

A.A. 2020/2021
Istituzioni di Analisi Matematica

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 59. Duali e funzionali allineati: esempi in dimensione finita. Unicità vs stretta convessità del duale vs unicità dell'iperpiano tangente alla sfera unitaria. Funzionale allineato come corrispondenza tra le sfere unitarie di uno spazio e del suo duale.	5
Lezione 60. Duali in spazi di successioni pesati: descrizione del duale attraverso due scelte diverse del duality pairing. Apparente paradosso delle terne Hilbertiane, e sua interpretazione in termini di scelta del duality pairing.	10
Lezione 61. Esempi classici di spazi di Baire. I razionali non sono uno spazio di Baire, ma gli irrazionali sì. Esempio di sottoinsieme chiuso di uno spazio di Baire che non è uno spazio di Baire. Esempio di sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico separabile che non è separabile.	15
Lezione 62. Dimostrazioni mediante il lemma di Baire vs dimostrazioni costruttive: Banach-Steinhaus, limitatezza delle successioni debolmente convergenti (sia in spazi di Hilbert, sia in spazi normati).	20
Lezione 63. Gli spazi normati con base algebrica numerabile non possono essere completi (dimostrazione costruttiva). Combinazioni lineari infinite non banali di vettori linearmente indipendenti possono annullarsi. Esistono funzioni continue e non derivabili in alcun punto (dimostrazione via lemma di Baire).	26
Lezione 64. Costruzione esplicita di una funzione continua e non derivabile in alcun punto. Esistono funzioni Holderiane in un intervallo che non sono Sobolev (nemmeno con esponente 1) in alcun sotto-intervallo (dimostrazione via lemma di Baire).	32
Lezione 65. Accenno al calcolo differenziale ed integrale per funzioni tra spazi normati. Dimostrazioni classiche per dualità: la norma dell'integrale è minore o uguale dell'integrale della norma, disuguaglianza alla Lagrange direzionale per funzioni vettoriali.	37
Lezione 66. Precisazioni sul duale di c_0 e c . Estensioni a tutto lo spazio delle successioni limitate dell'operatore lineare che nello spazio c calcola il limite.	42
Lezione 67. Studio dell'operatore che a $f(x)$ associa $\sin(f(x))$ con diverse scelte degli spazi funzionali coinvolti: continuità, Lipschitzianità/Holderianità, compattezza.	47
Lezione 68. Studio dell'esistenza di un autovalore per un problema non lineare in dimensione uno: impostazione variazionale e moltiplicatori di Lagrange. Saturazione del vincolo per un problema vincolato. Studio del problema analogo in dimensione arbitraria.	53

- Lezione 69.** Neumann Laplacian in un intervallo come operatore non limitato: calcolo del dominio di alcune sue potenze. Studio di alcuni casi di immersione dello spazio frazionario H_s in L_p e nelle funzioni Holderiane. 58
- Lezione 70.** Studio della funzione integrale come operatore tra diversi spazi funzionali: calcolo della norma, compattezza. Studio di un problema variazionale legato alle immersioni di Sobolev in dimensione arbitraria. 63

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 59

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20
 Note Title 06/10/2020

Duali e funzionali allineati Esempi in \mathbb{R}^2 con norme p -esime.

Esercizio 1 Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.
 Mostriamo che $V' = \mathbb{R}^2$ con norma ∞ .

Overkill: usare che \mathbb{R}^2 con norma 1 è uguale a $L^1(X, \mu)$
 dove X è uno spazio con 2 punti e μ è la misura
 che conta i punti.

Con le mani $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$

Un elemento del duale è $f(x, y) = ax + by$ (geometria 1).

Ora

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} (|x| + |y|) \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \|(x, y)\|_1 \end{aligned}$$

Facendo il sup del LHS tra tutti gli (x, y) di norma unitaria
 scopriamo che

$$\|f\|_{V'} \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Per avere la disuguaglianza opposta osserviamo che

$$\begin{aligned} |a| &= |f(1, 0)| \leq \|f\|_{V'} \|(1, 0)\|_1 = \|f\|_{V'} \\ |b| &= |f(0, 1)| \leq \|f\|_{V'} \|(0, 1)\|_1 = \|f\|_{V'} \end{aligned}$$

Da qui

$$\max\{|a|, |b|\} \leq \|f\|_{V'}$$

In conclusione

$$\|f\|_{V'} = \max\{|a|, |b|\} = \|(a, b)\|_\infty$$

Esercizio 2 Il duale di \mathbb{R}^2 con norma 4 è \mathbb{R}^2 con norma $\frac{4}{3}$

$$p \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$p'$$

Con le vari, posto $f(x,y) = ax+by$,

$$|f(x,y)| = |ax+by| \leq \underbrace{\{x^4+y^4\}^{1/4}}_{\text{Hölder}} \{ |a|^{4/3} + |b|^{4/3} \}^{3/4}$$

il che ci dice che $\|f\|_{V'} \leq \|(a,b)\|_{4/3}$.

Per la disuguaglianza opposta scegliamo $x = |a|^{1/3} \text{sign}(a)$ e $y = |b|^{1/3} \text{sign}(b)$ e otteniamo

$$|a|^{4/3} + |b|^{4/3} = a |a|^{1/3} \text{sign}(a) + b |b|^{1/3} \text{sign}(b)$$

$$= f(x,y)$$

$$\leq \|f\|_{V'} \|(x,y)\|_4$$

$$= \|f\|_{V'} \{ |a|^{4/3} + |b|^{4/3} \}^{1/4}$$

Semplificando otteniamo $\|(a,b)\|_{4/3} \leq \|f\|_{V'}$, da cui l'uguaglianza.

Esercizio 3 $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.

Trovare tutti i funzionali allineati di $(0,1)$ e $(-2,1)$.

Caso di $(0,1)$ Stiamo cercando tutte le coppie (a,b) con $\max\{|a|, |b|\} \leq 1$ (norma in V' di $f(x,y) = ax+by$) e $b=1$ ($f(0,1) = 1$)

Quindi ci sono infinite soluzioni, cioè tutti i funzionali $f(x,y) = ax+y$ con $|a| \leq 1$

Caso di $(-2,1)$ Ancora una volta stiamo cercando

$$f(x,y) = ax+by \text{ con } \|(a,b)\|_{\infty} \leq 1 \text{ e}$$

$$f(-2,1) = \|(-2,1)\|_1 = 3, \text{ cioè } -2a+b=3.$$

Quindi serve

$$\begin{cases} \max\{|a|, |b|\} \leq 1 \\ -2a+b=3 \end{cases}$$

Si vede ad occhio che una soluzione è $a=-1$ e $b=1$.
D'altra parte è unica in quanto

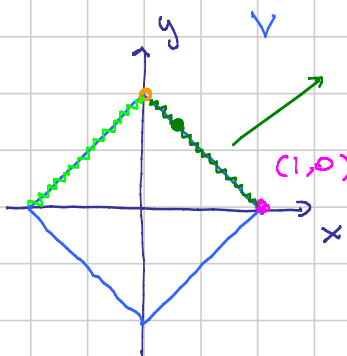
$$3 = -2a+b \leq 2|a|+|b| \leq 2+1=3$$

\uparrow per avere uguale serve $a < 0$ e $b > 0$ \uparrow per avere uguale serve $|a|=|b|=1$

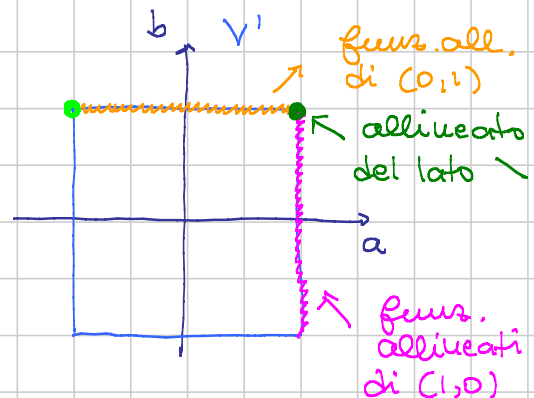
Oss. Allo stesso modo si dimostra che, se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, allora l'unico funzionale allineato è $ax+by$ con $a = \text{sign}(x_0)$ e $b = \text{sign}(y_0)$.
Se invece una componente tra x_0 e y_0 è nulla, allora il corrispondente coeff. può variare a piacere tra -1 e 1 , mentre l'altro è uguale al segno della variabile non nulla. Quindi ci sono ancora ∞ funzionali allineati.

Esercizio 4 Il funzionale allineato definisce una mappa (eventualmente multivoca) tra la sfera unitaria di V e la sfera unitaria di V' .

Descriviamo tale mappa nel caso di $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.



tutti questi hanno lo stesso funz. allineato $f(x,y) = x+y$



Esercizio 5 Sia V uno spazio normato, e sia $v_0 \in V$.

Se $f_1 \in V'$ e $f_2 \in V'$ sono funzionali allineati di v_0 , allora tutte le loro comb. convesse lo sono

Dim. Ipotesi: f_1 ed f_2 funz. all. di v_0 , quindi
 $\|f_1\|_{V'} \leq 1, \|f_2\|_{V'} \leq 1$, $f_1(v_0) = f_2(v_0) = 1$
 se $v_0 \neq 0$, allora sono proprio 1

Tesi: $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ è funz. allineato di $v_0 \forall \lambda \in [0,1]$

Basta osservare che $\lambda f_1(v_0) + (1-\lambda)f_2(v_0) = 1$ e

$$\|\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\|_{V'} \leq 1$$

Piccolo commento sulla seconda

$$\begin{aligned} |\lambda f_1(v) + (1-\lambda)f_2(v)| &\leq \lambda |f_1(v)| + (1-\lambda)|f_2(v)| \\ &\leq \lambda \|v\|_V + (1-\lambda)\|v\|_V = \|v\|_V \end{aligned}$$

Facendo il sup al variare di v con $\|v\|_V \leq 1$ segue la tesi.

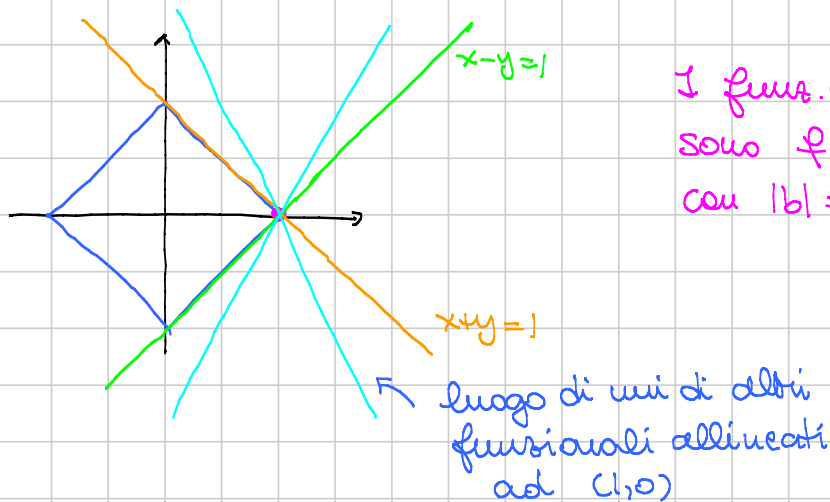
Esercizio 5 bis Se $f \in V'$ è funz. allineato per $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$, allora f è funzionale allineato di $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ per ogni $\lambda \in [0,1]$.

Oss. Per avere la non unicità del funzionale allineato occorre che la sfera unitaria in V' contenga dei segmenti non banali (con estremi diversi)
 Se V' è strett. convesso, questo non può accadere.

Oss. Sia $v_0 \in V$ con $\|v_0\|_V = 1$. Sia $f \in V'$ un funzionale allineato di V . Allora l'iperpiano $\{v \in V : f(v) = 1\}$ è tangente alla palla unitaria di V , cioè
 → interseca la palla in v_0 (almeno)
 → lascia la palla tutta dalla stessa parte $\{v \in V : f(v) \leq 1\}$

Quindi se c'è + di un funzionale allineato a u_0 , allora c'è più di un iperpiano tangente in u_0 , e quindi la sfera unitaria non è "smooth" in u_0 .

Nel caso di \mathbb{R}^2 con norma 1:



I funz. allineati di $(1,0)$ sono $f(x,y) = x + by$ con $|b| \leq 1$

SLOGAN Se il funzionale allineato a $u_0 \neq 0$ NON è unico, allora

- la palla $\{v \in V : \|v\|_V \leq 1\}$ ha "un angolo" in u_0
- la sfera $\{f \in V' : \|f\|_{V'} = 1\}$ contiene un segmento con estremi distinti.

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 60

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Sia V lo spazio delle successioni $\{x_n\}$ di numeri reali tali che

$$\|x\|_V := \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| < +\infty$$

Si verifica abbastanza facilmente che $\|x\|_V$ è una norma in V che lo rende uno sp. di Banach (overkill: si tratta dello spazio L^1 rispetto ad una opportuna misura in \mathbb{N})

Domanda: descrivere il duale di V .

Brutal mode: ci aspettiamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = f(x)$ e quindi

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \cdot n |x_n| \\ &\leq \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| \\ &\leq \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cdot \|x\|_V \end{aligned}$$

Quindi il forte sospetto è che $\|f\|_{V'} = \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Detto meglio: consideriamo il solito duality pairing tra succ.

$$J(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$$\text{Poniamo } V' = \left\{ \{a_n\} : \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n|}{n} < +\infty \right\}$$

Allora il duality pairing definisce una mappa lineare, isometrica, iniettiva e surgettiva tra V e V'

$$[J(a)](x) := J(a, x) \quad \forall x \in V \quad \forall a \in V'$$

- Il conto di sopra mostra linearità, buona positura e $\|J(a)\|_{V'} \leq \|a\|_{V'}$
- Per Qa di sug. opposta basta prendere $e_n = 0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \dots$ e osservare che

$$|a_n| = |[J(a)](e_n)| \leq \|J(a)\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V$$

da cui $\|J(a)\|_{V'} \geq \frac{|a_n|}{n}$ per ogni $n \geq 1$, da cui Qa tesi.

- Fatta Q' isometria, resta solo Qa surgettività. Data $f \in V'$ occorre trovare a t. $[J(a)](x) = f(x)$ per ogni $x \in V$.
Poniamo

$$a_n := f(e_n) \quad \forall n \geq 1$$

Dimostriamo che $\frac{|a_n|}{n}$ è limitata. Infatti

$$|a_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V = \|f\|_{V'} \cdot n$$

Dimostriamo che $[J(a)](x) = f(x)$ per ogni $x \in V$.

Questo è vero quando x è uno degli e_n , quindi anche quando $x \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ma questo Span è denso in V .

Oss. Anche in questo caso potevamo usare Q' overkill e dire che ovviamente $V = L^1(\mathbb{N}, \mu)$ e dedurre che

$$V' = L^\infty(\mathbb{N}, \mu)$$

Ora però se $a \in L^\infty(\mathbb{N}, \mu)$, allora

$$\|a\|_{L^\infty(\mathbb{N}, \mu)} := \sup \{ |a_n| : n \in \mathbb{N} \}$$

SENZA DIVIDERE PER n .

Domanda: c'è contraddizione con il risultato precedente?

Risposta: ci sono sotto due duality pairing diversi

$$V = \{ \{x_n\} \text{ succ} : \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| < +\infty \}$$

$$W_1 = \{ \{a_n\} \text{ succ} : \sup_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n} < +\infty \}$$

$$W_2 = \{ \{a_n\} \text{ succ} : \sup_{n \geq 1} |a_n| < +\infty \}$$

Consideriamo $J_1(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

$$J_2(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n$$

Abbiamo visto prima che J_1 induce un isomorfismo $W_1 \rightarrow V'$.

D'altra parte J_2 induce un isomorfismo $W_2 \rightarrow V'$.

Facciamo la verifica

Step 1 Buona positura e disug. $\|J_2(a)\|_{V'} \leq \|a\|_{W_2}$

$$|[J_2(a)](x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| |a_n| \leq \|a\|_{W_2} \|x\|_V \quad \text{😊}$$

Step 2 Disug. opposta. Usando $x = e_n$ otteniamo

$$n |a_n| = |[J_2(a)](e_n)| \leq \|J_2(a)\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V$$

e quindi $|a_n| \leq \|J_2(a)\|_{V'}$. Facendo il sup in n abbiamo la tesi.

Step 3 Surgettività. Dato $f \in V'$ poniamo $a_n := f(e_n) \cdot \frac{1}{n}$.
Occorre verificare che $a \in W_2$ e $J_2(a) = f$.

Intanto

$$|a_n| = \frac{1}{n} |f(e_n)| \leq \frac{1}{n} \|f\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V \leq \|f\|_{V'}$$

da cui $a \in W_2$

Ora $J_2(a)$ coincide con $f(e_n)$ per ogni n (la n nel duality pairing cancella la n al denominatore).

Quindi $J_2(a)$ ed f coincidono in $\text{span}\{e_n\}$, che è denso

Esercizio della tema Hilbertiana

Sia H sp. di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$.

Sia \hat{H} il sottospazio definito da

$$\hat{H} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{peso}}}{n^2} v_n^2 < +\infty \right\}$$

Si verifica facilmente che \hat{H} è uno spazio di Hilbert rispetto alla norma

$$\|v\|_{\hat{H}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2.$$

Fatti generali:

- ① \hat{H} è un s.sp di H , ed è pure denso (contiene tutte le comb. lin. finite degli e_n).
- ② Ogni elemento $f \in H'$ determina per restrizione un elemento di \hat{H}' . Quindi $H' \rightarrow \hat{H}'$ e lo fa pure in modo iniettivo (per densità) (occhie occorre dimostrare che la restrizione di f è continua in \hat{H} rispetto alla norma di \hat{H}).
- ③ Per il teorema di Riesz, dovrebbe essere che \hat{H} è isomorfo ad \hat{H}' .

Mettendo insieme i 3 fatti si ottiene la classica tema Hilbertiana

$$\hat{H} \xrightarrow{\textcircled{1}} H \cong H' \xrightarrow{\textcircled{2}} \hat{H}'$$

ma d'altra parte $\hat{H} \cong \hat{H}'$, e quindi c'è qualcosa che non va.

Spiegazione: le identificazioni tra un Hilbert ed il suo duale dipendono da un duality pairing.

Consideriamo gli spazi

$$H_0 := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty \}$$

$$H_1 := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 < +\infty \}$$

$$H_{-1} := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} v_n^2 < +\infty \}$$

È evidente che $H_1 \subseteq H_0 \subseteq H_{-1}$, con inclusioni strette.

Si possono dimostrare i seguenti fatti

① H_0 è isomorfo ad H e H_1 è isomorfo a \hat{H}

② Il classico duality pairing $J(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ definisce

→ un isomorfismo tra H_0 e H_0' (solito Riesz)

→ un isomorfismo tra H_{-1} e H_{-1}' (fare la verifica)

Queste due osservazioni spiegano le inclusioni di inizio pagina.

③ L'isomorfismo tra H_1 ed il suo duale alla Riesz non è quello involto dal duality pairing J , ma quello involto da

$$\hat{J}(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n y_n \quad (\text{verifica per esercizio})$$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 61

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20
 Note Title 06/10/2020

Spazi di Baire Teoria: ci sono 3 classi classiche di sp. di Baire
 → sp. metrici completi
 → sp. loc. compatti (forse serve Hausdorff)
 → aperti in sp. di Baire.

Esempi classici

- 1 $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ con la metrica classica sono sp. di Baire (metrici completi, pure \mathbb{N} e \mathbb{Z} ☺)
- 2 Intervalli (a, b) aperti sono sp. di Baire (aperti in Baire)
- 3 Intervalli $[a, b]$ chiusi sono sp. di Baire (sono metrici completi, oppure localmente compatti)
- 4 Gli aperti in un Banach sono sp. di Baire (aperti in Baire)
- 5 I chiusi in un Banach sono sp. di Baire (sono completi!)
- 6 I chiusi in un metrico completo sono sp. di Baire (sono a loro volta metrici completi)
- 7 I chiusi in un loc. cpt. sono sp. di Baire (sono a loro volta loc. cpt.)
- 8 \mathbb{Q} NON è uno sp. di Baire con la metrica classica

Si verifica che i \mathbb{p} ti sono chiusi con parte interna vuota, ma

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \quad \text{ha parte interna } \neq \emptyset$$

unione numerabile di chiusi
con parte interna vuota

In alternativa

$$\emptyset = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{q\}) \quad \text{non è denso}$$

intersezione num. di aperti densi

Oss. Ma anche in \mathbb{Z} abbiamo che $\mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}$
e l'unione è numerabile. E allora?

Esercizio (o domanda) Caratterizzare i sottoinsiemi numerabili di \mathbb{R} che sono sp. di Baire.

9] $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è uno sp. di Baire.

Slogan: se si ha a che fare con la topologia ristretta ad un sottoinsieme, è una questione delicata a prescindere.

Dim. Usiamo la caratterizz. con gli aperti e qualche fatto generale

FG1 $A \subseteq I$ è aperto in I se e solo se esiste $\hat{A} \subseteq \mathbb{R}$ aperto in \mathbb{R} tale che $A = \hat{A} \cap I$.

FG2 $B \subseteq I$ è denso in I se e solo se B è denso in \mathbb{R}

FG3 Un aperto $A \subseteq I$ (aperto in I) è denso in I se e solo se \hat{A} è denso in \mathbb{R} .

Siano ora A_n degli aperti densi in I . Occorre dim. che la loro intersezione è densa in I .

Per FG1 e FG3, esistono \hat{A}_n aperti e densi in \mathbb{R} t.c.
 $A_n = I \cap \hat{A}_n$.

Ora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n \right) \cap I = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n \right) \cap \left(\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\}) \right)$$

intersezione numerabile di aperti densi in \mathbb{R} , e quindi è $\neq \emptyset$

In conclusione in LHS è un sottoinsieme di I che è denso in \mathbb{R} , dunque a maggior ragione denso in I per FG2.

Esercizio → Dimostrare per bene i fatti generali, sia pensando I ed \mathbb{R} come sp. metrici, sia usando le successioni.
 → Dimostrare che I è sp. di Baire utilizzando una delle caratterizzazioni con i chiusi.

Oss. Dovremmo aver dimostrato più in generale che \mathbb{R} insieme numerabile di p.ti è sp. di Baire.
 — o — o —

CHIUSO IN BAIRE NON È NECESSARIAMENTE BAIRE

Prendiamo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{Q}\}}_{X_2}$

Brutalmente: X è tutto \mathbb{R}^2 meno gli irrazionali contenuti nell'asse x .

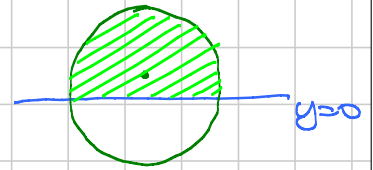
Si osserva facilmente che X_2 è chiuso in X (controimmagine di 0 rispetto alla proiezione sulla seconda componente) ed è omeomorfo a \mathbb{Q} , quindi X_2 non è sp. di Baire.

Come dimostro che X è uno sp. di Baire?

Si può usare un argomento del tutto analogo alla dimostrazione che \mathbb{R}^2 è uno sp. di Baire.

Sia A_n una succ. di aperti in X densi, e mostriamo che la loro intersezione è densa, cioè interseca ogni palla di X .
 Consideriamo $(x_0, y_0) \in X$ e consideriamo una palla con centro in (x_0, y_0) e raggio $r > 0$. Questa avrà intersezione non vuota con il semipiano $y > 0$ o il semipiano $y < 0$.

Supponiamo sia con il semipiano $y > 0$.
 Chiamo B_+ questa palla e osservo che
 $A_n \cap B_+$ sono aperti densi in B_+
 (quello spazio metrico B_+). Ora B_+ è
 uno sp. di Baire, dunque



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_+)$$

è densa in B_+ , quindi in particolare $(\bigcap A_n) \cap B_+ \neq \emptyset$.
 Essendo questo vero per ogni centro e per ogni raggio, allora
 abbiamo finito.



QUALCHE ALTRA PATOLOGIA TOPOLOGICA

Fatto generale X sp. metrico separabile, $Y \subseteq X$ sottoinsieme
 qualunque. Allora Y è separabile.

Dici X separabile \Rightarrow esiste base numerabile fatta da $B(x, r)$
 al variare di x nel denso numerabile $D \subseteq X$ e di r in \mathbb{Q} .
 Allora $Y \cap B(x, r)$, per gli stessi x ed r , sono una base
 per la topologia di Y (quasi per def. di top. indotta).
 A questo punto basta prendere un punto in ogni $Y \cap B(x, r)$.
 In breve, il giro fatto è

questo vale solo nei metrici

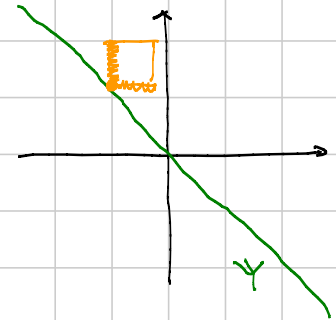
X separabile $\Rightarrow X$ a base numerabile
 $\Rightarrow Y$ a base numerabile
 $\Rightarrow Y$ separabile

Controesempio in generale Prendiamo \mathbb{R} con la topologia
 generata dagli intervalli del tipo $[a, b)$

Chiamiamolo \hat{X} . Poniamo $X := \hat{X} \times \hat{X}$ con la topologia

prodotto.

Allora vale che



① \hat{X} è separabile (\mathbb{Q} è ancora denso)

② X è separabile (\mathbb{Q}^2 è denso)

③ $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ è un sottoinsieme di X (forse pure chiuso) che eredita da X la topologia discreta in cui tutti i p.ti sono aperti, e quindi non è separabile.
(Occorre osservare che i quadrati con lato basso e dx chiuso sono aperti in X)

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 62

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

TUTTO QUELLO CHE SI PUÒ FARE CON BAIRE, SI PUÒ FARE
A MANO IN MANIERA COSTRUTTIVA, PUR DI PENSARE QUANTO
BASTA

Esempio 1 Dimostrazione di BS Prendiamo la versione
come equivalenza tra

$$\forall v \in V \sup_{i \in I} \|L_i(v)\|_W < +\infty$$

Limitatezza qualitativa

$$\sup_{i \in I} \|L_i\|_{op} < +\infty$$

Limitatezza quantitativa

Notazioni: V Banach, W sp. normato, I insieme di indici

$L_i: V \rightarrow W$ lineari e continui

$$\|L_i\|_{op} = \|L_i\|_{\infty(V,W)} := \sup \{ \|L_i v\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

L'implicazione vera è \Rightarrow .

Dim. via Baire Poniamo $C_k := \{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k \ \forall i \in I\}$
e osserviamo che i C_k sono chiusi e hanno come unione V ,
dunque almeno uno ha parte interna $\neq \emptyset$. A questo punto,
se $B_V(x_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$, con qualche conto si verifica che

$$L_i(B_V(0, r)) \subseteq B_W(0, \frac{2k_0}{r_0})$$

da cui la tesi

Dim. costruttiva a mano Ragioniamo per assurdo, supponendo
che

$$\sup \{ \|L_i\|_{op} : i \in I \} = +\infty.$$

Mostriamo che esistono $\alpha_n > 0$, $\sigma_n \in \{+1, -1\}$, $U_n \in V$ con $\|U_n\|_V \leq 1$ e $i_n \in I$ tali che

$$U := \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \alpha_k U_k \quad \text{converge e soddisfa}$$

$$\|L_{i_n}(U)\|_W \rightarrow +\infty$$

qui uso hp che $\text{sep} = +\infty$

Poniamo $\alpha_n := \frac{1}{10^n}$, scegliamo $i_n \in I$ t.c. $\|L_{i_n}\|_{op} \geq 10^n \cdot n$, poi scegliamo $U_n \in V$ tale che

$$\|U_n\|_V \leq 1 \quad \text{e} \quad \|L_{i_n}(U_n)\|_W \geq \frac{1}{2} \|L_{i_n}\|_{op}$$

↑ posso mettere qualunque cosa < 1

Ora scegliamo σ_n in maniera induttiva. Prendiamo σ_1 a caso. Supponiamo di aver già scelto $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, quindi è ben definita la somma parziale

$$S_{n-1} := \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \alpha_k U_k$$

Ora per S_n abbiamo due possibilità: $S_n = S_{n-1} \pm \alpha_n U_n$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} & \|L_{i_n}(S_{n-1} + \alpha_n U_n)\|_W + \|L_{i_n}(S_{n-1} - \alpha_n U_n)\|_W \\ &= \|L_{i_n}(S_{n-1} + \alpha_n U_n)\|_W + \|L_{i_n}(-S_{n-1} + \alpha_n U_n)\|_W \\ &\geq \|L_{i_n}(S_{n-1} + \alpha_n U_n) + L_{i_n}(-S_{n-1} + \alpha_n U_n)\|_W \\ &= 2\alpha_n \|L_{i_n}(U_n)\|_W \end{aligned}$$

$$\geq \alpha_n \|L_{i_n}\|_{op}$$

(quindi uno dei 2 termini al LHS è \geq della metà)

Scegliamo σ_m in maniera tale da avere

$$\| \text{Lim}(S_m) \| \geq \frac{1}{2} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{op}$$

In questo modo abbiamo definito tutti i σ_m . La serie che definisce v converge assolutamente, quindi \checkmark .

Resta da dimostrare che $\| \text{Lim}(v) \|_W \rightarrow +\infty$.

Fissato n , scriviamo

$$v = S_m + R_m \quad \text{con} \quad R_m := \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_k \alpha_k U_k$$

e osserviamo che

serie geometrica

$$\| R_m \|_V \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{9} \frac{1}{10^m} = \frac{1}{9} \alpha_m$$

e quindi $\| \text{Lim}(R_m) \|_W \leq \| \text{Lim} \|_{op} \cdot \| R_m \|_V \leq \frac{1}{9} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{op}$

Ma allora

$$\| \text{Lim}(v) \|_W = \| \text{Lim}(S_m) + \text{Lim}(R_m) \|_W$$

$$\geq \| \text{Lim}(S_m) \|_W - \| \text{Lim}(R_m) \|_W$$

$$\geq \frac{1}{2} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{op} - \frac{1}{9} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{op}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} \right)}_{\geq \frac{1}{3}} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{op}$$

da cui la tesi.

— o — o —

bastava una
costante $< \frac{1}{2}$

Oss. La proprietà fond. degli α_n è che $\sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k \leq \frac{1}{9} \alpha_m$

Esempio 2 Debolmente convergente \Rightarrow limitata (in Hilbert)

Con le mani: supponiamo $\{v_n\} \subseteq H$ non limitata.

Allora esiste $w \in H$ ed esiste $i_n \rightarrow +\infty$ b.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle v_{i_n}, w \rangle| = +\infty$$

il che impedisce a v_n di convergere debolmente (altrimenti il limite di sopra dovrebbe essere $|\langle v_\infty, w \rangle|$).

Scriviamo w nella forma

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k d_k \frac{v_{ik}}{\|v_{ik}\|}$$

Poniamo $d_n := \frac{1}{10^n}$, e scegliamo i_n in modo che

$$\|v_{i_n}\| \geq 10^n \cdot n \quad (\text{ovviamente } i_n \rightarrow +\infty)$$

La scelta di d_n da sola basta a far convergere la serie (conv. assoluta). Scegliamo inoltre $\sigma_n \in \{+1, -1\}$.

Prendiamo σ_1 a caso. Supponiamo di aver scelto $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Consideriamo la somma parziale

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k d_k \frac{v_{ik}}{\|v_{ik}\|}$$

e per S_n scegliamo tra $S_{n-1} \pm d_n \frac{v_{in}}{\|v_{in}\|}$. Osserviamo che

$$\left| \langle v_{i_n}, S_{n-1} + d_n \frac{v_{in}}{\|v_{in}\|} \rangle \right| + \left| \langle v_{i_n}, S_{n-1} - d_n \frac{v_{in}}{\|v_{in}\|} \rangle \right|$$

$$= \dots + \left| \langle v_{i_n}, -S_{n-1} + d_n \frac{v_{in}}{\|v_{in}\|} \rangle \right|$$

$$\geq \left| \langle v_{i_n}, 2d_n \frac{v_{in}}{\|v_{in}\|} \rangle \right| = 2d_n \|v_{in}\|$$

Scegliamo quindi S_m in modo tale che

$$|\langle v_{i_m}, S_m \rangle| \geq \frac{1}{9} \|v_{i_m}\|$$

Voglio dimostrare che $|\langle v_{i_m}, w \rangle| \rightarrow +\infty$.
Fissato n , scriviamo

$$w = S_m + R_m \quad \text{con} \quad R_m := \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_k d_k \frac{v_{i_k}}{\|v_{i_k}\|}$$

e come prima osserviamo che $\|R_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k = \frac{1}{9} d_n$.

Di conseguenza

$$|\langle v_{i_m}, w \rangle| = |\langle v_{i_m}, S_m \rangle + \langle v_{i_m}, R_m \rangle|$$

$$\text{triangolo} \rightarrow \geq |\langle v_{i_m}, S_m \rangle| - |\langle v_{i_m}, R_m \rangle|$$

$$\text{c.s.} \rightarrow \geq d_n \|v_{i_m}\| - \|v_{i_m}\| \cdot \|R_m\|$$

$$\geq \frac{8}{9} d_n \|v_{i_m}\|$$

$$\geq \frac{8}{9} n,$$

da cui la tesi.



Oss. La stessa dimostrazione vale nel caso degli spazi normati, cioè se V è spazio normato e $\{v_m\} \subseteq V$ è una succ. non limitata, allora esiste $f \in V'$ ed esiste $i_m \rightarrow +\infty$ tale che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(v_{i_m})| = +\infty$$

(il che impedisce a v_{i_m} dunque pure a v_m , di convergere debolmente)

L'idea è sempre la stessa. Usiamo $\alpha_n = \frac{1}{10^n}$, prendiamo
 in t.c. $\|v_{i_n}\|_V \geq 10^n \cdot \alpha_n$, poi prendiamo $f_n \in V'$ tale che

$$\|f_n\|_{V'} \leq 1 \quad \text{e} \quad |f_n(v_{i_n})| = \|v_{i_n}\|_V$$

(qui basterebbe $|f_n(v_{i_n})| \geq \frac{1}{2} \|v_{i_n}\|_V$)

e infine poniamo

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_k f_k$$

dopo aver scelto gli f_k in maniera iterativa, in modo tale
 che

$$|S_m(v_{i_m})| \geq \alpha_m \|v_{i_m}\|_V$$

↑

somma parziale della serie, che
 è un elemento di V'

[Completare i dettagli analoghi ai casi precedenti].

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 63

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

BAIRE vs COSTRUZIONI ESPLICITE

Esempio 1 (Non esistono sp. di Baire con base alg. numerabile)

Dim. via BAIRE Supponiamo per assurdo che $\{v_n\}$ sia base alg. Consideriamo

$$C_k := \text{Span} (v_1, \dots, v_k)$$

Si tratta di una famiglia di chiusi con parte interna vuota la cui unione sarebbe tutto lo spazio, il che è impossibile in uno sp. di Baire.

Fatto essenziale usato: i s.sp. di dim. finita in uno sp. normato sono CHIUSI (e hanno parte interna vuota)

Dim a mano Supponiamo come sopra $\{v_n\}$ sia base alg. Supponiamo WLOG che $\|v_n\| = 1$.

Voglio costruire una succ. di Cauchy che non converge, e la cerco del tipo "somme parziali della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$

Senza due proprietà:

- La serie sia assolutamente convergente (questo implica che le somme parziali S_n sono una succ. di Cauchy)
- L'eventuale somma NON può stare nelle comb. lin. finite di v_1, \dots, v_n, \dots

La prima richiesta si traduce in

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty$$

(qui abbiamo usato che $\|v_k\| = 1$ per ogni $k \geq 1$)

Per la seconda richiesta, torniamo al fatto essenziale usato nella prima dimostrazione. Noi sappiamo che $\text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1})$ è chiuso e non contiene u_m , dunque

$$\exists r_m > 0 \text{ t.c. } B(u_m, r_m) \cap \text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1}) = \emptyset$$

Se la serie converge, esisterebbe $n \geq 1$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \in \text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1})$$

La serie la scrivo come

$$S_{n-1} + c_n u_n + R_n$$

\uparrow \uparrow
 somma parziale resto = serie da
 fino a $n-1$ $n-1$ in poi

Ora

$$S_{n-1} + c_n u_n + R_n \in \text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1})$$

$$\iff c_n u_n + R_n \in \text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1})$$

$$\iff u_n + \frac{1}{c_n} R_n \in \text{Spau}(u_1, \dots, u_{m-1})$$

ma l'ultima è possibile solo se $\frac{1}{c_n} R_n \notin B(u_n, r_n)$ cioè solo se

$$\frac{1}{|c_n|} \|R_n\| \geq r_n$$

D'altra parte

$$\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|$$

Quindi se sapessimo che

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} r_n |c_n| \quad \forall n \geq 1$$

allora la serie NON potrebbe convergere (le sue somme parziali sarebbero troppo lontane da ogni span di un sottoinsieme finito della base).

Quindi dobbiamo trovare $\{c_n\}$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty \quad \text{e} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \lambda_n |c_n|$$

Quindi, moralmente, c_n deve decadere rapidamente.

Per costruire $\{c_n\}$ supponiamo wlog che $\lambda_n \in (0,1)$ e prendiamo c_n ricorsivamente in modo che $c_1 = 10^{-1}$ e

$$c_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{10} c_n \quad \forall n \geq 1$$

La prima serie converge in quanto $|c_k| \leq 10^{-k}$ per ogni $k \geq 1$.
Per quanto riguarda la seconda serie, osserviamo che

$$c_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{10} c_n, \quad c_{n+2} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{10} c_{n+1} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{10} \frac{\lambda_n}{10} c_n \leq \frac{\lambda_n}{10^2} c_n$$

e per induzione $c_{n+i} \leq \frac{\lambda_n}{10^i} c_n$, da cui

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = \sum_{i=1}^{\infty} c_{n+i} \leq \lambda_n c_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \frac{1}{9} \lambda_n c_n,$$

il che completa la costruzione.

Achtung! Occhio alle "combinazioni lineari infinite".
Uno potrebbe dire: supponiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k = \sum_{k=1}^n a_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte otteniamo q.c. del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k = 0.$$

Domanda: supponiamo che la serie converga assolutamente e che i v_k siano lin. indip.

Possiamo concludere che tutti i b_k sono nulli?

Risposta: NO, nemmeno in uno sp. di Hilbert!

Esempio classico: $v_1 = -\frac{1}{2}e_2$, $v_2 = e_2 - \frac{1}{2}e_3$, $v_3 = e_3 - \frac{1}{2}e_4, \dots$
allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k$$

questa converge assolutamente a 0, ma i v_k sono lin. indip. (dimostrare!) e i coeff. non sono tutti nulli.

Esempio 2 (Esistono $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che non sono derivabili in nessun punto)

Idea della dim. via BAIRE Consideriamo lo spazio

$$V := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ b.c. } f \text{ è continua e limitata}\}.$$

Si verifica che V è metrico completo (Banach) rispetto alla norma del sup. Consideriamo, per ogni intero $k \geq 1$, l'insieme

$$C_k := \left\{ f \in V : \begin{array}{l} \exists x \in [-k, k] \\ \forall \alpha \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ |f(x+\alpha) - f(x)| \leq k|\alpha| \end{array} \right\}$$

} maniera di rendere quantitativa l'info che f è derivabile in almeno un punto

Fatto 1. Se f è derivabile in almeno un pto x_0 , allora esiste $k \geq 1$ tale che $f \in C_k$ (fare verifica formale)

Fatto 2. I C_k sono chiusi. Prendiamo $f_n \rightarrow f_\infty$ con $f_n \in C_k$ per ogni n (qui k lo pensiamo fisso). Ad ogni f_n è associato x_n , e a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_0 \in [-k, k]$. Ora per ogni n sappiamo che

$$\begin{aligned} |f_n(x_n + \alpha) - f_n(x_n)| &\leq k |\alpha| & \forall \alpha \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ |f_\infty(x_0 + \alpha) - f_\infty(x_0)| &\leq k |\alpha| & \text{"} \end{aligned}$$

il che dimostra che $f_\infty \in C_k$ (nel passare al limite ho usato il doppio limite per la conv. unif. di funzioni continue)

Fatto 3 I C_k hanno parte interna vuota (dunque la loro unione non può essere tutto V).

Supponiamo per assurdo che $B_V(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$ per opportuni $k_0 \geq 1$, $f_0 \in V$, $r_0 > 0$.

Wlog possiamo assumere che f_0 sia di classe C^1 , almeno in $[-k_0, k_0]$ (altrimenti regolarizzo f_0 per convoluzione o altro modo, e riduco un po' il raggio).

Ora consideriamo l'INGREDIENTE FONDAMENTALE, cioè la funzione φ in figura.

Osserviamo che $\varphi(x)$ è affine a tratti con pendenza ± 1 .

Poniamo

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$$



e osserviamo che $\varphi_n(x)$ è affine su tratti di lunghezza $\frac{1}{n^2}$, su ciascuno dei quali ha pendenza $\pm n$.

CLAIM: se poniamo $f_n(x) := f_0(x) + \varphi_n(x)$, allora per n abbastanza grande avremo che $f_n \in B_V(f_0, r_0)$ ma $f_n \notin C_{k_0}$, il che è un guaio!

La prima condizione è vera non appena $\frac{1}{n} < k_0$.

Per la seconda condizione dovrebbe essere che esiste $x_m \in [-k_0, k_0]$ t.c.

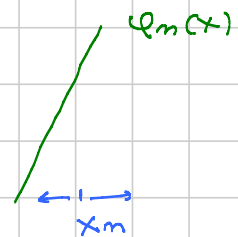
$$|f_n(x_m + \alpha) - f_n(x_m)| \leq k_0 |\alpha| \quad \forall \alpha \in \left[-\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_0}\right]$$

D'altra parte, se $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k_0}$, allora per ogni x_m posso trovare

un α con $|\alpha| \leq \frac{1}{2n^2}$ tale che $|\varphi_n(x_m + \alpha) - \varphi_n(x_m)| \geq n|\alpha|$

(Basta che x_m e $x_m + \alpha$ stiano nello stesso tratto affine di $\varphi_n(x)$)

Ma allora



$$\begin{aligned} |f_n(x_m + \alpha) - f_n(x_m)| &\geq |\varphi_n(x_m + \alpha) - \varphi_n(x_m)| \\ &\quad - |f_0(x_m + \alpha) - f_0(x_m)| \\ &\geq n|\alpha| - L|\alpha| \end{aligned}$$

↑ costante di Lip di f_0 in $[-k_0, k_0]$

Quando n è abbastanza grande, questo impedisce al LHS di essere $\leq k_0|\alpha|$.

Piccola osservazione: il passaggio da x_m a $x_m + \alpha$, potrebbe farci uscire da $[-k_0, k_0]$, ma si rimedia facilmente assumendo che f_0 sia C^1 , e quindi lip., in $[-k_0 - 1, k_0 + 1]$.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 64

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

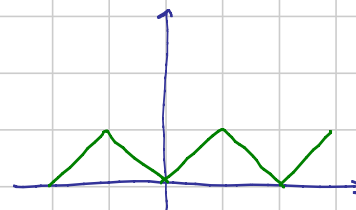
06/10/2020

Esistono $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che non hanno la derivata in nessun punto

Dim a mano Partiamo dalla solita $\varphi(x)$ come in figura.

Costruiamo

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \varphi(i_k x)$$



Obiettivo: scegliere succ. $\{\varepsilon_k\}$ e $\{i_k\}$ in modo che la serie converga e abbia le proprietà richieste.

Per la convergenza basta $\varepsilon_k > 0$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$$

Per conv. totale, dunque uniforme, $f(x)$ risulta continua e limit. su tutto \mathbb{R} .

Voglio scegliere i_k con questa proprietà. Comunque si scelga $x_0 \in \mathbb{R}$, ponendo $R_m = \pm \frac{1}{2i_m}$ (il segno va scelto bene di volta in volta) si ha che

$$|f(x_0 + R_m) - f(x_0)| \geq m |R_m|$$

Se questo è vero, la derivata non può esistere in x_0 .

Fissato $m \geq 1$ scriviamo

$$f(x) = \underbrace{S_{m-1}(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{somma parziale} \\ \text{con } k \leq m-1}} + \varepsilon_m \varphi(i_m x) + \underbrace{R_m(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{resto, cioè la} \\ \text{somma per } k \geq m+1}}$$

Ora $\varphi(i_m x)$ è affine su tratti di lunghezza $\frac{1}{i_m}$, e su ciascuno di questi tratti ha pendenza i_m (supponiamo $i_m > 0$).

Quindi, visto che $R = \pm \frac{1}{2i_m}$, posso scegliere il segno in maniera tale che x_0 e $x_0 + R_m$ stiano nello stesso intervallo in cui $\varphi(i_m x)$ è affine. Ma allora

$$|\varepsilon_n \varphi(i_m(x_0 + R_m)) - \varepsilon_n \varphi(i_m x_0)| \geq \varepsilon_n i_m |R_m|$$

e quindi

desidero:



$$\begin{aligned} |f(x_0 + R_m) - f(x_0)| &\geq |\varepsilon_n \varphi(i_m(x_0 + R_m)) - \varepsilon_n \varphi(i_m x_0)| \leftarrow \text{grande} \\ &\quad - |S_{m-1}(x_0 + R_m) - S_{m-1}(x_0)| \leftarrow \text{piccolo} \\ &\quad - |R_m(x_0 + R_m) - R_m(x_0)| \leftarrow \text{piccolo} \end{aligned}$$

Stimiamo i termini della seconda e 3ª riga

$$|S_{m-1}(x_0 + R_m) - S_{m-1}(x_0)| \leq \overset{\text{cost. di Lip. di } S_{m-1}}{L_{m-1}} |R_m|$$

$$\text{Ora } L_{m-1} \leq \sum_{k=1}^{m-1} L_k = \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k$$

Per l'ultima riga, facciamo una stima estremamente drastica:

$$|R_m(x_0 + R_m) - R_m(x_0)| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |R_m(x)| = 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$|f(x_0 + R_m) - f(x_0)| \geq \left\{ \varepsilon_n i_m - \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k - 4 i_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k \right\} |R_m|$$

↑
abbiamo moltiplicato
e diviso per R_m

Senza che $\{\dots\} \rightarrow +\infty$ per $m \rightarrow +\infty$

Quindi a noi serve

$$\boxed{\varepsilon_m i_m \rightarrow +\infty} \quad (B)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k \ll \varepsilon_m i_m} \quad (C)$$

$$\boxed{\frac{1}{i_m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k \ll \varepsilon_m i_m} \quad (D)$$

oltre alla richiesta iniziale che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty} \quad (A)$$

Idea dalla lezione precedente: era utile $\frac{1}{n} \varphi(m^2 x) \dots$

Poniamo $\varepsilon_k := \frac{1}{10^k}$ e $i_k = 100^k$. Vediamo cosa funziona.

(A) è banale e (B) pure

(D) è la solita

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k = \frac{1}{9} \frac{1}{10^m} = \frac{1}{9} \varepsilon_m$$

Verifichiamo (C):
$$\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k = \sum_{k=1}^{m-1} 10^k = \frac{10^m - 1}{9} \leq \frac{10^m}{9} = \frac{\varepsilon_m i_m}{9}$$
 😊

Mettendo tutto insieme: qualunque sia x_0 , esiste $\delta_m \rightarrow 0$ tale che

$$|f(x_0 + \delta) - f(x_0)| \geq \left\{ 10^m - \frac{10^m}{9} - \frac{10^m}{9} \right\} |\delta| = \frac{7}{9} 10^m |\delta|$$

e questo impedisce a $f'(x_0)$ di esistere!

Oss. Abbiamo seguito una via euristica, ma alla fine abbiamo dimostrato che

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \varphi(100^k x)$$

è continua in \mathbb{R} , ma mai derivabile.

Esempio (Hölder $\not\Rightarrow$ Sobolev)

Abbiamo visto che $f \in H^1((a,b)) \Rightarrow f$ è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana in (a,b) .
Non vale il viceversa, nemmeno nelle forme più deboli possibili,
cioè esiste f che è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $(0,1)$ ma non sta nemmeno
in $W^{1,1}((0,1))$.

(e si può aggravare richiedendo che f sia α -Hölder per ogni $\alpha < 1$)
(e Hölderianità sotto la Lip. non implica essere Sobolev)

Grosso indizio: non c'è verso di stimare la norma L^1 della
derivata in termini della costante di Hölder
nella dim.

Prendiamo la solita $\varphi(x)$. Questa è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana con una
certa costante H_0 . Il punto fondamentale è che $\varphi(\lambda x)$
è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana con costante $\varepsilon \lambda^{1/2} H_0$ (dimostrare per
bene questo Lemma di Analisi 1).

Ora se prendiamo $\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$ abbiamo che sono
equi- $\frac{1}{2}$ -Hölder, pure tutte con la stessa costante, ma la
norma L^1 delle derivate scoppiano (e a fortiori le norme L^p).

Dall'indizio alla dim via BAIRE Consideriamo lo spazio

$$V := \left\{ f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(y) - f(x)| \leq |y-x|^{1/2} \right. \\ \left. \forall (x,y) \in (0,1)^2 \right\} \leftarrow H_0 \text{ fissato} \\ \text{La costante di Lip}$$

Si verifica che V è sp. di Banach rispetto alla norma del sup.
Dico che V contiene funzioni che NON sono $W^{1,1}((a,b))$ per
ogni $(a,b) \subseteq (0,1)$.

Poniamo

$$C_k := \left\{ f \in V : \text{esiste } a \in (0, 1 - \frac{1}{k}) \text{ t.c.} \right. \\ \left. f \in W^{1,1}((a, a + \frac{1}{k})) \text{ e } \|f'\|_{L^1((a, a + \frac{1}{k}))} \leq k \right\}$$

sto cercando quantitativa la lunghezza
dell'intervallo e la norma della derivata.

Passo 1 I C_k sono chiusi. Se $f_n \rightarrow f_0$, allora a meno di s.succ. $a_n \rightarrow a_0$ e si tratta di dimostrare che $f_0 \in W^{1,1}((a_0, a_0 + \frac{1}{k}))$ e $\|f_0'\|_{L^1((a_0, a_0 + \frac{1}{k}))} \leq k$

[Sistemare i dettagli (in tutto c'è k è fisso)]

Passo 2 I C_k hanno parte interna vuota (e questo basta per finire).

Supponiamo che $B_V(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$ per qualche $f_0 \in V$, $r_0 > 0$, $k_0 \geq 1$.

Primo punto chiave: possiamo assumere (a meno di convoluzioni e riduzioni di raggio) che

→ f_0 è di classe C^1 in (a, b) con derivata limitata

→ f_0 è $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante strettamente minore di 1 (se serve cambio f_0 con $(1-\varepsilon)f_0$ per ε piccolo)

Secondo punto chiave: consideriamo

$$f_n(x) := f_0(x) + \frac{1}{n} \varphi(n^{3/2}x)$$

basta qualunque
esponente < 2 e > 1

Osserviamo che per n grande $f_n \in B_V(f_0, r_0)$ (in quanto $f_n \rightarrow f_0$ uniformemente). Inoltre la costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di $\frac{1}{n} \varphi(n^{3/2}x)$ tende a 0 e quindi per n grande la costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di f_n è ≤ 1 .

Basta dimostrare che per n grande $\int_a^b |f_n'(x)| dx \geq k_0$ in ogni intervallo di lunghezza $\frac{1}{k_0}$, il che impedisce a f_n di stare in C_{k_0} . Questo segue dal riscaldamento delle derivate, in quanto

$$|f_n'(x)| \geq \sqrt{n} - |f_0'(x)| \geq \sqrt{n} - \text{costante} \quad \forall x \in (0, 1)$$

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 65

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Calcolo differenziale ed integrale tra spazi normati

Dimostrazioni per dualità dell'Analisi 2

Esempio 1

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Setting Analisi 2: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile con misura finita (ma non necessariamente) e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e la norma è quella euclidea

Se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ si intende che

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \left(\int_{\Omega} f_1(x) dx, \dots, \int_{\Omega} f_m(x) dx \right)$$

= vettore che ha come componenti l'integr. delle comp.

Vogliamo dim. lo stesso risultato per una norma qualunque in \mathbb{R}^m .
[Provare col esempio con la norma 4]

Idea chiave: DIMOSTRAZIONE PER DUALITÀ. Posto $V = \mathbb{R}^m$ con la norma data, l'oss. chiave è che

$$L \left(\int_{\Omega} f(x) dx \right) = \int_{\Omega} L(f(x)) dx \quad (\text{uguaglianza di numeri})$$

per ogni $L \in V'$.

La verifica di questo fatto è la linearità dell'integrale, poiché $L(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$.

Ora preso un qualunque $L \in V'$ con $\|L\|_{V'} \leq 1$ vale che

$$\left| L \left(\int_{\Omega} f(x) dx \right) \right| = \left| \int_{\Omega} L(f(x)) dx \right|$$

$$\text{Analisi } \rightarrow \leq \int_{\Omega} |L(f(x))| dx$$

$$\|L\|_{V'} \rightarrow \leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_V dx$$

Ora facciamo il sup del LHS al variare di tutti gli $L \in V'$ con $\|L\|_{V'} \leq 1$. [O usiamo il funzionale allineato dell'argomento].

Oss. per il futuro Con la stessa dim. si può estendere il risultato a funzioni $f: \Omega \rightarrow V$ con V spazio normato qualunque, a patto di aver definito l'integrale per queste funzioni in maniera tale che commuti con gli elementi $L \in V'$,

Oss. Per funzioni $f: \Omega \rightarrow V$ continue, l'integrale si può anche definire alla Riemann via "partizioni taggate". Nel caso $\Omega = (a, b)$ si considerano somme di Riemann del tipo

$$S(P, T) := \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(s_i)$$

è ben definita se V è sp. vett. e commuta con el. di V'

dove $\underbrace{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b}_{\text{partizione}}$ e $\underbrace{s_i \in [t_{i-1}, t_i]}_{\text{tag}}$

Se f è unif. cont., allora esiste un unico $I \in V$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, T) \text{ diam}(P) \leq \delta \Rightarrow \|I - S(P, T)\| \leq \varepsilon$$

\uparrow $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |t_i - t_{i-1}|$ \uparrow integrale

Esercizio: verificare che I commuta con appl. lineari

Calcolo Diff. tra spazi normati

Analisi 2: una $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice diff. in x_0 se esiste un'appl. lin. $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \overset{\substack{\text{matrice jacobiana} \\ \swarrow}}{A} h + o(\|h\|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

dove $w(h) = o(\|h\|)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\| \overset{\substack{\text{norma in } \mathbb{R}^m \\ \leftarrow}}{}}{\|h\| \overset{\substack{\text{norma in } \mathbb{R}^m \\ \uparrow}}{}} = 0$

Siano V e W sp. normati, esia $f: V \rightarrow W$. Diciamo che f è diff. in $v_0 \in V$ se esiste $L \in \mathcal{L}(V, W)$ (lineare e continua) tale che

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \overset{\substack{\text{Differenziale di } f \text{ in } v_0, \text{ e' equiv.} \\ \text{della matrice} \\ \text{jacobiana} \\ \swarrow}}{L} h + o(\|h\|_V)$$

dove $w(h) = o(\|h\|_V)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|_W}{\|h\|_V} = 0$
 \uparrow limite in V .

Caso speciale: $V = H$ sp. di Hilbert e $W = \mathbb{R}$. In tal caso per Riesz l'operatore L sta in H e si rappresenta come prod. scalare, e quindi la formula diventa

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \langle w, h \rangle + o(\|h\|_H)$$

\uparrow
 $\nabla f(v_0) = \text{gradiente di } f \text{ in } v_0$

In entrambi i casi valgono risultati analoghi all'analisi 2.

Uguaglianza Lagrange Direzionale

Sia V sp. normato, sia $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ diff. ovunque, e siano $a \in V$ e $b \in V$.

Allora esiste c nel segmento di estremi a e b t.c.

$$\varphi(b) - \varphi(a) = [D\varphi(c)](b-a)$$

↑ eccessivo, si può risparmiare
↑ in arrivo c'è \mathbb{R}
il RHS è l'equiv. della derivata direzionale con direzione $b-a$

↑ $c \in V'$ ed è il diff. di φ in c

↑ segmento che congiunge a e b

Dim Basta considerare $\psi(t) := \varphi(a + t(b-a))$ per $t \in [0, 1]$ e osservare che a questa si applica Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_0)$$

Ora si conclude osservando che $\psi'(t) = [D\varphi(a + t(b-a))](b-a)$

↑ specie di Chain Rule

e ponendo $c := a + t_0(b-a)$.

Disuguaglianza di Lagrange direzionale

Siano V e W sp. normati, sia $f: V \rightarrow W$ diff. ovunque (ma si può risparmiare) e siano $a \in V$ e $b \in V$.

Allora esiste c nel segmento di estremi a e b tale che

$$\|f(b) - f(a)\|_W \leq \| [Df(c)](b-a) \|_W \leq \| Df(c) \|_{\mathcal{L}(V,W)} \|b-a\|_V$$

↑ $c \in \mathcal{L}(V,W)$ ed è il diff. di f in $c \in V$

Dim Solo la prima disuguaglianza va dimostrata, e si fa per dualità!

Consideriamo un qualunque $L \in W'$ con $\|L\|_{W'} \leq 1$.
 Consideriamo la funzione $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(v) := L(f(v))$$

A questa si applica l'uguaglianza direzionale, da cui

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = |[D\varphi(c)](b-a)|$$

da cui

$$\begin{aligned} |L(f(b) - f(a))| &= |L(f(b)) - L(f(a))| \\ &= |\varphi(b) - \varphi(a)| \\ &= |[D\varphi(c)](b-a)| \end{aligned}$$

Chi è $D\varphi$? Per la solita chain rule $D\varphi = L \circ Df \in V'$
 $\uparrow \in W'$ $\uparrow \in \mathcal{L}(V, W)$

ma allora

$$L([Df(c)](b-a))$$

$$|L(f(b) - f(a))| = |L([Df(c)](b-a))|$$

$$\leq \underbrace{\|L\|_{W'}}_1 \cdot \|[Df(c)](b-a)\|_W$$

Facendo il sup del LHS al variare di $L \in W'$ con $\|L\|_{W'} \leq 1$ si ottiene la tesi (in alternativa basta prendere come L il funzio-
 uole allineato al vettore $f(b) - f(a)$).

Oss. 1 La dim. è un banale anche nel caso di $V = \mathbb{R}^n$ e
 $W = \mathbb{R}^m$ con norme strane

Oss. 2 Le due chain rule utilizzate si dimostrano abbastanza
 facilmente [Falso!].

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 66

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Precisazione sul duale di c_0 Teoria: $(c_0)' = \ell^1$ con duality pairing

$$J(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = [J(y)](x)$$

\uparrow ℓ^1 \uparrow c_0

Step 1 Buona positura e stima $\|J(y)\|_{c_0'} \leq \|y\|_{\ell^1}$

Step 2 Isometria, cioè $\|y\|_{\ell^1} \leq \|J(y)\|_{c_0'}$. Per fare questa, si suppone $y \in \ell^1$ dato, volendo anche non nullo, e per ogni $N \geq 1$ si considera la successione x_N definita da

$$(x_N)_i := \begin{cases} \operatorname{sign}(y_i) & \text{se } i \leq N \\ 0 & \text{se } i \geq N+1 \end{cases}$$

In questo modo è ovvio che $x_N \in c_0$ per ogni N e $\|x_N\|_{c_0} \leq 1$. Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |y_i| &= \sum_{i=1}^N y_i \frac{\operatorname{sign}(y_i)}{(x_N)_i} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i (x_N)_i \\ &= [J(y)](x_N) \\ &\leq \|J(y)\|_{c_0'} \cdot \underbrace{\|x_N\|_{c_0}}_{\leq 1} \\ &\leq \|J(y)\|_{c_0'} \end{aligned}$$

Facendo tendere $N \rightarrow +\infty$ abbiamo la tesi.

Step 3 Surogettività. Vedi lezioni ISTAM_20.

Oss. Non posso prendere in un colpo solo $x_i := \operatorname{sign}(y_i)$
(perché non stare in c_0)

Duale di C Sappiamo che $C' = \ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ con duality pairing

$$J(y, x) := \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i + y_{\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} x_{\infty} =: [J(y)](x)$$

Vediamo lo step 2 in cui si dimostra che $\|y\|_{\ell^1} + |y_{\infty}| \leq \|J(y)\|_{C'}$
Per ogni $N \geq 1$ poniamo

$$(x_N)_i := \begin{cases} \operatorname{sign}(y_i) & \text{se } i \leq N \\ \operatorname{sign}(y_{\infty}) & \text{se } i > N. \end{cases}$$

Ancora una volta si verifica che $x_N \in C$ (definitiv. è costante) e $\|x_N\|_C \leq 1$. A questo punto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |y_i| + |y_{\infty}| &= \sum_{i=1}^N y_i \operatorname{sign}(y_i) + y_{\infty} \cdot \operatorname{sign}(y_{\infty}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i (x_N)_i + y_{\infty} \cdot \lim_{i \rightarrow +\infty} (x_N)_i \\ &= [J(y)](x_N) \\ &\leq \|J(y)\|_{C'} \|x_N\|_C \end{aligned}$$

e si conclude come prima.

Elementi strani di $(\ell^{\infty})'$

Consideriamo $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(x) := \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i$$

Si osserva che $|L(x)| \leq \|x\|_{\ell^{\infty}}$ per ogni $x \in C$. Per HB possiamo estendere L ad un elemento di $(\ell^{\infty})'$, che possiamo indicare con

$$\hat{L}: \ell^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$$

Oss. Vale l'immersione isometrica $\ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$ via il solito duality pairing tra successioni, ma non è surgettiva in quanto \hat{L} non sta nella sua immagine

[basta vedere che succede scontrando con $0, 0, \dots, 0, \overset{1}{\pm}, 0, \dots$ posiz. n]

CLAIM: \hat{L} è lungi dall'essere unico. Inoltre per ogni successione vale che

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} x_i \leq \hat{L}(x) \leq \limsup_{i \rightarrow +\infty} x_i \quad \forall x \in \ell^\infty$$

(e non può essere sempre uguale all'uno o all'altro, perché non sarebbe lineare)

Caso di allenamento

Vedere le possibilità per $L(x)$ dove $x = 3, 7, 3, 7, 3, 7, \dots$

Dalla dim. di HB sappiamo che deve valere

$$L(z) - \|x - z\|_{\ell^\infty} \leq \hat{L}(x) \leq \|x + y\|_{\ell^\infty} - L(y)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ e ogni $y \in \mathbb{C}$ (condizioni che si ottengono quando si estende da \mathbb{C} a $\text{span}(\mathbb{C}, x)$).

Ponendo $y = 0, 0, 0, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \leq \|x\|_{\ell^\infty} = 7$

Ponendo $z = 3, 3, 3, 3, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \geq 3 - 4 = -1$ e non basta di certo.

Ponendo $z = 7, 7, 7, 7, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \geq 7 - 4 = 3$ 😊

Quindi abbiamo trovato che $3 \leq \hat{L}(x) \leq 7$ sono condizioni necessarie. Mostriamo ora che sono pure sufficienti.

CLAIM Per ogni costante $\delta \in [3, 7]$ esiste $\hat{L} \in (\mathcal{L}^\infty)'$ tale che

$$(i) \quad \hat{L}(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i \quad \text{se } x \in \mathbb{C}$$

$$(ii) \quad \hat{L}(x) = \delta \quad \text{se } x = (3, 7, 3, 7, 3, 7, \dots)$$

$$(iii) \quad |\hat{L}(x)| \leq \|x\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{L}^\infty$$

Sia E il sottospazio di \mathcal{L}^∞ generato da \mathbb{C} e da $3, 7, 3, 7, \dots$.
Basta dimostrare che \hat{L} definita univocamente in E da (i) e (ii) verifica (iii) per ogni $x \in E$. A quel punto ci pensa MB.

Sia ora $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ e $y = 3, 7, 3, 7, \dots$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo verificare che

$$\hat{L}(x + \beta y) \leq \|x + \beta y\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\text{basta senza val. ass. al LHS})$$

ma questo si ottiene ripercorrendo la dimostrazione di MB.

→ se $\beta = 0$, allora è banale

→ se $\beta > 0$, allora

$$\begin{aligned} \hat{L}(x + \beta y) &= \hat{L}(x) + \beta \hat{L}(y) \\ &= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \beta \delta \\ &\leq \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \beta \limsup_{i \rightarrow +\infty} y_i \\ &= \limsup_{i \rightarrow +\infty} (x_i + \beta y_i) \\ &\leq \|x + \beta y\|_{\mathcal{L}^\infty} \end{aligned}$$

→ se $\beta < 0$, allora poniamo $\beta = -\tilde{\beta}$ e avremo che

$$\begin{aligned}
\widehat{L}(x - \widehat{\beta}y) &= \widehat{L}(x) - \widehat{\beta}L(y) \\
&= \widehat{L}(x) - \widehat{\beta}\gamma \\
&\leq \widehat{L}(x) - 3\widehat{\beta} \\
&= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i - \liminf_{i \rightarrow +\infty} (\widehat{\beta}y_i) \\
&= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \limsup_{i \rightarrow +\infty} (-\widehat{\beta}y_i) \\
&\quad - \limsup_{i \rightarrow +\infty} (x_i - \widehat{\beta}y_i) \\
&\leq \|x - \widehat{\beta}y\|_{\ell^\infty}.
\end{aligned}$$

In ogni caso la disuguaglianza è dimostrata.

Esercizio Dimostrare che ogni \widehat{L} che HB estende il limite in c è sempre compreso (e non solo nel caso di $3, 7, 3, 7, \dots$) tra \liminf e \limsup .

Oss. Se consideriamo cc come il sottospazio di \mathcal{Q}^∞ in cui il limite alla Cesaro esiste, questo stesso esempio dice che esistono infiniti elementi di $(cc)'$ che coincidono in c con il limite, e hanno norma ≤ 1 .

[Possiamo scegliere a piacere in $[3, 7]$ il valore che assume sull'elemento $3, 7, 3, 7, \dots$ di cc]

Domanda (con risposta molto prob. negativa): esiste una caratterizzazione decente di $(cc)'$?

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 67

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Per ogni funzione $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ consideriamo $Tf: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$[Tf](x) = \sin(f(x)) \quad \forall x \in (0,1)$$

Vogliamo studiare T come operatore tra diversi spazi funzionali.

Prima osservazione: T NON è lineare.

(a) Determinare se T è continuo $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ con $p \geq 1$ e $q \geq 1$ finiti.

Intanto è ben definito poiché $\sin(f(x)) \in L^q((0,1))$ per ogni q .
Per la continuità osserviamo che

$$f_n \rightarrow f_0 \text{ in } L^p \Rightarrow f_{n_k}(x) \rightarrow f_0(x) \text{ per quasi ogni } x \in (0,1)$$

\uparrow sotto succ.

$$\Rightarrow \sin(f_{n_k}(x)) \rightarrow \sin(f_0(x)) \quad "$$

$$\Rightarrow Tf_{n_k} \rightarrow Tf_0 \text{ grazie all'equilimitatezza}$$

$$\int_0^1 |\sin(f_0(x)) - \sin(f_{n_k}(x))|^q dx \rightarrow 0$$

$\rightarrow 0$ q.o. dominato da 2^q

Basta per concludere? No, perché dobbiamo liberarci della s.succ.

Questo si fa con il solito LEMMA DELLA SOTTO-SOTTO.

Con lo stesso ragionamento si dim. che ogni s.succ. Tf_{n_k} ha una sotto-sotto $Tf_{n_{k_i}}$ che converge a Tf_0 (sempre lo stesso). Questo implica che

$$Tf_n \rightarrow Tf_0 \text{ tutta}$$

(b) Determina se T è continuo come $T: L^2((0,1)) \rightarrow L^\infty((0,1))$

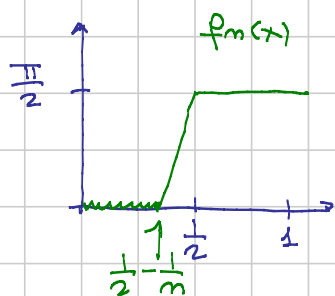
Ancora una volta è ben definito. Se fosse continuo, vorrebbe dire che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^2 \Rightarrow \text{sup} f_n \rightarrow \text{sup} f_\infty \text{ in } L^\infty$$

dunque uniformi

e in particolare se le f_n sono cont., allora f_∞ è cont.

Questo è assurdo. Esempio esplicito



In questo caso f_n e $\text{sup} f_n$ tendono puntualmente ad una funzione discontinua. Inoltre f_n ci tende L^2 .

(c) Determinare se $T: L^4((0,1)) \rightarrow L^2((0,1))$ è Lipschitz.

Senza che $\|Tf(x) - Tg(x)\|_{L^2} \leq \text{cost} \cdot \|f - g\|_{L^4}$

Ora

$$\begin{aligned} \text{LHS}^2 &= \int_0^1 (\text{sup} f(x) - \text{sup} g(x))^2 dx && (\text{uso } |\text{sup} b - \text{sup} a| \leq |b - a|) \\ &\leq \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \left\{ \int_0^1 (f(x) - g(x))^4 dx \right\}^{1/2} \cdot 1 \\ &= \|f - g\|_{L^4}^2 \end{aligned}$$

Facendo la radice si ha la tesi con $\text{cost} = 1$.

Vediamo se l'argomento si estende a $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$

$$\begin{aligned}
\|Tf - Tg\|_q^q &= \int_0^1 |\sin f(x) - \sin g(x)|^q dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|^{\frac{q}{p}} dx \quad (\text{valido se } p \geq q) \\
&\leq \left\{ \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&= \|f - g\|_p^q
\end{aligned}$$

Faccendo la radice q -esima abbiamo la tesi.

Risposta: L'operatore $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ è 1 -Lip. se $p \geq q$ (in generale la costante di Lip. dipende dalla lunghezza dell'intervallo e dagli esponenti).

(d) Studiare la regolarità di $T: L^2((0,1)) \rightarrow L^4((0,1))$

Morale che ci sta sotto: L^4 è un ambiente + esclusivo rispetto ad L^2 , quindi convergere in L^4 è più difficile che in L^2 .

Non stupisce di aver Lip da L^4 in L^2 , mentre ci si aspetta meno da L^2 in L^4 .

$$\begin{aligned}
\|Tf - Tg\|_4^4 &= \int_0^1 |\sin(f(x)) - \sin(g(x))|^4 dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|^4 dx
\end{aligned}$$

e sono fregato (non c'è speranza di controllare una norma 4 con una norma 2).

Idea

$$\begin{aligned}
|\sin(f) - \sin(g)|^4 &= |\sin(f) - \sin(g)|^2 \cdot |\sin(f) - \sin(g)|^2 \\
&\leq 4 \leq |f - g|^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 |\sin(f(x)) - \sin(g(x))|^4 dx \leq 4 \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

$$= 4 \|f - g\|_{L^2}^2$$

Facendo la radice quarta troviamo

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} \leq \sqrt{2} \|f - g\|_{L^2}^{1/2} \quad \forall (f, g) \in L^2((0,1))^2$$

il che dice che T è $\frac{1}{2}$ -Hölder.

(Discorso simile vale per $T: L^p \rightarrow L^q$ con $q > p$)

Vogliamo ora dimostrare che $\frac{1}{2}$ -Hölder è ottimale. Per questo usiamo

$$g(x) \equiv 0 \quad f(x) = \mathbb{1}_{[0, \varepsilon]} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ funzione caratteristica}$$

In questo modo $Tg \equiv 0$ e $Tf = \mathbb{1}_{[0, \varepsilon]}$ e quindi

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} = \varepsilon^{1/4} \quad \text{e} \quad \|f - g\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon^{1/2}$$

E questo mostra che non si può avere meglio di $\frac{1}{2}$ -Hölder

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} \leq H_\alpha \|f - g\|_{L^2}^\alpha$$

$$\varepsilon^{1/4} \leq H_\alpha \varepsilon^{\alpha/2} \quad \text{da cui}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}} \leq H_\alpha \quad \text{facendo } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ si vede che } \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

(e) Determinare se $T: H^1 \rightarrow L^4$ è compatto

↑
spazio SNOB, quindi forse SI 😊

Affermativo: se $\{f_n\} \subseteq H^1((0,1))$ è limitata, allora

soddisfa le hp di A.A. (equi $\frac{1}{2}$ -Hölder + equilimitate in almeno un pto grazie alla media integrale)

Quindi $\exists f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ uniform., dunque a maggior ragione $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ in $L^4((0,1))$.

Allo stesso modo si verifica che $T: W^{1,p}((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ è compatto per ogni $p > 1$ e per ogni $q \geq 1$, anche $q = +\infty$.

Domanda: cosa succederà per $p=1$?

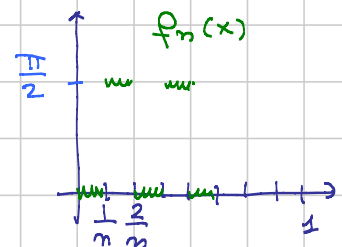
(f) Determinare se $T: L^4 \rightarrow L^2$ è compatto

\uparrow SNOB, ma abbastanza da garantire opt.?

Idea: L^4 NON è abbastanza SNOB, mentre H^1 lo era

Senza $\{f_n\} \subseteq L^4$ limitata b.c. $\{stu(f_n)\}$ non ha s. succ. convergenti in L^2 .

Possiamo prendere f_n come in figura (divido $(0,1)$ in n parti e poi alterno 0 e $\pi/2$).



La limitatezza di f_n in L^4 è chiara.

Ora Tf_n alterna 0 ed \pm in modo sempre più fitto.

Si verifica che $Tf_n \rightarrow 0$ debole L^2 (vedi prime lezioni, basta usare funzioni test $\mathbb{1}_{(a,b)}$), quindi 0 è l'unico limite forte possibile (se $Tf_n \rightarrow g_\infty$ forte, allora $Tf_n \rightarrow g_\infty$).

D'altra parte $Tf_n \not\rightarrow 0$ perché $\|Tf_n\|_{L^2} = \|Tf_n - 0\|_{L^2}$ è una costante non nulla.

(g) Determinare se $T: L^2 \rightarrow L^2$ è differenziabile.

Servirebbe che, per ogni $f \in L^2$, esista $L \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$ t.c. $(DT)f$

$$T(f+R) = Tf + L_f(R) + o(\|R\|_{L^2}) \quad \text{per } R \xrightarrow{\text{in } L^2((0,1))} 0$$

Usando $R(x) = t\varphi(x)$ con $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in L^2$ si ha che

$$\sin(f(x) + t\varphi(x)) - \sin(f(x)) = t L_f(\varphi) + o(t\|\varphi\|_{L^2})$$

Dividendo per t e facendolo tendere $t \rightarrow 0^+$ si ottiene

$$\cos(f(x)) \cdot \varphi(x) = L_f(\varphi) \quad (\text{o piccolo sparisce})$$

[Nota bene: sono i discorsi che si facevano con i funzionali]

Quindi ora sappiamo chi dovrebbe essere L_f .

Questo NON va bene nemmeno per $f \equiv 0$. Dovrebbe infatti essere

$$\sin(R(x)) = R(x) + o(\|R\|_{L^2}) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Ora posso prendere $R(x) = \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(x)$ e ottengo

$$(\sin(\cdot) - 1) \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)} = o(\|R\|_{L^2})$$

il che è falso perché $\|R\|_{L^2((0,1))} = \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\|LHS\|_{L^2} = |\sin(1) - 1|^{1/2} \sqrt{\varepsilon}$$

quindi NON è o piccolo.

MORALE: le funzioni tra spazi normati, anche Hilbert, NON HANNO NESSUNA VOGLIA DI ESSERE DIFFERENZIABILI !!

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 68

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20
 Note Title 06/10/2020

"Autovalori non lineari". Indagare l'esistenza di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il problema

$$u'' = \lambda u^3 \quad u(0) = u(1) = 0$$

ha una soluzione $u(x) \equiv 0$.

λ deve essere negativo

Moltiplicando per u e integrando per parti si ottiene

$$\lambda \int_0^1 u^4 dx = \int_0^1 u'' u dx = \underbrace{[u' u]}_0^1 - \int_0^1 u'^2 dx < 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

Per comodità scriviamo $u'' = -\lambda u^3$ con $\lambda > 0$

Problema vincolato $\min \left\{ \int_0^1 u'^2 dx : u \in H_0^1 \text{ e } \int_0^1 u^4 dx = 1 \right\}$

L'esistenza è una facile applicazione del metodo diretto. Da

$$\int_0^1 u_m'^2 \leq M + \text{vincolo integrale} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{m_k} \rightarrow u \text{ unif.} \\ u_{m_k}' \rightarrow u' \end{array}$$

La sci è gratis, mentre DBC e il vincolo integrale passano al limite grazie alla convergenza uniforme. Quindi il minimo esiste.

Sia u un p.to di min, e applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Poniamo

$$F(u) := \int_0^1 u^2 dx$$

$$G(u) := \int_0^1 u^4 dx - 1$$

Ricordiamo in almeno uno dei 2 casi.

→ $\delta G(u, \varphi) = 0$ per ogni φ ammissibile, cioè

$$4 \int_0^1 u^3 \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \text{ "ammissibile"}$$

Ora basta prendere $\varphi \in C_c^\infty$ per scoprire che $u \equiv 0$, ma questo NON è compatibile con il vincolo.

→ Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u, \varphi) = \lambda \delta G(u, \varphi)$ cioè

$$2 \int_0^1 u \varphi dx = 4\lambda \int_0^1 u^3 \varphi dx$$

Questo ci dice che u ha derivata debole uguale a $-2\lambda u^3$ e quindi $u \in H^2$ e

$$u'' = -2\lambda u^3 \quad \ddot{}$$

Da qui a C^∞ il passo è breve

$$\underline{\quad \circ \quad \quad \circ \quad \quad \quad}$$

Impostazione alternativa

$$\max \left\{ \int_0^1 u^4 dx : \int_0^1 u^2 dx = 1, u \in H_0^1((0,1)) \right\}$$

Abbiamo esistenza per questo problema?

Non immediatamente Se proviamo il metodo diretto, prendiamo succ. supizzante $\{u_n\}$.

Dalle DBC e da $\|u_n\|_{L^2} = 1$, gratis segue che

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty \text{ unif. e } u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty \text{ debole}$$

Ora

$$\int_0^1 u_n^4 dx \rightarrow \int_0^1 u_\infty^4 dx \quad \text{😊}$$

ma purtroppo il vincolo integrale su u non passa al lim. 😞

Passo intermedio Lo stesso argomento mostra che

$$\max \left\{ \int_0^1 u^4 dx : u \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u^2 dx \leq 1 \right\}$$

esiste (anche se è un p.b.m. di max, visto che nel funzionario abbiamo continuità)

CLAIM il max del problema con il \leq SATURA IL VINCOLO, cioè lo realizza con $=$.

Solito argomento di riscaldamento: se il max venisse raggiunto da una certa $u_0 \in H^1$ con $\int_0^1 u_0^2 dx < 1$, allora

potrei considerare λu_0 per un qualche $\lambda > 1$. Il vincolo sarebbe ancora ok, ma $\int \lambda^4 u_0^4 dx$ sarebbe + grande.

In più variabili, cosa diventano questi discorsi?

$\Omega = B(0,1)$ in \mathbb{R}^d e proviamo a risolvere

$$\Delta u = -\lambda u^3 \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

L'impostazione variazionale

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u^4 dx = 1 \right\}$$

Abbiamo esistenza?

Provando il metodo diretto arriviamo a

$$\|u_m\|_{L^4(\Omega)} \leq 1$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$$

↓

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C'$$

Quindi in conclusione $\|u_m\|_{1,2,\Omega} \leq M''$, cioè $\{u_m\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$.

Per Rellich-Kondrakov esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in L^q
 $\nabla u_{m_k} \rightarrow \nabla u_\infty$ debole L^2

La convergenza in L^q vale per ogni $q < 2^*$. Se per caso $4 < 2^*$, allora 😊 perché

$$\int_{\Omega} u_{m_k}^4 dx \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty^4 dx$$

quindi il vincolo integrale passa al limite ed il resto è sc1.

$$4 < 2^* = \frac{2d}{d-2} \quad (\Leftrightarrow) \quad 4d - 8 < 2d \quad (\Leftrightarrow) \quad d < 4$$

cioè $d \in \{2, 3\}$

Quindi se $d \in \{2, 3\}$ il pbm. di minimo ha soluzione, e poi si procede come nel caso 1-dim.

Caso $d > 4$ Dico che $\inf = 0$ e minimo non esiste.

Proviamo con riscalamenti out. Prendiamo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e poniamo

$$u(x) := A(\lambda) \varphi(\lambda x)$$

Questa $\in C_c^\infty(\Omega)$ se $\lambda \geq 1$ (per $\lambda < 1$ prima o poi il supporto esce da Ω). Scegliamo $A(\lambda)$ in modo da rispettare il vincolo integrale e poi vediamo che accade al gradiente

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{\Omega} u(x)^4 dx = [A(\lambda)]^4 \int_{\Omega} \varphi(\lambda x)^4 dx && y = \lambda x \\
 &= [A(\lambda)]^4 \frac{1}{\lambda^d} \int_{\Omega} \varphi(y)^4 dy && dx = \frac{1}{\lambda^d} dy \\
 &= \underbrace{[A(\lambda)]^4 \frac{1}{\lambda^d} \int_{\Omega} \varphi(y)^4 dy}_{= \text{cost}}
 \end{aligned}$$

Quindi

$$A(\lambda) = c \lambda^{d/4}$$

D'altra parte $\nabla u(x) = \lambda A(\lambda) \nabla \varphi(\lambda x)$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx &= \lambda^2 A(\lambda)^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi(\lambda x)|^2 dx \\
 &= \lambda^{2-d} c \lambda^{d/2} \cdot \text{cost} \\
 &= \lambda^{2-\frac{d}{2}} \cdot \text{cost}
 \end{aligned}$$

Se $d > 4$, allora RHS $\rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$ e quindi $\inf = 0$.

Oss. Il fatto che il pbm. di min. vincolato non ha soluzioni non autorizza a dire che non c'è l'autovalore non lineare, ma solo che l'approccio variazionale non funziona.

Caso $d = 4$ Fatto che si può dire: se c'è il p.to di minimo, allora ce ne sono infiniti, e costituiscono un insieme che non è compatto in molti sensi ragionevoli.

FENOMENO DI CONCENTRAZIONE TIPICO DEI CASI CRITICI

Idea: sia un punto di minimo. Estendiamo a 0 fuori di Ω ottenendo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Come prima riscriviamo $u(x) := \lambda u_0(\lambda x)$

Ora

$$\int_{\Omega} u(x)^4 dx = \int_{\Omega} u_0(x)^4 dx, \quad \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx$$

quindi sono tutti di min e il loro supporto "tende a 0".

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 69

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

NEUMANN LAPLACIAN $\Omega := (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo

$$Au = -\ddot{u}$$

$$A : D(A) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

con dominio

$$D(A) := \{ u \in H^2((0, \pi)) : \underline{\dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0} \}$$

NBC (ben definite in H^2)

Si tratta di un operatore di moltiplic. rispetto alla base ortogonale (ma facilmente normalizzabile)

$$\{ \cos(mx) : m \geq 0 \text{ intero} \}$$

$\uparrow u=0$ compreso e diventano le costanti

Oss. Rispetto in partenza ed arrivo alle funzioni a media nulla è l'inverso del solver del pbm

$$-\ddot{u} = f \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \quad S : f \rightsquigarrow u$$

(vedi qualche ds. precedente).

Gli autovalori sono $\{ m^2 : m \geq 0 \text{ intero} \}$ poiché

$$A \cos(mx) = m^2 \cos(mx)$$

Esercizio Determinare $D(A^{1/2})$. Claim: si tratta di $H^1((0, \pi))$.
(senza ulteriori BC)

Ricordiamo che

$$D(A^{1/2}) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty \right\}$$

$$D(A^s) := \left\{ \quad \quad \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{4s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

$$u_n = \int_0^{\pi} u(x) \cos(nx) dx$$

(modulo qualche costante)

Ci sono due verifiche da fare

$$\textcircled{1} \quad u \in D(A^{1/2}) \Rightarrow u \in H^1((0, \pi))$$

$$\textcircled{2} \quad u \in H^1((0, \pi)) \Rightarrow u \in D(A^{1/2}), \text{ cioè } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Verifica di $\textcircled{1}$ Per ipotesi $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx)$ con \uparrow
 $L^2((0, \pi))$

Consideriamo la serie delle derivate

$$- \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot n \sin(nx)$$

Questa converge in L^2 perché $\{\sin(nx)\}$ sono ortogonali e $\sum u_n^2 n^2 < +\infty$. Allora chiamate S_m le somme parziali di quella iniziale abbiamo che

$$S_m(x) \rightarrow u(x) \quad S_m'(x) \rightarrow v(x) \text{ forti } L^2.$$

Per le solite ragioni $u \in H^1$ e $v(x) = u'(x)$.

Verifica di $\textcircled{2}$ Per ipotesi $u \in H^1$. Integrando per parti (ora posso) troviamo che

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} u(x) \cos(mx) dx = \left[-\frac{\sin(mx)}{m} u(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(mx)}{m} u'(x) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(mx) u'(x)}_{v_m} dx \end{aligned}$$

Osserviamo che i v_m sono i coeff. di F di $u'(x)$ rispetto ad un sistema "quasi ortonormale" $\{\sin(mx)\}$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty, \text{ cioè } u \in D(A^{1/2}).$$

Esercizio $D(A^2) = \{u \in H^4((0, \pi)) : \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = \ddot{u}(0) = \ddot{u}(\pi) = 0\}$
on the road

$D(A^2) \Rightarrow H^4 + BC$ L'ipotesi è che $\sum_{n=0}^{\infty} n^8 u_n^2 < +\infty$.

Da questa si deduce che, scritta $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx)$,
 converge anche la serie delle
 derivate fino alla 4^a, da cui $u \in H^4$. Inoltre

$$\ddot{u}(x) = + \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(nx)$$

converge pure uniformemente e le somme parziali si annullano
 al bordo.

$H^4 + BC \Rightarrow D(A^2)$ Devo dim. che $\sum n^8 u_n^2 < +\infty$, ma

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} u(x) \cos(nx) dx \stackrel{\text{si } u=0 \text{ al bordo}}{=} -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \sin(nx) dx \\ &\stackrel{\dot{u}(0)=\dot{u}(\pi)=0}{=} + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \cos(nx) dx \\ &\stackrel{\text{si } u=0 \text{ al bordo}}{=} -\frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) dx \\ &\stackrel{\ddot{u}(0)=\ddot{u}(\pi)=0}{=} -\frac{1}{n^4} \int_0^{\pi} u^{(4)}(x) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

v_n

Come prima $\sum_{n=0}^{\infty} n^8 u_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty$ perché $\{\cos(nx)\}$
 sono quasi ortonormali.

Spazi $H^s((0, \pi))$ definiti a partire dal Dirichlet Laplaciano

$$H^s((0, \pi)) = D(A^{s/2}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx) : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

"
 $W^{s,2}((0, \pi))$

↑
 Dirichlet Laplaciano

Per questi spazi valgono gli analoghi dei teoremi di immersione

$$\begin{array}{l}
 u \in W^{s,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow u \in L^q(\Omega) & \forall q \leq \frac{pd}{d-sp} & \text{se } sp < d \\ \rightarrow u \in L^q(\Omega) & \forall q < +\infty & \text{se } sp = d \\ \searrow u \text{ è } s - \frac{d}{p} \text{ Hölder} & & \text{se } sp > d \end{cases}
 \end{array}$$

se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto abbastanza regolare

Nel caso specifico $\Omega = (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$, quindi $d=1$ e $p=2$ otteniamo

$$\begin{array}{l}
 u \in H^s((0, \pi)) \begin{cases} \nearrow u \in L^q((0, \pi)) & \forall q \leq \frac{2}{1-2s} & \text{se } s \in (0, \frac{1}{2}) \\ \rightarrow u \in L^q((0, \pi)) & \forall q < +\infty & \text{se } s = \frac{1}{2} \\ \searrow u \text{ è } s - \frac{1}{2} \text{ Hölder} & & \text{se } s \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}
 \end{array}$$

↑
per $s=1$ diventa il classico
 $u \in H^1 \Rightarrow u$ è $\frac{1}{2}$ Hölder

se $(0, \frac{1}{2})$ e $q > \frac{2}{1-2s}$, allora $H^s \not\rightarrow L^q$

Cerchiamo controesempio del tipo $u(x) = \frac{1}{x^a}$.

Sappiamo che $u \notin L^q \Leftrightarrow \int_0^\pi \frac{1}{x^{aq}} dx = +\infty \Leftrightarrow \boxed{a \geq \frac{1}{q}}$

Ora

$$\begin{aligned}
 u_m &= \int_0^\pi \frac{1}{x^a} \sin(mx) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ mx=y \\ dx = \frac{1}{m} dy}}{=} \frac{m^a}{m} \int_0^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y^a} dy \sim \text{cost} \frac{1}{m^{1-a}} \\
 &\quad \downarrow \text{Analisi } \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^a} dy
 \end{aligned}$$

Quindi $u \in H^s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty n^{2s} \frac{1}{n^{2-2a}} < +\infty \Leftrightarrow 2-2a-2s > 1$
 $\Leftrightarrow 2a < 1-2s \Leftrightarrow \boxed{a < \frac{1}{2}-s}$

Quindi per il controesempio serve trovare a t.c.

$$\frac{1}{q} \leq \alpha < \frac{1}{2} - s$$

e questo è possibile $\Leftrightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - s = \frac{1-2s}{2} \Leftrightarrow q > \frac{1-2s}{2}$ 😊

$s \in (\frac{1}{2}, 1)$ e $u \in H^s \Rightarrow u$ è α -Hölder con $\alpha < s - \frac{1}{2}$

Per ipotesi $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 n^{2s} < +\infty$

Osserviamo che $\sin(x)$ è α -Hölderiana con una costante H_α .
 Con i soliti argomenti si verifica che $a \sin(bx)$ è
 α -Hölderiana con costante $H_\alpha |a| \cdot |b|^\alpha$
 e in particolare

↑ facendo α derivata, b
 esce alla potenza α

$u_n \sin(nx)$ è α -Hölderiana con costante $H_\alpha |u_n| \cdot n^\alpha$.

Per dimostrare che $u(x)$ è α -Hölderiana basta la convergenza delle serie delle costanti di Hölder (basta una non serve, e in questo sta la non ottimalità di questa dimostrazione).

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot n^\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| n^s n^{\alpha-s} \\ &\leq \underbrace{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 n^{2s} \right\}^{1/2}}_{\text{converge per hp}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-2\alpha}} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

e la seconda converge $\Leftrightarrow 2s - 2\alpha > 1 \Leftrightarrow 2\alpha < 2s - 1$

$$\Leftrightarrow \alpha < s - \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Oss. La dimostrazione per $\alpha = s - \frac{1}{2}$ è più delicata, perché la cond. suff. non è verificata per forza.

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 70

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Operatore primitiva Data $f \in L^1((0,3))$, definiamo $Af: (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$[Af](x) := \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in (0,3).$$

Osserviamo che si tratta di un operatore lineare.

(a) Determinare se $A: L^2((0,3)) \rightarrow L^2((0,3))$ è continuo.

Intanto è ben definito, in quanto Af è pure limitata.

Essendo lineare, per la continuità basta studiare la limitatezza

$$\begin{aligned} |[Af](x)| &\leq \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \\ &\leq \left\{ \int_0^x |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^x 1 dt \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_0^3 |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

da cui $\|Af\|_{L^\infty((0,3))} \leq \sqrt{3} \|f\|_{L^2((0,3))}$. Integrando nuovamente:

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \int_0^3 |Af|^2 dx \leq 3 \int_0^3 \|f\|_{L^2}^2 \leq 9 \|f\|_{L^2}^2.$$

Facendo la radice abbiamo la tesi $\|Af\|_{L^2} \leq 3 \|f\|_{L^2}$.

Oss. In modo del tutto analogo si dimostra che

$A: L^p((0,3)) \rightarrow L^q((0,3))$ è continuo per ogni scelta di $p \geq 1$ e $q \geq 1$ (compresi $+\infty$)

(b) Determinare la norma di $A: L^p((0,3)) \rightarrow L^\infty((0,3))$

Come sopra
$$|[Af](x)| \leq \int_0^3 |f(t)| \cdot 1 dt$$

$$\leq \left\{ \int_0^3 |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \cdot 3^{1/p'}$$

da cui, facendo il sup al variare di $x \in (0,3)$:

$$\|Af\|_{L^\infty((0,3))} \leq 3^{1/p'} \|f\|_{L^p} \text{ e quindi } \|A\|_{op} \leq 3^{1/p'}$$

Si può ottenere il segno di $=$? Occorre = in Hölder, il che è possibile prendendo f costante.

Ad esempio, per $f(x) \equiv 1$ otteniamo $\|f\|_{L^p} = 3^{1/p}$ e $[Af](x) = x$ e quindi $\|Af\|_{L^\infty} = 3$ e quindi

$$3 = \|Af\|_{L^\infty} \leq \|A\|_{op} \cdot \|f\|_{L^p} = \|A\|_{op} \cdot 3^{1/p}$$

da cui $\|A\|_{op} \geq 3^{1-1/p} = 3^{1/p'}$, da cui la tesi.

(c) Determinare la norma di $A: L^2((0,3)) \rightarrow L^2((0,3))$.

Dobbiamo calcolare $\sup \{ \|Af\|_{L^2((0,3))} : \|f\|_{L^2((0,3))} \leq 1 \}$

Se poniamo $u := Af$, notiamo che $u \in H^1((0,3))$ e $u(0) = 0$, e possiamo riscrivere il sup come

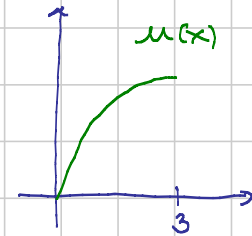
$$\sup \{ \|u\|_{L^2} : \|u'\|_{L^2} \leq 1, u(0) = 0 \}$$

cioè facendo il quadrato

$$\sup \left\{ \int_0^3 u(x)^2 dx : \int_0^3 u'(x)^2 dx \leq 1, u(0) = 0 \right\}$$

Visto così si tratta della COSTANTE DI POINCARÉ con una sola DBC. Il sup è (u risulta un max (metodo diretto) e il punto di max risolve un' eq. del tipo

$$\begin{cases} ii = \lambda u \\ \uparrow \text{moltiplicatore di Lagrange} \\ u(0) = 0 \\ \ddot{u}(3) = 0 \quad (\text{NBC on the road}) \end{cases}$$



Si verifica che esistono infiniti λ negativi per cui c'è soluzione e le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{6} \times (2m+1)x\right)$$

deve rendere
il vincolo integrale = 1

Quella che massimizza è quella con $m=0$, cioè $a \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.
Faccendo i conti si trova la norma dell'operatore!

Oss. Norme di $A: L^p \rightarrow L^q$ si riducono ad analoghi problemi di max vincolato con esponenti diversi

(d) Determinare se $A: L^{\frac{6}{5}}((0,3)) \rightarrow L^{\infty}((0,3))$ è cpt.

Brutal mode: A fa la primitiva, quindi rende più regolari, quindi fa entrare in un club + esclusivo, quindi sarà compatto.

Rigorosamente: sia $\{f_n\} \subseteq L^{\frac{6}{5}}((0,3))$ limitata. Allora $\{Af_n\}$ sono equi $\frac{6}{5}$ Hölder $\left(\frac{1}{5}\right)$ e sono equilimitate grazie alla DBC in $x=0$.

A.A. $\Rightarrow \exists f_{n_k} \rightarrow f_{\infty}$ unif., quindi in L^{∞} e in tutti i possibili spazi L^p .

Altro esercizio Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ una palla. Consideriamo il problema

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} (u^2 - u^{20}) dx : u \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla u|^7 dx \leq \varepsilon \right\}$$

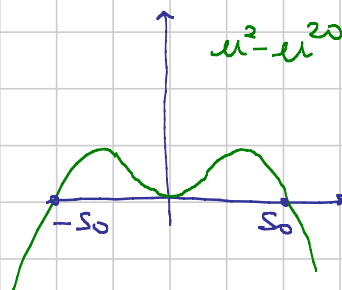
Ossevo che $\sup \leq 0$ perché posso sempre usare $u(x) \equiv 0$.

(a) Esistono valori di ε e d per cui $\sup = \min = 0$?

Sì, basta che $W^{1,7}$ si immerga in L^∞ ed ε sia abbastanza piccolo.

Analisi 1 \Rightarrow esiste $s_0 > 0$ t.c.

$$s^2 - s^{20} \geq 0 \quad \forall s \in [-s_0, s_0]$$



Ist AM \Rightarrow se vale l'immersione, allora

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(d, \Omega) \|u\|_{1,7,\Omega}$$

Inoltre per Poincaré, essendo u nulla al bordo, avremo

$$\|u\|_{1,7,\Omega} \leq c_1(d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^7(\Omega)}$$

e quindi in conclusione

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \underbrace{c_2(d, \Omega)}_{\leq s_0 \text{ se } \varepsilon \text{ è piccolo}} \|\nabla u\|_{L^7(\Omega)}$$

Quindi per ε piccolo vale che $\int_{\Omega} u^2 - u^{20} \geq 0$ per ogni u ammissibile?

Quando vale $W^{1,7}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$? Serve $7 > d$.

Quindi è vero fino alla dimensione 6 per ε piccolo.

(b) esistono valori di ε e d per cui $\inf = -\infty$?

Sì, è vero per ogni $\varepsilon > 0$ non appena $W^{1,7} \not\hookrightarrow L^{20}(\Omega)$, cioè appena $20 > 7^*$, cioè

$$20 > \frac{7d}{d-7} \Leftrightarrow 20d - 140 > 7d \Leftrightarrow 13d > 140 \Leftrightarrow d \geq 11$$

Conviene provare con il solito riscalamento. Supponendo Ω con centro nell'origine, prendiamo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e per $\lambda \geq 1$ poniamo

$$u(x) = \lambda^a \varphi(\lambda x)$$

Scegliendo bene l'esponente a dovrebbe essere vero che $\|\nabla u\|_{L^7} \rightarrow 0$ e $\|u\|_{L^{20}} \rightarrow +\infty$ e $\|u\|_{L^2} \rightarrow 0$.

Da questo segue la tesi (fare i conti).

(c) Esistono valori di ε e d per cui $\inf \mathcal{F} = \min =$ numero reale negativo? (Almeno se pensiamo al min in $W^{1,7}$)

Sì, è vero per ogni ε abbastanza grande se la dimensione è $d \leq 10$, e quindi vale l'immersione $W^{1,7}(\Omega) \hookrightarrow L^{20}(\Omega)$.

L'immersione garantisce $\inf \in \mathbb{R}$ per ogni $\varepsilon \geq 0$.

Infatti questo permette di stimare

$$\int_{\Omega} u^2 \text{ e } \int_{\Omega} u^{20} \text{ in termini di } \varepsilon.$$

Fissata $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, usiamo $u(x) = m\varphi(x)$, quando m è grande riusciamo a rendere $\int_{\Omega} (u^2 - u^{20}) dx < 0$ (serve che $20 > 2$).

Quindi esiste $u \in W^{1,7}(\Omega)$ che rende l'integrale negativo.

Se ε è abbastanza grande, questa u è un candidato ammissibile. Quindi \inf esiste ed è reale.

Metodo diretto classico \Rightarrow esiste il minimo. 😊

— ☺ — ☺ — ☺ —