Esercizi di Analisi Matematica 2

Versione 26 febbraio 2019

Marina Ghisi Massimo Gobbino

Change log

- *Versione 22 settembre 2015.* Iniziato il progetto.
- *Versione 18 ottobre 2015.* Saper dire e saper fare ok fino alle lezione 21.
- *Versione 24 ottobre 2015.* Saper dire e saper fare ok fino alle lezione 27.
- *Versione 31 ottobre 2015.* Saper dire e saper fare ok fino alle lezione 33. Aggiornato Hard 2.
- *Versione 19 novembre 2015.* Saper dire e saper fare ok fino alle lezione 51.
- *Versione 23 novembre 2015.* Aggiunti integrali impropri 1–6.
- *Versione 19 dicembre 2015.* Saper dire e saper fare ok fino alla fine del primo semestre (lezione 71).
- *Versione 16 aprile 2016.* Saper dire e saper fare ok fino alla lezione 107. Aggiunte funzioni implicite/inverse, successioni/serie di funzioni, e molti studi qualitativi.
- *Versione 25 aprile 2016.* Saper dire e saper fare ok fino alla lezione 113.
- *Versione maggio 2016.* Saper dire e saper fare quasi ok fino a fine corso.
- *Versione settembre 2016.* Aggiunti scritti d'esame. Aggiunto indice cliccabile. Riorganizzato il template in modo forse maggiormente razionale.
- *Versione marzo 2017.* Aggiunti scritti d'esame della sessione invernale.
- *Versione maggio 2018.* Aggiunti esercizi su equazioni differenziali di ordine 2. Corretti alcuni errori.
- *Versione febbraio 2019.* Aggiunti scritti d'esame 2017/18.

To do

- Sistemare gli esercizi teorici su limiti/continuità/differerenziabilità.

Indice

Prefazione

[Farsi venire in mente qualcosa da scrivere qui]

Buon lavoro!

Capitolo 1

Fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Limiti 1

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti in un punto per funzioni di più variabili

---

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0, 0)$. Nelle varie colonne, la funzione si intende definita nel suo "naturale dominio" intersecato l'insieme definito dalle relazioni indicate in testa alla colonna stessa.

	$(x,y) \in \mathbb{R}^2$		$x > 0,\ y > 0$		$0 \leq x \leq y$		$x > 0,\ y \leq x^2$	
Funzione	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup
$\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{y}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{y^2}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$								
$\dfrac{x}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{x^2y}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{x}{x+y}$								
$\dfrac{y^2}{x+y}$								

Limiti 2

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti in un punto per funzioni di più variabili

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0, 0)$. Nelle varie colonne, la funzione si intende definita nel suo "naturale dominio" intersecato l'insieme definito dalle relazioni indicate in testa alla colonna stessa.

	$(x,y) \in \mathbb{R}^2$		$x > 0,\ y > 0$		$0 \leq x \leq y$		$x > 0,\ y \leq x^2$	
Funzione	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup
$\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$								
$\dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$								
$\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$								
$\dfrac{xy}{\lvert x\rvert+y^2}$								
$\dfrac{x}{x^3+y^3}$								
$\dfrac{xy}{x^3+y^3}$								
$\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$								
$\dfrac{y^4}{\lvert x\rvert^3+\lvert y\rvert^3}$								
$\dfrac{y^4}{x^3+y^3}$								
$\dfrac{x+2y}{x+y}$								
$\dfrac{x^3}{x-y^2}$								
$\dfrac{\sqrt{x^2+\lvert y\rvert}}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$								

Limiti 3

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti in un punto per funzioni di più variabili

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0, 0)$. Nelle varie colonne, la funzione si intende definita nel suo "naturale dominio" intersecato l'insieme definito dalle relazioni indicate in testa alla colonna stessa.

	$(x,y) \in \mathbb{R}^2$		$x > 0,\ y > 0$		$0 \le x \le y$		$x > 0,\ y \le x^2$	
Funzione	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup
$\dfrac{\sin(xy)}{xy}$								
$\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{\lvert x\rvert + 2\lvert y\rvert}}$								
$\dfrac{\sin(x-y)}{x+y}$								
$\dfrac{y \sin x}{x^2 + y}$								
$\dfrac{\cos x - \cos y}{x+y}$								
$\dfrac{e^x - e^{2y}}{x^2 + y^2 + x^2y^2}$								
$\dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$								
$\dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$								
$\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y}$								
$\dfrac{x - \sqrt{xy}}{x^2 - y^2}$								
$\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{x+y}\,dt$								
$\displaystyle\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y}\,dt$								

Limiti 4–5–6

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti all'infinito per funzioni di più variabili

---

[In questo punto sono da inserire le schede "Limiti all'infinito 1–2–3" dell'eserciziario per i corsi di servizio, con la seguente variante: nei corsi di servizio se il limite non esiste non si chiede nient'altro; qui invece si possono calcolare liminf e limsup]

Limiti 7

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tecniche per il calcolo di limiti all'infinito per funzioni di più variabili

In ogni riga è assegnata una funzione, di cui si chiede di calcolare liminf e limsup per $x^2 + y^2 \to +\infty$. Nelle varie colonne, la funzione si intende definita nel suo "naturale dominio" intersecato l'insieme definito dalle relazioni indicate in testa alla colonna stessa, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$.

	$(x,y) \in \mathbb{R}^2$		$x \leq y \leq 2x$		$y \in [0,1],\ x \geq 0$		D	
Funzione	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup	liminf	limsup
$x^4 - y^6$								
$x^4 + y^4 + x^2 y$								
$x^4 + y^4 + 2x^3 y$								
$\sin x + \cos(y^2)$								
ye^{-x}								
$\lvert y\rvert e^{-\lvert x\rvert}$								
$e^{xy}(x^2 + y^2)$								
$x^4 + y^6 - x^2 y^2$								
$x^4 + y^6 - x^3 y^2$								
$\dfrac{(x+y)^2}{1 + \lvert x\rvert + \lvert y\rvert}$								
$\dfrac{(x+2y)^2}{1 + x^2 + y^2}$								
$\dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$								
$\dfrac{\log(1+y^4)}{x^2 + \lvert y\rvert}$								
$y^2 + \arctan(xy)$								
$\dfrac{xy^2}{1 + x^2 + x^2 y^4}$								

[Questa pagina vorrei rivederla]

Limiti n

Argomenti: limiti di funzioni di più variabili **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: tutto sui limiti per funzioni di più variabili

[Scheda tutta da sistemare. Qui ci vorrei esercizi sui limiti parametrici, spostando gli ultimi due in una scheda piu' teorica]

1. Determinare per quali valori dei parametri reali positivi a e b ciascuno dei seguenti limiti esiste:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a \cdot |y|^b}{x^{88}+y^{12}}, \qquad \lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{|x|^a \cdot |y|^b}{x^{88}+y^{12}}.$$

2. Determinare, al variare del parametro reale a, il
$$\liminf_{x^2+y^2\to+\infty} x^4+y^4+ax^3y.$$

3. (Terribile!) Determinare per quali valori dei parametri reali positivi a e b il seguente limite esiste:
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{|x|^a \cdot |y|^b}{x^2+y^2+x^4y^2}.$$

4. [Questo ed il successivo potrebbero forse ambire alla sezione hard]

   Determinare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

   - il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste,
   - per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non entrambi nulli, e per ogni coppia (h,k) di interi positivi si ha che
$$\lim_{t\to0} f(at^h, bt^k) = 0.$$

5. Determinare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

   - il limite di $f(x,y)$ per $x^2+y^2 \to +\infty$ non esiste,
   - per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ non entrambi nulli, per ogni $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, e per ogni coppia (h,k) di interi positivi si ha che
$$\lim_{t\to0} f(c+at^h, d+bt^k) = 0.$$

Limiti – Esercizi teorici 1

Argomenti: limiti e continuità in più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sui limiti per funzioni di più variabili

1. (Limiti e successioni) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione.

   Dimostrare che $f(x,y)$ ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$ se e solo se $f(x_n, y_n)$ ammette limite per ogni successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione.

   (a) Decifrare e successivamente dimostrare le seguenti relazioni:

   $$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \liminf_{x\to 0} \left(\liminf_{y\to 0} f(x,y) \right),$$

   $$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \geq \limsup_{x\to 0} \left(\limsup_{y\to 0} f(x,y) \right).$$

   (b) Stabilire cosa si può dire in aggiunta quando il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$ esiste.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

   (a) Dimostrare che la funzione di due variabili

   $$\varphi(x,y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

   ha limite per $(x,y) \to (0,0)$ se e solo se $f(x)$ è derivabile per $x = 0$.

   (b) Dimostrare che la funzione del punto precedente è estendibile con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $f \in C^1(\mathbb{R})$, specificando perché non basta assumere che sia derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

   (c) Dimostrare che la funzione

   $$\psi(x,y) := \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

   è estendibile con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed è una funzione dispari.

   (d) Caratterizzare le funzioni f per cui ciascuna delle seguenti funzioni

   $$\varphi_1(x,y) := \frac{f(x) - f(y)}{x + y}, \qquad \psi_1(x,y) := \frac{f(x) + f(y)}{x - y}$$

   è estendibile con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

Continuità e differenziabilità 1

Argomenti: derivate parziali e differenziale in più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sui limiti, teoremi sulle funzioni differenziabili

In ogni riga della tabella si considera la funzione che vale 0 nell'origine e altrove è definita dall'espressione indicata. Si richiede di stabilire se la funzione così definita ammette derivate parziali e direzionali dell'origine (ed eventualmente indicarne il valore), se è differenziabile nell'origine, se è di classe C^0 o C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, se nell'origine le derivare seconde miste coincidono (indicando il valore se coincidono, N se non coincidono, N.E. se almeno una non esiste).

Espressione	$f_x(0,0)$	$f_y(0,0)$	$f_v(0,0)$	Diff.	$f_{xy} = f_{yx}$	$C^0(\mathbb{R}^2)$	$C^1(\mathbb{R}^2)$
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^5}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^3+xy^2+y^4}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$							
$\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}$							
$\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$							
$\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}$							
$\dfrac{x^4y+y^5-x^6}{x^4+y^4}$							

Continuità e differenziabilità 2

Argomenti: derivate parziali e differenziale in più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sui limiti, teoremi sulle funzioni differenziabili

---

In ogni riga della tabella si considera la funzione che vale 0 nell'origine e altrove è definita dall'espressione indicata. Si richiede di stabilire se la funzione così definita ammette derivate parziali e direzionali dell'origine (ed eventualmente indicarne il valore), se è differenziabile nell'origine, se è di classe C^0 o C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, se nell'origine le derivare seconde miste coincidono (indicando il valore se coincidono, N se non coincidono, N.E. se almeno una non esiste).

Espressione	$f_x(0,0)$	$f_y(0,0)$	$f_v(0,0)$	Diff.	$f_{xy} = f_{yx}$	$C^0(\mathbb{R}^2)$	$C^1(\mathbb{R}^2)$
$\dfrac{\sqrt{\lvert x\rvert^3 y^2}}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{\sqrt{\lvert x\rvert^5 y^2}}{x^2+y^2}$							
$\dfrac{xy}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$							
$\dfrac{xy^2}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$							
$\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$							
$\dfrac{\sin^3 x-\sin^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$							
$\dfrac{x^3 y}{x^2+y^4}$							
$\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$							
$\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$							
$\dfrac{x^4+y^6}{x^2+y^4}$							
$\dfrac{xy(x^2+\lvert y\rvert)}{\lvert x\rvert+y^2}$							

Continuità – Esercizi teorici

Argomenti: funzioni continue di più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: limiti, connessione, teorema di esistenza degli zeri in più variabili

---

1. [Questo non vorrei dimenticarmelo, ma per ora non so dove metterlo] Dimostrare che un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi C^∞.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione *separatamente* lipschitziana, cioè tale che le funzioni
$$t \to f(t, y_0) \qquad \text{e} \qquad t \to f(x_0, t)$$
sono lipschitziane per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Determinare se possiamo concludere che f è continua e/o lipschitziana in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare se e come cambiano le risposte alla domanda precedente se si assume l'*uniforme* lipschitzianità nella variabile x, cioè l'esistenza di una costante L tale che
$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\liminf_{x^2+y^2 \to +\infty} = -\infty, \qquad \limsup_{x^2+y^2 \to +\infty} = +\infty.$$
Dimostrare che l'equazione $f(x, y) = \lambda$ ha infinite soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia I la sua immagine.
   Determinare quanti sono, al massimo, i valori $\lambda \in I$ per cui l'equazione $f(x, y) = \lambda$ ha un numero finito di soluzioni.
   (b) Determinare se e come cambia la risposta al punto precedente se assumiamo che $f(x, y)$ sia definita solo su un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ connesso.

5. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y - y^3.$$
   (a) Dimostrare che esiste una successione $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_n, y_n) = 2015$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e
$$\lim_{n \to +\infty} (|x_n| + |y_n|) = +\infty.$$
   (b) Data una qualunque successione $\{(x_n, y_n)\}$ come nel punto precedente, calcolare
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

Differenziabilità – Esercizi teorici

Argomenti: derivate parziali e differenziale in più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su limiti, derivate parziali e differenziale in più variabili

---

1. Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile e con gradiente costante è necessariamente affine.

2. Trovare una funzione $f(x, y)$ che ammette nell'origine tutte le derivate parziali e direzionali, ma per la quale non è vero che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

3. Consideriamo le funzioni

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^4}, \qquad\qquad g(x, y) = \frac{x^7 y^9}{|x|^\alpha + |y|^\beta}.$$

   Determinare i valori di α e β per cui ciascuna di esse

   (a) appartiene a $C^0(\mathbb{R}^2)$,

   (b) ammette derivate parziali e direzionali nell'origine,

   (c) appartiene a $C^1(\mathbb{R}^2)$,

   (d) appartiene a $C^2(\mathbb{R}^2)$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{R}^n$ e differenziabile nell'origine.

   Dimostrare che esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x)/|x|$ per ogni $x \neq 0$ se e solo se $\nabla f(0) = 0$.

5. (a) Caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui esiste una funzione $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

   per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq y$.

   (b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(t, t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Determinare se esiste necessariamente una funzione continua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x - y}$$

   per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq y$.

Derivate miste

Argomenti: variazioni sul teorema di Schwarz **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: limiti, derivate parziali e differenziale, teorema di Schwarz

1. Dare una qualche sistemazione rigorosa al seguente enunciato. Data una funzione $f(x,y)$ e posto $g(x,y) = xyf(x,y)$, valgono le relazioni
$$g_{xy}(0,0) = \lim_{x\to 0} f(x,0), \qquad g_{yx}(0,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y).$$

2. Dimostrare che per ogni coppia $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, che ammette derivate parziali seconde in ogni punto, e tale che
$$f_{xy}(0,0) = \alpha, \qquad f_{yx}(0,0) = \beta.$$

3. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$
   (a) Studiare l'esistenza e la continuità delle derivare parziali prime, nonché la differenziabilità di $f(x,y)$.
   (b) Determinare in quali punti le derivate seconde miste $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$ esistono, ed in quali punti sono uguali tra di loro.

4. Sia $\delta > 0$, sia $Q_\delta = (-\delta,\delta) \times (-\delta,\delta)$, e sia $f : Q_\delta \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che
   (a) $f_{yx}(x,y)$ esiste in tutto Q_δ ed è continua in $(0,0)$,
   (b) $f_x(x,y)$ esiste in Q_δ ed è continua rispetto alla variabile x nei punti dell'asse y che cascano in Q_δ, cioè
$$\lim_{x\to 0} f_x(x,y) = f_x(0,y) \qquad \forall y \in (-\delta,\delta).$$
   Dimostrare che $f_{xy}(0,0)$ esiste e $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

5. (a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ siano differenziabili in $(0,0)$.
   Dimostrare che vale l'inversione dell'ordine di derivazione, cioè $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.
   (b) Dedurne il seguente risultato più generale: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^k e tutte le sue derivate parziali k-esime sono differenziabili in un certo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora le derivare parziali $(k+1)$-esime in x_0 dipendono solo dal multi-indice, cioè sono indipendenti dall'ordine di esecuzione delle operazioni.

Chain rule 1

Argomenti: chain rule in più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: differenziale del prodotto e della funzione composta

1. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ due funzioni, e definiamo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo $\varphi(t) = \langle f(x), g(x) \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

   Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano differenziabili in un certo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

   Dimostrare che $\varphi(x)$ è differenziabile in x_0 e determinare la formula per il suo differenziale.

2. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due funzioni, e definiamo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ponendo $\varphi(t) = g(x)f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

   Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano differenziabili in un certo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

   Dimostrare che $\varphi(x)$ è differenziabile in x_0 e determinare la formula per il suo differenziale.

3. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ due funzioni, e definiamo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $\varphi(t) = f(g(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Supponiamo che $f(x)$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $g(t)$ sia derivabile in $t_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo anche che $g(t_0) = x_0$
   Dimostrare che $\varphi(t)$ è derivabile in t_0 e determinare la formula per la sua derivata.

   (b) Determinare se e come cambiano le cose se si sostituisce l'ipotesi di differenziabilità di $g(x)$ con la sola esistenza delle derivate parziali/direzionali in x_0.

4. Siano f, g_1 e g_2 funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ di classe C^2, e definiamo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo

   $$\varphi(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y)) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Scrivere le formule per le derivate parziali di $\varphi(x, y)$ fino all'ordine 2.

5. (Coordinate polari nel piano) In questo esercizio, con un abuso di notazione, indichiamo una stessa funzione di due variabili sia come $u(x, y)$ (pensando ovviamente x e y come le solite coordinate cartesiane), sia come $u(\rho, \theta)$ (pensando ρ e θ come coordinate polari).

   (a) (Norma del gradiente in coordinate polari) Dimostrare che

   $$|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 = u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2.$$

   (b) (Laplaciano in coordinate polari) Dimostrare che

   $$u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}.$$

Chain rule 2

Argomenti: semplici equazioni alle derivate parziali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: utilizzo della chain rule in più variabili

---

1. (Equazioni alle derivate parziali) Per ciascuna delle seguenti relazioni, caratterizzare tutte le funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che la soddisfano per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Relazione	Soluzioni
$u_x(x, y) = 0$	
$u_x(x, y) = u_y(x, y)$	
$u_x(x, y) = -7u_y(x, y)$	
$u_x(x, y) = x\, u_y(x, y)$	
$x\, u_x(x, y) = y\, u_y(x, y)$	
$y\, u_x(x, y) = x\, u_y(x, y)$	
$y\, u_x(x, y) = -x\, u_y(x, y)$	

2. (Disequazioni alle derivate parziali) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che
$$f_x(x, y) \geq f_y(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Supponendo che $f(x, y)$ si annulli in tutti i punti degli assi cartesiani, determinare in quali altri punti la funzione si annulla sicuramente.

3. (Funzioni armoniche) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto. Una funzione $u : D \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si dice armonica in D se
$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in D.$$
   (a) Fornire un esempio di una funzione armonica su tutto $\mathbb{R}^2$ che non sia affine (cioè non del tipo $ax + by + c$).
   (b) Dimostrare che le uniche funzioni armoniche *radiali* (cioè per cui il valore $u(x, y)$ dipende solo dalla distanza di (x, y) dall'origine) su tutto $\mathbb{R}^2$ sono le costanti.
   (c) Determinare tutte le funzioni armoniche *radiali* in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4. (Equazione delle onde)
   (a) Caratterizzare tutte le funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che
$$u_{xy}(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (b) Data una costante $c > 0$, caratterizzare tutte le funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che
$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Studio di funzioni 1–???

Argomenti: studio locale/globale di funzioni di più variabili **Difficoltà**: varia

Prerequisiti: tutte le tecniche per lo studio locale/globale di funzioni di più variabili

---

[In questo punto va inserita tutta la parte dell'eserciziario per i corsi di servizio relativa allo studio locale/globale di funzioni di più variabili, cioè le schede "Inf/sup/max/min 1–9", "Punti stazionari 1–2", "Sviluppi di Taylor 1–2"]

Studio di funzioni n

Argomenti: inf/sup/max/min in più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutte le tecniche per lo studio globale di funzioni di più variabili

---

1. Determinare massimo e minimo della funzione
$$f(x, y) = |x| - x|y|$$
sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + xy}{1 + z^2}$$
sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 1\}$.

3. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{x^2 + y}$$
sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 1/x \leq y \leq 1\}$.

4. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione
$$f(x, y) = \frac{1 - e^{-xy}}{x^2 + y^2}$$
nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Dimostrare che esiste una costante M tale che
$$|3a^2b^2 + a^3b| \leq M\left(\frac{3}{2}a^2b^2 + ab^3 + \frac{1}{4}b^4\right) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

6. (a) Determinare la migliore costante M tale che
$$x^2 + y^2 \leq M(x^4 + y^2)$$
per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^4 + y^2 \geq 1$.

   (b) Determinare se esiste una costante M per cui vale la disuguaglianza precedente per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Determinare ordine di infinitesimo/infinito e parte principale delle successioni
$$m_n = \min\left\{\frac{x^2 + |y|^3}{x^4 + y^2} : x^2 + y^2 = n\right\}, \qquad M_n = \max\left\{\frac{x^2 + |y|^3}{x^4 + y^2} : x^2 + y^2 = n\right\}.$$

Integrali 1–??

Argomenti: integrali multipli **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: integrali doppi e tripli, formule di riduzione, cambi di variabile

[In questo punto va inserita tutta la parte dell'eserciziario per i corsi di servizio relativa agli integrali multipli, cioè le schede "Insiemi Normali 1–2", "Integrali Doppi 1–7", "Integrali Tripli 1–4"]

Integrali n

Argomenti: ??? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

[Qui ci vanni i problemi misti sugli integrali multipli]

1. Un pallone da rugby ha equazione

$$a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2 = 1.$$

   (a) Determinare quale relazione devono soddisfare a e b per rispondere all'idea intuitiva di pallone da rugby.

   (b) Determinare il volume del pallone.

2. Determinare la distanza media dei punti di un quadrato da un suo vertice fissato.

3. Una lattina ha la forma di un cilindro con la base superiore completamente aperta. Inizialmente la lattina è piena d'acqua, poi viene gradualmente inclinata, versando il liquido fino a quando la superficie libera dell'acqua passa per il centro della base inferiore.

   Determinare quale percentuale del contenuto iniziale è rimasta nella lattina.

4. Consideriamo il profilo orografico descritto dalla funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2.$$

   Determinare il volume del lago che si forma vicino all'origine quando piove molto.

Integrali impropri 1

Argomenti: integrali multipli impropri **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi del piano (con un leggero abuso di notazione ci limitiamo in molti casi a riportare solo le relazioni che definiscono il sottoinsieme):

$$A = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}, \qquad B = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$C = \mathbb{R}^2, \qquad D = [1, +\infty) \times [1, +\infty), \qquad E = \{0 \leq y \leq x\},$$

$$F = [1, +\infty) \times [0, 1], \qquad G = \{0 \leq y \leq 1/x \leq 1\}, \qquad H = \{0 \leq y \leq x^2\}.$$

Stabilire se le funzioni assegnate in ogni riga della tabella sono integrabili in senso improprio sui sottoinsiemi indicati nelle colonne (segnalare quando l'integrale non è improprio).

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{y}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{1}{x+y}$								
e^{-x}								
ye^{-x}								
$e^{-x^2-y^3}$								
$\dfrac{xy^2}{x^6+y^6}$								
$\dfrac{x}{y^3+1}$								
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{\sqrt{\lvert xy\rvert}}{\lvert x\rvert^5+\lvert y\rvert^5}$								

Integrali impropri 2

Argomenti: integrali multipli impropri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Sia A, B, ..., H gli stessi sottoinsiemi del piano della scheda precedente. Stabilire se le funzioni assegnate in ogni riga della tabella sono integrabili in senso improprio sui sottoinsiemi indicati nelle colonne (segnalare quando l'integrale non è improprio).

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{x^2+y^2+x^2y^2}$								
$\dfrac{1}{x^2+y^4}$								
$\dfrac{y}{x^4+y^2}$								
$\dfrac{xy^2}{x^6+y^2}$								
$\dfrac{1}{x^2y^2+1}$								
$\dfrac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$								
xye^{-x^2y}								
$xye^{-x^2-y^2}$								
$\dfrac{e^{xy}-1}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{e^{-xy}}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{1}{xy^2+x^2y}$								
$\dfrac{\lvert\sin(xy)\rvert}{x^2+y^2}$								

[Ce ne sta ancora uno]

Integrali impropri 3

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

Sia A, B, ..., H gli stessi sottoinsiemi del piano della scheda precedente. Stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A	B	C	D	E	F	G	H
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{y^a}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{x^a}{x^4+y^4}$								
$\dfrac{y^a}{x^6+y^4}$								
$\dfrac{x^a}{x^6+y^4}$								
$\dfrac{x}{x^2+y^a}$								
$\dfrac{x}{x^a+y^2}$								
$\dfrac{\|x+y\|^a}{x^6+y^6}$								
$\dfrac{\arctan(x^2y)}{(x^2+y^2)^a}$								
$\dfrac{\arctan(x^ay)}{x^2+y^2}$								
$\dfrac{x^3y}{1+x^2+y^a}$								
$\dfrac{\|\sin x\|^a}{\|x\|^3+\|y\|^3}$								

Integrali impropri 4

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

---

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi del piano dipendenti da un parametro $b > 0$ (per semplicità riportiamo solo le relazioni):

$$A_b = \{x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^b\}, \qquad B_b = \{x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1/x^b\},$$

$$C_b = \{x \geq 1,\ 1 \leq y \leq x^b\}, \qquad D_b = \{x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x^b\},$$

$$E_b = \{x \in [0,1],\ x \leq y \leq x + x^b\}, \qquad F_b = \{x \geq 1,\ x^{-b} \leq y \leq 2x^{-b}\},$$

Stabilire per quali valori del parametro b i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A_b	B_b	C_b	D_b	E_b	F_b
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{x}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{y}{x^4+y^4}$						
$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{x}{x^6+y^4}$						
$\dfrac{1}{xy}$						
$\dfrac{1}{y}$						
$\dfrac{\arctan y}{\sqrt{x}}$						
$\dfrac{\arctan y}{x}$						
$\dfrac{\log(1+xy)}{x^2+y^2}$						
$\dfrac{e^{xy}}{x^2+y^2}$						

Integrali impropri 5

Argomenti: integrali tripli impropri **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali tripli, propri e impropri

---

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi dello spazio:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}, \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \geq 1\}, \\ C &= \mathbb{R}^3, \\ D &= [1,+\infty) \times [1,+\infty) \times [1,+\infty). \end{aligned}$$

Stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ i seguenti integrali risultano convergenti.

Funzione	A	B	C	D
$\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}$				
$\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^a}$				
$\dfrac{y\vert z\vert^a}{x^6+y^6+z^6}$				
$\dfrac{x}{x^a+y^2+z^2}$				
$\dfrac{x}{x^2+\vert y\vert^a+z^2}$				
$\dfrac{\vert x\vert^a}{x^2+y^4+z^6}$				
$\dfrac{\vert z\vert^a}{x^2+y^4+z^6}$				
$\dfrac{x}{(x^2+y^2)^a+z^2}$				
$\dfrac{\arctan(xy)}{(x^4+y^4+z^4)^a}$				
$\dfrac{\vert x\vert^a}{\log(1+x^2+y^2+z^2)}$				
$\dfrac{\vert\arctan(x-y)\vert^a}{x^4+y^4+z^4}$				

Integrali impropri 6

Argomenti: integrali multipli impropri parametrici **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sugli integrali multipli, propri e impropri

Consideriamo le seguenti successioni di sottoinsiemi del piano:

$$\begin{aligned}
A_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq n\},\\
B_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1/n\},\\
C_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq ny \leq x\},\\
D_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/n,\ 0 \leq n^2 y \leq x^2\},\\
E_n &= [n, +\infty) \times [n, +\infty),\\
F_n &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ nxy \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora le successioni di numeri ottenute integrando le funzioni indicate in ogni riga sulle varie successioni di insiemi. Si chiede di stabilire quali successioni sono ben definite, quali tendono a zero e quali tendono all'infinito (determinando anche, quando hanno senso, l'ordine di infinitesimo/infinito e la parte principale).

Funzione	A_n	B_n	C_n	D_n	E_n	F_n
$x^2 y$						
$(x + \sin y)^2$						
$xy(e^{xy} - 1)$						
xe^{-y}						
$\arctan(x + \sin y)$						
$\dfrac{1}{x^2 + y^2}$						
$\dfrac{\arctan x}{x^2 + y^2}$						
$\dfrac{\arctan y}{x^2 + y^2}$						
$\dfrac{1}{x^4 + y^4}$						
$\dfrac{x}{x^4 + y^4}$						
$\dfrac{1}{x^4 + y^2}$						

Spazi metrici n

Argomenti: ??? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

1. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $d(x, y) := \varphi(x - y)$.
   (a) Caratterizzare le funzioni φ per cui $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
   (b) Caratterizzare le funzioni φ per cui $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico equivalente a quello euclideo classico.
2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $d(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$.
   (a) Caratterizzare le funzioni φ per cui $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
   (b) Caratterizzare le funzioni φ per cui $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico equivalente a quello euclideo classico.
3. Caratterizzare le funzioni $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ con questa proprietà: per ogni insieme $\mathbb{X}$, e per ogni metrica d in $\mathbb{X}$, si ha che $\delta(x) := \varphi(d(x))$ è ancora una metrica su $\mathbb{X}$.
4. Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico. Dimostrare che esiste una metrica d_1 in $\mathbb{X}$ tale che $(\mathbb{X}, d_1)$ è uno spazio metrico limitato equivalente (topologicamente) a $(\mathbb{X}, d)$.

   (Totalmente limitato?)
5. Siano d_1 e d_2 due metriche su un insieme $\mathbb{X}$. Determinare se i seguenti enunciati sono veri o falsi.
   (a) Se $(\mathbb{X}, d_1)$ e $(\mathbb{X}, d_2)$ sono equivalenti, allora hanno le stesse successioni di Cauchy.
   (b) Se $(\mathbb{X}, d_1)$ e $(\mathbb{X}, d_2)$ sono equivalenti, e $(\mathbb{X}, d_1)$ è completo, allora $(\mathbb{X}, d_2)$ è completo.
   (c) Se $(\mathbb{X}, d_1)$ e $(\mathbb{X}, d_2)$ hanno le stesse successioni di Cauchy, allora sono equivalenti.
6. Dimostare che ogni funzione continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ha *almeno* un punto fisso.
7. (Teorema delle contrazioni: estensioni e controesempi)

   Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico, e sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ una funzione. Consideriamo tre tipi di ipotesi su f, e cioè "contrazione", "funzione 1-lipschitz", e "contrazione debole" nel senso che $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{X}^2$ con $x \neq y$.

   Consideriamo cinque tipi di ipotesi supplementari su $\mathbb{X}$, e cioè nessuna ipotesi, limitato, totalmente limitato, completo, compatto.

Stabilire in quali situazioni possiamo dedurre esistenza/unicità di un punto fisso per f (fornendo, a seconda dei casi, una dimostrazione o un controesempio).

	Nulla	Limitato	Tot. Lim.	Completo	Compatto
Contrazione					
Contr. deb.					
1-Lip.					

Funzioni Implicite 1

Argomenti: **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti:

In ogni riga della seguente tabella viene presentata un'equazione in x e y che definisce un sottoinsieme V di $\mathbb{R}^2$. Si chiede di determinare se V è limitato. Successivamente si chiede di mostrare che è possibile esplicitare la variabile indicata in funzione dell'altra in un intorno del punto dato, determinando il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione "esplicitante".

Equazione	Limitato	Punto	Variabile	Polinomio di Taylor
$y^2 = x^3 + x$		$(0,0)$	x	
$xy + x^4 + y^4 = 3$		$(1,1)$	y	
$x = \arctan(x^2y^2)$		$(0,0)$	x	
$x + y = \arctan(x^2y)$		$(0,0)$	y	
$y^3 + y = 3x^3 - x$		$(1,1)$	x	
$y^3 + y = 3x^3 - x$		$(1,1)$	y	
$\log(1 + x^2y^2) = x - y^2$		$(0,0)$	x	
$x \sin y = x^3 - \cos y$		$(1,0)$	x	
$x^2y + \int_x^{y^3} e^{-t^3}\, dt = 0$		$(0,0)$	x	
$y + \int_{x^2}^{y} e^{-t^2}\, dt = 0$		$(0,0)$	y	
$e^x + \int_x^{x^2+y} e^{-t^2}\, dt = 1$		$(0,0)$	y	

Come l'esercizio precedente, ma in tre variabili e con polinomi di Taylor al grado 2.

Equazione	Limitato	Punto	Variabile	Polinomio di Taylor
$\sin(x + z) = \arctan(y - z)$		$(0,0,0)$	z	
$e^{x+y} = \cos(xz)$		$(0,0,0)$	x	
$x^y = y^z$		$(1,1,3)$	y	
$\int_{x-z}^{y+z} e^{t^2}\, dt = x^2 + y^2 + z^2$		$(0,0,0)$	z	

Funzioni Implicite 2

Argomenti: funzioni definite implicitamente **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: teorema delle funzioni implicite

---

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y,z) = e^{x^2-z} - \cos(2y+z^2) + \sin^2(xyz).$$
   (a) Dimostrare che in un intorno dell'origine il luogo di zeri di $f(x,y,z)$ è il grafico di una funzione $\varphi(x,y)$ di classe C^∞.
   (b) Calcolare liminf e limsup per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione
$$\frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}.$$
2. Sia S_1 la superficie di equazione
$$\cos x + \sin y + \tan z = 1,$$
sia S_2 la superficie di equazione
$$\sin x + \tan y + \cos z = 1,$$
sia V l'intersezione di S_1 ed S_2, e sia $P = (2\pi, 0, 0)$.
   (a) Determinare le equazioni dei piani tangenti in P ad S_1 e S_2.
   (b) Dimostrare che in un intorno del punto $(2\pi, 0, 0)$ l'insieme V coincide con il sostegno di una curva semplice di classe C^∞.
   (c) Determinare la retta tangente a V nel punto $(2\pi, 0, 0)$.
3. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^x + e^y + e^z = 3,\ \sin x \cdot \cos y = \sin z\}$.
   (a) Dimostrare che in un intorno dell'origine V è il sostegno di una curva semplice di classe C^∞.
   (b) Determinare la retta tangente a V nell'origine.
4. Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} n^2 \displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,dt + n\sin(xy+1) = 1 \\ ne^x + e^{\sin y} = n \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che, per n abbastanza grande, il problema ammette un'*unica* soluzione (x_n, y_n).
   (b) Determinare quale segno hanno x_n e y_n definitivamente.
   (c) Calcolare il limite della successione y_n/x_n.

Funzioni Implicite 3

Argomenti: funzioni definite implicitamente **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: teorema delle funzioni implicite

---

1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = xy + \arctan(x^{2015}) + \sin(y^{2016}).$$

   (a) Dimostrare che per x abbastanza piccolo si ha che $f(x, x) > 0$ e $f(x, -x) < 0$.

   (b) Dimostrare che $f_y(x, y) > 0$ in ogni triangolo del tipo

$$T_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \varepsilon,\ -x \leq y \leq x\}$$

   con ε abbastanza piccolo.

   (c) Dimostare che il luogo di zeri di $f(x, y)$, in un intorno dell'origine, è l'unione del grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ e del grafico di una funzione $x = \psi(y)$, con φ e ψ continue.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

   - $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.
   - la matrice Hessiana in $(0, 0)$ ha autovalori di segno discorde.

   Sia V l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(x, y) = 0$.

   (a) Dimostrare che in un intorno di $(0, 0)$ l'insieme V è l'unione del grafico di due funzioni continue del tipo $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$.

   (b) Determinare una condizione sufficiente affinché entrambe le funzioni si possano prendere del tipo $y = \varphi(x)$.

   (c) Dimostrare che le funzioni sono di classe C^1.

   (d) Determinare se le funzioni sono necessariamente di classe C^2.

Funzioni Implicite 4

Argomenti: ripasso globale sul calcolo vettoriale **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutte sulle funzioni implicite e sul calcolo vettoriale

---

1. Consideriamo l'insieme
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x^4 + y^6 \leq 16\}.$$
   (a) Dimostrare che Ω è compatto.
   (b) Dimostrare che $\partial\Omega$ è connesso.
   (c) Dimostrare che $\partial\Omega$ è il sostegno di una curva semplice e chiusa di classe C^∞.
   (d) Calcolare, al variare del parametro reale a, l'integrale della forma differenziale
$$\omega_a = \frac{x+y+a}{x^2+(y+a)^2}\,dx + \frac{-x+y+a}{x^2+(y+a)^2}\,dy$$
   lungo una curva che percorra una volta $\partial\Omega$ in senso antiorario.
   (e) Calcolare il flusso del campo
$$\vec{E} = \big(x + e^y \sin(y^8), \arctan(y^2) - \sin(xy^3) - y\big)$$
   uscente da Ω.

2. Consideriamo, nel piano yz, l'insieme
$$\Gamma = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z\cosh y + \sinh z + y^2 = 12,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$
   (a) Dimostrare che Γ è il sostegno di una curva semplice di classe C^∞.
   (b) Scrivere l'equazione della superficie S generata da una rotazione completa di Γ intorno all'asse z.
   (c) Calcolare il flusso del campo
$$\vec{E} = \big(\sin(xy) + ye^z, x^2\arctan z, zx^5 + y^2\big)$$
   attraverso la superficie S orientata prendendo il versore normale che punta verso le z crescenti.

3. Consideriamo l'insieme
$$V = \left\{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : x^y = y^x\right\}.$$
   (a) Dimostrare che V è l'unione della bisettrice $y = x$ e del grafico di una funzione monotona $\varphi : (1,+\infty) \to (1,+\infty)$.
   (b) Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $\varphi(x) - 1$ per $x \to +\infty$.
   (c) Studiare la regolarità della funzione $\varphi(x)$.

Funzioni Inverse 1

Argomenti: invertibilità per funzioni di più variabili **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: teorema della funzione inversa

In ogni riga della seguente tabella viene presentata una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si chiede di determinare se la funzione è iniettiva e/o surgettiva, se è localmente invertibile in $(0, 0)$, se l'immagine è un aperto, e se un punto dato appartiene alla parte interna dell'immagine.

Funzione	Iniett.	Surg.	Loc-inv	Im-apt	Punto	Int-Im
(e^{x-y}, e^{x+y})					$(1, 2)$	
$(\arctan(x + y), e^{x+3y})$					$(1, 2)$	
$(\sin(x + y), \sin(x - y))$					$(1, 0)$	
$(\sin(x + y), \sin(x - y))$					$(1/2, 1/2)$	
(y^3, x^5)					$(2, 4)$	
$(x + y, x^2 + y^2)$					$(2, 4)$	
$(x + y, x^2 + y^2)$					$(2, 2)$	
$(x + y, x^3 + y^3)$					$(-1, -1)$	
$(x + y, x^3 + y^3)$					$(0, 0)$	
$(x + y, xy)$					$(5, 6)$	
$(x + y, xy)$					$(2, 1)$	
$(e^x \sin y, e^x \cos y)$					$(10, 22)$	
$(e^{x^3} \cos(y^2), e^{x^3} \sin(y^2))$					$(1, 2)$	
$(e^{x^2} \cos(y^3), e^{x^2} \sin(y^3))$					$(1, 2)$	
$(y^3 \arctan x, y^5 \arctan x)$					$(0, 0)$	
$(y^3 \arctan x, y^5 \arctan x)$					$(1, 1)$	
$(x - y, e^x \sin y)$					(e, π)	
$(y^2 \log(1 + x^2), x^3 \log(1 + y^4))$					$(1, 0)$	
$(x^2 + y - x, y^2 - y + x)$					$(0, 0)$	
$\left(\dfrac{y}{x^2+1}, \dfrac{x}{y^2+2}\right)$					$(1/2, 1/3)$	

Funzioni Inverse 2

Argomenti: invertibilità per funzioni di più variabili **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: teorema della funzione inversa

1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^∞ con matrice jacobiana invertibile in ogni punto.

   Determinare quali delle seguenti conclusioni sono corrette.

   (a) La funzione è iniettiva.

   (b) La funzione è surgettiva.

   (c) L'immagine è un aperto.

   (d) La funzione manda aperti in aperti.

   (e) La funzione manda chiusi in chiusi.

2. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (\cosh x - \cos y + y, \sinh x - \sin y).$$

   (a) Dimostrare che per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo esiste un'unica curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(0) = (0, 0)$ e

$$f(\gamma(t)) = (te^{2t}, t + \arctan t) \qquad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

   (b) Calcolare $\gamma'(0)$.

3. Studiare, al variare dei parametri reali λ e μ, l'iniettività e la surgettività della funzione $f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f_{\lambda,\mu}(x, y) = (x + \lambda \arctan y, y + \mu \arctan x),$$

   e la regolarità dell'eventuale funzione inversa.

[to be completed ...]

Successioni di funzioni 1

Argomenti: convergenza di successioni di funzioni **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: convergenza puntuale e uniforme, teoremi di scambio

---

In ogni riga della seguente tabella viene presentata una successione di funzioni. Per prima cosa si richiede l'insieme di convergenza puntuale (C.P.), cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui la successione converge. Successivamente vengono presentati due insiemi, e per ciascuno di essi si chiede se si ha convergenza uniforme in quell'insieme. Infine viene presentato un terzo insieme, e si chiede se su quell'insieme è vero che l'integrale del limite è il limite degli integrali (talvolta impropri).

Successione	C.P.	Insieme	C.U.	Insieme	C.U.	Insieme	L.Int.
$\dfrac{\sin x}{n^2}$		$[-7,7]$		$(-\infty,7)$		$[1,\pi]$	
$\dfrac{\sinh x}{n^2}$		$[-7,7]$		$(-\infty,7)$		$[1,\pi]$	
$\sin\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$		$[-7,7]$		$(-\infty,7)$		$[1,\pi]$	
x^n		$[0,1]$		$(-1,0)$		$[0,1]$	
$\arctan(nx)$		$[0,2]$		$[2,+\infty)$		$[-2,3]$	
e^{-nx}		$(0,1)$		$(1,+\infty)$		$[0,8]$	
ne^{-nx}		$(0,1)$		$(1,+\infty)$		$[0,1]$	
nxe^{-nx}		$(0,1)$		$(1,+\infty)$		$[0,1]$	
$e^{-x/n}$		$(-\infty,0)$		$(0,+\infty)$		$[0,+\infty)$	
$\dfrac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$		$(0,1)$		$\mathbb{R}$		$[-1,2]$	
$\dfrac{\sin x}{1+x^n}$		$[0,\pi]$		$(3,+\infty)$		$[0,\pi]$	
$\dfrac{\log(nx)}{1+n^2}$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$		$[0,1]$	
$\dfrac{\log(nx)}{x+n^2}$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$		$[0,7]$	
$\dfrac{x^n}{n^x}$		$(0,1)$		$(-1,0)$		$[-1,1]$	

[Volendo uno ci sta ancora]

Successioni di funzioni 2

Argomenti: proprietà dei limiti puntuali/uniformi **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: convergenza puntuale e uniforme, teoremi di scambio

---

1. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni che converge *puntualmente* ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Determinare quali delle seguenti affermazioni sono corrette (fornendo, a seconda dei casi, una dimostrazione o un controesempio).

   (a) Se tutte le f_n sono iniettive, allora f_∞ è iniettiva.

   (b) Se tutte le f_n sono surgettive, allora f_∞ è surgettiva.

   (c) Se tutte le f_n non assumono valori negativi, allora f_∞ non assume valori negativi.

   (d) Se tutte le f_n sono debolmente crescenti, allora f_∞ è debolmente crescente.

   (e) Se tutte le f_n sono strettamente crescenti, allora f_∞ è strettamente crescente.

   (f) Se tutte le f_n sono monotone (debolmente o strettamente, eventualmente in verso dipendente da n), allora f_∞ è monotona (debolmente o strettamente).

   (g) Se tutte le f_n sono convesse, allora f_∞ è convessa.

   (h) Se tutte le f_n sono pari/dispari, allora f_∞ è pari/dispari.

   (i) Se tutte le f_n sono limitate, allora f_∞ è limitata.

   (j) Se le f_n sono equi-limitate, cioè esiste una limitazione comune, allora f_∞ è limitata.

   (k) Se tutte le f_n sono 2016-periodiche, allora f_∞ è 2016-periodica.

   (l) Se tutte le f_n sono periodiche, allora f_∞ è periodica.

   (m) Se tutte le f_n sono lipschitziane, con costante di lipschitz equilimitata, allora f_∞ è lipschitziana.

   (n) Se tutte le f_n sono uniformemente continue, con un modulo di continuità comune, allora f_∞ è uniformemente continua.

   (o) Se tutte le f_n sono C^1, allora f_∞ è C^1.

   (p) Se tutte le f_n sono C^1, con derivate equilimitate, allora f_∞ è C^1.

   (q) Se tutte le f_n sono nulle fuori di $[0, 1]$ e integrabili secondo Riemann, allora f_∞ è integrabile secondo Riemann.

   (r) Se tutte le f_n sono infinitesime per $x \to +\infty$, allora f_∞ è infinitesima per $x \to +\infty$.

   (s) Se tutte le f_n sono polinomi, allora f_∞ è un polinomio.

   (t) Se tutte le f_n sono polinomi di grado minore od uguale di 2016, allora f_∞ è un polinomio.

2. Discutere le stesse affermazioni dell'esercizio precedente sostituendo la convergenza puntuale con la *convergenza uniforme* oppure la *convergenza uniforme sui compatti*.

Successioni di funzioni 3

Argomenti: convergenza di successioni di funzioni **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: convergenza puntuale e uniforme, teoremi di scambio

1. Consideriamo le seguenti successioni di funzioni di due variabili:

$$\frac{\sin(nx)}{n+y^2}, \qquad ye^{-nx}, \qquad \frac{x^2+y^2}{x^{2n}+y^{2n}}, \qquad \frac{x^{2n}+y^2}{x^2+y^{2n}}, \qquad \int_x^y \frac{\sin(nt)}{t^2+1}\,dt.$$

   Per ciascuna di esse si richiede di determinare

   (a) l'insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui si ha convergenza puntuale,

   (b) se si ha convergenza uniforme su Ω,

   (c) se si ha convergenza uniforme sui compatti contenuti nella *parte interna* di Ω.

2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Poniamo $f_n(x) := \varphi(x/n)$.
   Determinare sotto quali condizioni la successione di funzioni $f_n(x)$

   (a) converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$,

   (b) converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$,

   (c) converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Stesse domande dell'esercizio precedente per la successione $f_n(x) := \varphi(nx)$, assumendo come ipotesi anche che $\varphi(x)$ ammetta limite finito per $x \to \pm\infty$.

4. (Teorema di scambio per integrali impropri sotto ipotesi di *convergenza dominata*)
   Sia $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue, e sia $f_\infty : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.
   Supponiamo che

   - $f_n \to f_\infty$ uniformemente sui compatti di $[0,+\infty)$,
   - esiste una funzione continua $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tale che

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \forall x \ge 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

     e

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty.$$

   Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_\infty(x)\,dx$$

   (mostrando anche che gli integrali impropri indicati convergono).

Successioni di funzioni 4

Argomenti: rapporti fini tra limiti puntuali/uniformi **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: convergenza puntuale e uniforme, molta analisi 1

---

1. (Convergenza puntuale implica convergenza uniforme nel caso equi-lipschitz)
   (a) Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni che converge *puntualmente* ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che tutte le $f_n(x)$ siano lipschitziane con costanti di lipschitz equilimitate.
   Dimostrare che la convergenza è in realtà *uniforme sui compatti*.
   (b) Capire come estendere il risultato al caso di funzioni hölderiane.
   (c) Capire come estendere il risultato al caso di funzioni uniformemente continue.
   (d) Capire come estendere il risultato al caso di funzioni tra spazi metrici.

2. (Convergenza puntuale implica uniforme nel caso convesso)
   (a) Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni *convesse* che converge *puntualmente* ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Dimostrare che la convergenza è in realtà *uniforme sui compatti*.
   (b) Capire come estendere il risultato al caso di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$.
   (c) Capire come estendere il risultato al caso di funzioni di n variabili.

3. (Convergenza puntuale implica uniforme per i polinomi di grado equilimitato)
   (a) Sia $p_n(x)$ una successione di polinomi di grado minore o uguale a 4. Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme con 5 elementi, e sia $(y_0, y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{R}^5$ tale che
   $$\lim_{n\to+\infty} p_n(s_i) = y_i \qquad \forall i = 0, 1, \ldots, 4.$$
   Dimostrare che esiste un polinomio $p_\infty(x)$, di grado minore o uguale a 4, tale che $p_n(x) \to p_\infty(x)$ uniformemente sui compatti.
   (Si raccomanda si seguire almeno due approcci: mostrare che i coefficienti di $p_n(x)$ convergono a quelli che saranno i coefficienti di $p_\infty(x)$; mostrare che per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}$ le norme
   $$\|p(x)\|_K := \max_{x\in K} |p(x)|, \qquad \|p(x)\|_S := \max_{x\in S} |p(x)|$$
   sono norme equivalenti nello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4).
   (b) Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni che converge *puntualmente* ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che tutte le $f_n(x)$ siano polinomi di grado minore o uguale a 4.
   Dimostare che la convergenza è in realtà *uniforme sui compatti*.
   (c) Generalizzare il risultato sostituendo 4 con un generico k.
   (d) Mostrare che il risultato non vale se i gradi non sono equilimitati.
   (e) Capire come estendere il risultato a polinomi di più variabili.

Serie di funzioni 1

Argomenti: studio di serie di funzioni **Difficoltà**: ⋆ ⋆ ⋆

Prerequisiti: convergenza puntuale/uniforme/totale, teoremi di scambio

In ogni riga della seguente tabella viene presentata una serie di funzioni. Per prima cosa si richiede l'insieme di convergenza puntuale (C.P.), cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge. Successivamente vengono presentati due insiemi, e per ciascuno di essi si chiede se la serie converge uniformemente in quell'insieme. Infine si richiede di calcolare il limite della somma della serie per x che tende ad un punto indicato (talvolta il limite può essere a sua volta la somma di una serie di numeri).

Serie	C.P.	Insieme	C.U.	Insieme	C.U.	Punto	Limite
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$		$[0,1]$		$[-1,0]$		0	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$		$[0,1]$		$[-1,0]$		1^-	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$		$[1,+\infty)$		$(0,1)$		0^+	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^n)}{n^2+2}$		$[0,+\infty)$		$(-\infty,0]$		$-\infty$	
$\log(1+x^{2n})$		$[0,1/2]$		$(-1,0)$		1^-	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{4n}}$		$(2,+\infty)$		$(0,1)$		$+\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2+x^2}$		$(-1/2,0)$		$(1,+\infty)$		$-\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+x^{2n}}$		$(1,2)$		$(2,3)$		$-\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2 x}$		$[1,+\infty)$		$(0,1)$		$+\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\lvert x\rvert}}$		$[0,1]$		$[-1,0]$		-1^+	

Serie di funzioni 2

Argomenti: studio di serie di funzioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: convergenza puntuale/uniforme/totale, teoremi di scambio

Stesse indicazioni della scheda precedente.

Serie	C.P.	Insieme	C.U.	Insieme	C.U.	Punto	Limite
$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$		$(-3,7)$		$(1,+\infty)$		0	
$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2+x^4}\right)$		$[-1,0]$		$[0,+\infty)$		$-\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lvert x\rvert^{\sqrt{n}}}{1+n^2x^2}$		$[0,1/2]$		$[0,1]$		-1^+	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{1+n\lvert x\rvert^n}$		$[3,+\infty)$		$(1,4)$		$+\infty$	
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^x n}$		$(1,2)$		$(2,+\infty)$		$+\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{nx}-1}{n+3}$		$(0,3)$		$(3,+\infty)$		0^+	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}+x^{2n}}{n+\lvert x\rvert^n}$		$[-1/2,0]$		$[0,1]$		1^-	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^n)}{1+x^{2n}}$		$(-\infty,-1)$		$(1,+\infty)$		1^-	
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x^{2n}}\right)^{1/x}$		$(2,3)$		$(0,1)$		$+\infty$	
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$		$(0,1)$		$(-1,0)$		1^-	
$\sum_{n=1}^{\infty} \ldots$		$(2,3)$		$(0,1)$		$+\infty$	

Serie di funzioni 3

Argomenti: studio di serie di funzioni **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sulle serie di funzioni, confronto serie/integrali

---

1. Dimostrare che le serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cosh\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$
definiscono due funzioni di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right).$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è ben definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $f(x) \to 0$ per $x \to 0$ e $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.
   (c) Determinare ordine di infinitesimo e parte principale per $x \to 0$.
   (d) Determinare ordine di infinito e parte principale per $x \to +\infty$.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{1 + n^2x^2}.$$
Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

4. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Determinare se $f(x)$ è lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$.
   (c) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

5. Per ogni $a > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo
$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{1 + n^2x^2}.$$
Determinare, al variare del parametro a, i seguenti limiti:
$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x), \qquad \lim_{x \to 0} f_a(x).$$

Serie di funzioni 4

Argomenti: studio di serie di funzioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle serie di funzioni, confronto serie/integrali, molta analisi 1

---

1. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x} \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$
   (a) Dimostrare che la serie definisce una funzione $f(x)$ di classe C^1 in $(0,+\infty)$.
   (b) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-x^2/n^2}\right).$$
   (a) Dimostrare che $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, e determinarne l'ordine di infinitesimo.
   (b) Dimostrare che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e determinarne l'ordine di infinito.

3. Dimostare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \int_{n^2}^{n^2+x^2/n} \frac{1}{1+y^n}\, dy$$
definisce una funzione lipschitziana e limitata su tutto $\mathbb{R}$.

4. Dimostare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{x/n} \sin\left(\frac{y}{1+y^2}\right) dy$$
definisce una funzione uniformemente continua e non limitata su tutto $\mathbb{R}$.

5. Stabilire se la funzione
$$f(x) = \int_0^{x/n} \arctan^2\left(\frac{y^2}{n}\right) dy$$
è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.

6. Calcolare
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x+n)}{n^2+x}.$$

7. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x+n^3}.$$
Dimostrare che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e determinarne l'ordine di infinito.

Serie di potenze 1

Argomenti: convergenza di serie di potenze **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: formula per il raggio di convergenza

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni.

Serie	Insieme conv.	Serie	Insieme conv.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} x^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1} x^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} x^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1} x^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\log n}{n^3+3} x^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1} x^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+5} (x-1)^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{n^2+3} (x-7)^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{2n}} (x-4)^n$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{n^2+2^n} (x-5)^n$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nx}}{n^2+1}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\lvert x\rvert)^n}{3^n+4}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^n x}{n^2+1}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^n x}{2^n+1}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n+\sqrt{n}}{5n^2+6} x^{7n+1}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{3^n+4} x^{3n-5}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-2)^{n^2}$	
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^n x^{n!}$		$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{3n!}(x+5)^{(n+1)!}$	

Serie di potenze 2

Argomenti: somma di serie di potenze **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: tecniche per il calcolo della somma di una serie di potenze

Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie di funzioni.

Serie	Insieme	Somma	Serie	Insieme	Somma
$\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} x^{n+1}$			$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1}$		
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$			$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(x-1)^n$		
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$			$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$		
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$			$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{3n}$		
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$			$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(n+1)!}$		
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$			$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{2n}$		
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{nx}$			$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$		
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n+1)!}$			$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} x^n$		

Determinare la somma delle seguenti serie numeriche (occhio al termine iniziale):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{2^n(n^2-n)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots, \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,, \qquad \frac{1}{2^1} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \ldots$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots, \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Serie di funzioni 5

Argomenti: serie di funzioni ed equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sulle serie di funzioni

---

1. (Equazioni ordinarie) Dimostrare che i due problemi di Cauchy
$$tu''(t) = u(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$
$$u''(t) = tu(t), \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 2$$
ammettono una soluzione *intera*.

2. (Equazione del calore) Sia a_n una successione di numeri reali tale che
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$
Consideriamo la funzione
$$u(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$
   (a) Dimostrare che $u(t,x)$ è definita e continua in $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che u è di classe C^∞ in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
   (c) Dimostrare che u risolve l'*equazione del calore*
$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$
   (d) Dimostrare che u *decade esponenzialmente* per $t \to +\infty$, cioè esiste una costante M tale che
$$|u(t,x)| \leq Me^{-t} \qquad \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$
   (e) Verificare che le stesse conclusioni valgono se si sostituisce $\sin(nx)$ con $\cos(nx)$.

3. (Equazione delle onde) Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali tali che
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(|a_n| + |b_n|\right) < +\infty.$$
Consideriamo la funzione
$$u(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big) \cos(nx).$$
   (a) Dimostrare che $u(t,x)$ è definita e di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Dimostrare che u risolve l'*equazione delle onde*
$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

Serie di funzioni n

Argomenti: serie di funzioni ed equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto sulle serie di funzioni

---

1. (Teorema di Abel senza semplificazione iniziale) Scrivere una dimostrazione del teorema di Abel senza il passo iniziale semplificativo in cui ci si riduce al caso in cui la somma dei coefficinenti della serie è nulla.

2. (Estensione del teorema di Abel) Sia a_n una successione di numeri reali (non necessariamente positivi) tale che
$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$
Dimostrare che
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty.$$

3. Sia $f(x)$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ con $|x_0| < R$.
   (a) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esiste una costante M_ε per cui possiamo stimare la derivata k-esima di f come
   $$f^{(k)}(x_0) \le M_\varepsilon \cdot \frac{k!}{(R-\varepsilon-x_0)^{k+1}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$
   (b) Dimostrare che la serie di Taylor di $f(x)$ con centro in x_0 ha raggio di convergenza maggiore o uguale di $R - |x_0|$.
   (c) Estendere il risultato al caso in cui $R = +\infty$.

4. Determinare il raggio di convergenza delle serie di Taylor delle seguenti funzioni
$$e^{4x}, \qquad e^{2x}\cos(3x), \qquad \log x, \qquad \log(2+x), \qquad \arctan x$$
con centro in $x_0 = 10$.

5. (Zeri di una funzione analitica) Sia $f(x)$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza R. Supponiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ abbia almeno un punto di accumulazione in $(-R, R)$.

   Dimostrare che $f(x)$ è identicamente nulla (e in particolare tutti i coefficienti della serie che la definisce sono nulli).

6. (Disuguaglianza alla Łoyasevich) Sia $f(x)$ una funzione analitica in un intorno di $x = 0$.

   Dimostrare che esistono $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1)$ e $K > 0$ tali che
   $$|f'(x)| \ge K|f(x) - f(0)|^\alpha \qquad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 1

Argomenti: studio di equazioni differenziali autonome **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

In ogni riga della seguente tabella sono assegnati un'equazione differenziale ed un dato iniziale $u(0)$. Si chiede di stabilire il comportamento della soluzione nel futuro (cioè se per $t \geq 0$ si ha esistenza globale, blow up, o break down, nonché l'estremo inferiore e superiore della soluzione), e analogamente nel passato, cioè per $t \leq 0$.

		Futuro			Passato		
Equazione Diff.	$u(0)$	Comp.	Inf	Sup	Comp.	Inf	Sup
$u' = u^2 - 3$	3						
$u' = u^2 - 3$	0						
$u' = u^2 - 3$	-3						
$u' = u^2 - 9$	-3						
$u' = u^2 + 3$	-3						
$u' = u^3 - 3$	3						
$u' = u^3 - 3$	-3						
$u' = (u^2 - 1)^2$	0						
$u' = (u-2)(\sqrt{u} - 4)$	20						
$u' = (u-2)(\sqrt{u} - 4)$	12						
$u' = (u-2)(\sqrt{u} - 4)$	1						
$u' = \arctan u$	3						
$u' = \sin u$	3						
$u' = \cos u$	3						
$u' = \cos^2 u$	3						
$u' = \tan u$	3						
$u' = -u^{-1}$	4						
$u' = \log(u-1)$	$3/2$						
$u' = \log(u-1)$	4						

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 2

Argomenti: studio di equazioni differenziali autonome **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

In ogni riga della seguente tabella sono assegnati un'equazione differenziale ed un dato iniziale $u(0)$. Si chiede di stabilire il comportamento della soluzione nel futuro (cioè se per $t \geq 0$ si ha esistenza globale, blow up, o break down, nonché l'estremo inferiore e superiore della soluzione), e analogamente nel passato, cioè per $t \leq 0$.

		Futuro			Passato		
Equazione Diff.	$u(0)$	Comp.	Inf	Sup	Comp.	Inf	Sup
$u' = \arctan(u^2)$	7						
$u' = \arctan(u^2)$	-7						
$u' = e^u$	0						
$u' = e^{-u}$	0						
$u' = (3-u)e^u$	0						
$u' = \dfrac{u+2}{u-4}$	5						
$u' = \dfrac{u+2}{u-4}$	0						
$u' = \dfrac{u+2}{u-4}$	-5						
$u' = u\log u$	2						
$u' = u\log u$	$1/2$						
$u' = u\log u$	1						
$u' = u\log^2 u$	2						
$u' = u\log^2 u$	$1/2$						
$u' = u\lvert u-8\rvert e^{-u}$	20						
$u' = u\lvert u-8\rvert e^{-u}$	-20						
$u' = u\lvert u-8\rvert e^{-u}$	4						
$u' = \lvert u(u-8)\rvert e^{-u}$	-4						
$u' = \lvert u(u-8)\rvert e^{-u}$	12						

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 3

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

---

In ogni riga della seguente tabella sono assegnati un'equazione differenziale ed un dato iniziale $u(0)$. Si chiede di stabilire il comportamento della soluzione nel futuro (cioè se per $t \geq 0$ si ha esistenza globale, blow up, o break down, nonché se è limitata inferiormente e/o superiormente), e analogamente nel passato, cioè per $t \leq 0$.

		Futuro			Passato		
Equazione Diff.	$u(0)$	Comp.	L.I.	L.S	Comp.	L.I.	L.S
$u' = t + \sin u$	π						
$u' = t - 10\cos u$	π						
$u' = t^2 + 7\arctan u$	π						
$u' = \arctan(t+u)$	7						
$u' = \arctan(t+u)$	0						
$u' = u + \sin u$	3						
$u' = u + \sin u$	-3						
$u' = u + \cos u$	3						
$u' = u + \cos u$	-3						
$u' = u + \cos u$	0						
$u' = u^2 + t^2$	0						
$u' = \sqrt{u + 2t}$	3						
$u' = \dfrac{1}{u+t}$	5						
$u' = \dfrac{1}{u^2+t^2}$	8						
$u' = \dfrac{1}{u^2+t}$	8						
$u' = e^{u^3+t}$	0						
$u' = \sqrt{u} + t$	8						
$u' = \log(\sin(u+t))$	$\pi/2$						

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 4

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

In ogni riga della seguente tabella è presentata un'equazione differenziale, che pensiamo con dato iniziale $u(0) = \alpha$. Si chiede di determinare per quali valori di α la soluzione ha esistenza globale, blow up o break down (nel passato e nel futuro).

	Passato			Futuro		
Equazione	E.G.	B.U.	B.D.	E.G.	B.U.	B.D.
$u' = \arctan t \cdot \cos u$						
$u' = u^4 - u^2$						
$u' = t + \arctan u$						
$u' = t \log u$						
$u' = \sin(\log u)$						
$u' = \dfrac{u^3 - 1}{\arctan u}$						
$u' = \dfrac{\sin(tu)}{u^2 + 1}$						
$u' = \dfrac{tu}{u^2 + 1}$						
$u' = \dfrac{tu}{u^3 + 1}$						
$u' = \tan(tu)$						
$u' = -\tan(tu)$						
$u' = \dfrac{1}{t^2 - u^2}$						
$u' = (u - 3)(u + t)$						
$u' = \dfrac{u(u - 3)}{u + t}$						
$u' = \dfrac{(u - 3)^3}{u + t}$						
$u' = \dfrac{\log(t + u)}{t - u}$						

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 5

Argomenti: effetti soglia **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = u^2 - \arctan t, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che esiste un *unico* valore $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è definita per ogni $t \geq 0$ ed è *monotona crescente*.
   (b) Calcolare il limite per $t \to +\infty$ della soluzione di cui al punto precedente.

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u' = u^2 - t^2.$$
   (a) Dimostrare che esiste un'*unica* soluzione globale tale che
$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty.$$
   (b) Determinare ordine di infinito e parte principale della soluzione di cui al punto precedente.

3. Dimostrare che l'equazione differenziale
$$u' = \arctan(u^2 - t)$$
ammette un'*unica* soluzione tale che
$$\lim_{t \to +\infty} \left(u(t) - \sqrt{t}\right) = 0.$$

4. Dimostrare che l'equazione differenziale
$$u' = \tan(tu)$$
ammette infinite soluzioni definite per ogni $t > 0$.

5. Dimostrare che l'equazione differenziale
$$u' = 3 + \frac{t(1-t)}{u}$$
ammette una soluzione $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{t \to 0^+} u(t) = \lim_{t \to 1^-} u(t) = 0.$$

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 6

Argomenti: ruolo dell'integrabilità in t **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

---

1. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u' = \frac{u^4}{1 + u^2 + t}.$$
Dimostrare che tutte le soluzioni con $u(0) > 0$ hanno blow up per tempi positivi.

2. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{u^4}{1 + u^2 + t^2}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che esistono valori $\alpha > 0$ per cui si ha soluzione globale.
   (b) Dimostrare che esiste un unico valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e verifica
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 2016.$$
   (c) Dimostrare che esiste un unico valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e verifica
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty.$$

3. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\log u}{1 + t^2}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che non esiste nessun valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty.$$
   (b) Dimostrare che esiste un *unico* valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0.$$

4. [Questo esercizio non ha senso: è tutto sbagliato] Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{e^{u-t}}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che esiste un *unico* valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty.$$
   (b) Dimostrare che esiste un *unico* valore $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e soddisfa
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0.$$

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 7

Argomenti: stime asintotiche sulle soluzioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$u' = \arctan u, \qquad u(0) = 7.$$
   (a) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t}, \qquad\qquad \lim_{t \to -\infty} \frac{\log u(t)}{t}.$$
   (b) Dimostare che $e^{-t}u(t)$ ammette limite finito per $t \to -\infty$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\arctan(u+t)}{u}, \qquad u(0) = \alpha > 0.$$
   Dimostrare che la soluzione è globale e calcolarne la parte principale per $t \to \pm\infty$.

3. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \arctan(u^4 - t), \qquad u(0) = -1.$$
   Dimostrare che la soluzione è globale e calcolarne la parte principale per $t \to \pm\infty$.

4. Sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$u' = \frac{u-t}{1+u^2+t^2}, \qquad u(0) = \alpha.$$
   Calcolare in funzione di α il
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{\log t}.$$

5. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = (u + t^{22})e^{-|u|}, \qquad u(0) = -22.$$
   Calcolare
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{\log t}.$$

6. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\sin u}{u-t}, \qquad u(0) = \alpha \in (0, \pi).$$
   Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione e l'ordine di infinitesimo della soluzione stessa per $t \to -\infty$.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 10

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = (t - t^3)\log u, \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

   (a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è una funzione pari.
   (b) Per ogni $\alpha > 1$ la soluzione è globale e limitata su $\mathbb{R}$.
   (c) Non esistono soluzioni globali per $0 < \alpha < 1$.
   (d) Per ogni $0 < \alpha < 1$ la soluzione è globale.

2. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$u' = \log\left(u - t^2\right), \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

   (a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (c) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è monotona nell'intervallo di esistenza.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.

3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \log\left(u^2 - t^2\right), \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

   (a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (c) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è monotona nell'intervallo di esistenza.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = u\arctan\left(e^u - t\right), \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

   (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale.
   (b) Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è strettamente monotona.
   (c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione tende a 0 per $t \to +\infty$.
   (d) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione tende a 0 per $t \to -\infty$.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 11

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

---

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \arctan(tu - 1), \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

(a) Per ogni $\alpha \geq 0$ la soluzione è globale.

(b) Esiste $\alpha \geq 0$ per cui la soluzione tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

(c) Esiste $\alpha \geq 0$ per cui la soluzione tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

(d) Esiste un'unica soluzione globale limitata per tempi positivi.

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = (t-1)u + u^4, \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

(a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione ha blow up per $t \geq 0$.

(b) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione ha esistenza globale per $t \leq 0$.

(c) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione ha esistenza globale per $t \geq 0$.

(d) Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è strettamente monotona.

(e) Esiste $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è limitata.

3. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$u' = \sqrt{t^2 + 1 - u^2}, \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

(a) Per ogni $\alpha \in (-1, 1)$ la soluzione è globale.

(b) Per ogni $\alpha \in (-1, 1)$ la soluzione è limitata.

(c) Per ogni $\alpha \in (0, 1)$ si ha che $u(t) > t$ per ogni $t \geq 0$.

(d) Per ogni $\beta \in (-\sqrt{2}, -1)$ esiste $\alpha \in (-1, 0)$ tale che $u(1) = \beta$.

(e) Per ogni $\beta \in (7, \sqrt{50}\,)$ esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $u(7) = \beta$.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 12

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

---

1. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = t \cdot u \cdot \arctan(t - u^2), \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale.
   (c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è monotona per $t \leq 0$.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è monotona per $t \geq 0$.
   (e) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è limitata per $t \geq 0$.
   (f) La differenza tra due soluzioni con $\alpha > 0$ è infinitesima per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = t + \log u, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha > 1$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (c) Esiste $\alpha \in (0, 1)$ per cui la soluzione è globale.
   (d) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale.
   (e) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e monotona.
   (f) Per $\alpha = 1$ si ha che $u(t) \leq e^t$ per ogni $t \geq 0$.

3. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = (u - t^2)u, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (c) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (d) Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione ha un max relativo in $t = 1999$.
   (e) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è infinitesima per $t \to +\infty$.
   (f) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (g) Esiste $\alpha < 0$ per cui la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (h) Esiste un'unico $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e monotona per $t \geq 0$.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 13

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = (t-u)^2, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Esiste $\alpha < 0$ per cui la soluzione è globale e limitata per $t \geq 0$.
   (c) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (d) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (e) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e priva di flessi a tg. orizzontale.
   (f) Per $\alpha = 1/3$ la soluzione ha un flesso in $t = \log\sqrt{2}$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = (|t| - |u|)u, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (c) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e limitata per $t \geq 0$.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e infinitesima per $t \leq 0$.
   (e) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale.
   (f) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e monotona per $t \leq 0$.
   (g) Per ogni $\alpha > 0$ la retta $u = t$ è asintoto obliquo per la soluzione.

3. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = \tan|tu|, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (c) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è infinitesima per $t \to +\infty$.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione ha un break down in $t = 1999$.
   (e) Esiste $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 14

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = e^u - e^t, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha \leq 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Per ogni $\alpha \leq 0$ la soluzione è globale.
   (c) Esiste $\alpha < 0$ per cui la soluzione è limitata.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale.
   (e) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale.
   (f) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale e monotona.
   (g) Esiste unico $\alpha > 0$ per cui la soluzione ha un asintoto obliquo per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = \log\left(2^{u^2-t^2} - 1\right), \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Esiste $\alpha \in (0,1)$ per cui la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Esiste $\alpha \in (0,1)$ per cui la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (c) Per ogni $\alpha \in (0,1)$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (d) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione ha un max relativo in $t = 1999$.
   (e) Per ogni $\alpha > 1$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.
   (f) Per ogni $\alpha > 1$ la soluzione è globale.
   (g) Esiste $\alpha > 1$ per cui la soluzione è globale e monotona per $t \geq 0$.

3. Consideriamo il problema di Cauchy:
$$u' = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+tu}, \qquad u(0) = \alpha.$$
Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.
   (b) Esiste $\alpha < 0$ per cui la soluzione è globale.
   (c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è globale.
   (d) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione è limitata.
   (e) Per $\alpha = 0$ la soluzione è dispari.

Equazioni differenziali – Studio qualitativo 15

Argomenti: studio di equazioni differenziali **Difficoltà**: ⋆ ⋆ ⋆

Prerequisiti: studio qualitativo di equazioni differenziali, teorema dell'asintoto

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u}{t} + \log u, \qquad u(1) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

(a) Per ogni $\alpha > 0$ l'intervallo massimale di definizione della soluzione è $(0, +\infty)$.

(b) Per ogni $\alpha \geq 1$ la soluzione non è limitata.

(c) Esiste un unico valore di α per cui la soluzione definita per ogni $t > 0$ e *limitata.*

(d) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione tende a 0 per $t \to 0^+$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$u' = \tan u \cdot \sin t, \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

(a) Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2)$ la soluzione è pari.

(b) Esiste $\alpha \in (0, \pi/2)$ per cui la soluzione è globale.

(c) Esiste $\alpha \in (0, \pi/2)$ per cui la soluzione è periodica.

(d) Per ogni $\alpha \in (0, \pi/2)$ la soluzione è globale.

(e) Esiste $\alpha \in (0, \pi/2)$ per cui la soluzione ha un break down in $t = \pi$.

3. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$u' = -\left(ue^{-t} + |\sin u|\right), \qquad u(0) = \alpha.$$

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

(a) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \geq 0$.

(b) Esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è infinitesima per $t \to +\infty$.

(c) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale per $t \leq 0$.

(d) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è limitata in $(-\infty, 0]$.

(e) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è limitata in $(-\infty, 0]$.

(f) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è globale.

(g) Per ogni $\alpha < 0$ la soluzione è limitata in $[0, +\infty)$.

(h) Esiste $\alpha < 0$ per cui la soluzione è globale e monotona.

(i) Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è infinitesima per $t \to +\infty$.

Equazioni differenziali del second'ordine 1

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. (Esponente dispari e "segno giusto") Consideriamo l'equazione differenziale
$$u'' = -u^3.$$
   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni sono periodiche.
   (b) Detto T_α il periodo della soluzione con dati iniziali $u(0) = \alpha$, $u'(0) = 0$, dimostrare che T_α è proporzionale ad un'opportuna potenza di α.
   (c) Generalizzare il risultato ad equazioni del tipo
$$u'' = -|u|^p u,$$
   con $p > -1$ numero reale.

2. (Esponente dispari e "segno sbagliato") Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = u^3, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
   - per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione ha blow up a $-\infty$ per tempi positivi,
   - per $\alpha > \alpha_0$ la soluzione ha blow up a $+\infty$ per tempi positivi.

   (b) Determinare il valore esplicito di α_0 e la corrispondente soluzione.
   (c) Studiare il problema per tempi negativi.
   (d) Generalizzare il risultato come nell'esercizio precedente.

3. (Con l'esponente pari il segno è sempre sbagliato) Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = u^2, \qquad u(0) = 2018, \quad u'(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che tutte le soluzioni con $\alpha \neq \alpha_0$ hanno blow up a $+\infty$ per tempi positivi.
   (b) Determinare il valore esplicito di α_0 e la corrispondente soluzione.
   (c) Studiare il problema per tempi negativi.
   (d) Studiare il problema con dati iniziali $u(0) = \alpha$, $u'(0) = 2018$.
   (e) Generalizzare il risultato ad equazioni del tipo $u'' = |u|^p$, con p numero reale positivo.

4. Studiare (deducendolo dall'esercizio precedente) il comportamento delle soluzioni dell'equazione differenziale
$$u'' = -u^2.$$

Equazioni differenziali del second'ordine 2

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = e^u, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
      - per $\alpha \leq \alpha_0$ la soluzione ha esistenza globale nel futuro,
      - per $\alpha > \alpha_0$ la soluzione ha blow up a $+\infty$ nel futuro.

   (b) Determinare esplicitamente α_0 e la corrispondente soluzione.

   (c) Dimostrare che per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione verifica

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty,$$

   e determinarne la parte principale.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' = -e^u.$$

   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni hanno esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro.

   (b) Dimostrare che tutte le soluzioni sono lipschitziane.

   (c) Dimostrare che tutte le soluzioni verificano

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty.$$

   (d) Determinare se le soluzioni hanno asintoto obliquo per $t \to \pm\infty$.

3. Studiare (deducendolo dagli esercizi precedenti) il comportamento delle soluzioni delle equazioni differenziali

$$u'' = e^{-u}, \qquad\qquad u'' = -e^{-u}.$$

4. Determinare quale/i delle seguenti equazioni differenziali hanno esistenza globale per ogni coppia di dati iniziali:

$$u'' + \sin u - u^{22} + u^{33} = 0, \qquad\qquad u'' + \cos u - u^{33} + u^{44} = 0,$$

$$u'' - \sin u + u^{22} - u^{33} = 0, \qquad\qquad u'' + \cos u + u^{33} - u^{44} = 0.$$

Equazioni differenziali del second'ordine 3

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = -\arctan u, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni sono periodiche.
   (b) Detto T_α il periodo della soluzione, calcolare i limiti
$$\lim_{\alpha \to 0^+} T_\alpha, \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} T_\alpha.$$
2. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = \arctan u, \qquad u(0) = -1, \quad u'(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni sono globali, nel passato e nel futuro.
   (b) Calcolare, in funzione di α, i limiti
$$\lim_{t \to -\infty} u(t), \qquad \lim_{t \to +\infty} u(t).$$
   (c) Nel caso $\alpha = -2018$, determinare la parte principale di $u(t)$ per $t \to +\infty$.
3. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = \frac{1}{1+u^2}, \qquad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0.$$
   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni sono globali, sia nel passato sia nel futuro, e pari.
   (b) Dimostrare che tutte le soluzioni tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
   (c) Determinare, in funzione di α, la parte principale di $u(t)$ per $t \to +\infty$.
4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'' = \frac{1}{1+u^2}, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$
   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni sono globali, sia nel passato sia nel futuro.
   (b) Determinare per quali valori di α la soluzione è monotona su tutto $\mathbb{R}$.
   (c) Determinare per quali valori di α la soluzione ammette minimo globale su tutto $\mathbb{R}$, e determinare il valore del minimo in funzione di α.
   (d) Nei casi in cui esiste il minimo globale, determinare il punto di minimo (scrivere la risposta come integrale).

Equazioni differenziali del second'ordine 4

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = \sqrt{u}, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
   - per $\alpha < \alpha_0$ le soluzioni hanno break down per tempi positivi,
   - per $\alpha > \alpha_0$ le soluzioni hanno esistenza globale per tempi positivi.

   (b) Determinare cosa accade nel caso $\alpha = \alpha_0$.

   (c) Nel caso $\alpha > \alpha_0$, determinare la parte principale di $u(t)$ per $t \to +\infty$.

   (d) Dimostrare che per ogni $\alpha < 0$ le soluzioni hanno esistenza globale nel passato, e determinarne la parte principale per $t \to -\infty$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = \frac{1}{u}, \qquad u(0) = \alpha \neq 0, \quad u'(0) = \beta.$$

   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni hanno esistenza globale, nel passato e nel futuro.

   (b) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u(t)}\, dt.$$

3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -\frac{1}{u}, \qquad u(0) = \alpha \neq 0, \quad u'(0) = \beta.$$

   Dimostrare che tutte le soluzioni hanno break down, sia nel passato sia nel futuro.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = \log u, \qquad u(0) = 2018, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
   - per $\alpha < \alpha_0$ le soluzioni hanno break down per tempi positivi,
   - per $\alpha \geq \alpha_0$ le soluzioni hanno esistenza globale per tempi positivi.

   (b) Dimostrare che per $\alpha > \alpha_0$ si ha che $u(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

   (c) Nel caso $\alpha = \alpha_0$, calcolare il limite di $u(t)$ per $t \to +\infty$.

Equazioni differenziali del second'ordine 5

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -\sin u, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che per ogni numero reale α si ha esistenza globale, nel passato e nel futuro.

   (b) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
   - per $|\alpha| < \alpha_0$ le soluzioni sono periodiche,
   - per $|\alpha| > \alpha_0$ le soluzioni non sono periodiche.

   (c) Detto T_α il periodo delle soluzioni periodiche, calcolare i limiti

$$\lim_{\alpha\to 0^+} T_\alpha, \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0^-} T_\alpha.$$

   (d) Nel caso $\alpha = \alpha_0$, calcolare i limiti di $u(t)$ per $t \to \pm\infty$.

   (e) Dimostrare che tutte le soluzioni sono lipschitziane su tutto $\mathbb{R}$.

   (f) Determinare per quali valori di α la costante di Lipschitz della soluzione su tutto $\mathbb{R}$ è esattamente 2018.

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = \cos u, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$

   Discutere, al variale del parametro reale α, il comportamento delle soluzioni.

3. Studiare (cercando di dedurlo dagli esercizi precedenti) il comportamento delle soluzioni delle equazioni differenziali

$$u'' = \sin u, \qquad u'' = -\cos u.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale α, il comportamento delle soluzioni del problema di Cauchy

$$u'' + \tan u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$

5. Studiare, al variare del parametro reale α, il comportamento delle soluzioni del problema di Cauchy

$$u'' + \tan u' = 0, \qquad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0.$$

Equazioni differenziali del second'ordine 6

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

[Si consiglia di dare sempre una triplice lettura dei risultati: grafico della soluzione, traiettorie nello spazio delle fasi, energy landscape]

1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -u + u^3, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che
   - per $|\alpha| \leq \alpha_0$ la soluzione è globale, sia nel passato sia nel futuro,
   - per $|\alpha| > \alpha_0$ la soluzione ha blow up, sia nel passato sia nel futuro.

   (b) Dimostrare che per $|\alpha| < \alpha_0$ la soluzione è periodica e, detto T_α il suo periodo, calcolare il limite di T_α per $\alpha \to 0^+$.

   (c) Nel caso $\alpha = \alpha_0$, calcolare il limite di $u(t)$ per $t \to \pm\infty$.

2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -u + u^3, \qquad u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 2018.$$

   Dimostrare che esiste un unico valore di α per cui la soluzione esiste globalmente nel futuro.

3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = u - u^3, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che per ogni numero reale α la soluzione esiste globalmente, sia nel passato sia nel futuro.

   (b) Dimostrare che esiste un numero reale α_0 tale che tutte le soluzioni con $\alpha \neq \alpha_0$ sono periodiche.

   (c) Detto T_α il periodo delle soluzioni, calcolare i limiti

$$\lim_{\alpha \to 0^+} T_\alpha, \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} T_\alpha.$$

   (d) Nel caso $\alpha = \alpha_0$, dimostrare che esistono e quindi calcolare i limiti

$$\lim_{t \to -\infty} u(t), \qquad \lim_{t \to +\infty} u(t).$$

Equazioni differenziali del second'ordine 7

Argomenti: studio di equazioni differenziali di ordine 2 **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: metodo energetico, energy landscape, studio qualitativo

---

1. Consideriamo le equazioni differenziali

$$u'' + \arctan(u') + u^3 = 0, \qquad\qquad u'' - \arctan(u') + u^3 = 0.$$

   (a) Dimostrare che entrambe hanno esistenza globale nel futuro per ogni scelta delle condizioni iniziali.

   (b) Determinare quale relazione sussiste tra le soluzioni delle due equazioni.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' + u' + u + u^3 = 0.$$

   (a) Dimostrare che tutte le soluzioni hanno esistenza globale nel futuro.

   (b) Dimostrare che esistono tre costanti reali positive a, b, c tali che, posto

$$F(t) := \frac{1}{2}u'(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2 + \frac{1}{4}u(t)^4 + au(t)u'(t),$$

   valgono per ogni $t \geq 0$ le disuguaglianze

$$u'(t)^2 + u(t)^2 \leq bF(t), \qquad\qquad F'(t) \leq -cF(t).$$

   (c) Dimostrare che tutte le soluzione dell'equazione verificano

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' + \arctan(u') + \arctan u = 0.$$

   Dimostrare che tutte le soluzioni esistono globalmente nel passato e nel futuro e verificano

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} u'(t) = 0.$$

Miscellanea 1

Argomenti: ??? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

1. (Un grande classico: l'integrale di Dirichlet) Consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è ben definita per ogni $x \geq 0$.
   (b) Dimostrare che
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
   (c) Dimostare che $f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$, ed in particolare è continua in $x = 0$.
   (d) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(0, +\infty)$ e
   $$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x > 0.$$
   (e) Dedurre che
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. (Un altro grande classico: gli integrali di Fresnel) Consideriamo le forme differenziali
$$\omega_1 := e^{y^2-x^2} \cos(2xy)\, dx + e^{y^2-x^2} \sin(2xy)\, dy,$$
$$\omega_2 := e^{y^2-x^2} \sin(2xy)\, dx - e^{y^2-x^2} \cos(2xy)\, dy.$$
   Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con S_n il settore circolare descritto in coordinate polari dalle relazioni $0 \leq \rho \leq n$ e $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Indichiamo con γ_n una qualunque curva che percorre il tratto di curvilineo del bordo di S_n.
   (a) Dimostrare che le forme differenziali ω_1 ed ω_2 sono esatte.
   (b) Dimostrare che
   $$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t}\, dt = 0.$$
   (c) Dimostrare che
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \omega_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} \omega_2 = 0.$$
   (d) Ricordando l'integrale di Gauss dedurre che
   $$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Miscellanea 2

Argomenti: ??? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

---

1. (Modello preda-predatore di Lotka-Volterra) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali
$$\begin{cases} u' = a\,u - b\,uv \\ v' = -c\,u + d\,uv \end{cases}$$
dove a, b, c, d sono parametri reali *positivi*.

   (a) Determinare i punti stazionari del sistema e studiarne la stabilità linearizzata.

   (b) Studiare le soluzioni del sistema nel caso in cui una delle due variabili è nulla.

   (c) Indicato con (u_s, v_s) il punto stazionario con entrambe le coordinate positive, dimostare che esiste una funzione $E : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che ha minimo globale in (u_s, v_s) e tale che $E(u(t), v(t))$ è *costante* lungo le traiettorie del sistema.

   (d) Dimostrare che se $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$, allora $u(t) > 0$ e $v(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   (e) Descrivere le linee di livello della funzione E.

   (f) Dimostrare che tutte le soluzioni del sistema con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ sono periodiche.

2. (Modello preda-predatore con autolimitazione) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali
$$\begin{cases} u' = a\,u - b\,uv - \varepsilon\,u^2 \\ v' = -c\,u + d\,uv - \eta\,v^2 \end{cases}$$
dove a, b, c, d, ε, η sono parametri reali *positivi*.

   (a) Determinare i punti stazionari del sistema e studiarne la stabilità linearizzata.

   (b) Studiare le soluzioni del sistema nel caso in cui una delle due variabili è nulla.

   (c) Indicato con (u_∞, v_∞) il punto stazionario con entrambe le coordinate positive, dimostare che esiste una funzione $E : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che ha minimo globale in (u_∞, v_∞) e tale che $E(u(t), v(t))$ è *decrescente* lungo le traiettorie del sistema.

   (d) Dimostrare che tutte le soluzioni del sistema con $u(0) > 0$ e $v(0) > 0$ tendono a (u_∞, v_∞).

Capitolo 2

Fare solo se . . .

. . . tutto il resto risulta noioso

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Funzioni di più variabili

Argomenti: ?? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione *separatamente continua*, cioè tale che le funzioni

$$t \to f(t, y_0) \qquad \text{e} \qquad t \to f(x_0, t)$$

sono continue come funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Supponiamo che esista un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ denso tale che $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in D$.

Determinare se possiamo concludere che $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Determinare se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

   - f ha due punti di minimo globale,
   - f non ha altri punti stazionari.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, y_0) = \lim_{x \to -\infty} f(x, y_0) = +\infty \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{y \to +\infty} f(x_0, y) = \lim_{y \to -\infty} f(x_0, y) = -\infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Determinare se f ha necessariamente almeno un punto stazionario.

Calcolo integrale in più variabili

Argomenti: ?? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

---

1. Consideriamo l'enunciato generale (con integrali inferiori e superiori) della formula di riduzione per integrali doppi:

$$\iint_{*\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \le \int_{*\mathbb{R}} dx \int_{*\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}^{*} dx \int_{\mathbb{R}}^{*} f(x,y)\,dy \le \iint_{\mathbb{R}^2}^{*} f(x,y)\,dx\,dy.$$

   Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato per cui i quattro termini sono uguali a quattro numeri assegnati $a < b < c < d$.

2. Definire e confrontare le tre possibili definizioni di integrale per funzioni limitate con supporto limitato, e cioè

   - l'*integrale di Darboux classico* (si prende sup e inf in ogni pluri-intervallo della partizione),
   - l'*integrale di Darboux unrestricted* (si prendono valori esterni a sup e inf in ogni pluri-intervallo della partizione),
   - l'*integrale di Riemann* (definito con le "tagged partitions").

Integrali impropri in più variabili

Argomenti: ?? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

1. Caratterizzare le terne (a, b, c) di numeri reali positivi per cui risulta convergente l'integrale improprio
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\,dy\,dz}{1 + |x|^a + |y|^b + |z|^c}.$$

Serie di funzioni

Argomenti: ?? **Difficoltà**: ???

Prerequisiti: ???

1. Determinare se il seguente limite esiste, ed in caso affermativo calcolarlo:

$$\lim_{x \to -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

2. Determinare se il seguente limite esiste, ed in caso affermativo calcolarlo:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1 + x^n} \right)^n.$$

3.

Capitolo 3

Saper dire

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Sostanzialmente domande da orale, cioè guida allo studio della teoria.

3.1 Calcolo differenziale in più variabili

3.1.1 Topologia, limiti e continuità

CD-1 Definizioni di limite (finito o infinito) in un punto per funzioni $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Come deve essere il punto in cui si fa il limite rispetto a D?

CD-2 Definizione di limite (finito) in un punto per funzioni $f : D \to \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

CD-3 Definizioni di limite all'infinito per funzioni $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Come deve essere fatto D affinché abbia senso porsi il problema del limite all'infinito?

CD-4 Esempi di limite (in un punto oppure all'infinito) che esistono e coincindo su tutte le rette ma non esistono in generale.

3.1.2 Derivate, differenziale, formula di Taylor, studio locale

CD-5 Definizione di derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, matrice Jacobiana.

CD-6 Definizione di differenziale per funzioni di più variabili, avendo ben chiari tutti gli ingredienti che vi compaiono, ed in particolare o piccolo.

CD-7 Legami tra differenziabilità, continuità, esistenza delle derivate parziali e direzionali: enunciati, dimostrazioni, controesempi.

CD-8 Formula per le derivate direzionali: enunciato, dimostrazione (avendo capito bene la gestione del resto), interpretazione geometrica del gradiente.

CD-9 Teorema del differenziale totale: enunciato e dimostrazione sia in versione classica (in cui si assume che tutte le derivate parziali esistono in un intorno e sono continue nel punto), sia in versione risparmiosa (in cui si assume che una delle derivate parziali esiste solo nel punto).

CD-10 Lipschitzianità delle funzioni lineari: enunciato e dimostrazione.

CD-11 Teorema di differenziabilità della funzione composta per funzioni di più variabili: enunciato e dimostrazione. Deduzione della chain-rule per il calcolo delle derivate parziali di funzioni composte.

CD-12 Analogo in più variabili del teorema di Lagrange mediante derivate direzionali.

CD-13 Una funzione con il gradiente sempre nullo in un aperto connesso è costante.

CD-14 Legami tra lipschitzianità e limitatezza del gradiente per funzioni di più variabili.

CD-15 Teorema di inversione dell'ordine di derivazione: enunciato, dimostrazione, controesempi.

CD-16 Teorema di inversione dell'ordine di derivazione sotto ipotesi più deboli, che non richiedano entrambe le derivare miste in un intorno.

CD-17 Saper enunciare (sia in generale, sia per un fissato ordine ed un fissato numero di variabili) la formula di Taylor per funzioni di più variabili, avendo ben chiaro il significato di tutte le notazioni in essa contenute.

CD-18 Enunciato e dimostrazione in due variabili della formula di Taylor con resto alla Lagrange.

CD-19 Formula di Taylor con resto di Peano in più variabili: enunciato e dimostrazione.

CD-20 Stima dal basso e dall'alto di una forma quadratica in termini degli autovalori della matrice associata: enunciato e dimostrazione.

CD-21 Matrice Hessiana e suo ruolo nello studio locale nell'intorno di un punto stazionario: enunciato, dimostrazione, controesempi.

CD-22 Formula generale per le soluzioni globali dell'equazione delle onde in dimensione uno.

3.1.3 Massimi e minimi, studio globale

CD-23 Tre facce della compattezza in più variabili: enunciato e dimostrazione delle implicazioni che coinvolgono la compattezza per successioni.

CD-24 Teorema di Weierstrass in più variabili: enunciato e dimostrazione (sia in versione continua, sia in versione semicontinua).

CD-25 Ricerca dei punti di massimo/minimo per funzioni di più variabili: enunciato e dimostrazione.

CD-26 Quoziente di Reyleigh e caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori.

CD-27 Teorema di Weierstrass generalizzato in più variabili, sia nella versione con i sottolivelli, sia nella versione con il limite.

CD-28 Teorema fondamentale dell'algebra: dimostrazione passando per Weierstrass generalizzato e studio locale.

3.1.4 Insiemi convessi e funzioni convesse

CD-29 Definizione di sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale e di combinazione convessa di vettori. Dimostrazione che un insieme convesso contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi elementi.

CD-30 Definizione di funzione convessa in uno spazio vettoriale e relativa disuguaglianza di Jensen (enunciato e dimostrazione).

CD-31 La convessità di una funzione è un fatto uno-dimensionale e lemma dei tre rapporti incrementali in più variabili.

CD-32 Definizione di punti estremali e dimostrazione che per una funzione strettamente convessa i punti di massimo (se esistono) sono necessariamente punti estremali.

CD-33 Due definizioni di locale limitatezza (superiore e/o inferiore) ed equivalenza tra le stesse.

CD-34 Convessità vs continuità in più variabili.

CD-35 Convessità vs derivate prime e piano tangente in più variabili.

CD-36 Convessità vs derivate seconde in più variabili.

3.2 Calcolo integrale in più variabili

3.2.1 Integrali propri

CI-1 Definizione di integrale in più variabili: step functions, integrale inferiore e superiore, criterio di integrabilità.

CI-2 Enunciato e dimostrazione delle proprietà classiche delle funzioni integrabili: linearità, monotonia, additività rispetto alla zona di integrazione, integrabilità del valore assoluto, del prodotto, del massimo/minimo.

CI-3 Formula di riduzione per integrali multipli, sia nel caso generale (con integrali inferiori e superiori), sia sotto ipotesi aggiuntive che impongono l'esistenza degli integrali: enunciato, dimostrazione, controesempi.

CI-4 Definizione di insieme misurabile e caratterizzazione mediante plurirettangoli. Misurabilità sotto opportune ipotesi degli insiemi normali.

CI-5 Integrabilità delle funzioni "decenti" su insiemi "decenti": enunciato rigoroso e dimostrazione.

CI-6 Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione: enunciato, dimostrazione, esempi classici di applicazione (sfera, cilindro, cono, toro).

CI-7 Principio di Cavalieri: enunciato (nel piano e nello spazio) e dimostrazione.

CI-8 Teorema della media integrale: enunciato e dimostrazione.

CI-9 Formula di cambio di variabili negli integrali multipli nel caso affine: enunciato e dimostrazione.

CI-10 Formula di cambio di variabili negli integrali multipli nel caso generale: enunciato e dimostrazione.

CI-11 Volume della palla n-dimensionale: formule esplicite e ricorrenti.

3.2.2 Integrali impropri

CI-12 Indipendenza di un integrale improprio dal modo in cui la zona di integrazione viene "invasa": enunciato e dimostrazione in qualche caso, controesempi per integrande a segno variabile.

CI-13 Calcolo dell'integrale gaussiano sulla retta mediante un integrale doppio (giustificando bene i limiti).

CI-14 Valori soglia per integrali impropri di potenze della norma in $\mathbb{R}^n$: enunciato e dimostrazione.

3.2.3 Integrali dipendenti da parametro

CI-15 Continuità degli integrali (multipli) dipendenti da parametro (teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale): enunciato e dimostrazione.

CI-16 Derivabilità degli integrali (multipli) dipendenti da parametro (teorema di derivazione sotto il segno di integrale): enunciato e dimostrazione.

CI-17 Derivabilità degli integrali in dimensione uno con integranda ed estremi di integrazione dipendenti da parametro: enunciato e dimostrazione.

CI-18 Continuità di un integrale improprio su una semiretta dipendente da parametro, sotto ipotesi di convergenza dominata: definizioni, enunciato, dimostrazione.

CI-19 Derivabilità di un integrale improprio su una semiretta dipendente da parametro, sotto ipotesi di dominazione della derivata: definizioni, enunciato, dimostrazione.

CI-20 Calcolo dell'integrale di Dirichlet mediante integrale dipendente da parametro (giustificando bene la continuità e derivabilità).

3.3 Curve, superfici, calcolo vettoriale

3.3.1 Curve ed integrali curvilinei

CV-1 Definizioni base: curva, sostegno di una curva, curva chiusa, curva semplice, vettore e retta tangente, speed e velocity.

CV-2 Definizione di lunghezza di una curva e di curva rettificabile.

CV-3 Esempi di curve di lunghezza infinita.

CV-4 Rettificabilità delle curve lipschitziane.

CV-5 Integrali di funzioni vettoriali: stima dall'alto e dal basso.

CV-6 Formula per il calcolo della lunghezza di una curva di classe C^1: enunciato e dimostrazione.

CV-7 Invarianza della lunghezza di una curva rispetto al cambio di parametrizzazione: enunciato e dimostrazione (sia nel caso regolare, sia nel caso continuo).

CV-8 Integrali curvilinei: formula per il calcolo ed indipendenza dalla parametrizzazione.

3.3.2 Forme differenziali (lineari)

CV-9 Definizione di forma differenziale e di integrale di una forma differenziale lungo una curva. Interpretazione dell'integrale curvilineo di una forma differenziale in termini di prodotto scalare.

CV-10 Comportamento dell'integrale curvilineo di una forma differenziale a seguito di una riparametrizzazione della curva.

CV-11 Definizione di forma differenziale esatta e caratterizzazione dell'esattezza in termini di integrali curvilinei: enunciato e dimostrazione.

CV-12 Primitiva di una forma differenziale e suo ruolo nel calcolo degli integrali curvilinei.

CV-13 Definizione di forma differenziale chiusa e di forma differenziale esatta. Relazioni tra esattezza e chiusura: enunciati, esempi, controesempi.

CV-14 Definizione di insieme convesso, stellato, connesso, semplicemente connesso.

CV-15 Le forme differenziali ... ammettono primitiva sugli insiemi stellati: enunciato e dimostrazione.

CV-16 Integrale di forme differenziali ... lungo curve omotope: enunciato e dimostrazione.

CV-17 Pull-back di forme differenziali: formula e sua giustificazione rigorosa.

CV-18 Calcolo degli integrali di Fresnel mediante integrazione di opportune forme differenziali (giustificando bene i limiti).

3.3.3 Superfici ed integrali superficiali

CV-19 Relazione tra i piani tangenti ad una superficie e le rette tangenti alle curve contenute nella superficie.

CV-20 Modi equivalenti di scrivere la norma del vettore normale "canonico".

CV-21 Esempio di Schwarz e suo ruolo nella definizione di area di una superficie.

CV-22 Area di una superficie e formula per calcolarla nei vari casi: parametrico, cartesiano, di rotazione.

CV-23 Superfici equivalenti a meno di riparametrizzazione ed invarianza dell'area.

CV-24 Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione: enunciato, dimostrazione, esempi classici di applicazione (sfera, cilindro, cono, toro).

CV-25 Integrali superficiali: idea della definizione e formula per il calcolo nel caso generale e nel caso degli integrali di flusso.

3.3.4 Teoremi della divergenza e del rotore

CV-26 Definizione dei principali operatori differenziali (gradiente, divergenza, laplaciano, rotore) e principali proprietà che li legano (in particolare la divergenza del gradiente, il rotore del gradiente e la divergenza del rotore).

CV-27 Caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo: enunciati, dimostrazioni, esempi, controesempi.

CV-28 Caratterizzazione dei campi vettoriali a rotore nullo: enunciati, dimostrazioni, esempi, controesempi.

CV-29 Caratterizzazione dei campi vettoriali a divergenza nulla: enunciati, dimostrazioni, esempi, controesempi.

CV-30 Enunciato del teorema di Gauss-Green e del teorema della divergenza, ed equivalenza tra le due formulazioni. Interpretazione del teorema di Gauss-Green in termini di integrazione per parti.

CV-31 Riscrittura del teorema della divergenza in dimensione due in termini di forme differenziali e in termini di derivate direzionali: enunciati e dimostrazione.

CV-32 Formule per l'area di un insieme limitato da una o più curve assegnate: enunciato e dimostrazione.

CV-33 Dimostrazione del teorema della divergenza in dimensione due su insiemi normali (avendo ben chiaro che ci sono due casi da trattare).

CV-34 Partizioni dell'unità.

CV-35 Dimostrazione del teorema della divergenza in dimensione due su insiemi che non sono necessariamente normali.

CV-36 Formula di Stokes e significato di tutti i termini che ne fanno parte. Interpretazione del rhs sia in termini di circuitazione, sia in termini di forme differenziali.

CV-37 Formula di Stokes: enunciato e dimostrazione.

CV-38 Dimostrazione, mediante il teorema della divergenza, della formula di cambio di variabili negli integrali doppi. Vantaggi e svantaggi di questo approccio.

3.4 Spazi metrici

SM-1 Definizione di distanza, spazio metrico, spazio di Banach, spazio di Hilbert e relazioni tra questi spazi.

SM-2 Lipschitzianità e Hölderianità per funzioni tra spazi metrici: definizioni e proprietà (della composizione o del prodotto) analoghe a quelle valide in una variabile.

SM-3 Equivalenza tra due definizioni di continuità in spazi metrici: enunciato e dimostrazione.

SM-4 Equivalenza di tutte le norme in uno spazio vettoriale di dimensione finita: enunciato e dimostrazione.

SM-5 Limitatezza e totale limitatezza in spazi metrici: definizioni, legami (enunciati e controesempi), caratterizzazione della totale limitatezza (enunciato e dimostrazione).

SM-6 Caratterizzazione della compattezza in spazi metrici: enunciato e dimostrazione delle varie implicazioni.

SM-7 Lemma del raggio magico (numero di Lebesgue di un ricoprimento): enunciato, dimostrazione, qualche esempio di utilizzo.

SM-8 Teorema di Heine-Cantor in spazi metrici: enunciato e dimostrazione via compattezza per successioni.

SM-9 Teorema di Heine-Cantor in spazi metrici: enunciato e dimostrazione via compattezza per ricoprimenti.

SM-10 Teorema delle contrazioni: enunciato, dimostrazione, controesempi che mostrano l'ottimalità delle ipotesi.

SM-11 Definizione di completamento di uno spazio metrico, enunciato del teorema di esistenza del completamento, dimostrazione del teorema di unicità del completamento.

SM-12 Teorema di estensione al completamento: enunciato e dimostrazione.

SM-13 Teorema di esistenza ed unicità del completamento: enunciato e dimostrazione.

3.5 Varietà

3.5.1 Teorema delle funzioni implicite

V-1 Teorema delle funzioni implicite in codimensione 1, con regolarità del limite: enunciato, dimostrazione alla Dini, controesempi.

V-2 Teorema delle funzioni implicite in codimensione 1, con regolarità del limite: enunciato e dimostrazione con le contrazioni.

V-3 Teorema delle funzioni implicite in codimensione arbitraria, con regolarità del limite: enunciato e dimostrazione.

3.5.2 Teorema della funzione inversa

V-4 Teorema di invertibilità locale, con regolarità dell'inversa: enunciato, dimostrazione (occhio a verificare che anche in partenza si ha un intorno aperto), esempi che mostrano come l'invertibilità locale in ogni punto non implica l'invertibilità globale.

V-5 Teorema della mappa aperta, sia in ipotesi di invertibilità locale, sia in ipotesi di "full rank": enunciato e dimostrazione.

3.5.3 Moltiplicatori di Lagrange

V-6 Definizione di punto di massimo/minimo locale vincolato ed enunciato del metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

V-7 Condizione sufficiente affinché un punto sia un punto di minimo locale vincolato: enunciato e dimostrazione.

V-8 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange con vincolo in codimensione 1: enunciato e dimostrazione mediante il teorema delle funzioni implicite.

V-9 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange con vincolo in codimensione arbitraria: enunciato e dimostrazione mediante il teorema delle funzioni implicite, con interpretazione in termini di spazio tangente al vincolo.

V-10 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange con vincolo in codimensione arbitraria: enunciato e dimostrazione mediante il teorema della mappa aperta.

V-11 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange con vincolo in codimensione arbitraria: enunciato e dimostrazione mediante il metodo di penalizzazione del vincolo.

V-12 Semicontinuità del rango di una matrice: enunciato e dimostrazione.

3.6 Successioni e serie di funzioni

3.6.1 Convergenza puntuale e uniforme

SF-1 Definizione di convergenza puntuale ed uniforme per successioni di funzioni. Implicazioni tra le due definizioni: enunciati e controesempi. Estendibilità dei concetti a contesti metrici o topologici. Interpretazione in termini di convergenza in un opportuno spazi di funzioni rispetto ad una opportuna metrica.

SF-2 Spazi di funzioni limitate, continue, C^1. Interpretazione della convergenza uniforme in termini di distanza in opportuni spazi di funzioni. Completezza di spazi di funzioni.

SF-3 Teorema di scambio del limite: enunciato, dimostrazione, controesempi con la sola convergenza puntuale, estensione a contesti metrici. Discussione del passaggio al limite della continuità.

SF-4 Teorema di scambio dell'integrale: enunciato, dimostrazione, controesempi con la sola convergenza puntuale, estensione in più dimensioni. Discussione del passaggio al limite dell'integrabilità secondo Riemann.

SF-5 Convergenza dominata e teorema di scambio per integrali impropri: definizione, enunciato, dimostrazione, controesempi.

SF-6 Teorema di scambio della derivata: enunciato, dimostrazione, controesempi con la sola convergenza puntuale, estensione in più dimensioni. Discussione del passaggio al limite della derivabilità.

SF-7 Teorema di "doppio scambio": discussione della convergenza $f_n(x_n) \to f_\infty(x_\infty)$ (enunciato e controesempi).

SF-8 Teorema di convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia in n ad x fisso: enunciato, dimostrazione, controesempi che mostrano la necessità delle ipotesi.

SF-9 Teorema di convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia in x ad n fisso: enunciato, dimostrazione, controesempi che mostrano la necessità delle ipotesi.

SF-10 Discussione di alcuni casi, oltre a quelli monotoni, in cui la convergenza puntuale implica quella uniforme sui compatti: enunciati e dimostrazioni.

SF-11 Teorema di Ascoli-Arzelà: enunciato e dimostrazione per funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, ed estensione al caso di $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

SF-12 Teorema di Ascoli-Arzelà: enunciato e dimostrazione nel caso metrico.

SF-13 Implicazioni tra equi-continuità ed equi-uniforme-continuità: enunciato e dimostrazione.

3.6.2 Serie di funzioni

SF-14 Definizione di convergenza totale e suoi rapporti con la convergenza uniforme: enunciato e controesempi.

SF-15 Interpretazione della convergenza totale come assoluta convergenza in uno spazio di Banach: definizioni, enunciato, dimostrazione.

SF-16 Condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni, e sua sufficienza sotto ipotesi in stile Leibnitz.

3.6.3 Serie di potenze e funzioni analitiche

SF-17 Descrizione dell'insieme di convergenza e formula per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze: enunciato e dimostrazione.

SF-18 Derivazione per serie e regolarità delle serie di potenze: enunciato e dimostrazione.

SF-19 Teorema di Abel per le serie di potenze: enunciato, dimostrazione, esempi di applicazione.

SF-20 Calcolo della somma di serie numeriche classiche (serie armonica a segni alterni, serie dei reciproci dei dispari a segni alterni): enunciato e dimostrazione.

SF-21 Definizione di funzione analitica e dimostrazione dell'analiticità di esponenziale, seno, coseno.

SF-22 Dimostrazione dell'analiticità della funzione $\log x$ per $x > 0$.

SF-23 Dimostrazione dell'analiticità in $(-1, 1)$ delle funzioni $\arctan x$ e $(1 + x)^\alpha$.

SF-24 Definizione di funzione analitica e criterio generale di analiticità: enunciato e dimostrazione.

SF-25 Prodotto di Cauchy di serie numeriche: definizione, teorema di convergenza (enunciato e dimostrazione), applicazione all'analiticità del prodotto di due funzioni.

SF-26 Struttura dell'insieme degli zeri di una funzione analitica: enunciato e dimostrazione.

SF-27 Stime di crescita per le derivate di una serie di potenze e stima del raggio di convergenza della serie di Taylor di una serie di potenze quando si cambia il centro.

3.7 Equazioni differenziali

3.7.1 Teoremi di esistenza/unicità per il problema di Cauchy

ED-1 Enunciato dei teoremi di esistenza e di esistenza e unicità. Esempio di non unicità.

ED-2 Equivalenza tra problema di Cauchy ed equazione integrale alla Volterra: enunciato e dimostrazione.

ED-3 Teorema di esistenza sotto ipotesi di lipschitzianità: dimostrazione alla Cauchy-Lipschitz (con tempo di vita dipendente anche dalla costante di Lipschitz).

ED-4 Teorema di esistenza sotto ipotesi di lipschitzianità: dimostrazione alla Cauchy-Lipschitz con distanza pesata e tempo di vita ottimale.

ED-5 Teorema di esistenza sotto ipotesi di lipschitzianità: dimostrazione con tempo di vita ottimale mediante convergenza delle iterate di Picard.

ED-6 Teorema di esistenza sotto ipotesi di lipschitzianità: dimostrazione con tempo di vita ottimale mostrando che una opportuna iterata della mappa di Picard è una contrazione.

ED-7 Lemma di Gronwall minimalista e suo utilizzo nella dimostrazione dell'unicità per la soluzione di un problema di Cauchy.

ED-8 Dimostrazione dell'unicità mediante soprasoluzioni e sottosoluzioni (sia per le equazioni, sia per i sistemi).

ED-9 Teorema di esistenza sotto ipotesi di sola continuità: dimostrazione mediante approssimazione Lipschitz (con costruzione/i delle approssimanti Lipschitz).

ED-10 Teorema di esistenza sotto ipotesi di sola continuità: dimostrazione mediante i problemi con ritardo alla Tonelli.

ED-11 Esistenza di soluzioni massimali e teorema di alternativa: enunciati e dimostrazioni.

ED-12 Teorema di esistenza globale sotto ipotesi di globale limitatezza: enunciato e dimostrazione.

ED-13 Teorema di esistenza globale sotto ipotesi di globale sublinearità: enunciato e dimostrazione.

ED-14 Teorema di dipendenza continua dal dato iniziale sotto ipotesi di sola continuità: enunciato e dimostrazione.

ED-15 Teorema di dipendenza continua dal dato iniziale sotto ipotesi di Lipschitzianità, con stima dell'errore: enunciato e dimostrazione.

ED-16 Teoremi di esistenza globale e/o di unicità sotto ipotesi di tipo Osgood: enunciato e dimostrazione.

ED-17 Wronskiano e teorema di oscillazione per equazioni di ordine 2.

3.7.2 Studio qualitativo

ED-18 Teorema dell'asintoto: enunciato (anche in versione liminf/limsup) e dimostrazione.

ED-19 Sottosoluzioni e soprasoluzioni: definizioni e teorema di confronto nel caso stretto (enunciato e dimostrazione).

ED-20 Sottosoluzioni e soprasoluzioni: definizioni e teorema di confronto nel caso debole (enunciato e dimostrazione).

3.7.3 Sistemi di equazioni differenziali

ED-21 Esponenziale di una matrice: definizione, calcolo, ruolo nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari, principali proprietà vere e false.

ED-22 Sistemi lineari omogenei 2×2 a coefficienti costanti: descrizione delle traiettorie nello spazio delle fasi nei vari casi.

ED-23 Stabilità e asintotica stabilità per sistemi di equazioni differenziali: definizioni in generale, enunciato e dimostrazione nel caso di sistemi 2×2 lineari omogenei a coefficienti costanti. Descrizione dell'enunciato nel caso $n \times n$.

ED-24 Comportamento asintotico delle soluzioni di un sistema autonomo in un intorno di un punto stazionario in cui il linearizzato è diagonalizzabile con autovalori reali di segno . . . : enunciato e dimostrazione.

ED-25 Equazione logistica e modello preda-predatore di Volterra-Lotka, con o senza autolimitazione: esistenza globale e proprietà qualitative delle soluzioni.

ED-26 Epidemia SIS e SIR: esistenza globale e comportamento asintotico delle soluzioni.

Capitolo 4

Saper fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Sostanzialmente operazioni con cui familiarizzare per poter affrontare gli esercizi.

4.1 Calcolo differenziale in più variabili

4.1.1 Topologia, limiti e continuità

1. Aver chiaro il linguaggio topologico in $\mathbb{R}^n$ e, dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, saperne calcolare parte interna, chiusura, frontiera, punti di accumulazione, punti isolati.

2. Saper stabilire l'esistenza di un limite in più variabili utilizzando le coordinate polari, i teoremi algebrici, i teoremi di confronto. Aver ben chiaro che l'esistenza dei limiti sulle rette o su una famiglia di curve non garantisce l'esistenza del limite in generale.

3. Saper stabilire la non esistenza di un limite in più variabili trovando limiti diversi su due curve diverse o due successioni diverse. In caso di non esistenza, saper calcolare liminf e limsup.

4. Saper calcolare limiti (o eventualmente liminf e limsup) all'infinito per funzioni di più variabili.

5. Saper gestire limiti al finito o all'infinito per funzioni ristrette a domini assegnati.

6.

7.

4.1.2 Derivate, differenziale, formula di Taylor, studio locale

1. Saper calcolare derivate parziali e direzionali per funzioni di più variabili, usando a seconda dei casi formule, criteri o la definizione.

2. Saper calcolare il gradiente di una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ e la matrice Jacobiana di una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$.

3. Saper stabilire se una funzione è differenziabile o meno in un punto dato, usando a seconda dei casi la definizione o il teorema del differenziale totale.

4. Saper applicare praticamente la chain-rule per il calcolo di derivate parziali di funzioni composte.

5. Saper applicare la chain rule per caratterizzare le soluzioni di semplici equazioni alle derivate parziali.

6. Saper stimare la differenza tra i valori di una funzione in due punti in termini di derivata direzionale (teorema di Lagrange direzionale).

7. Sapere quando si può e quando non si può dedurre uan stima sulla costante di lipschitz da una stima sul gradiente.

8. Saper stabilire la segnatura di una forma quadratica, utilizzando di volta in volta il metodo più conveniente.

9. Saper scrivere una forma quadratica come somma/differenza di quadrati.

10. Saper calcolare le derivate parziali di ogni ordine per una funzione di più variabili (e saper decidere se e dove esistono).

11. Sapere quando si può, e soprattutto quando non si può, utilizzare la matrice Hessiana per lo studio locale nell'intorno di un punto stazionario.

12. Saper stabilire se un punto stazionario è un punto di massimo/minimo locale.

13. Saper calcolare i polinomi di Taylor di una funzione data in un punto assegnato, ricorrendo ove possibile ai polinomi di Taylor delle funzioni elementari.

14. Saper dedurre i valori delle derivate di una funzione in un punto (ed in particolare il gradiente e la matrice hessiana) dai coefficienti dei polinomi di Taylor della funzione stessa in quel punto.

15. Saper calcolare, senza passare attraverso le componenti, il gradiente e la matrice Hessiana di semplici funzioni di più variabili, come potenze della norma o prodotti scalari di espressioni lineari.

4.1.3 Massimi e minimi, studio globale

1. Saper decidere se un dato sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è chiuso e/o limitato.

2. Saper disegnare sottoinsiemi del piano o dello spazio descritti mediante sistemi di equazioni e/o disequazioni.

3. Saper determinare velocemente massimi e minimi di semplici funzioni di più variabili su semplici domini.

4. Saper utilizzare il metodo delle linee di livello per determinare massimi/minimi di funzioni di due variabili su semplici domini.

5. Saper impostare e portare a termine la procedura standard (ounti stazionari interni, singolari interni, bordo) per risolvere un problema di massimo/minimo su un dominio compatto.

6. Saper parametrizzare in maniera opportuna il bordo di un insieme dato, e saper utilizzare tale parametrizzazione per descrivere il comportamento di una funzione data sul bordo in questione.

7. Saper applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (con uno o più moltiplicatori) per lo studio di massimi/minimi vincolati. In particolare, saper risolvere i sistemi che ne derivano, senza perdere soluzioni con semplificazioni allegre.

8. Sapere utilizzare il metodo dei moltiplicatori anche per cercare punti di massimo/minimo solo su un pezzo di un luogo di zeri, avendo ben chiara la comparsa dei "punti di taglio" o "bordi dei bordi".

9. Sapere scegliere di volta in volta lo strumento (parametrizzazione o moltiplicatori) più comodo o appropriato per lo studio dei vari pezzi del bordo di un dominio.

10. Saper applicare, quando conviene, la tecnica di “sostituzione del vincolo” per semplificare un problema di massimo/minimo vincolato.

11. Saper dedurre massimo/minimo del valore assoluto di una funzione dati massimo/minimo della funzione stessa.

12. Aver chiaro che per funzioni 0-omogenee il massimo/minimo sul complementare dell'origine coincidono con quelli (per esempio) sulla palla unitaria centrata nell'origine.

13. Saper utilizzare il teorema di Weierstrass generalizzato per dedurre l'eventuale esistena di massimi/minimi anche in assenza di compattezza.

4.1.4 Insiemi convessi e funzioni convesse

1. Saper determinare operativamente i punti estremali di un insieme convesso dato e saper rappresentare un punto come combinazione convessa di punti estremali (quando questo è possibile).

2. Saper stabilire se una data funzione di più variabili è convessa in un insieme dato usando la definizione.

3. Saper dedurre l'eventuale convessità di una funzione di più variabili da un opportuno studio della matrice Hessiana.

4.2 Calcolo integrale in più variabili

4.2.1 Integrali propri

1. Saper applicare la formula di riduzione per il calcolo di integrali doppi.

2. Saper rappresentare un sottoinsieme del piano, descritto in modo analitico o geometrico, come insieme normale rispetto all'asse x e/o rispetto all'asse y.

3. Saper valutare la convenienza della rappresentazione di un insieme come normale rispetto all'asse x o rispetto all'asse y, scegliendo di volta in volta l'opzione più efficiente.

4. Saper utilizzare le coordinate polari per il calcolo di integrali doppi (e saper valutare quando si tratta di una scelta conveniente rispetto ad altre tecniche).

5. Aver ben presente che se l'integranda ha segno costante, allora l'integrale avrà lo stesso segno, ed utilizzare questa informazione per evitare affermazioni che la contraddicano palesemente.

6. Saper utilizzare le simmetrie per mostrare che un integrale multiplo è nullo sennza calcolarlo esplicitamente, o comunque per semplificarne il calcolo.

7. Saper utilizzare un cambio di variabili per il calcolo di un integrale multiplo, avendo chiaro come il calcolo del determinante Jacobiano possa essere svolto nelle due direzioni.

8. Saper utilizzare le trasformazioni standard (traslazioni, dilatazioni lungo gli assi, affinità) per semplificare il calcolo di integrali multipli.

9. Saper utilizzare le formule di riduzione (sui parallelepipedi, per sezioni e per colonne) per il calcolo di integrali tripli.

10. Aver chiaro come passare tra varie descrizioni analitiche di un sottoinsieme dello spazio, ad esempio scrivendolo come insieme normale rispetto ad un piano opportuno oppure rappresentandolo per sezioni.

11. Saper utilizzare, quando opportuno, le coordinate cilindriche o sferiche per il calcolo di un integrale triplo.

12. Essere sensibilizzati sul fatto che non c'è uno standard internazionalmente e univocamente riconosciuto per la notazione e la definizione delle coordinate sferiche nello spazio.

13. Saper calcolare le coordinate del baricentro di figure piane e solide.

14. Saper calcolare il momento d'inerzia di figure piane e solide rispetto ad un asse assegnato.

15. Saper riconoscere se una certa equazione rappresenta un solido di rotazione, ed in caso affermativo saper determinare quale figura ruota intorno a quale asse.

16. Data una figura piana ed un asse di rotazione, saper scrivere l'equazione del solido che si ottiene ruotando la figura stessa intorno all'asse, e saper determinare il volume del solido.

17. Saper gestire (sia ricorrendo ad opportune simmetrie, sia spezzando opportunamente l'insieme di integrazione) integrali multipli con integranda che contiene valori assoluti.

4.2.2 Integrali impropri

1. Avere chiari i valori soglia per l'integrale improprio di potenze della norma in $\mathbb{R}^n$, sia con problema nell'origine, sia con problema all'infinito.

2. Saper utilizzare le tecniche più standard per lo studio della convergenza di integrali impropri: uso di coordinate polari/sferiche, stime, pareggiamento degli esponenti.

3. Aver chiaro come nello studio della convergenza di un integrale multiplo improprio possa essere utile stimare sia l'integranda, sia la zona di integrazione.

4. Saper studiare la convergenza di integrali multipli impropri parametrici.

4.2.3 Integrali dipendenti da parametro

1. Sapere quando si può e quando invece non si può passare al limite sotto il segno di integrale.

2. Sapere quando si può e quando invece non si può derivare sotto il segno di integrale.

3. Sapere derivare un integrale in dimensione uno con integranda ed estremi di integrazione dipendenti da parametro.

4. Aver chiaro il concetto di convergenza dominata e saperlo utilizzare per mostrare la continuità di integrali impropri dipendenti da parametro.

5. Aver chiaro il concetto di dominazione della derivata e saperlo utilizzare per mostrare la derivabilità di integrali impropri dipendenti da parametro.

4.3 Curve, superfici, calcolo vettoriale

4.3.1 Curve ed integrali curvilinei

1. Saper stabilire se una curva è chiusa e/o semplice.

2. Saper trovare il vettore e la retta tangente ad una curva data in un punto dato, avendo chiara la differenza tra speed e velocity.

3. Saper calcolare la lunghezza di una curva definita in vario modo (parametrico, cartesiano, polare).

4. Aver chiaro il significato geometrico di un integrale curvilineo.

5. Saper riconoscere e calcolare un integrale curvilineo.

6. Saper calcolare il baricentro di una curva.

4.3.2 Forme differenziali (lineari)

1. Saper distinguere l'integrale curvilineo di una funzione dall'integrale curvilineo di una forma differenziale. Avere ben chiaro il loro differente comportamento rispetto ad una riparametrizzazione della curva e quando uno stesso tratto del supporto viene ripetuto avanti/indietro.

2. Saper stabilire se una forma differenziale è esatta, ed in caso affermativo saper calcolare una primitiva e saperla utilizzare per il calcolo dell'integrale della forma lungo una curva.

3. Saper stabilire se una forma differenziale è chiusa, e avere ben chiari i legami tra chiusura ed esattezza.

4. Saper stabilire se un insieme è convesso, stellato, connesso, semplicemente connesso.

5. Avere chiaro il concetto di curve omotope, e saper stabilire (almeno intuitivamente) se due curve date lo sono.

6. Avere chiaro come la topologia dell'insieme di definizione interviene nell'implicazione tra chiusura ed esattezza, ed essere consapevoli che una "stessa" forma differenziale chiusa può essere esatta in un insieme e non esatta in un altro insieme.

7. Avere chiaro cosa vuol dire che l'integrale di una forma differenziale chiusa su una curva dipende solo dalla classe di omotopia della curva.

8. Avere chiaro come testare se una forma differenziale chiusa è esatta in un insieme non semplicemente connesso (qui intervengono i generatori del gruppo fondamentale).

9. Avere chiaro come sono fatte tutte le forme differenziali chiuse definite su tutto il piano meno un punto, e avere idea di come questo enunciato si estende a insiemi di definizione più generali.

10. Avere chiare, e saper applicare efficacemente a seconda dei casi, le quattro strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva.

11. Avere chiaro entro quali limiti è possibile/corretto identificare una forma differenziale con un campo di vettori.

4.3.3 Superfici ed integrali superficiali

1. Saper scrivere la parametrizzazione di una superficie descritta in vario modo, ad esempio come superficie cartesiana o superficie di rotazione.

2. Saper calcolare il piano tangente ad una superficie in un punto ed il vettore/versore normale "canonico". Sapere che la norma del vettore normale "canonico" si può scrivere in vari modi a partire dalla matrice Jacobiana (con i minori, il prodotto vettore, o come determinante).

3. Saper calcolare l'area di una superficie descritta in vario modo: parametrico, cartesiano, di rotazione.

4. Saper utilizzare il teorema di Guldino per calcolare l'area di una superficie di rotazione.

5. Saper calcolare il baricentro di una superficie.

6. Avere ben chiaro che c'è una moltitudine di formule equivalenti per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione, e sapere scegliere di volta in volta quella più conveniente a seconda della descrizione della superficie.

7. Saper calcolare, usando la definizione, un integrale superficiale ed un integrale di flusso attraverso una superficie.

8. Avere chiaro il concetto di riparametrizzazione di una superficie e la sua influenza sul calcolo dell'area o di un integrale superficiale.

9. Aver chiara l'interpretazione della formula di integrazione in coordinate polari o sferiche in termini di integrali curvilinei o superficiali (formule di tipo "coarea").

4.3.4 Teoremi della divergenza e del rotore

1. Saper calcolare gradienti, laplaciani, divergenze, rotori, avendo ben chiaro che cosa questi operatori prendono in input e cosa restituiscono in output. Avere ben chiaro quali operazioni sono senza senso (tipo il rotore o la divergenza di una funzione scalare).

2. Avere chiaro cosa sono la divergenza del gradiente, il rotore del gradiente e la divergenza del rotore.

3. Avere chiaro cosa vuol dire che una funzione ha gradiente nullo, oppure che due funzioni hanno lo stesso gradiente.

4. Avere chiaro cosa vuol dire che un campo ha rotore nullo, oppure che due campi hanno lo stesso rotore.

5. Avere chiaro cosa vuol dire che un campo ha divergenza nulla, oppure che due campi hanno la stessa divergenza.

6. Saper calcolare (mediante un integrale curvilineo) l'area di un sottoinsieme del piano il cui bordo è costituito da una o più curve assegnate.

7. Saper utilizzare il teorema della divergenza per calcolare l'integrale di una funzione data su un sottoinsieme del piano il cui bordo è costituito da una o più curve date.

8. Aver ben chiaro come la scelta dell'orientazione del bordo sia cruciale quando si riduce il calcolo di un'area o di un integrale doppio ad un opportuno integrale curvilineo sul bordo.

9. Sapere calcolare un integrale di flusso lungo una curva ricorrendo alla strategia più opportuna (definizione oppure teorema della divergenza dopo aver chiuso la curva).

10. Espressioni del laplaciano in coordinate polari, cilindriche, sferiche: aver ben chiaro cosa significano e saperle ricavare all'occorrenza.

11. Avere chiaro come dedurre brutalmente, in dimensione due, il teorema della divergenza su insiemi "generali" da quello su insiemi normali.

12. Avere chiari operativamente i concetti di orientazione di una superficie e di orientazione del bordo di una superficie.

13. Essere consapevoli che, nonostante il nome, i concetti di superficie chiusa e di bordo di una superficie non hanno nulla di topologico.

14. Aver chiaro che l'orientazione è un concetto cruciale nel calcolo degli integrali di flusso attraverso superfici, e saperlo gestire correttamente.

15. Sapere stabilire se un campo si può scrivere come rotore di un altro campo, e in caso affermativo saper esibire esplicitamente il campo richiesto, avendo anche consapevolezza dei gradi di libertà che si hanno a disposizione in questo processo e delle ostruzioni topologiche che possono presentarsi.

16. Avere chiare, e saper applicare efficacemente a seconda dei casi, le quattro strategie per il calcolo del flusso di un campo di vettori attraverso una superficie (definizione, Stokes con inversione del rotore, Stokes con cambio della superficie a parità di bordo, teorema della divergneza dopo aver chiuso la superficie).

4.4 Spazi metrici

1. Saper stabilire se una data funzione rappresenta una distanza in un insieme, riconoscendo (almeno nei casi classici) se la distanza proviene da una norma o da un prodotto scalare.

2. Saper stabilire se due metriche sullo stesso insieme sono equivalenti o se due spazi metrici sono isometrici.

3. Saper interpretare gli spazi funzionali classici (ad esempio spazi di funzioni continue e/o derivabili) come spazi metrici o spazi di Banach, conoscendone le eventuali proprietà di completezza.

4.5 Varietà

4.5.1 Teorema delle funzioni implicite

1. Sapere cosa verificare per decidere se e quando in una data equazione o sistema è possibile esplicitare una o più variabili in funzione delle altre.

2. Avere idea delle situazioni che si possono incontrare quando le ipotesi del teorema delle funzioni implicite non sono verificate.

3. Sapere calcolare le derivate prime di una funzione definita implicitamente.

4. Saper determinare lo spazio tangente ad un luogo di zeri.

5. Sapere le calcolare le derivate successive ed i polinomi di Taylor di grado opportuno di funzioni definite implicitamente, sia mediante la chain rule (cosa fattibile operativamente solo per ordini bassi), sia ricorrendo direttamente ai polinomi di Taylor delle equazioni che definiscono le funzioni (cosa fattibile operativamente per ogni ordine).

6. Saper stabilire se un luogo di zeri è limitato.

7. Avere ben chiaro che il teorema delle funzioni implicite può fornire informazioni locali, ma può dire ben poco sulla struttura globale di un luogo di zeri.

8. Avere a disposizione qualche strategia per descrivere la struttura globale di un luogo di zeri (ad esempio la sua rattresentabilità come grafico o unione di un numero dato di grafici), ad esempio sfruttando informazioni di monotonia globale delle equazioni rispetto a qualche variabile.

9. Saper interpretare equazioni o sistemi dipendenti da uno o più parametri in termini di funzioni definite implicitamente.

10. Avere consapevolezza delle informazioni necessarie per calcolare integrali di forme differenziali o flussi di vettori su curve/superfici definite implicitamente.

4.5.2 Teorema della funzione inversa

1. Saper stabilire i punti di locale invertibilità di una funzione di più variabili.

2. Saper calcolare la matrice Jacobiana ed eventualmente i polinomi di Taylor di una funzione inversa.

3. Avere ben chiaro che l'invertibilità locale in ogni punto non implica l'invertibilità globale.

4. Avere qualche strategia per dimostrare o escludere l'iniettività o la surgettività globali di una funzione di più variabili.

5. Sapere cosa guardare per stabilire se l'immagine di una funzione di più variabili è aperta.

4.5.3 Moltiplicatori di Lagrange

1. Per questo argomento si rimanda alla sezione sui massimi e minimi vincolati all'interno del calcolo differenziale in più variabili.

4.6 Successioni e serie di funzioni

4.6.1 Convergenza puntuale e uniforme

1. Data una successione di funzioni, saper stabilire l'insieme in cui converge puntualmente, e saper determinare il limite puntuale.

2. Saper stabilire se una successione di funzioni converge uniformemente in un dato insieme. Avere ben chiaro che convergere uniformemente in $[0, A]$ per ogni $A > 0$ non implica necessariamente convergere uniformemente in $[0, +\infty)$.

3. Avere chiaro quali proprietà passano al limite rispetto alla convergenza puntuale, uniforme, o uniforme sui compatti.

4. Saper utilizzare i teoremi di scambio per mostrare che un certo limite è continuo, derivabile, integrabile. Saper utilizzare il teorema di "doppio scambio".

5. Saper stabilire se una successione di funzioni rientra nelle ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà, avendo chiaro come e perché ipotesi di equi-lipschitzianità o equi-holderianità implicano l'equi-continuità.

4.6.2 Serie di funzioni

1. Saper utilizzare la convergenza totale per dedurre, quando possibile, quella uniforme.

2. Saper utilizzare la condizione necessaria per escludere eventualmente la convergenza uniforme.

3. Saper dedurre la convergenza uniforme anche in assenza della totale in ipotesi di tipo Leibnitz.

4. Sapere quando è possibile, e soprattutto quando non è possibile, utilizzare la convergenza uniforme per calcolare il limite di una serie agli estremi del suo dominio di convergenza.

5. Sapere utilizzare le stime con le somme parziali per calcolare il limite di una serie agli estremi del dominio di convergenza anche in assenza di convergenza uniforme. Saper struttare il limite così ottenuto per dedurre la mancanza di convergenza uniforme.

6. Saper utilizzare stime derivanti dal confronto serie-integrali per calcolare il limite della somma di una serie di funzioni anche in assenza di convergenza uniforme.

4.6.3 Serie di potenze e funzioni analitiche

1. Saper calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

2. Saper stabilire l'insieme di convergenza di una serie di potenze, avendo ben chiaro che il comportamento agli stremi va testato a parte.

3. Saper stabilire l'analiticità di una funzione.

4. Saper "smanettare" (con cambi di variabile, shift degli indici, trucchi algebrici) sulle serie di potenze più semplici per ricondurle a serie di Taylor e trovarne quindi esplicitamente la somma.

5. Saper utilizzare il teorema di Abel per estendere fino al bordo, quando possibile, la conoscenza della somma di una serie di potenze.

6. Saper calcolare esplicitamente la somma di speciali serie numeriche vedendole come casi particolari di opportune serie di potenze.

4.7 Equazioni differenziali

4.7.1 Teoremi di esistenza/unicità per il problema di Cauchy

1. Avere chiaro cosa guardare per dedurre esistenza e/o unicità locale per la soluzione di un problema di Cauchy.

2. Avere chiaro che l'unicità in un intorno del dato iniziale non implica l'unicità globale in tutto l'intervallo di esistenza.

3. Avere chiara la formulazione di un problema di Cauchy in termini di contrazioni e saperla adattare a situazioni analoghe, scegliendo bene gli spazi in cui operare.

4.

5.

6.

7.

4.7.2 Studio qualitativo

1. Studi qualitativi autonomi: saper utilizzare il teorema dell'asintoto per calcolare il limite a $\pm\infty$ di una soluzione che esiste globalmente, o per dimostrare che invece c'è break down (all'interno di un ragionamento per assurdo).

2. Studi qualitativi autonomi: aver chiaro cosa guardare per decidere se la soluzione ha esistenza globale, blow up o break down.

3. Studi qualitativi autonomi: sapere quali sono le zone da considerare e come tracciare l'andamento qualitativo delle soluzioni all'interno di ciascuna zona.

4. Studi qualitativi autonomi: saper utilizzare opportune soprasoluzioni e/o sottosoluzioni (di solito ottenute mediante confronto con problemi che si sanno risolvere esplicitamente) per ottenere stime sull'andamento asintotico o sul tempo di vita della soluzione.

5. Studi qualitativi non autonomi: saper disegnare le zone di crescenza/decrescenza della soluzione.

6. Studi qualitativi non autonomi: sapere come utilizzare il classico teorema di esistenza globale (caso sublineare) dopo essersi ristretti ad una opportuna zona dove si sa a priori che la soluzione deve stare.

7. Saper utilizzare e formalizzare argomenti di simmetria per dedurre che una soluzione è pari/dispari, oppure per ricondursi a tempi positivi (in cui soprasoluzioni e sottosoluzioni funzionano come uno si aspetta), oppure a dati iniziali positivi (per i quali magari certe disuguaglianze funzionano più naturalmente).

8. Saper utilizzare cambi di variabile, ricavando in particolare l'equazione risolta dalla nuova variabile, per studiare il comportamento asintotico di una soluzione.

9. Studi qualitativi non autonomi: sapere come dedurre o escludere che una soluzione tocchi certe linee speciali, ad esempio la zona dove si annulla il rhs, oppure il bordo della zona di definizione del rhs.

10. Studi qualitativi non autonomi: saper utilizzare opportune soprasoluzioni e/o sottosoluzioni (di solito ottenute mediante confronto con problemi che si sanno risolvere esplicitamente) per ottenere informazioni sull'andamento della soluzione.

11. Saper riconoscere e trattare i casi di studio qualitativo che coinvolgono valori soglia.
12. Equazioni di ordine 2: aver chiaro il concetto di spazio delle fasi e di rappresentazione di una soluzione nello spazio delle fasi.
13. Equazioni di ordine 2 con rhs dipendente solo dalla funzione (e non dalla derivata o dal tempo): avere chiaro il metodo energetico per determinare una funzione le cui linee di livello contengono le traiettorie.
14. Equazioni di ordine 2: saper utilizzare il metodo energetico per trasformarle (a tratti) in equazioni di ordine 1 da cui dedurre il comportamento delle soluzioni (esistenza di soluzioni periodiche, soluzioni globali, blow up). Aver chiaro che il blow up si interpreta nello spazio delle fasi.
15. Equazioni di ordine 2: saper riconoscere e sfruttare una buca di potenziale.

4.7.3 Sistemi di equazioni differenziali

1. Aver chiaro come procedere per trovare la soluzione generale di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.
2. Avere chiaro il concetto di spazio delle fasi e saper disegnare le traiettorie di un sistema lineare omogeneo 2×2 a coefficienti costanti.
3. Saper studiare la stabilità e l'asintotica stabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.
4.
5. Saper utilizzare il teorema di linearizzazione per dedurre il ocmportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali in un intorno di un punto stazionario. Aver chiaro che ci sono casi in cui il teorema non è applicabile.
6.

Capitolo 5

Scritti d'esame

[Spiegare il significato ovvio di questo capitolo]

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 30 Novembre 2015

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y^2)$. Calcolare $f_{xyxx}(0,0)$.

2. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x + 3y$ sul triangolo con vertici nei punti $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,0)$ del piano cartesiano.

3. Sia T il triangolo con vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$. Calcolare
$$\int_T y^2\,dx\,dy.$$

4. Sia S la sfera con centro in $(0,2,-1)$ e raggio 3. Calcolare
$$\int_S (y+z)^2\,dx\,dy\,dz.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo l'insieme
$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 5,\ y^2 + z^2 = 2,\ y \geq 0\}.$$
Determinare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y,z) = 2y + z^2$ al variare di (x,y,z) in Γ, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

6. Per ogni $R > 0$ poniamo $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e
$$I_R = \int_{B_R} \frac{x\arctan(y^3)}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy.$$
   (a) Determinare per quali valori del parametro reale α l'integrale I_R è finito per ogni $R > 0$.
   (b) Determinare per quali valori di α si ha che I_R ha limite finito per $R \to +\infty$.

7. (a) Dimostrare che per ogni $R > 0$ esiste una costante K tale che

$$\arctan(xy) - x^2 + 3y^4 \leq K(x^2 + y^2)^2$$

per ogni coppia di numeri reali (x, y) tali che $x^2 + y^2 \geq R^2$.

(b) Indicata con $K(R)$ la migliore costante per cui vale la disuguaglianza precedente, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{R \to 0^+} K(R), \qquad \lim_{R \to +\infty} K(R).$$

(c) (Bonus question) Calcolare

$$\lim_{R \to 0^+} R^a \cdot K(R)$$

al variare del parametro reale a.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 22 Marzo 2016

1. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} n^2(\arctan x + \arctan y) + n \arctan(xy) = 1 \\ n^3(x - 2y) + n^2 \sin(y^2) = 3 \end{cases}$$

   (a) Dimostrare che per n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione (x_n, y_n).

   (b) (Bonus question) Dimostrare che per n sufficientemente grande la soluzione è unica.

   (c) Dimostrare che $y_n \neq 0$ definitivamente.

   (d) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

2. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x + e^{xy} + y^8$.

   (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $\varphi : [0, 1] \to (0, +\infty)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 17.$$

   (b) Dimostrare che la funzione φ è di classe C^∞.

   (c) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ ottenuta da una rotazione completa intorno all'asse x del grafico di φ. Consideriamo il campo

$$\vec{E} = \left(x - 1, 2y + \arctan z, \cos z - 3z + x^2 y\right).$$

   Calcolare il flusso di $\vec{E}$ attraverso S, assumendo su S l'orientazione uscente rispetto all'asse x.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 7 Giugno 2016

---

1. Determinare estremo inferiore/superiore della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{1 + x^4 + y^4}$$

   al variare di (x,y) in $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo l'insieme

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y + z = 4\right\}.$$

   (a) Verificare che S è una superficie connessa.

   (b) Scrivere una parametrizzazione di ∂S.

   (c) Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x+y, -2y+z, x+z)$$

   attraverso la superficie S orientata prendendo nel punto $(2,0,0)$ il vettore normale che punta verso le x negative.

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^{1+x}}\right).$$

   (a) Dimostrare che la serie definisce una funzione continua $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$.

   (b) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\log(u+t)}{\arctan(u-t)}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione non è globale.

   (b) Determinare se esiste $\alpha \in (0,1)$ per cui la soluzione è globale (sia nel passato, sia nel futuro).

   (c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = 2016$, studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u(t)}\, dt.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 28 Giugno 2016

1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 y^6 + \arctan(x^2 y).$$

   (a) Determinare i punti stazionari di $f(x, y)$, specificando se si tratta di punti di massimo/minimo locale/globale.

   (b) Determinare l'estremo inferiore di $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta di minimo.

2. Consideriamo gli insiemi

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 7\right\}, \qquad B = [0, +\infty) \times [0, +\infty).$$

   Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza degli integrali

$$\int_A \frac{x^a \arctan y}{x^6 + y^6}\, dx\, dy, \qquad \int_B \frac{x^a \arctan y}{x^6 + y^6}\, dx\, dy.$$

3. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} n(x^3 + y) = xy, \\ x - yx^2 + \arctan \dfrac{1}{n} = 0, \end{cases}$$

   dove n è un intero positivo.

   (a) Dimostrare che per n sufficientemente grande esiste almeno una soluzione.

   (b) (Bonus question) Dimostrare che per n sufficientemente grande la soluzione è unica.

   (c) Studiare la convergenza delle serie $\sum x_n$ e $\sum y_n$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u - t)}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Studiare l'esistenza globale nel passato per le soluzioni con $\alpha > 0$.

   (b) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione non è globale nel futuro.

   (c) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro.

   (d) Determinare se esiste $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale nel passato o nel futuro.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 22 Luglio 2016

1. Determinare estremo inferiore/superiore della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{1+x^2+y^4+z^6}$$

al variare di (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = \left\{(1+2t-2t^2, t-2t^2+t^3) : t \in [0,1]\right\}.$$

   (a) Dimostrare che la curva è chiusa e semplice.

   (b) Detto Ω l'aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ che ha il sostegno di γ come bordo, calcolare l'area e le coordinate del baricentro di Ω.
   (È considerato accettabile esprimere le risposte in termini di integrali di polinomi di una variabile)

3. Consideriamo la successione di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx^2)}{xn^2}.$$

   (a) Dimostrare che la serie definisce una funzione $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ di classe C^1.

   (b) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

   (c) (Bonus question) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \log(u+t)\arctan(u-t), \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ la soluzione è globale (sia nel passato, sia nel futuro).

   (b) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione è monotona.

   (c) Determinare se esiste $\alpha > 0$ per cui la soluzione ha un punto di minimo globale.

   (d) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, i possibili limiti di $u(t)$ per $t \to +\infty$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 6 Settembre 2016

---

1. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ e l'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ xyz = 1\right\}.$$

Determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y,z)$ al variare di $(x,y,z) \in A$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia S la sfera con centro in $(-1,0,2)$ e raggio 3, e sia

$$V = \{(x,y,z) \in S : x \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\int_V (x^2 + y^3)\, dx\, dy\, dz.$$

3. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x,y) = (x^3 - y^3 + y, x^2 + y^2 + x).$$

(a) Dimostrare che esiste una successione $(x_n, y_n) \to (0,0)$ che per n sufficientemente grande soddisfa l'uguaglianza

$$F(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right),$$

e che due qualunque successioni con queste proprietà coincidono definitivamente.

(b) Studiare il comportamento delle serie $\sum x_n$ e $\sum y_n$.

(c) (In parte bonus question) Studiare iniettività e surgettività della funzione $F(x,y)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u - t}{u + t^2 + 1}, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Studiare l'esistenza globale nel passato e nel futuro per $\alpha < -1$.

(b) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui non c'è esistenza globale.

(c) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui c'è esistenza globale.

(d) Determinare se esiste $\alpha > -1$ per cui la soluzione è monotona nel suo intervallo massimale di esistenza.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 10 Gennaio 2017

---

1. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x - 2y + z$ e l'insieme
$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 1\right\}.$$
Determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y,z)$ al variare di $(x,y,z) \in A$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia B il cerchio in $\mathbb{R}^2$ con centro nell'origine e raggio unitario.
Studiare la convergenza degli integrali impropri
$$\int_B \frac{1}{x^2 + y^2 + x^2y^2}\,dx\,dy, \qquad \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \frac{1}{x^2 + y^2 + x^2y^2}\,dx\,dy.$$

3. Per ogni numero naturale n consideriamo il sistema
$$\begin{cases} ny + y^2 = 1 - \sin x, \\ n(x^2 - 2x + y^2) = 1. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione (x_n, y_n).
   (b) Determinare se possiamo scegliere (x_n, y_n) in maniera tale che la serie $\sum x_n y_n$ converga.
   (c) Determinare se possiamo scegliere (x_n, y_n) in maniera tale che la serie $\sum x_n y_n$ diverga.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = (u+3)(u-t), \qquad u(0) = \alpha > 0.$$
   (a) Determinare se esistono valori positivi di α per cui il problema ha soluzione globale.
   (b) Determinare se esistono valori positivi di α per cui il problema non ha soluzione globale.
   (c) (Bonus question) Discutere esistenza/unicità di eventuali valori positivi di α per cui esiste finito il
$$\lim_{t \to +\infty} t \cdot (u(t) - t).$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Febbraio 2017

---

1. Consideriamo la funzione $f(x, y) = \arctan(xy) - xy + y^2x^6$.

   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, specificando se si tratta di un punto di massimo/minimo locale.

   (b) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x, y)$ al variare di (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

2. Consideriamo la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},$$

   orientata prendendo in $(0, 1/2, 1/2)$ il vettore che punta verso le z positive, ed il campo vettoriale $F = (x, x + y, 2x + z)$.

   Calcolare il flusso del rotore di F attraverso S.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2 + x^2}.$$

   (a) Dimostrare che $f(x)$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(0, +\infty)$.

   (c) Determinare se $f(x)$ è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u' = \frac{u^2 \arctan u}{u - t}.$$

   (a) Studiare l'esistenza globale (nel passato e nel futuro), e l'eventuale comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$, della soluzione che verifica la condizione $u(2) = 1$.

   (b) Stessa domanda per la soluzione che verifica la condizione $u(0) = 1$.

   (c) (Bonus question) Stabilire se esistono soluzioni positive definite per ogni $t \leq 0$ e tali che si abbia convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{0} u(t)\, dt.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 1 Dicembre 2017

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = \sin(x+y^2) \cdot \arctan y$.

   Determinare *quali* delle derivate parziali di ordine quattro di $f(x,y)$ sono diverse da zero nell'origine.

2. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x-y)^2$ sul triangolo con vertici nei punti $(-2,0)$, $(1,0)$, $(2,2)$ del piano cartesiano, precisando quali sono i punti di massimo e di minimo.

3. Sia A l'insieme dei punti del piano che stanno sopra l'asse x e sotto il grafico della funzione $y = 1 - x^2$. Calcolare
$$\int_A |x|\,dx\,dy.$$

4. Determinare le coordinate del baricentro del solido
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Sia $Q = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale
$$\int_Q \frac{\arctan^a(xy)}{x^6+y^8}\,dx\,dy.$$

6. Consideriamo l'insieme
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+yz = 15,\ y^2+z^2 \leq 18\}.$$
   Determinare l'estremo inferiore e superiore in A della funzione $f(x,y,z) = x+y+z$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

7. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = 12x^2 + \arctan(xy^2) + \sinh(y^6).$$
   (a) Stabilire se ammette minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (b) Stabilire se l'origine è un punto di massimo/minimo locale (o nessuno dei due).

   (c) Dimostrare che ammette almeno tre punti stazionari.

   (d) (Bonus question) Siano $m(r)$ ed $M(r)$ il minimo ed il massimo di $f(x,y)$ sulla palla chiusa con centro nell'origine e raggio r.
   Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $m(r)$ e $M(r)$ per $r \to 0^+$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Marzo 2018

1. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (x^3 - x + 3x^2y - y^4, y^3 - y + 3xy^2 - x^4) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Dimostrare che esiste una successione $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ che per n sufficientemente grande soddisfa l'uguaglianza

$$F(x_n, y_n) = \left(\frac{2}{n}, \sin \frac{1}{n} \right)$$

   e che due qualunque successioni con queste due proprietà coincidono definitivamente.

   (b) Determinare la parte principale della successione $x_n - 2y_n$.

   (c) Stabilire se la funzione $F(x, y)$ è surgettiva.

   (d) Stabilire se la funzione $F(x, y)$ è iniettiva.

2. Consideriamo l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + \arctan^2(xyz^2) = 7\}.$$

   (a) Dimostrare che S è una superficie compatta e connessa di classe C^∞.

   (b) Consideriamo la superficie

$$\widehat{S} = \{(x, y, z) \in S : y \geq 0, \ z \geq 0\}$$

   e il campo di vettori

$$\vec{E} = \left(\sin^2 x + \arctan(yz), z^2 + y, x^3y - z \right).$$

   Determinare il flusso di $\vec{E}$ attraverso $\widehat{S}$ orientata in maniera uscente rispetto all'origine.

   (c) (Bonus question) Consideriamo, al variare del parametro reale a, la forma differenziale

$$\omega_a = \frac{-z - a}{x^2 + (z + a)^2}\, dx + \frac{1}{(y + a)^2 + a^4}\, dy + \frac{x}{x^2 + (z + a)^2}\, dz.$$

   Studiare, al variare di a, l'integrale di ω_a lungo il bordo di $\widehat{S}$, considerato con l'orientazione indotta dall'orientazione assegnata precedentemente a $\widehat{S}$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 24 Maggio 2018

(Problemi da 3 punti)

1. Calcolare la somma della serie numerica
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n(n+4)}.$$

2. Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione del problema di Cauchy
$$u' = \frac{(u+2)2^u}{u+4}, \qquad u(0) = \alpha$$
ha esistenza globale sia nel passato, sia nel futuro.

3. Per ogni intero positivo n, sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva. Supponiamo che la successione f_n converga uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ ad una funzione $f_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Possiamo concludere che f_∞ è iniettiva?

4. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali $u' = u^2 - 3uv + 5$, $v' = v^3 + u - 9$.
   (a) Determinare se esistono dati iniziali per cui la soluzione è definita globalmente nel futuro, non è costante, e tende a $(1, 2)$ per $t \to +\infty$.
   (b) Determinare se esistono dati iniziali per cui la soluzione è definita globalmente nel passato, non è costante, e tende a $(1, 2)$ per $t \to -\infty$.

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n + x^2}.$$
   (a) Dimostrare che è ben definita e di classe C^1 in $(0, +\infty)$.
   (b) Calcolare i limiti
$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(c) (Bonus question) Calcolare, al variare dei parametri reali α e β, il

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot |\log x|^\beta \cdot f(x).$$

6. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(tu-1)}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Studiare esistenza globale, nel passato e nel futuro, nel caso speciale $\alpha = -2018$.

(b) Nel caso speciale $\alpha = 2018$, dimostrare che la soluzione è globale nel futuro, e calcolarne la parte principale per $t \to +\infty$.

(c) Stabilire se esistono valori $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale, sia nel passato sia nel futuro, e monotona.

7. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'' = -\frac{1}{u^3}, \qquad u(0) = 2018, \qquad u'(0) = \alpha.$$

(a) Nel caso speciale $\alpha = 2018$, dimostrare che la soluzione è globale nel futuro e calcolarne la parte principale per $t \to +\infty$.

(b) Stabilire per quali valori reali di α la soluzione è globale nel futuro.

(c) Stabilire per quali valori reali di α la soluzione ha un massimo globale nel suo intervallo massimale di esistenza.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 8 Giugno 2018

---

1. Consideriamo la funzione $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ e l'insieme
$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ x + y = 1,\ |z| \leq 2\right\}.$$
Determinare estremo inferiore/superiore della funzione $f(x,y,z)$ al variare di (x,y,z) in C, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo/massimo.

2. Sia $Q = [0,+\infty)^2$ il primo quadrante in $\mathbb{R}^2$.
   (a) Studiare, al variare del parametro reale positivo a, la convergenza dell'integrale
$$\int_Q \frac{\log(1 + x^2 + y)}{(x^2 + y^4)^a}\, dx\, dy.$$
   (b) (Bonus question) Per ogni numero reale $r > 0$ poniamo $E_r = \{(x,y) \in Q : x^2 + y^2 \geq r^2\}$. Calcolare, al variare del parametro reale λ, il limite
$$\lim_{r \to +\infty} r^\lambda \int_{E_r} \frac{\log(1 + x^2 + y)}{x^2 + y^4}\, dx\, dy.$$

3. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che
$$f(x) + x^2 e^{f(x)} = x^2 + e^{x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Calcolare
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - \cos x}{\log(1 + x^2)}.$$
   (c) Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u'' = \frac{1}{u^4}.$$
   (a) Dimostrare che la soluzione con dati $u(0) = 1$ e $u'(0) = -2018$ è globale nel passato e nel futuro, e calcolarne la parte principale per $t \to +\infty$.
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale α la soluzione con dati $u(0) = -1$ e $u'(0) = \alpha$ ha esistenza globale nel futuro.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 29 Giugno 2018

---

1. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = x^2 + \sinh(y^4) - y \sin x.$$

   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.

   (b) Stabilire se $f(x,y)$ ammette massimo e/o minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. Consideriamo gli insiemi $Q = [0,+\infty)^2$ ed $R = [1,+\infty)^2$.

   Studiare la convergenza degli integrali

$$\int_R \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\,dx\,dy, \qquad \int_Q \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\,dx\,dy.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx^3) + x}{x + n^2}.$$

   (a) Dimostrare che la somma della serie è una funzione $f(x)$ di classe C^1 in $(0,+\infty)$.

   (b) Calcolare i limiti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

   (c) (Bonus question) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u^3)}{u - t^2}, \qquad u(0) = \alpha \neq 0.$$

   (a) Nel caso $\alpha > 0$, studiare l'esistenza globale della soluzione, nel passato e nel futuro.

   (b) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel passato e tendono a $-\infty$ per $t \to -\infty$.

   (c) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel futuro e sono infinitesime per $t \to +\infty$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 20 Luglio 2018

1. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = e^{xy}(xy + a)\, dx + (x^2 e^{xy} + \sin(y^2) + z)\, dy + y\, dz.$$

   (a) Stabilire per quali valori del parametro reale a la forma differenziale ω risulta esatta in $\mathbb{R}^3$.

   (b) Per tali valori di a, calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^2 t, \cos t\right).$$

2. (a) Dimostrare che esiste un'unica funzione $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ tale che

$$f(x)^2 + f(x)^3 \cdot \arctan x + x^7 = 1 \qquad \forall x \in [0, 1].$$

   (b) Dimostrare che $f(x)$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $[0, 1)$.

   (c) Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ ottenuta ruotando di 360° il grafico della funzione $y = f(x)$ intorno all'asse y. Orientiamo S con la normale che punta verso le y positive.
   Calcolare il flusso attraverso S del vettore

$$\left(e^y + \sin z, z^2 + y \arctan x, y e^{x^2}\right).$$

3. Calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n + 5}{3^n \cdot (2n + 3)}.$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u + \sinh t}{u}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 2018$ e quella con $\alpha = -2018$.

   (b) Stabilire se la soluzione con $\alpha = 2018$ ha esistenza globale, nel passato e nel futuro.

   (c) (Bonus question) Studiare l'andamento della soluzione con $\alpha = 2018$ per $t \to +\infty$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 18 Settembre 2018

1. (a) Dimostrare che esiste una costante reale positiva c tale che
$$x^4 + y^4 \geq c \arctan(x^3 y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (b) Determinare il più grande valore di c per cui vale la disuguaglianza precedente.

2. Sia S la sfera di $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio 2, sia S^+ l'insieme dei punti (x,y,z) di S con $z \geq 0$, sia $P = [-1,1] \times [-1,1] \times \mathbb{R}$, e sia $V = S^+ \setminus P$.

   Calcolare
$$\int_V z\,dx\,dy\,dz.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$
   (a) Dimostrare che converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Detta $f(x)$ la somma, calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   (c) Stabilire se la serie converge uniformemente in $(0,+\infty)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = (u+t)^2(u-t)^2, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Stabilire se esistono valori di $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale, nel passato e nel futuro.
   (b) Stabilire se esistono valori di α per cui la soluzione non è globale nel futuro.
   (c) (Bonus question) Dimostrare che la soluzione con $\alpha = 0$ ha almeno un punto di flesso per tempi positivi.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 15 Gennaio 2019

1. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2 y + y^4) + \arctan(x^2 - y^5) - x^2 y^2.$$

   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto si tratta.

   (b) Stabilire se $f(x,y)$ ammette massimo in $[1,+\infty) \times [1,+\infty)$.

   (c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y)$ in $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

2. Consideriamo la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ y^2 - x^4 z^2 + 3z^2 = 1\right\}$$

   ed il campo di vettori

$$E(x,y,z) = \left(-x^2, xy + \cos z, xz + \arctan(x^2)\right).$$

   Determinare il flusso di E attraverso S, orientata in maniera "uscente" rispetto all'asse x.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{n^4 x^2 + 1}.$$

   (a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(0,+\infty)$.

   (b) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

   (c) (Bonus question) Stabilire se $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u-t)}{u+t}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel passato.

   (b) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro e monotona.

   (c) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 02 Febbraio 2019

---

1. Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $x=0$, dal piano $x=2$, e dalla superficie parametrizzata da
$$\Phi(u,v)=(v,\sin^3 u,\cos u) \qquad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2].$$
Determinare il volume e le coordinate del baricentro di V.

2. Per ogni numero naturale n, consideriamo il sistema
$$\begin{cases} nxy+n^2\sinh x=3, \\ n\arctan y+\cos x=5. \end{cases}$$
   (a) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande il sistema ammette almeno una soluzione $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$.
   (b) (Bonus question) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande la soluzione è unica.
   (c) Dimostrare che per ogni n sufficientemente grande si ha che $x_n>0$ e $y_n>0$.
   (d) Determinare, la variare del parametro reale α, il
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^\alpha}{y_n}.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^2+1}{n^3x+1}.$$
   (a) Dimostrare che definisce una funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ di classe C^1.
   (b) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to0^+}f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'=\frac{u-t}{\arctan(u+t)}, \qquad u(1)=\alpha>1.$$
   (a) Stabilire se esistono valori $\alpha>1$ per cui la soluzione è globale nel passato.
   (b) Stabilire se esistono valori $\alpha>1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale e monotona.
   (c) Stabilire se esistono valori $\alpha>1$ per cui la soluzione, nel futuro, non è monotona.
   (d) Stabilire se esistono valori $\alpha>1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale ma non monotona.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 23 Febbraio 2019

---

1. Consideriamo l'insieme
$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1,\ x^2 + z^2 = 3\right\}$$
e la funzione
$$f(x, y, x) = z - x.$$
Determinare estremo inferiore e superiore di f in C precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo (determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo).

2. Sia V il tetraedro con vertici nei punti $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$.
Calcolare
$$\int_V |1 - 2z|\, dx\, dy\, dz.$$

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^2 + n}.$$
   (a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(-1, 1)$.
   (b) Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad\qquad \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\arctan(u + t)}{u - t}, \qquad\qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Nel caso $\alpha = -1$ studiare l'esistenza globale nel passato e nel futuro, calcolando anche gli eventuali limiti della soluzione per $t \to \pm\infty$.
   (b) Stabilire quale relazione sussiste tra la soluzione con $\alpha = 1$ e quella con $\alpha = -1$.
   (c) (Bonus question) Nel caso $\alpha = -1$ determinare gli eventuali asintoti obliqui della soluzione.