quoziente q ed il resto r soddisfano l'uguaglianza

$$a = b \cdot q + r$$

con $0 \leq r < b$.

Criteri di divisibilità Dato un intero positivo, sapere dedurre dalla sua espressione decimale se è divisibile per 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 25, 100. Saper testare la divisibilità per un certo k testando la divisibilità per le potenze di primi che dividono k .

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo Saper determinare MCD e MCM di due o più interi, ricorrendo quando serve alla loro fattorizzazione.

Rappresentazione in base diversa da 10 Aver chiaro il significato delle cifre nella rappresentazione di un intero in base 10. Saper passare dalla rappresentazione in base 10 alla rappresentazione in una base diversa da 10 (ad esempio in base 2) e viceversa.

Categoria 04 – Polinomi

Parole chiave

Monomio, polinomio, coefficiente, termine noto, grado, somma e prodotto di polinomi, divisione con resto, radice, fattorizzazione

Operazioni algebriche tra polinomi Somma, differenza, prodotto. Avere chiaro come si comporta il grado quando si sommano o moltiplicano due monomi o due polinomi. Aver chiaro il comportamento del grado rispetto a somma e differenza.

Divisione con resto Saper dividere un polinomio $A(x)$ per un polinomio $B(x)$, avendo presente che questo vuol dire determinare quoziente $Q(x)$ e resto $R(x)$ in maniera tale che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Essere consapevoli che il grado del resto deve essere minore del grado di $B(x)$, e aver chiara l'analogia con la divisione con resto tra interi.

Radici e fattorizzazione Saper cosa vuol dire che un certo numero è radice di un polinomio dato e sapere cosa comporta questo in termini di fattorizzazione. Avere chiaro che un polinomio di grado k non può avere più di k radici reali, ma può averne benissimo di meno. Saper trovare le radici dei polinomi di primo grado e di secondo grado.

Test della radice razionale Saper stabilire se un polinomio a coefficienti interi o razionali ha radici razionali oppure no. Saper trovare radici e fattorizzazione di polinomi di grado superiore al secondo nel caso in cui ci siano sufficienti radici razionali.

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo Saper determinare MCD e MCM di due o più polinomi, ricorrendo quando serve alla loro fattorizzazione.

Relazioni tra radici e coefficienti Conoscere le relazioni tra le radici ed i coefficienti di un polinomio di secondo grado. Avere chiaro perché ci si può sempre ridurre al caso in cui il coefficiente di x^2 è uguale a 1.

Categoria 05 – Numeri: potenze e radici

Parole chiave

Potenza, base, esponente, radice n -esima, esponente frazionario

Potenze con base reale ed esponente intero positivo Aver chiara la definizione di a^n , con n intero positivo, come “ a moltiplicato per se stesso n volte”. Aver chiaro come da questa definizione seguano le proprietà algebriche delle potenze (prodotto/rapporto di potenze diverse con la stessa base, prodotto/rapporto di potenze con base diversa ma esponente uguale, potenza di potenza). Aver chiaro che per certe espressioni, ad esempio la somma di potenze, o il prodotto di potenze con base ed esponente diversi, “non c’è una formula”.

Potenze con base reale ed esponente intero negativo Aver chiara la definizione di a^n , con n intero negativo, essendo consapevoli che ora serve che a sia diverso da 0. Aver chiaro come questa definizione si inserisce nel contesto della precedente, ereditandone le proprietà. Aver chiaro che in questo contesto risulta naturale porre per definizione $a^0 = 1$.

Radici n -esime di un numero reale Avere familiarità con la nozione di radice quadrata, o più in generale di radice con indice pari, avendo ben chiaro che l’argomento deve essere non negativo e che il “risultato” è non negativo. Avere familiarità con la nozione di radice cubica, o più in generale di radice con indice dispari, avendo ben chiaro che la definizione ha senso qualunque sia il segno dell’argomento, e che il segno del risultato è lo stesso dell’argomento.

Potenze con base reale ed esponente frazionario Conoscere e saper utilizzare l’interpretazione delle radici n -esime in termini di esponenti frazionari, avendo chiaro che le proprietà algebriche delle potenze valide con esponente intero si estendono agli esponenti frazionari. Essere consapevoli che tale interpretazione è limitata, anche nel caso di radici di indice dispari, ad argomenti maggiori o uguali a zero.

Potenze con base reale ed esponente reale Saper utilizzare potenze con esponente reale operando sugli esponenti in analogia a quanto si fa quando l’esponente è razionale o intero.

Categoria 06 – Numeri: logaritmi

Parole chiave

Logaritmo, base

Definizioni base Aver chiara la definizione di $\log_a b$ ed il suo ruolo rispetto all'equazione $a^x = b$. Aver chiare le limitazioni su a e b che sono insite nella definizione.

Proprietà algebriche dei logaritmi Avere chiare e saper applicare le formule per il logaritmo di un prodotto/quotiente, e il logaritmo di una potenza/radice. Aver chiaro che per certe espressioni (ad esempio il logaritmo della somma o il prodotto di due logaritmi) “non c'è una formula”.

Formula di cambiamento di base Sapere esprimere $\log_a b$ utilizzando i logaritmi di a e b in una data base c . Saper utilizzare il cambiamento di base per trasformare tutti i logaritmi presenti in una formula in una stessa base comune. Saper utilizzare una calcolatrice tascabile per calcolare $\log_a b$, eventualmente ricorrendo ad un opportuno cambio di base.

Categoria 07 – Algebra basic

Parole chiave

Confronto tra numeri, semplificare espressioni, raccogliere, fattorizzare, razionalizzare

Confronto tra numeri Saper ordinare due o più numeri reali, assegnati magari in varia forma (ad esempio come frazioni, radicali, esponenziali, logaritmi).

Espressioni algebriche Sapere manipolare espressioni algebriche, anche letterali, trasformandole in espressioni equivalenti, magari più semplici: sommare frazioni, fattorizzare, raccogliere, semplificare.

Gestione di uguaglianze e disuguaglianze Saper gestire i comuni passaggi nella risoluzione di equazioni o disequazioni: portare termini da destra a sinistra (o viceversa), moltiplicare o dividere a destra e sinistra per una stessa quantità, ricavare quando possibile una variabile.

Razionalizzazioni Saper gestire espressioni fratte che contengono radici quadrate, oppure somme/differenze di radici quadrate, spostando le radici dal numeratore al denominatore (o viceversa).

Scomposizioni notevoli Quadrato e cubo del binomio, quadrato del trinomio, differenza di quadrati, differenza di potenze n -esime con n pari, somma e differenza di potenze n -esime con n dispari.

Categoria 08 – Funzioni: funzioni polinomiali

Parole chiave

Equazioni e disequazioni di primo grado, equazioni e disequazioni di secondo grado, discriminante, valori interni/esterni, parabola, sistema di equazioni, sostituzione

Equazioni di primo grado Saper risolvere equazioni del tipo $ax + b = 0$.

Disequazioni di primo grado Saper risolvere disequazioni del tipo

$$ax + b > 0, \quad ax + b < 0,$$

gestendo correttamente i segni (ad esempio se a è negativo). Saper interpretare graficamente le equazioni e le disequazioni di primo grado.

Equazioni di secondo grado Conoscere la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, avendo chiara la relazione tra il segno del discriminante ed il numero di soluzioni.

Disequazioni di secondo grado Conoscere la teoria delle disequazioni di secondo grado, avendo chiaro come ricondursi sempre al caso in cui il coefficiente di x^2 è positivo.

Trinomi di secondo grado Conoscere il grafico di funzioni del tipo $ax^2 + bx + c$, avendo chiaro come i coefficienti influenzano l'aspetto del grafico (presenza o meno di radici, orientamento della parabola verso l'alto o verso il basso). Sapere interpretare equazioni e disequazioni di secondo grado in termini di grafico del trinomio di secondo grado ad esse associato.

(Dis)equazioni biquadratiche o assimilabili Saper trattare equazioni che si riducono a equazioni di secondo grado mediante la sostituzione $y = x^k$. Stesso discorso per le disequazioni.

Sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite (sistema lineare) Saper risolvere per sostituzione il sistema, avendo chiaro che può avere nessuna, una, oppure infinite soluzioni.

Sistemi generali di due equazioni in due incognite Saper ridurre il sistema ad una singola equazione in una incognita, per lo meno nei casi in cui è possibile procedere per sostituzione ricavando una variabile da una delle due equazioni.

Sistemi di disequazioni in una incognita Avere chiaro il significato di sistema di disequazioni ed il fatto che la sua soluzione è l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni che lo compongono.

Disequazioni strette o meno Indipendentemente dal contesto polinomiale, avere chiaro che trattare una disequazione del tipo $f(x) \geq g(x)$ equivale a trattare la disequazione $f(x) > g(x)$ e l'equazione $f(x) = g(x)$. Stesso discorso se il verso è quello opposto.

Categoria 09 – Funzioni: espressioni fratte

Parole chiave

Segno di un prodotto, segno di un quoziente, disequazione fratta

Segno di un prodotto Saper stabilire il segno del prodotto di uno o più termini a partire dal segno dei singoli fattori.

Segno di un quoziente Saper stabilire il segno del prodotto/quoziente di uno o più termini a partire dal segno dei singoli fattori, avendo in particolare consapevolezza di cosa accade quando si annullano i fattori al denominatore.

Disequazioni fratte generali Saper trattare disequazioni fratte riducendole allo studio del segno di una singola espressione con prodotti/quozienti, cioè “portando tutto a sinistra e lasciando 0 a destra”. Avere ben chiaro che moltiplicare a destra e sinistra per una stessa espressione di segno variabile conduce ad una disequazione non equivalente, dunque falsa completamente il risultato.

Categoria 10 – Funzioni: esponenziali e logaritmi

Parole chiave

Equazioni e disequazioni con esponenziali, equazioni e disequazioni con logaritmi, funzione esponenziale, funzione logaritmo

Equazioni di base con esponenziali Saper risolvere equazioni del tipo $a^x = b$ (con $a > 0$ e b reale). Essere consapevoli che il segno di b influenza l'esistenza o meno di soluzioni.

Disequazioni di base con esponenziali Saper risolvere le disequazioni basilari del tipo

$$a^x > b, \quad a^x < b$$

(e le corrispondenti con disuguaglianze non strette). Essere consapevoli che il segno di b influenza l'esistenza o meno di soluzioni.

(Dis)equazioni esponenziali generali Saper risolvere (dis)equazioni che si possono ridurre a tipi noti applicando le proprietà algebriche degli esponenziali, oppure sostituzioni del tipo $y = a^x$. Saper gestire equazioni del tipo

$$a^{f(x)} = b, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

e le corrispondenti disequazioni.

Funzione esponenziale Conoscere qualitativamente il grafico della funzione a^x , ed in particolare la sua positività e le proprietà di crescita/decrecenza. Saper interpretare le equazioni e disequazioni di base in termini di grafico.

Equazioni di base con logaritmi Saper risolvere equazioni del tipo $\log_a x = b$.

Disequazioni di base con logaritmi Saper risolvere disequazioni del tipo

$$\log_a x > b, \quad \log_a x < b,$$

avendo ben chiaro come le condizioni di esistenza del logaritmo intervengono in questa fase.

(Dis)equazioni logaritmiche generali Saper risolvere (dis)equazioni che si possono ridurre a tipi noti applicando le proprietà algebriche dei logaritmi, oppure sostituzioni del tipo $y = \log_a x$. Saper gestire equazioni del tipo

$$\log_a f(x) = b, \quad \log_a f(x) = \log_a g(x),$$

e le corrispondenti disequazioni.

Funzione logaritmo Conoscere qualitativamente le proprietà della funzione $\log_a x$, ed in particolare il suo insieme di definizione, il segno, gli zeri, e le proprietà di crescita/decrecenza. Saper interpretare le equazioni e disequazioni di base in termini di grafico.

Categoria 11 – Funzioni: valori assoluti e radici

Parole chiave

Valore assoluto, equazioni e disequazioni con valori assoluti, equazioni e disequazioni con radici

Valore assoluto Aver chiaro il concetto di valore assoluto e sapere disegnare il grafico della funzione $|x|$.

Equazioni e disequazioni di base con valori assoluti Aver chiaro come risolvere equazioni e disequazioni della forma

$$|x| = a, \quad |x| < a, \quad |x| > a,$$

il che equivale a scrivere le stesse relazioni senza far comparire il valore assoluto. Saper interpretare tali equazioni e disequazioni in termini di grafico. Aver chiaro il ruolo del segno di a in questo contesto.

Equazioni e disequazioni standard con valori assoluti Aver chiaro come impostare equazioni e disequazioni del tipo

$$|f(x)| = a, \quad |f(x)| > a, \quad |f(x)| < a$$

in modo da eliminare il valore assoluto.

Equazioni e disequazioni generali con valori assoluti Saper impostare (dis)equazioni in cui compaiono anche più valori assoluti, trasformandole in unione di sistemi in cui si eliminano i valori assoluti a seconda del segno dell'argomento.

Equazioni e disequazioni di base con radici Saper risolvere equazioni e disequazioni della forma

$$\sqrt[k]{x} = a, \quad \sqrt[k]{x} < a, \quad \sqrt[k]{x} > a,$$

avendo chiaro il ruolo fondamentale della parità di k e del segno di a .

Equazioni e disequazioni generali con radici Saper impostare e risolvere equazioni e disequazioni della forma

$$\sqrt[k]{f(x)} = a, \quad \sqrt[k]{f(x)} < a, \quad \sqrt[k]{f(x)} > a,$$

o ancora più in generale

$$\sqrt[k]{f(x)} = g(x), \quad \sqrt[k]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[k]{f(x)} > g(x).$$

Avere idea di come procedere anche nel caso in cui siano presenti anche più radici.

Categoria 12 – Trigonometria: elementi di base

Parole chiave

Angolo, arco, gradi, radianti, circonferenza trigonometrica, archi associati, seno, coseno, tangente, formule di addizione/sottrazione, formule di duplicazione

Angoli vs archi Aver chiaro che i gradi sessagesimali ed i radianti sono due modi equivalenti di individuare un punto sulla circonferenza trigonometrica. Saper passare dalla misura in radianti a quella in gradi sessagesimali e viceversa. Aver chiaro il significato degli angoli/archi negativi e di quelli superiori a 360° (o 2π radianti).

Funzioni trigonometriche Aver chiara la definizione delle principali funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e la loro interpretazione sulla circonferenza trigonometrica. Conoscere la relazione fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ e la sua interpretazione geometrica. Conoscere il legame tra $\cos$, $\sin$ e $\tan$ e la sua interpretazione geometrica.

Angoli/archi associati Aver chiara la relazione tra le funzioni trigonometriche di un certo angolo/arco x e quelle di $-x$ e di tutti gli angoli/archi che differiscono da x o $-x$ per multipli di angoli retti.

Angoli/archi notevoli Conoscere seno, coseno e tangente di 0° , 30° , 45° , 60° , 90° (o corrispondenti in radianti) e di tutti gli angoli/archi che si riducono a questi mediante angoli/archi associati.

Grafico delle funzioni trigonometriche Avere un'idea qualitativa del grafico delle funzioni $\sin$, $\cos$ e $\tan$ (insieme di definizione, parità/disparità, periodicità, immagine, segno al variare dell'argomento, zone di monotonia.)

Formulario di base Conoscere le formule di duplicazione e di addizione/sottrazione per seno e coseno. Sapere come utilizzarle per dedurre le funzioni trigonometriche di 15° e 75° .

Categoria 13 – Trigonometria: manipolazione di espressioni

Parole chiave

Espressioni trigonometriche, equazioni e disequazioni trigonometriche

Formulario avanzato Aver chiaro come dalle formule di addizione/sottrazione si possono ottenere le formule “product to sum” (note in Italia come formule di Werner) che consentono di trasformare un prodotto di due seni e/o coseni in una somma o differenza.

Aver chiaro come dalle formule precedenti si possano ricavare le formule “sum to product” (note in Italia come formule di Prostaferesi) che permettono di trasformare la somma di due seni o coseni in un prodotto.

Espressioni trigonometriche Saper semplificare o comunque trasformare espressioni trigonometriche utilizzando la relazione fondamentale, le proprietà di periodicità e/o simmetria, gli archi associati, il formulario trigonometrico di base e/o avanzato.

Equazioni trigonometriche basic Saper trattare le equazioni trigonometriche di base

$$\sin x = a, \quad \cos x = b, \quad \tan x = c,$$

interpretandole sia sulla circonferenza trigonometrica, sia in termini di grafico. Saper risolvere esplicitamente queste equazioni nel caso in cui le soluzioni siano archi notevoli. Stessa cosa nel caso in cui le funzioni trigonometriche abbiano come argomento un multiplo di x .

Funzioni trigonometriche inverse Saper utilizzare una semplice calcolatrice tascabile per determinare gli angoli/archi (si noti il plurale) che hanno un dato seno (o coseno o tangente), anche quando non si tratta di angoli/archi notevoli, avendo ben chiaro se la risposta arriva in gradi sessagesimali o radianti.

Disequazioni trigonometriche basic Saper interpretare le disequazioni trigonometriche di base

$$\sin x > a, \quad \cos x > b, \quad \tan x > c,$$

sia sulla circonferenza trigonometrica, sia in termini di grafico. Saper risolvere esplicitamente queste disequazioni nel caso in cui le soluzioni coinvolgano archi notevoli. Stessa cosa nel caso in cui le funzioni trigonometriche abbiano come argomento un multiplo di x o le disuguaglianze abbiano verso opposto.

(Dis)equazioni trigonometriche generali Saper risolvere equazioni o disequazioni trigonometriche che si possano ridurre a equazioni o disequazioni di tipi noti mediante formule trigonometriche e/o mediante sostituzioni del tipo $y = \sin x$, $y = \cos x$, oppure $y = \tan x$.

Categoria 14 – Trigonometria: applicazioni in geometria

Parole chiave

Risoluzione di triangoli rettangoli, risoluzione di triangoli generali, formula di Erone, teorema dei seni, teorema del coseno, formula trigonometrica per l'area

Triangoli rettangoli Aver chiare le relazioni che legano le lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa alle funzioni trigonometriche ($\sin$, $\cos$, $\tan$) degli angoli interni.

Risoluzione di un triangolo rettangolo Dati un po' di elementi (lunghezze di lati e/o ampiezze di angoli e/o valori delle funzioni trigonometriche degli angoli stessi) che individuano univocamente un triangolo rettangolo, saper determinare i restanti elementi. Saper determinare la lunghezza dell'altezza rispetto all'ipotenusa, l'ampiezza degli angoli che essa forma con i cateti, e le lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Corde di circonferenze Aver chiara la relazione tra il raggio di una circonferenza, la lunghezza di una corda, la distanza della corda dal centro, l'ampiezza dell'angolo al centro che insiste su quella corda. Per un poligono regolare di n lati, aver chiara la relazione tra raggio della circonferenza circoscritta e apotema (distanza di un lato dal centro).

Formula trigonometrica per l'area Conoscere la formula per l'area di un triangolo di cui siano noti due lati ed il seno dell'angolo compreso. Conoscere la formula per l'area di un parallelogrammo di cui siano noti due lati ed il seno dell'angolo compreso.

Formula di Erone Conoscere la formula per calcolare l'area di un triangolo di cui siano note le lunghezze dei lati.

Teorema dei seni Conoscere il teorema dei seni, ed aver chiaro che il rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto è sempre uguale al doppio del raggio della circonferenza circoscritta.

Teorema del coseno Conoscere il teorema del coseno (noto in Italia come teorema di Carnot) per determinare la lunghezza di un lato di un triangolo note le lunghezze degli altri due lati ed il coseno dell'angolo compreso. Saper utilizzare il teorema del coseno per stabilire se un triangolo è acutangolo, rettangolo o ottusangolo note le lunghezze dei lati. Aver chiaro che il coseno individua univocamente l'angolo di un triangolo (mentre per il seno non è vero).

Risoluzione di un triangolo qualunque Noti alcuni elementi (lunghezze di lati e/o ampiezze di angoli o relativi coseni) che individuano univocamente un triangolo, saper calcolare i restanti elementi. Aver chiaro che questo si può fare in tre casi:

- note le lunghezze dei tre lati,
- note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso,
- nota la lunghezza di un lato e le ampiezze dei due angoli adiacenti.

Categoria 15 – Geometria analitica: punti e rette

Parole chiave

Piano cartesiano, assi cartesiani, punti, coordinate, ascissa, ordinata, distanza tra punti, equazione della retta esplicita/implicita, punti allineati, coefficiente angolare, parallela, perpendicolare, intersezione, distanza punto/retta, distanza tra rette parallele

Punti e coordinate Conoscere le coordinate cartesiane nel piano ed aver chiara la corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali. Conoscere le notazioni standard (assi cartesiani, semiassi positivo/negativo, origine, coordinate, ascissa, ordinata, quadranti).

Distanza Saper determinare la distanza tra due punti di cui siano note le coordinate.

Punto medio Saper determinare il punto medio di un segmento di cui siano noti gli estremi.

Equazione algebrica della retta Conoscere l'equazione della retta nel piano cartesiano in forma implicita ($ax + by + c = 0$) ed esplicita ($y = mx + n$ oppure $x = q$). Saper disegnare una retta di cui si conosca l'equazione. Saper passare dall'una all'altra forma. Conoscere il significato geometrico dei coefficienti m ed n nella forma esplicita. Saper scrivere e riconoscere le equazioni delle rette parallele all'asse x e all'asse y .

Mutua posizione di rette e punti Saper stabilire se una retta passa per un dato punto oppure no. Saper stabilire se tre punti nel piano sono allineati oppure no. Dati una retta ed un punto, saper trovare la distanza del punto dalla retta, ed il punto della retta che realizza tale distanza (proiezione del punto sulla retta).

Mutua posizione di due rette Date le equazioni di due rette (in varia forma), saper stabilire se sono coincidenti, parallele o incidenti (ed in tal caso saper determinare il punto di intersezione). Saper riconoscere se due rette sono perpendicolari. Saper trovare la distanza tra due rette parallele.

Equazioni vs elementi geometrici Saper scrivere l'equazione della retta che soddisfa delle condizioni date, per esempio:

- passa per due punti dati,
- passa per un punto dato ed è parallela o perpendicolare ad una retta assegnata,
- è l'asse di un segmento di estremi assegnati.

Date le coordinate dei tre vertici di un triangolo, saper scrivere le equazioni dei lati, delle altezze, delle mediane, delle bisettrici, degli assi.

Famiglie di rette dipendenti da un parametro Saper descrivere in funzione di un opportuno parametro le equazioni delle rette parallele ad una retta data. Saper descrivere in funzione di un opportuno parametro le equazioni delle rette che passano per un punto assegnato.

Categoria 16 – Geometria analitica: circonferenze

Parole chiave

Equazione della circonferenza, centro, raggio, diametro, retta tangente/secante, interno/esterno di una circonferenza, circonferenze tangenti/secanti, intersezione

Equazione algebrica della circonferenza Conoscere l'equazione della circonferenza nel piano cartesiano e aver chiara la sua interpretazione in termini di distanza. Saper riconoscere quando una data equazione di secondo grado nelle incognite x e y rappresenta una circonferenza nel piano cartesiano.

Mutua posizione di una circonferenza ed un punto Data una circonferenza ed un punto, saper stabilire se il punto sta sulla circonferenza, oppure se è interno/esterno al cerchio delimitato dalla circonferenza.

Equazione vs elementi geometrici Saper scrivere l'equazione della circonferenza che soddisfa delle condizioni date, ad esempio:

- dati il centro ed il raggio,
- dati il centro ed un punto per cui passa,
- dati i due estremi di un diametro,
- dati il centro ed una retta alla quale è tangente.

Saper determinare centro e raggio a partire dall'equazione della circonferenza.

Mutua posizione di una retta ed una circonferenza Saper stabilire se una circonferenza ed una retta sono secanti o tangenti, ed in caso affermativo saper determinare i punti di intersezione. Saper scrivere l'equazione della tangente ad una circonferenza in un suo punto. Saper scrivere le equazioni delle due rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto assegnato esterno ad essa.

Mutua posizione di due circonferenze Saper scrivere le equazioni delle circonferenze che hanno un centro assegnato e sono tangenti ad una seconda circonferenza assegnata. Saper dedurre dai centri e dai raggi se due circonferenze sono secanti, tangenti o se non si intersecano proprio.

Categoria 17 – Geometria analitica: tutto il resto

Parole chiave

Parabola, ellisse, iperbole, asse di simmetria, disequazioni in due variabili, sottoinsiemi del piano, retta tangente/secante ad una conica

Parabola Conoscere l'equazione della parabola, sia con asse parallelo all'asse y , sia con asse parallelo all'asse x (cioè $y = ax^2 + bx + c$ e $x = ay^2 + by + c$, rispettivamente). Conoscere il significato geometrico di c e del segno di a . Saper tracciare un grafico approssimativo di una parabola di cui si conosca l'equazione.

Ellisse Conoscere l'equazione dell'ellisse in posizione classica ($ax^2 + by^2 = c$ con a, b e c parametri positivi) e saperla disegnare approssimativamente. Saper determinare la lunghezza dei semiassi maggiore e minore in funzione dei parametri. Aver chiaro cosa accade quando uno dei tre parametri si annulla.

Iperbole equilatera Conoscere l'equazione dell'iperbole equilatera ($xy = a$ con $a \neq 0$), e saperla disegnare al variare del parametro a . Aver chiara la differenza tra il caso $a > 0$ ed il caso $a < 0$. Aver chiaro cosa accade quando $a = 0$.

Iperbole Conoscere l'equazione dell'iperbole in posizione classica ($ax^2 - by^2 = c$ oppure $-ax^2 + by^2 = c$, in entrambi i casi con a, b e c parametri positivi) e saperla disegnare approssimativamente. Saper determinare le intersezioni con gli assi in funzione dei parametri. Aver chiaro cosa accade quando uno dei tre parametri si annulla.

Mutua posizione di una retta ed una conica Sapere calcolare le intersezioni tra una retta ed una conica (cioè parabola/ellisse/iperbole), stabilendo in particolare se sono tangenti, secanti o se non si intersecano proprio.

Trasformazioni del piano Conoscere alcune semplici classi di trasformazioni del piano: simmetrie rispetto a rette speciali (assi cartesiani, rette parallele agli assi o alle bisettrici dei quadranti), simmetrie centrali rispetto ad un punto. Saper determinare l'azione di tali trasformazioni su punti o rette (ad esempio saper calcolare la simmetrica di una retta data rispetto all'asse x , o il simmetrico di un punto rispetto ad un altro).

Sottoinsiemi del piano descritti mediante disequazioni Sapere che semplici sottoinsiemi del piano (semipiani, parti interne/esterne rispetto a circonferenze, parabole, ellissi o iperboli) possono essere descritti mediante disequazioni in x e y . Saper passare dalla figura alla rappresentazione mediante disequazioni e viceversa. Saper passare dalla figura alla descrizione anche per sottoinsiemi che sono unione/intersezione di sottoinsiemi del tipo precedente.

Categoria 18 – Geometria piana: poligoni

Parole chiave

Retta, segmento, angolo, triangolo, quadrilatero, poligono, perimetro, area

Terminologia di base Conoscere la nomenclatura standard (retta, semiretta, rette parallele, rette incidenti, rette perpendicolari, segmento, asse di un segmento, angolo, angolo retto/acuto/ottuso, bisettrice di un angolo, lunghezza, poligono, lato, perimetro, area).

Rette parallele/incidenti Aver chiare le relazioni tra i quattro angoli che si formano quando si intersecano due rette (angoli opposti al vertice). Aver chiare le relazioni tra gli angoli che si formano quando si tagliano due rette parallele con una trasversale. Aver chiare le relazioni di proporzionalità tra i segmenti che si formano quando si tagliano due rette parallele con una trasversale (teorema di Talete).

Triangoli

- Conoscere la terminologia standard (angolo interno, angolo esterno, lato, altezza, mediana, bisettrice, asse, ortocentro, baricentro, incentro, circocentro, circonferenza inscritta, circonferenza circoscritta, triangolo equilatero o isoscele, triangolo acutangolo/rettangolo/ottusangolo, cateto, ipotenusa).
- Sapere che la somma degli angoli interni è 180° . Sapere che l'ampiezza di un angolo esterno è la somma delle ampiezze dei due angoli interni ad esso non adiacenti.
- Saper calcolare l'area usando base ed altezza (avendo chiaro in particolare che si può usare una qualunque base e la corrispondente altezza). Conoscere la relazione che lega area, perimetro e raggio della circonferenza inscritta.
- Triangoli isosceli: conoscere le relazioni tra le lunghezze dei lati obliqui, della base e della relativa altezza; sapere che altezza, mediana e bisettrice dell'angolo al vertice coincidono tra di loro e con l'asse della base.
- Triangoli equilateri: conoscere le relazioni tra lunghezza del lato, perimetro, area, raggio della circonferenza inscritta, raggio della circonferenza circoscritta; sapere che altezze, mediane, bisettrici, e assi coincidono.
- Triangoli rettangoli: conoscere il teorema di Pitagora ed i due teoremi di Euclide (relazioni tra lunghezze dei cateti, dell'ipotenusa, dell'altezza relativa all'ipotenusa e delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa); aver chiaro che il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa e che l'ipotenusa è un diametro della circonferenza circoscritta.
- Criteri di congruenza: sapere che due triangoli sono congruenti ("uguali") quando hanno "uguali" i tre lati, oppure due lati e l'angolo compreso, oppure un lato e i due angoli adiacenti.
- Triangoli simili: sapere che due triangoli con gli angoli di uguale ampiezza hanno le lunghezze dei lati in proporzione. Aver chiaro come variano le altre quantità (raggio della circonferenza inscritta o circoscritta, lunghezza di altezze/mediane/bisettrici, area).

Quadrilateri

- Conoscere la terminologia standard (quadrato, rettangolo, rombo, parallelogrammo, trapezio, trapezio isoscele, trapezio rettangolo, lato, diagonale). Aver chiaro che un quadrato è anche un rombo ed un rettangolo, e che rombi e rettangoli sono anche parallelogrammi.
- In un quadrato o rettangolo: aver chiare le relazioni tra lunghezze dei lati, perimetro, area, raggio della circonferenza inscritta (solo per i quadrati) e circoscritta, lunghezza delle diagonali.
- In un rombo: aver chiare le relazioni tra lunghezza dei lati, lunghezza delle diagonali, area e perimetro.
- In un parallelogrammo: aver chiara la relazione tra gli angoli interni; saper determinare l'area noto un lato e l'altezza ad esso relativa. Sapere che le diagonali si dimezzano scambievolmente (e che quindi lo stesso vale nei rettangoli e nei rombi).
- In un trapezio rettangolo: aver chiare le relazioni tra lunghezza delle basi e dell'altezza, lunghezza del lato obliquo, lunghezza delle diagonali, perimetro e area.
- In un trapezio isoscele: aver chiare le relazioni tra lunghezza delle basi e dell'altezza, lunghezza dei lati obliqui, lunghezza delle diagonali, perimetro e area.
- In un trapezio qualunque: saper calcolare l'area sapendo la lunghezza delle basi e dell'altezza; sapersi ridurre ad opportuni triangoli per calcolare le lunghezze dei lati obliqui e delle diagonali una volta che siano note le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore.

Poligoni regolari

- Conoscere la terminologia standard (diagonale, triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, ottagono, decagono, dodecagono, circonferenza inscritta e circoscritta).
- Saper determinare l'ampiezza degli angoli di un poligono regolare di n lati. Saper determinare le ampiezze degli angoli di un qualunque triangolo i cui vertici siano tre dei vertici di un poligono regolare di n lati.
- Nel caso di poligoni regolari di 3, 4, 6 lati, avere chiare le relazioni tra lunghezza del lato, raggio della circonferenza circoscritta, raggio della circonferenza inscritta, area, perimetro.

Poligoni in generale

- Avere chiaro il concetto di poligono convesso.
- Avere chiaro come un poligono convesso qualunque si può rappresentare come unione di triangoli, e come questo permetta di determinare la somma delle ampiezze dei suoi angoli interni.

Categoria 19 – Geometria piana: circonferenze, trasformazioni

Parole chiave

Circonferenza, cerchio, trasformazioni del piano

Circonferenza e cerchio

- Conoscere la terminologia standard (circonferenza, cerchio, centro, raggio, diametro, arco, corda, angolo al centro, angolo alla circonferenza, settore circolare, corona circolare, retta tangente).
- Sapere che l'ampiezza di un angolo al centro è il doppio dell'ampiezza di un qualunque angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco nello stesso semipiano. Sapere che angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco hanno la stessa ampiezza se contenuti nello stesso semipiano, e ampiezze supplementari se contenuti in semipiani opposti.
- Sapere che le rette tangenti sono perpendicolari ai raggi che passano per il punto di tangenza.
- Conoscere le relazioni tra raggio, lunghezza della circonferenza, area del cerchio.
- Dato il raggio e l'ampiezza di un angolo al centro, saper determinare la lunghezza dell'arco che esso determina e l'area del relativo settore circolare.
- Teorema delle due corde e della tangente/secante.

Trasformazioni del piano Sapere come si trasforma un punto, o più in generale una qualunque figura geometrica, quando si opera una delle seguenti trasformazioni geometriche:

- traslazione,
- simmetria centrale rispetto ad un punto,
- simmetria rispetto ad una retta,
- rotazione di un certo angolo rispetto ad un punto dato.

Aver chiaro che la simmetria centrale rispetto ad un punto è equivalente alla rotazione di 180° rispetto allo stesso punto. Dati due punti, saper individuare la simmetria (sia centrale, sia rispetto ad una retta) che manda uno nell'altro.

Similitudini del piano Aver chiari i rapporti tra ampiezze degli angoli, lunghezze di segmenti o archi di circonferenza, ed aree di figure simili.

Categoria 20 – Geometria solida

Parole chiave

Retta, piano, solido, sezione, vertice, spigolo o lato, faccia, diagonale, superficie, base, altezza, volume, cubo, parallelepipedo, prisma, piramide, cilindro, cono, sfera

Cubi e parallelepipedi Sapere contare vertici, lati, facce, diagonali delle facce e diagonali interne. Conoscere le relazioni tra le lunghezze dei lati, delle diagonali, l'area delle facce ed il volume. Conoscere lo sviluppo.

Prismi Sapere contare vertici, lati, facce, diagonali delle facce e diagonali interne. Conoscere le relazioni tra volume, area di base, perimetro di base, superficie laterale.

Piramidi Sapere contare vertici, lati, facce. Conoscere le relazioni tra area di base, volume ed altezza.

Cilindro Conoscere le relazioni che legano il raggio di base, l'altezza, il volume, l'area della superficie laterale e totale. Conoscere lo sviluppo del cilindro e della sua superficie laterale. Aver chiaro il concetto di asse e cosa accade se si taglia un cilindro con un piano parallelo o perpendicolare all'asse.

Cono Conoscere le relazioni che legano il raggio di base, l'altezza, il volume. Conoscere le relazioni che legano la superficie laterale, il raggio di base, l'apotema, la circonferenza di base, l'angolo di apertura al vertice. Aver chiaro il concetto di asse e cosa accade se si taglia un cono con un piano perpendicolare all'asse.

Sfera Conoscere le relazioni che legano il raggio, il volume e la superficie. Aver chiaro cosa accade quando si interseca una sfera con un piano. Aver chiaro il concetto di piano tangente.

Similitudine nello spazio Aver chiaro come cambiano le lunghezze, le aree delle superfici ed i volumi quando si applica una similitudine ad un solido. Saper interpretare un tronco di cono o di piramide come differenza tra due coni o piramidi simili.

Sezioni Saper utilizzare la geometria piana o la trigonometria, applicate su opportune sezioni o sviluppi, per risolvere problemi di geometria dello spazio, per esempio:

- determinare la distanza tra due punti dati sui lati o sulle facce di un parallelepipedo,
- determinare l'area delle facce e la lunghezza degli spigoli di una piramide che ha come base un rettangolo, un triangolo o un poligono regolare.
- calcolare l'angolo che una faccia di una piramide forma con la base,
- calcolare la distanza tra due vertici dati di un prisma,
- calcolare il raggio della sfera inscritta o circoscritta ad un cubo.