Esercizi di Algebra Lineare

Versione 20 giugno 2024

Massimo Gobbino

Change log

- *Versione 6 ottobre 2013.* Iniziato il progetto. Aggiunti primi esercizi su geometria nel piano, equazione della retta, Matrici 1 e Sistemi Lineari 1.
- *Versione 14 ottobre 2013.* Aggiunti primi esercizi su geometria nello spazio.
- *Versione 2 novembre 2013.* Aggiunti primi esercizi su spazi vettoriali, basi, generatori, sottospazi. Mancano applicazioni lineari.
- *Versione 3 novembre 2013.* Aggiunte applicazioni lineari. Leggero restyling e correzione typos nella parte precedente.
- *Versione 9 dicembre 2013.* Aggiunti esercizi sui cambi di base e sulle forme canoniche.
- *Versione 22 dicembre 2013.* Aggiunti esercizi su forme quadratiche e prodotti scalari generali. Aggiunti capitoli “Saper dire” e “Saper fare”.
- *Versione 24 dicembre 2013.* Aggiunti esercizi su trasformazioni del piano e dello spazio.
- *Versione 26 settembre 2014.* Corretti errori segnalati sul Forum da GIMUSI. Aggiunti scritti d’esame del 2014.
- *Versione 14 settembre 2016.* Aggiunti scritti d’esame del 2015.
- *Versione 28 settembre 2019.* Aggiunti scritti d’esame del 2019. Piccolo adeguamento del codice. Miglioramento dei link ipertestuali.
- *Versione 20 settembre 2022.* Aggiunti scritti d’esame del 2022.
- *Versione 14 novembre 2023.* Aggiunti scritti d’esame del 2023.
- *Versione 03 dicembre 2023.* Corretto un errore nel testo di Forme Canoniche 1 (alla penultima riga c’erano due intruse).
- *Versione 20 giugno 2024.* Aggiunti scritti d’esame del 2024.

[Promemoria: servono esercizi parametrici su tutto]

Indice

Capitolo 1

Fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Coordinate polari nel piano

Argomenti: Coordinate polari **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: Coordinate cartesiane e polari, formule di passaggio

---

Completare le seguenti tabelle, in cui si intende che (x, y) sono le coordinate cartesiane e ρ e θ sono le coordinate polari di uno stesso punto (θ è sempre inteso in radianti).

x	y	ρ	θ
1	0		
0	1		
-1	0		
0	-1		
1	1		
1	-1		
-4	4		
1	$-\sqrt{3}$		
0	0		
$-\sqrt{3}$	-1		

x	y	ρ	θ
		2	$\pi/2$
		3	π
		1	5π
		0	π
		0	$\pi/4$
		2	$\pi/6$
		6	$-\pi/2$
		$\sqrt{2}$	$-4\pi/3$
-5			$3\pi/4$
	-2		$7\pi/6$

Determinare *quanti* sono i punti del piano cartesiano che verificano le seguenti relazioni. Più delicato ma molto istruttivo: oltre a trovare il numero di soluzioni, si consiglia di rappresentare graficamente la situazione e determinare esplicitamente le eventuali soluzioni.

Relazioni	Soluzioni
$x = 2013,\ \rho = 2014$	
$x = 2013,\ \rho = 2013$	
$x = 2013,\ \rho = 2012$	
$y = -2013,\ \rho = 2014$	
$y = -2013,\ \rho = 2013$	
$x = 2013y,\ \rho = 2$	
$x + y = -3,\ \rho = 3$	
$x + y = -3,\ \rho = 4$	
$x - y = 3,\ \rho = 4$	

Relazioni	Soluzioni
$x + y = -3,\ \rho = 5$	
$x = 2013,\ \theta = \pi/4$	
$x = 2013,\ \tan\theta = -1$	
$x = -2013,\ \tan\theta = -1$	
$x = 2013,\ \theta = 1$	
$x = 2013,\ \theta = 2$	
$x + y = 2013,\ \theta = 2\pi/3$	
$y = x^2,\ \rho = 7$	
$y = x^2 - 7,\ \theta = 3$	

Rette nel piano 1

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: Descrizione cartesiana vs descrizione parametrica per rette del piano

Scrivere nella forma $y = mx+n$ (o nella forma $x = x_0$ se si tratta di rette parallele all'asse y) l'equazione cartesiana delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni parametriche (si intende che il parametro t varia sempre in tutto $\mathbb{R}$). Le equazioni parametriche sono volutamente scritte alternando a caso i possibili modi di indicarle.

Parametrica	Cartesiana
$(3+t, 5-t)$	
$(2,-1)+t(3,4)$	
$(-2,1)+t(3,4)$	
$(5-6t, 3-8t)$	
$(3t-4, 4t-9)$	
$(t-2, 5)$	
$(-2, 3t+5)$	
$(5,1)+t(0,-2)$	

Parametrica	Cartesiana
$(t+5, t+7)$	
$(3t+7, 3t+9)$	
$(0,2)-t(2,2)$	
$(3,0)-2t(1,-2)$	
$(t+2, 2-2t)$	
$(\pi, \sqrt{2})+t(666,0)$	
$(3,3)+t(-1,-1)$	
$(2013t+2014, 2015t-2016)$	

Nel seguente esercizio viene data l'equazione cartesiana di una retta r ed una descrizione parametrica con 2 costanti a e b incognite. Si chiede per quali valori di a e b (posto che ne esistano) la descrizione parametrica rappresenta proprio r. Non è una brutta idea farsi anche un disegno per capire come vanno le cose ...

Cartesiana	Parametrica	a	b
$y=2x$	$(a+t, bt)$		
$y=2x$	$(a+2t, bt)$		
$y=2x$	$(a+t, 3+bt)$		
$x-y+3=0$	$(a+bt, 2-5t)$		
$x-y+3=0$	$(2-5t, a+bt)$		
$x-y+3=0$	$(1,a)+t(1,b)$		
$x-y+3=0$	$(2,a)+t(2,b)$		
$x-y+3=0$	$(2,a)+t(b,2)$		
$x+y+3=0$	$(2,a)+t(b,2)$		

Cartesiana	Parametrica	a	b
$3x+2y=7$	$(1,a)+t(1,b)$		
$3x+2y=7$	$(1,a)+t(b,1)$		
$3x+2y=7$	$(2,a)+t(b,2)$		
$x=3$	$(a,5)+t(b,7)$		
$y+2=0$	$(t+a, bt-2)$		
$y+2=0$	$(t+a, bt+2)$		
$3x-2y=7$	$(a+t, 3-bt)$		
$\pi x-2y=3$	$(a+bt, t+1)$		
$x-2\pi y=3$	$(a+bt, t+1)$		

Rette nel piano 2

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: Descrizione cartesiana e parametrica di rette, prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Sono date 2 rette r_1 ed r_2, descritte in vari modi.

Per prima cosa si chiede di determinare l'equazione cartesiana della parallela ad r_1 passante per l'origine (scrivendola nella forma $y = mx + n$ o $x = x_0$). Successivamente si chiede di stabilire se r_1 ed r_2 sono coincidenti (C), distinte e parallele (P), oppure incidenti (I). Nel caso in cui siano incidenti, trovare il punto di interesezione ed il coseno dell'angolo θ che formano (si intende che θ è l'ampiezza dei 2 angoli minori tra i 4 che le rette formano intersecandosi).

r_1	r_2	Parallela	C-P-I	Intersezione	$\cos\theta$
$y = 3x + 2$	$y - 3x + 2 = 0$				
$y = 3x + 2$	$(t - 1, 3t - 1)$				
$y = 3x + 2$	$(t + 1, 3t - 1)$				
$(2, 3) + t(-1, 2)$	$(2t + 3, 1 - 4t)$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$3x - 2y + 5 = 0$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$3x + 2y - 5 = 0$				
$3x + 2y + 5 = 0$	$-3x + 2y + 5 = 0$				
$x = 3$	$(5, 6) + t(3, -1)$				
$y + 7 = 0$	$(2 - t, 6 + t)$				
$(1, -2) + t(2, -1)$	$(-1, 2) + t(1, -2)$				
$(1, 3) + t(1, 1)$	$(2 - 3t, 3t)$				
$(1, t)$	$(t, 2)$				
$(3, -t)$	$2x - 3y = 7$				
$(3t + 7, 2t - 1)$	$2y = 3x + 5$				
$(3t + 7, 2t - 1)$	$3y = 2x + 5$				
$(6t, 0)$	$x = -4$				
$(6t, 0)$	$y = -4$				
$-y = -x - 1$	$(-t, -2t)$				
$-y = -x - 1$	$(-30, 29) + t(1, -1)$				
$3x - 4y = 0$	$(-3t, 4 + t)$				
$3x - 4y = 0$	$4x - 3y = \log_2 5$				

Rette nel piano 3

Argomenti: Descrizione di rette nel piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Descrizione cartesiana e parametrica di rette, prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Sono dati una retta r (in vari modi) ed un punto (x_0, y_0). Si chiede di determinare l'equazione della parallela e della perpendicolare ad r passanti per (x_0, y_0), e della perpendicolare ad r passante per l'origine. Fornire la risposta nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

Retta r	(x_0, y_0)	Parallela	Perpendicolare	Perpend. origine
$y = 2x$	$(1, 1)$			
$2x + y = 3$	$(1, 1)$			
$x = -7$	$(2, 3)$			
$4 - y = 0$	$(-3, 2)$			
$(2, 3) + t(-1, -1)$	$(5, 5)$			
$(3 + t, 2t + 5)$	$(-2, 1)$			
$(1, 1) - t(2, 0)$	$(3, -4)$			
$(t, t + 1)$	$(-1, 0)$			

Sono dati un punto (x_0, y_0), un angolo θ (espresso talvolta in gradi sessagesimali, talvolta in radianti), ed una retta r (in vari modi).

Si chiede di determinare la retta r_1 passante per (x_0, y_0) che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x, e le rette r_2 ed r_3 che passano per (x_0, y_0) e formano un angolo θ con la retta data r. Fornire le risposte nella forma $y = mx + n$ o nella forma $x = x_0$.

(x_0, y_0)	θ	Retta r	Retta r_1	Rette r_2 ed r_3
$(-1, 0)$	$45°$	$x + y = 7$		
$(1, 0)$	$45°$	$x + 2y = 7$		
$(2, 3)$	$-\pi/3$	$x = 4$		
$(2, 3)$	$\pi/3$	$2x + y = 3$		
$(2, -1)$	$30°$	$(1, 1) + t(3, 4)$		
$(0, 0)$	$-\pi/4$	$(-t, 3t)$		
$(0, 1)$	$\arccos(1/3)$	$3x + y = 1$		
$(5, 3)$	$\arctan(1/2)$	$(2t + 1, -t + 4)$		
$(3, -1)$	$\arccos(-1/3)$	$(2t - 1, t)$		

Geometria nel piano 1

Argomenti: Geometria nel piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Uso dei vettori nel piano, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

---

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad un punto (x_0, y_0) dato.

2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0) su una retta $ax + by + c$ assegnata.

   Dedurne la formula per la distanza di un punto da una retta.

3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y) rispetto ad una retta $ax + by + c$ assegnata.

4. Determinare le equazioni cartesiane delle bisettrici (ma quante sono queste bisettrici?) degli angoli formati dalle rette $2x + 3y = 5$ e $x - y + 2 = 0$.

5. Un triangolo ha i vertici nei punti $(2, 3)$, $(-1, 4)$, $(1, 1)$.

   Determinare le equazioni delle mediane, delle altezze, degli assi e delle bisettrici del triangolo.

6. La retta r_1 passa per il punto $(2, 3)$ e forma con il semiasse positivo delle x un angolo θ tale che $\cos\theta = 3/5$. La retta r_2 passa per il punto $(3, 4)$ e forma con il semiasse positivo delle x lo stesso angolo θ.

   Determinare il luogo dei punti equidistanti da r_1 ed r_2.

7. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (3, 1)$ e $B = (4, -4)$.

   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.
   - Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.

8. Dimostrare che la coordinata polare θ di un punto (x, y) del piano può sempre essere calcolata mediante la seguente formula:

$$\theta = \begin{cases} \text{indefinito} & \text{se } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan(y/x) & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

9. Sia Γ la circonferenza con centro in $P_0 = (x_0, y_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1)$, diverso da P_0.

   Determinare in forma parametrica ed in forma cartesiana l'equazione della retta tangente a Γ nel punto P_1.

Matrici 1

Argomenti: Operazioni tra matrici **Difficoltà**: $\star$

Prerequisiti: Somma di matrici, prodotto tra matrici, trasposta di una matrice

---

Consideriamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare, quando esistono, le seguenti matrici:

$2A$		$-B$		$2x^t$		$-A^t$	
$A+B$		$A+C$		$C-A$		$A-3A$	
$A+A^t$		$B-2B^t$		C^t-C		x^t+x	
Ax		Bx		Cx		x^tC	
AB		BA		BC		CB	
AC		CA		Ax		xA	
AA^t		A^tA		A^tx		x^tA	
A^2		B^2		C^2		x^2	
x^tCx		BAx		A^2A^t		AA^tA	
ACx		x^tAC		x^tx		xx^t	

Sistemi Lineari 1

Argomenti: Studio di sistemi lineari **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: Algoritmo di Gauss (o sostituzione) e intepretazione dei suoi risultati

---

Studiare un sistema lineare significa determinare se non ha soluzioni, se ha soluzione unica (ed in tal caso trovarla), o se ha infinite soluzioni (ed in tal caso esprimerle in funzione di un numero opportuno di parametri).

Ciò premesso, studiare i seguenti sistemi lineari in 2 incognite:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = y - 3 \\ 2y = 6 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = x + 1 \\ x = 2y - 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ 2y = x - y \\ 4y = 2x - 1 \end{cases}$$

Studiare i seguenti sistemi lineari in 3 incognite:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 2 - y \\ x + 3y = 5 \\ 3z = x + 4 \end{cases}$$

Studiare i seguenti sistemi lineari in 4 incognite:

$$\begin{cases} -z + w = 3 \\ x + y - w = 1 \\ 2x + y + w = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 2z - w = -7 \\ x + y + z = -2 \\ 2x + y + w = 3 \\ x - z + w = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z + w = 0 \\ x + z + w = 1 \\ x + y + w = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + w = 0 \\ y + z = w \\ x + z = 0 \\ x + 2w = 0 \end{cases}$$

Studiare, al variare del parametro reale λ, i seguenti sistemi lineari in 2 incognite:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ \lambda x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = \lambda \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

Studiare, al variare del parametro reale λ, i seguenti sistemi lineari in 3 incognite:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + \lambda z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + \lambda z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - y - 2z = \lambda \end{cases}$$

Per acquisire sicurezza, non sarebbe male aver risolto ogni sistema precedente effettuando le operazioni in *almeno due modi diversi.*

Spazi Euclidei – Esercizi teorici 1

Argomenti: Consolidamento della teoria **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Prodotto scalare e norma in $\mathbb{R}^n$, coordinate polari nel piano

1. Dimostrare le seguenti proprietà del *prodotto scalare euclideo*. Gli enunciati sono volutamente imprecisi: prima di dimostrarli, bisogna renderli precisi "quantificando" e spiegando dove stanno le variabili.
   - *Simmetria*: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   - *Distributività rispetto alla somma*: $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
   - *Comportamento rispetto al prodotto per una costante*: $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.
   - *Bilinearità*: $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$ e $\langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$.
2. Dimostrare che vale la relazione
$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$
   per ogni coppia di vettori u e v in $\mathbb{R}^2$ in due modi distinti:
   - scrivendo le componenti di u e v in coordinate polari,
   - appliando il teorema di Carnot (detto anche teorema del coseno) nel triangolo con vertici in 0 (cosa vuol dire qui 0?), u, v.
3. Dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (come sempre da quantificare)
$$\big|\langle u, v\rangle\big| \le \|u\| \cdot \|v\|$$
   in due modi distinti:
   - sfruttando che $P(x) = \|u + xv\|^2$ è un polinomio di secondo gradi nella variabile x che non diventa mai negativo, dunque il suo discriminante ...
   - sfruttando l'espressione per il prodotto scalare in termini di $\|u\|$, $\|v\|$ e del coseno dell'angolo compreso.

   Determinare in quali casi vale il segno di uguale.
4. Dimostrare le seguenti proprietà della *norma euclidea* (anche qui valgono le solite considerazioni sulla necessità di precisare gli enunciati "quantificando").
   - *Non-negatività*: $\|u\| \ge 0$.
   - $\|u\| = 0$ se e solo se $u = 0$.
   - *Omogeneità*: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
   - *Sub-additività*: $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$.
     Interpretare questa disuguaglianza in termini di lati di un triangolo.

Spazi Euclidei – Esercizi teorici 2

Argomenti: Consolidamento della teoria **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$, uso geometrico dei vettori

1. Dimostrare le seguenti proprietà della *distanza euclidea* (anche qui valgono le stesse considerazioni dei punti precedenti sulla necessità di precisare gli enunciati), osservando attentamente come le proprietà della distanza derivino da quelle della norma.
   - *Non-negatività*: $\operatorname{dist}(u, v) \geq 0$
   - $\operatorname{dist}(u, v) = 0$ se e solo se $u = v$.
   - *Simmetria*: $\operatorname{dist}(u, v) = \operatorname{dist}(v, u)$.
   - *Disuguaglianza triangolare*: $\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, w) + \operatorname{dist}(w, v)$.
     Spiegare da dove deriva il nome di questa disuguaglianza.

2. Trovare formule per esprimere $\|u+v\|^2$, $\|u-v\|^2$, e più in generale $\|au+bv\|^2$, in termini delle norme di u e v e del prodotto scalare tra u e v.

3. Dimostrare l'*identità di polarizzazione* (come sempre da quantificare) nelle sue varie forme
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

4. Trovare formule, in termini delle norme dei singoli vettori ed opportuni prodotti scalari, per
$$\|u+v-w\|^2 \qquad \|u+v-2w\|^2 \qquad \|3u-2v-w\|^2.$$

5. Siano P e Q punti in $\mathbb{R}^n$, pensati come vettori. Determinare, sempre come vettori:
   - il punto A del segmento PQ tale che $AP = AQ$,
   - il punto B del segmento PQ tale che $BP = 7BQ$,
   - il punto C della retta PQ, diverso da B, tale che $CP = 7CQ$,
   - il punto D della retta PQ, diverso da P, tale che $DQ = PQ$.

6. Siano A, B, C tre punti di $\mathbb{R}^n$ pensati come vettori e vertici di un triangolo. Determinare:
   - i vettori corrispondenti ai punti medi dei lati,
   - il vettore corrispondente al baricentro,
   - le espressioni per le lunghezze dei lati come norme di opportuni vettori,
   - le espressioni per le lunghezze delle mediane, prima come norme di opportuni vettori, poi in funzione delle lunghezze dei lati.

Rette e piani nello spazio 1

Argomenti: Diversi modi di assegnare un piano nello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Equazioni (parametriche e cartesiane) di piani e rette nello spazio

---

Viene fornita una descrizione parametrica di un piano. Si chiede di determinare l'equazione cartesiana dello stesso piano (nella forma $ax + by + cz + d = 0$, normalizzata se possibile in modo che tutti i coefficienti siano interi ed il primo coefficiente non nullo sia positivo) e la sua distanza dall'origine.

Parametrica	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2) + t(3, 0, 1) + s(1, 2, 0)$		
$(t - s, 2t - 3s, 1 - t - 2s)$		
$(1, -1, 1) + t(2, 0, 2) + s(0, 1, 0)$		
$(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) + s(0, 2, 0)$		
$(1 + t - 2s, 1 + 2t + 3s, -2 + t - 2s)$		

Scrivere l'equazione cartesiana (normalizzata quando possibile come sopra) e la distanza dall'origine del piano passante per i tre punti A, B, C assegnati.

A	B	C	Cartesiana	Dist. da O
$(1, 0, 1)$	$(-1, 3, 0)$	$(0, 1, 2)$		
$(1, 1, -2)$	$(1, -1, 0)$	$(2, 0, -2)$		
$(1, 0, 0)$	$(0, -1, 0)$	$(0, 0, 1)$		
$(1, -1, 0)$	$(0, 0, 5)$	$(-2, 2, 2)$		
$(3, 0, \sqrt{3})$	$(-4, 0, \pi)$	$(-\sqrt{2}, 0, \sqrt[3]{5})$		

Scrivere l'equazione cartesiana (normalizzata quando possibile come sopra) e la distanza dall'origine del piano passante per il punto assegnato e contenente la retta assegnata.

Punto	Retta	Cartesiana	Dist. da O
$(1, -1, 2)$	$(3 + t, 2 - 5t, t - 1)$		
$(0, 0, 0)$	$(1, -2, -3) + t(1, 0, -2)$		
$(3, -4, 0)$	$(1, -2, 1) + t(0, 0, 1)$		
$(0, 0, 3)$	$(t, -t, t)$		
$(-5, 0, 0)$	$(1, -2t, 2t)$		

Rette e piani nello spazio 2

Argomenti: Mutua posizione di due piani nello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Equazioni (parametriche e cartesiane) di piani e rette nello spazio

Determinare se i due piani assegnati (in vario modo) sono coincidenti (C), distinti e paralleli (P), oppure incidenti (I). Se sono paralleli, indicare nell'ultima colonna la distanza tra i 2 piani. Se sono incidenti, determinare il coseno del minore angolo θ che formano ed indicare nell'ultima colonna la distanza dell'origine dalla retta intersezione.

Piano 1	Piano 2	C-P-I	$\cos\theta$	Distanza
$x+y+z=0$	$2x-y+3z=0$			
$x+y+z=3$	$2x-y+3z=0$			
$x-y+z=2$	$x+y-z=2$			
$x+y-2z=4$	$x+y-2z=5$			
$(1,1,-1)+t(-2,1,0)+s(-3,0,1)$	$x+2y+3z=0$			
$(-3,0,1)+t(0,-3,2)+s(2,2,-2)$	$x+2y+3z=0$			
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,1)$	$x+2y+3z=0$			
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,0,1)$	$x+2y+3z=0$			
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,0)$	$x+2y+3z=0$			
$x=0$	$y=0$			
$x=0$	$z=3$			
$x+y=0$	$y+z=0$			
$x+y=3$	$y+z=0$			
$x+z=3$	$x=5-z$			
$(3,5,-2)+t(2,-1,0)+s(-3,22,0)$	$(t,2-t,s)$			
$(t,s+t,s)$	$x+z=3+y$			
$(t+3,s+t+3,s)$	$x+y+z=0$			
$(t,2-s,t+s)$	$(s,3-t,t+s)$			
$(2,2,2)+t(1,1,1)+s(0,1,0)$	$(s,0,t)$			
$(s+2t,2s+t,s+t+2)$	$(t+3s,-t+3,s)$			
$(t,4,s+t)$	$(s+t,4,s)$			

Rette e piani nello spazio 3

Argomenti: Mutua posizione di rette e piani nello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Equazioni (parametriche e cartesiane) di piani e rette nello spazio

---

Consideriamo il piano che passa per i 3 punti indicati nella prima colonna e la retta che passa per i 2 punti indicati nella seconda colonna. Determinare se la retta è contenuta nel piano (C), non contenuta ma parallela al piano (P), oppure incidente il piano (I). Se la retta è non contenuta ma parallela, determinare la distanza tra la retta ed il piano. Se la retta è incidente, determinare il punto di intersezione ed il coseno dell'angolo θ formato.

Piano per ...	Retta per ...	C-P-I	Distanza	Intersez.	$\cos\theta$
$(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$	$(1,1,0)$ $(0,1,1)$				
$(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$	$(2,2,2)$ $(1,1,1)$				
$(1,0,2)$ $(-1,1,5)$ $(0,2,5)$	$(2,0,1)$ $(0,-3,0)$				
$(2,0,1)$ $(0,0,3)$ $(4,0,1)$	$(1,1,5)$ $(0,1,6)$				
$(0,-1,2)$ $(0,1,0)$ $(2,-1,0)$	$(1,2,3)$ $(2,2,2)$				
$(1,3,2)$ $(4,3,0)$ $(7,3,2)$	$(0,3,0)$ $(3,3,3)$				
$(1,3,2)$ $(4,2,2)$ $(5,3,2)$	$(0,0,3)$ $(1,2,3)$				
$(4,3,2)$ $(4,1,5)$ $(4,-1,3)$	$(2,1,0)$ $(0,1,2)$				

Consideriamo la retta r che passa per i 2 punti indicati nella prima colonna, ed il punto P indicato nella seconda colonna. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per P e perpendicolare alla retta r ed il punto di r più vicino a P.

Retta r per ...	Punto P	Piano perpendicolare	Punto più vicino
$(1,0,0)$ $(0,1,0)$	$(0,0,1)$		
$(-1,-2,3)$ $(1,3,0)$	$(0,0,0)$		
$(0,0,0)$ $(2,-4,6)$	$(-1,2,-3)$		
$(2,3,3)$ $(1,-2,3)$	$(0,-1,0)$		
$(1,2,3)$ $(4,5,6)$	$(7,8,9)$		
$(1,1,1)$ $(2,0,2)$	$(0,2,0)$		
$(0,1,\pi)$ $(0,1,-7)$	$(\sqrt{2},\pi,-8)$		
$(0,\pi,0)$ $(1,\pi,2)$	$(1,0,1)$		

Rette e piani nello spazio 4

Argomenti: Mutua posizione di rette nello spazio **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: Equazioni (parametriche e cartesiane) di piani e rette nello spazio

---

Consideriamo la retta r_1 che passa per i 2 punti indicati nella prima colonna ed il punto P indicato nella seconda colonna. Sia r_2 la retta passante per P e perpendicolare ad r_1. Determinare le intersezioni di r_2 con i piani xy, yz, xz (ovviamente quando univocamente determinate, specificando nei restanti casi se la r_2 è contenuta o parallela al piano in questione).

Retta r_1 per ...	Punto P	Int. xy	Int. yz	Int. xz
$(0,1,0)$ $(1,1,0)$	$(2,1,3)$			
$(1,0,0)$ $(0,1,0)$	$(0,0,1)$			
$(1,2,3)$ $(4,5,6)$	$(3,2,1)$			
$(-1,2,3)$ $(-1,4,5)$	$(-1,-2,4)$			
$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,0,1)$			

Consideriamo la retta r_1 che passa per i 2 punti indicati nella prima colonna e la retta r_2 che passa per i 2 punti indicati nella seconda colonna. Determinare se r_1 ed r_2 sono coincidenti (C), distinte e parallele (P), incidenti (I) o sghembe (S). Se sono distinte e parallele, indicare nelle restanti 2 colonne l'equazione del piano che le contiene e la distanza. Se sono incidenti, indicare il punto di intersezione ed il coseno del minore angolo θ che formano. Se sono sghembe indicare il punto P_1 di r_1 ed il punto P_2 di r_2 per cui la distanza tra P_1 e P_2 risulta la minima possibile.

Retta r_1 per ...	Retta r_2 per ...	Pos.	Informazione 1	Informazione 2
$(1,1,3)$ $(1,1,-4)$	$(0,0,2)$ $(0,0,1)$			
$(1,1,3)$ $(1,1,-4)$	$(2,0,2)$ $(2,-1,2)$			
$(1,2,3)$ $(-2,-1,0)$	$(2,2,3)$ $(-1,-1,0)$			
$(0,2,1)$ $(1,0,2)$	$(2,-2,3)$ $(-1,4,0)$			
$(0,0,0)$ $(1,1,1)$	$(1,0,0)$ $(0,1,0)$			
$(1,1,0)$ $(-2,0,1)$	$(1,-1,-2)$ $(3,1,-1)$			
$(0,-1,0)$ $(-2,5,-4)$	$(2,-2,3)$ $(0,4,-1)$			
$(1,2,3)$ $(4,5,6)$	$(7,8,9)$ $(10,11,12)$			
$(1,2,3)$ $(4,5,6)$	$(6,5,4)$ $(3,2,1)$			
$(1,1,0)$ $(0,1,1)$	$(1,0,1)$ $(1,1,1)$			

Geometria nello spazio 1

Argomenti: Geometria nello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: Uso dei vettori nello spazio, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$

---

1. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto ad un punto (x_0, y_0, z_0).
2. Determinare la proiezione di un punto (x_0, y_0, z_0) sul piano $ax + by + cz + d = 0$.

   Dedurne la formula per la distanza di un punto da un piano.
3. Determinare il simmetrico del punto generico (x, y, z) rispetto al piano $ax+by+cz+d = 0$.
4. Determinare la distanza del punto generico (x, y, z) dalla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$.
5. Determinare l'equazione del luogo dei punti la cui distanza da una retta assegnata di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$ è uguale ad un numero reale positivo R assegnato. Di cosa si tratta geometricamente?
6. Consideriamo il triangolo con vertici nei punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$.
   (a) Determinare le coordinate dei punti medi dei lati e del baricentro.
   (b) Determinare l'area del triangolo.
   (c) Determinare le coordinate dei piedi delle altezze e dell'ortocento (punto di intersezione delle altezze).
   (d) Determinare il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dai 3 vertici.
   (e) Determinare le coordinate del circocentro (il centro della circonferenza circoscritta).
7. I tre punti $(1, 1, 2)$, $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 1)$ sono tre vertici di un parallelogrammo. Determinare in quanti e quali punti può essere il quarto vertice.
8. In un parallelogrammo $ABCD$ (si intende che il lato AB ed il lato CD sono paralleli, così come pure il lato BC ed il lato AD) si ha che $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 3, -1)$, $C = (1, 0, 1)$.
   (a) Determinare le coordinate di D e del punto di intersezione delle diagonali.
   (b) Determinare gli angoli del parallelogrammo.
   (c) Determinare l'area del parallelogrammo.
9. Determinare l'equazione del cono (o meglio dei 2 coni) che hanno come vertice il punto (x_0, y_0, z_0), come asse la retta di equazione parametrica $(x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$, e come apertura (l'angolo tra l'asse e le generatrici) un angolo θ assegnato. Discutere i casi limite in cui θ tende a $0°$ o a $90°$.
10. Un cono ha il vertice in $(1, 2, 3)$, passa per l'origine, ed il suo asse è perpendicolare al piano di equazione $x - y + 2z = 5$.

    Determinare l'equazione del cono e la sua apertura.

Geometria nello spazio 2

Argomenti: Sfere nello spazio **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: Uso dei vettori nello spazio, norma, distanza e prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$

---

1. Determinare l'equazione della sfera con centro nel punto (x_0, y_0, z_0) e raggio $R > 0$.

2. Determinare sotto quali condizioni l'equazione
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
rappresenta una sfera. In tal caso determinare centro e raggio in funzione di a, b, c, d.

3. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 4, -4)$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = PB$.
   - Determinare il luogo dei punti P tali che $PA = 3PB$.
   - Più in generale, determinare al variare del parametro $\lambda > 0$, il luogo dei punti P tali che $PA = \lambda PB$.

4. Sia S la sfera con centro in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e passante per il punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, diverso da P_0.

   Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente ad S nel punto P_1.

5. Per ciascuna delle condizioni assegnate, determinare l'equazione della sfera che la soddisfa (o eventualmente delle sfere che la soddisfano).

   (a) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per l'origine.

   (b) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e passa per $(2, -1, 4)$.

   (c) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente al piano di equazione $x + y - 2z + 3 = 0$.

   (d) Passa per $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 3)$.

   (e) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente alla retta passante per $(1, 1, 1)$ e $(0, -1, 2)$.

   (f) Ha raggio 6 ed è tangente nel punto $(1, 2, 3)$ al piano di equazione $x - 2y + 2z = 3$.

   (g) Ha centro in $(1, 2, 3)$ ed è tangente esternamente alla sfera di equazione
   $$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0.$$

   (h) Ha centro in $(1, 2, 3)$ e la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$ le è tangente internamente.

   (i) Ha centro sulla retta passante per $(1, 0, -1)$ e $(1, 2, 3)$ ed è tangente ai piani di equazione $x + y + 2z = 3$ e $x + y + 2z = 4$.

6. Determinare l'equazione del cono con vertice in $(2, 0, 4)$ e le cui generatrici sono tutte tangenti alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z + 5 = 0$ (come una pallina di gelato).

Spazi vettoriali – Esercizi teorici 1

Argomenti: consolidamento della teoria, ragionamento astratto **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di campo

1. (Questo esercizio serve per familiarizzare con gli assiomi di campo senza farsi distrarre, ed in fondo confondere, dai simboli standard per somma e prodotto)
   (a) Enunciare le proprietà delle operazioni in un campo indicando con $\diamondsuit$ la somma nel campo e con $\heartsuit$ il prodotto nel campo.
   (b) Enunciare le proprietà delle operazioni in un campo indicando con $\mathrm{Ksum}(a,b)$ e $\mathrm{Kprod}(a,b)$ la somma ed il prodotto di a e b nel campo. Si intende ovviamente che $\mathrm{Ksum} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ e $\mathrm{Kprod} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$.

2. Dimostrare le seguenti proprietà a partire dagli assiomi presenti nella definizione di campo.
   (a) Se $a + c = b + c$, allora $a = b$.
   (b) L'elemento 0 è unico.
   (c) L'opposto è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $a + b = 0$.
   Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $-a$.
   (d) $-(-a) = a$
   (e) L'elemento 1 è unico.
   (f) Il reciproco è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $ab = 1$.
   Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $1/a$.
   (g) $1/(1/a) = a$ per ogni $a \neq 0$.
   (h) $(-1) \cdot (-1) = 1$.
   (i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ per ogni a e b in $\mathbb{K}$ (attenzione a riflettere bene sul significato dei segni $-$ in queste formule).

3. Determinare, per ciascuno degli assiomi presenti nella definizione di campo, se vale negli insiemi numerici classici (con le operazioni classiche): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

4. Determinare, per ciascuno degli assiomi presenti nella definizione di campo, se vale nei seguenti spazi (con le operazioni classiche):
   (a) lo spazio $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali,
   (b) lo spazio $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi a coefficienti interi,
   (c) lo spazio $M_{n\times n}$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali,
   (d) l'insieme $2\mathbb{Z}$ dei numeri interi pari.

5. Dimostrare che l'insieme
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\right\}$$
è un campo (rispetto alle operazioni definite in modo classico).

Spazi vettoriali – Esercizi teorici 2

Argomenti: consolidamento della teoria, ragionamento astratto **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di campo e di spazio vettoriale

---

1. Questo esercizio serve per familiarizzare con gli assiomi di campo e di spazio vettoriale senza farsi distrarre, ed in fondo confondere, dai simboli standard per somma e prodotto.

   (a) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale indicando con $\diamondsuit$ la somma nel campo, con $\heartsuit$ il prodotto nel campo, con $\clubsuit$ la somma nello spazio vettoriale, e con $\spadesuit$ il prodotto tra elementi del campo ed elementi dello spazio vettoriale. Usare notazioni diverse per lo 0 nel campo e nello spazio vettoriale.

   (b) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale utilizzando le seguenti notazioni: $\mathrm{Ksum}(a, b)$ e $\mathrm{Kprod}(a, b)$ indicano la somma ed il prodotto di a e b nel campo, $\mathrm{Vsum}(u, v)$ indica la somma di due elementi u e v dello spazio vettoriale, e $\mathrm{KVprod}(a, v)$ indica il prodotto del vettore v per lo scalare a. Precisare anche insiemi di partenza ed arrivo delle 4 funzioni, ad esempio $\mathrm{Ksum} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$.

2. Dimostrare le seguenti proprietà a partire dagli assiomi presenti nella definizione di campo e di spazio vettoriale.

   (a) Se $u + w = v + w$, allora $u = v$.

   (b) Lo 0 è unico.

   (c) L'opposto è unico, cioè per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in V$ tale che $v + w = 0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a parlare di $-v$.

   (d) $-(-v) = v$

   (e) $0 \cdot v = 0$ per ogni $v \in V$ e $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ (attenzione alla scrittura volutamente ambigua di 0: chiarire di volta in volta quando si intende lo 0 di V e quando si intende lo 0 di $\mathbb{K}$).

   (f) $(-1) \cdot v = -v$ (attenzione all'uso ambiguo del segno $-$).

3. Siano u, v e w tre vettori di uno spazio vettoriale tali che $u + 3w = 4u + v$. Ci sembra naturale dedurre che $u = w - (1/3)v$.

   Giustificare per bene questa deduzione, esplicitando quali assiomi si stanno usando in ogni passaggio.

Spazi vettoriali – Esercizi teorici 3

Argomenti: consolidamento della teoria, verifica di assiomi **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di spazio vettoriale

1. Mostrare che i seguenti sono spazi vettoriali (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), spiegando in ciascun caso come sono definite le operazioni, chi è lo 0 e chi è l'opposto.
   (a) Lo spazio $\mathbb{R}^n$ dei vettori n-dimensionali.
   (b) Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali.
   (c) Lo spazio $M_{m\times n}$ di tutte le matrici con m righe ed n colonne a coefficienti reali.
   (d) Lo spazio $\mathrm{Funz}([a,b],\mathbb{R})$ di tutte le funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dove $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo dato.
   (e) Lo spazio $\mathrm{Funz}(X,V)$ di tutte le funzioni $f : X \to V$, dove X è un insieme dato e V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dato.
   (f) Lo spazio di tutte le successione $\{a_n\}$ di numeri reali.

2. Mostrare che i seguenti sono spazi vettoriali (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), interpretandoli come sottospazi degli spazi definiti precedentemente (da cui ereditano le operazioni).
   (a) Lo spazio $\mathbb{R}_{\leq k}[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a k.
   (b) Lo spazio $C^0([a,b],\mathbb{R})$ di tutte le funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dove $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo dato.
   (c) Lo spazio $\mathrm{Funz}_b(X,\mathbb{R})$ di tutte le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ che sono *limitate*, dove X è un insieme dato.
   (d) Lo spazio di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono continue e verificano $f(2013) = 0$.
   (e) Lo spazio di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma
   $$f(x) = a\cos x + b\sin x,$$
   con a e b parametri reali.

3. (Questa domanda è semplice in alcuni casi, ma più delicata in altri)
   Stabilire, per ciascuno degli spazi dei due esercizi precedenti, se ha dimensione finita. In caso affermativo, determinare tale dimensione ed esibire una base.

4. Mostrare che i seguenti *non* sono spazi vettoriali (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Si intende che le operazioni sono quelle ereditate dagli spazi precedenti di cui sono sottoinsiemi. Precisare caso per caso quale requisito viene a mancare.
   (a) Lo spazio $\mathbb{R}_{\geq k}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado maggiore o uguale a k.
   (b) Lo spazio $\mathbb{R}_{=k}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado uguale a k.
   (c) Lo spazio di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma
   $$f(x) = \cos(ax) + \sin(bx),$$
   con a e b parametri reali.

Sottospazi vettoriali 1

Argomenti: spazi e relativi sottospazi vettoriali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di sottospazio vettoriale

Nei punti successivi sono dati uno spazio vettoriale V ed alcune relazioni (o insiemi di relazioni) che coinvolgono gli elementi di V. Determinare, per ciascuna delle relazioni (o insiemi di relazioni) date, se definiscono o meno un sottospazio vettoriale di V. In caso affermativo, non sarebbe male determinare la dimensione ed una base del sottospazio.

(Si intende che per le relazioni che definiscono un sottospazio occorre fare una dimostrazione, per quelle che non definiscono un sottospazio occorre specificare quali richieste della definizione di sottospazio vengono a mancare)

1. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^2$ con elemento generico (x, y). Relazioni da esaminare:

$$x+y=3, \qquad 2x+3y=0, \qquad x\geq 0, \qquad x^2+y^2=1, \qquad xy\geq 0,$$

$$\boxed{\begin{matrix} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{matrix}}, \qquad x=y, \qquad x=0, \qquad x^2+y^2\geq 1, \qquad x^2+y^2\leq 1.$$

2. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^3$ con elemento generico (x, y, z). Relazioni da esaminare:

$$x+y+z=0, \qquad x+y+z=1, \qquad x+y+z=2x+3y+4z, \qquad x=y=z,$$

$$x^2=0, \qquad x^2+y^2=0, \qquad x^2+y^2+z^2=0, \qquad x^2=y^2, \qquad x^3=0,$$

$$\boxed{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x+y=z \\ y+z=x \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x+y=1 \\ y+z=0 \end{matrix}}.$$

3. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^4$ con elemento generico (x, y, z, w). Relazioni da esaminare:

$$x+y=0, \qquad x+y=z+w, \qquad x+y+z+w=0, \qquad x+y=2+y+z,$$

$$x^2=0, \qquad y=x^2, \qquad z\geq w, \qquad x^2+y^2+w^2\geq 0, \qquad x+y^2+z^3=2,$$

$$\boxed{\begin{matrix} x+y=z+w \\ x+z=y+w \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x=y \\ z=w \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x+2y=3z+4w \\ y+2z=3w+4x \\ z+2w=3x+4y \end{matrix}}, \qquad \boxed{\begin{matrix} x+y=0 \\ y+z=1 \\ z+w=0 \end{matrix}}.$$

4. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ con elemento generico $p(x)$. Relazioni da esaminare:

$$p(0)=5, \qquad p(5)=0, \qquad p(0)=0, \qquad p(5)=5, \qquad p(0)=p(5),$$

$$p(5)=p(\pi)=0, \qquad p(\pi)=p(0)=5, \qquad p(0)\cdot p(\pi)=0, \qquad p(9)\leq 0,$$

$$p(x)=p(-x), \qquad p(x)+p(2x)=5x, \qquad p(x)=p(x^2), \qquad 7p(x)=p(7x).$$

5. Determinare come sono fatti tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}$, di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

Sottospazi vettoriali 2

Argomenti: spazi e relativi sottospazi vettoriali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di sottospazio vettoriale

Nei punti successivi sono dati uno spazio vettoriale V ed un po' di relazioni che coinvolgono gli elementi di V. Determinare quale o quali delle relazioni date definiscono un sottospazio vettoriale di V. In caso affermativo, non sarebbe male determinare la dimensione ed una base del sottospazio (quando questa è finita, cioè nei primi due esercizi).

(Si intende che per le relazioni che definiscono un sottospazio occorre fare una dimostrazione, per quelle che non definiscono un sottospazio occorre specificare quali richieste della definizione di sottospazio vengono a mancare)

1. Spazio vettoriale: $M_{2\times 2}$ con elemento generico A. Relazioni da esaminare:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A, \qquad A^t = 2A, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = A.$$

2. Spazio vettoriale: $M_{2\times 3}$ con elemento generico A. Relazioni da esaminare:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A, \qquad (1,2)A = (0,2,0),$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Spazio vettoriale: funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Relazioni da esaminare:

$$\boxed{f(3) = f(2013) = f(\pi) = 0} \qquad \boxed{f(k) = 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f(x) \in [0,2] \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{f(x) = 0 \text{ per ogni } x \in [0,2]}$$

$$\boxed{f(2x) = xf(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{f(2k) = f(2k+1) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f \text{ derivabile e } f'(x) = x^2 f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{f \text{ derivabile e } f'(x) = x[f(x)]^2}$$

Basi e componenti

Argomenti: componenti di un vettore rispetto ad una base **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: dipendenza ed indipendenza lineare, basi, sistemi lineari

---

Nella seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale ed una base dello stesso (non sarebbe male fare la verifica che si tratti effettivamente di una base). Si richiede di determinare le componenti di 2 vettori assegnati rispetto a tale base.

Spazio	Base	Vettore 1	Componenti	Vettore 2	Componenti
$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (1, 1)$ $e_2 = (2, 1)$	$(3, -4)$		$(5, 3)$	
$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (1, 1)$ $e_2 = (2, 1)$	$(2, 1)$		$(-3, -3)$	
$\mathbb{R}^2$	$e_1 = (3, 1)$ $e_2 = (5, 2)$	$(0, -1)$		$(2, -1)$	
$\mathbb{R}^3$	$e_1 = (1, 1, 5)$ $e_2 = (1, 2, 4)$ $e_3 = (3, -2, 20)$	$(1, -1, 1)$		$(1, 0, 0)$	
$\mathbb{R}^3$	$e_1 = (3, 1, 2)$ $e_2 = (4, -1, 3)$ $e_3 = (-1, -18, 2)$	$(0, -2, 1)$		$(1, 0, 1)$	
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1 = x^2 + 1$ $e_2 = x - 2$ $e_3 = x + 3$	x		$x^2 - 3x + 2$	
$\mathbb{R}^4$	$e_1 = (1, 0, 2, 1)$ $e_2 = (2, 1, -1, 0)$ $e_3 = (-1, 0, 1, 0)$ $e_4 = (2, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 3, 1)$		$(1, 1, 1, 0)$	
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$e_1 = x - 2$ $e_2 = x^2 - 2$ $e_3 = x^3 - 2$ $e_4 = x$	$(x + 1)^3$		$x^3 - 3x + 4$	

Consideriamo, nello spazio vettoriale $M_{2\times 2}$, la seguente base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare, rispetto a questa base, le componenti dei seguenti "vettori":

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Generatori e Span 1

Argomenti: Span di un insieme di vettori **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Span, indipendenza lineare, generatori, algoritmo di Gauss

Nel seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale ed un po' di elementi dello spazio stesso. Determinare se gli elementi indicati sono linearmente indipendenti, e la dimensione del loro Span. Nel caso in cui non siano linearmente indipendenti, si chiede di determinare anche quali dei vettori assegnati possono essere eliminati in modo da ottenere una base dello Span stesso.

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (3,4)$ $v_2 = (5,6)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (2,3)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,-1)$ $v_2 = (0,\pi)$ $v_3 = (0,0)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,-1)$ $v_2 = (2,3)$ $v_3 = (-3,3)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (1,-1)$ $v_2 = (2,3)$ $v_3 = (-3,\pi)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1,1,1)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0,1,1)$ $v_2 = (2,-1,3)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (-4,2,6)$ $v_2 = (2,-1,3)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1,0,2)$ $v_2 = (2,0,1)$ $v_3 = (1,1,1)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1,0,2)$ $v_2 = (2,-1,1)$ $v_3 = (-1,1,1)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0,1,1)$ $v_2 = (2,-1,3)$ $v_3 = (-2,2,-2)$ $v_4 = (1,2,0)$			

Generatori e Span 2

Argomenti: Span di un insieme di vettori **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: Span, indipendenza lineare, generatori, algoritmo di Gauss

Nel seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale ed un po' di elementi dello spazio stesso. Determinare se gli elementi indicati sono linearmente indipendenti, e la dimensione del loro Span. Nel caso in cui non siano linearmente indipendenti, si chiede di determinare anche quali dei vettori assegnati possono essere eliminati in modo da ottenere una base dello Span stesso.

Spazio	Vettori	Lin. ind.?	Dim Span	Possibili eliminandi
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 2, 0)$ $v_2 = (2, 1, 1)$ $v_3 = (2, 4, 0)$ $v_4 = (0, 1, 1)$			
$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1, 0, 1, 0)$ $v_2 = (0, -1, 1, 1)$ $v_3 = (1, 1, 0, -1)$ $v_4 = (0, 0, 1, 1)$			
$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1, 1, 1, 0)$ $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ $v_3 = (1, 0, 0, -1)$			
$\mathbb{R}^5$	$v_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ $v_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$ $v_3 = (-1, 2, -3, 4, -5)$ $v_4 = (0, 1, 0, 2, 0)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x$ $v_2 = x^3 + 2$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x - 1$ $v_2 = x^2 - 2$ $v_3 = x^3 - 3$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^3 - x^2$ $v_2 = x^2 - x$ $v_3 = x - x^3$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x^2 + 2x + 3$ $v_2 = x^3 - 2x^2 + 1$ $v_3 = 2x^3 + x^2 + x + 1$ $v_4 = x^3 - x$			

Cambi di base 1

Argomenti: matrici di cambio di base **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: cambi di base, calcolo della matrice inversa

Nel seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale e due basi $\mathcal{B}$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ dello spazio stesso (non sarebbe male verificare che si tratti effettivamente di basi), oltre alla solita base canonica $\mathcal{C}$. Determinare le matrici di cambio di base tra le basi indicate nelle restanti colonne.

Spazio	$\mathcal{B}$	$\widehat{\mathcal{B}}$	$\mathcal{C} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{B}}$	$\widehat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (2, 3)$ $v_2 = (1, 5)$	$w_1 = (-3, 4)$ $w_2 = (1, -3)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (-1, 4)$ $v_2 = (2, 5)$	$w_1 = (1, 6)$ $w_2 = (1, 7)$			
$\mathbb{R}^2$	$v_1 = (0, 1)$ $v_2 = (1, 0)$	$w_1 = (1, 3)$ $w_2 = (2, 1)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (1, 2, 1)$ $v_2 = (2, 3, 0)$ $v_3 = (0, 1, 1)$	$w_1 = (1, 2, 0)$ $w_2 = (0, -1, 1)$ $w_3 = (3, 1, 4)$			
$\mathbb{R}^3$	$v_1 = (0, 1, 1)$ $v_2 = (-1, 1, 0)$ $v_3 = (2, 0, 1)$	$w_1 = (1, 1, 1)$ $w_2 = (2, 0, 1)$ $w_3 = (2, -3, 0)$			
$\mathbb{R}^4$	$v_1 = (1, 0, 1, 0)$ $v_2 = (2, 1, 1, 3)$ $v_3 = (1, 2, 0, 1)$ $v_4 = (1, 2, 0, 0)$	$w_1 = (0, 1, -1, 2)$ $w_2 = (0, 2, 1, 1)$ $w_3 = (1, 0, 1, -1)$ $w_4 = (3, 1, 1, 1)$			
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x^2 + x$ $v_3 = x^2 + x + 1$	$w_1 = x^2 + x$ $w_2 = x^2 + x + 1$ $w_3 = x$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$v_1 = x + 1$ $v_2 = x^3 + x$ $v_3 = x^3 - x - 1$ $v_4 = -x^2 + 10x + 2$	$w_1 = x^3 + x^2 + x$ $w_2 = x^3 + x^2 + 1$ $w_3 = x^3 + x + 1$ $w_4 = x^2 + x + 1$			

Stesse domande dell'esercizio precedente, ma nello spazo $M_{2\times 2}$ utilizzando le basi seguenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sottospazi vettoriali 3

Argomenti: somma ed intersezione di sottospazi **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: Span, formula di Grassmann, dipendenza ed indipendenza lineare

---

Nella seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale X e due sottospazi vettoriali V e W, definiti come lo Span dei vettori indicati nella corrispondente colonna. Determinare la dimensione di V, W, $V \cap W$, $V + W$. È molto istruttivo determinare anche una base per ciascuno di questi quattro sottospazi.

X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V \cap W)$	$\dim(V + W)$
$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$				
$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$				
$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,-1)$ $(3,1,2)$				
$\mathbb{R}^3$	$(-1,1,1)$ $(2,1,0)$ $(1,2,1)$	$(1,0,1)$ $(0,5,0)$ $(7,-6,7)$				
$\mathbb{R}^4$	$(1,2,0,1)$ $(3,0,-1,1)$	$(1,0,1,0)$ $(0,2,-1,1)$				
$\mathbb{R}^4$	$(0,0,1,1)$ $(0,1,1,0)$ $(1,1,0,0)$	$(1,0,1,0)$ $(0,1,0,1)$				
$\mathbb{R}^4$	$(0,0,1,1)$ $(0,1,1,0)$ $(1,1,0,0)$	$(1,1,1,1)$ $(2,0,-2,0)$				
$\mathbb{R}^4$	$(1,1,0,-2)$ $(1,0,1,7)$	$(0,\pi,\sqrt{3},5)$ $(0,-1,2,5)$				
$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	x^3+x x^4+2x^2+1 x^4+1	x^3+2x^2+x $x^4-\pi x^2+1$ x^4+3x^2+5				

Sottospazi vettoriali 4

Argomenti: somma ed intersezione di sottospazi **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto su sottospazi vettoriali, Span, dimensione, sistemi lineari

---

Negli esercizi seguenti vengono assegnati uno spazio vettoriale X e due sottospazi vettoriali V e W, definiti in vario modo. Determinare la dimensione di V, W, $V \cap W$, $V + W$. Determinare anche una base per ciascuno di questi quattro sottospazi.

1. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^3$.
   (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z\}$, $W = \operatorname{Span}\{(1, -1, 1), (0, 1, 0)\}$;
   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = z,\ x - z = 0\}$,
   $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y = z,\ x + z = 0\}$;
   (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $W = \operatorname{Span}\{(1, 2, 3)\}$
2. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^4$.
   (a) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w,\ x + z = y + w\}$,
   $W = \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, -1), (1, 2, 3, 4)\}$;
   (b) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w\}$, $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = y + w\}$;
   (c) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ z = w\}$,
   $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0,\ x - y + z - w = 0\}$.
3. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$.
   (a) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p(x) = p(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$,
   $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p(x) = -p(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p(1) = 0\}$, $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p(-\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}) = 0\}$;
   (c) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p(x) = p(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$,
   $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] : p'(0) = p(3) = 0\}$ (si intende che $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$).
4. Spazio vettoriale $X = M_{3\times 3}$. Poniamo $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) $V = \{A \in M_{3\times 3} : A = A^t\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : A = -A^t\}$;
   (b) $V = \{A \in M_{3\times 3} : A = A^t\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : AB = 0\}$;
   (c) $V = \{A \in M_{3\times 3} : AB = BA\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : Av = 0\}$;
   (d) $V = \{A \in M_{3\times 3} : A = A^t\}$, $W = \operatorname{Span}\{B, B^t\}$;
   (e) $V = \{A \in M_{3\times 3} : BA = 0\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : Av = 0\}$;
   (f) $V = \{A \in M_{3\times 3} : BA = 0\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : AB = 0\}$;
   (g) $V = \{A \in M_{3\times 3} : BAv = 0\}$, $W = \{A \in M_{3\times 3} : ABv = 0\}$.

   (Occhio al significato diverso che il simbolo "0" ha nelle varie formule)

Sottospazi vettoriali 5

Argomenti: somme dirette e relative componenti **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su sottospazi vettoriali, Span, dimensione, cambi di base

Nella seguente tabella vengono assegnati uno spazio vettoriale X e due sottospazi vettoriali V e W, definiti, a seconda dei casi, dalle relazioni indicate o come lo Span dei vettori indicati nella corrispondente colonna. Determinare se X è somma diretta di V e W. In caso affermativo, determinare le matrici che rappresentano (rispetto alla base canonica di X) le proiezioni su V e W, pensate come funzioni da X in X. È probabile che le matrici non stiano nelle caselline ...

X	V	W	$X \overset{?}{=} V \oplus W$	Proj_V	Proj_W
$\mathbb{R}^2$	$(2,3)$	$(1,1)$			
$\mathbb{R}^2$	$x+3y=0$	$3x+y=0$			
$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(4,5,6)$			
$\mathbb{R}^3$	$x+y+z=0$	$z=x+y$			
$\mathbb{R}^3$	$x=y=z$	$x+y+z=0$			
$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	$(1,1,0)$			
$\mathbb{R}^3$	$x-y+z=0$	$(1,0,1)$			
$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$ $(0,1,1)$	$(1,1,1)$			
$\mathbb{R}^4$	$x+y=z+w$	$(1,1,0,1)$			
$\mathbb{R}^4$	$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$	$(1,1,0,0)$ $(0,0,1,1)$			
$\mathbb{R}^4$	$(1,0,0,0)$ $(0,1,0,0)$	$(1,0,1,0)$ $(0,1,0,1)$			
$\mathbb{R}^4$	$x+2y=3z$ $x-w=y$	$y=z$ $x=z+w$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$p(0)=p(1)=0$	x^2+3 x^2-3			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$p(0)=p(1)=0$	$p(2)=p(3)=0$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$p(x)=p(-x)$	$p(x)=-p(-x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$p(x)=p(-x)$	$p(0)=p'(0)=0$			
$M_{2\times 2}$	$A=A^t$	$A=-A^t$			

Applicazioni lineari 1

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: matrice associata ad un'applicazione lineare, Ker e immagine

Nella seguente tabella vengono descritte delle applicazioni lineari. Per brevità, l'applicazione viene presentata indicando semplicemente lo spazio di partenza V, lo spazio di arrivo W, e l'immagine del generico elemento di V, cioè di (x, y), (x, y, z), ... nel caso di $\mathbb{R}^n$, $p(x)$ nel caso di spazi di polinomi, A nel caso di spazi di matrici.

Si richiede di determinare la dimensione del ker, dell'immagine, e la matrice associata all'applicazione, assumendo in partenza ed arrivo la base canonica (che nel caso degli spazi di polinomi è 1, x, x^2, ...). Non sarebbe male determinare anche una base del ker e dell'immagine.

$V \to W$	Applicazione	dim(ker)	dim(Im)	Matrice
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, 2x+y)$			
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, y-x)$			
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$(x+y+z, 2x-z, 3x+2y+z)$			
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$(x+y, x-y, 2x)$			
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$(x+y-z, z-3x)$			
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$	$(x+y, x, -y, x)$			
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$(x-y, y-z, z-x)$			
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$	$(x+y+z, x+y-z-w)$			
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$3x-7y+11z$			
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$	$(x, 2x, 0, 5x)$			
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$	$(x+y, y+z, z+w, w+x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$p(x)+p(-x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$p'(x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$p'(x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$(x+1)p'(x)-2p(x)$			
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^2$	$(p(1), p(2))$			
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$xp(2x)+x^2p(1)$			
$M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$	$A+A^t$			
$M_{2\times 2} \to M_{1\times 2}$	$(1,2)A$			
$M_{2\times 2} \to M_{2\times 1}$	$A(1,2)^t$			

Applicazioni lineari 2

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: matrice associata ad un'applicazione lineare, cambi di base

---

Nella seguente tabella vengono descritte delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e W, con le stesse convenzioni dell'esercizio precedente. Vengono poi date una base per lo spazio di partenza V ed una base per lo spazio di arrivo W. Si richiede di determinare la matrice associata all'applicazione rispetto a tale scelta delle basi in partenza ed arrivo. Non sarebbe male anche determinare, in aggiunta, la dimensione ed una base per ker e immagine.

V	W	Applicazione	Base di V	Base di W
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1,2)$ $v_2 = (1,3)$	$w_1 = (1,-2,0)$ $w_2 = (0,2,1)$ $w_3 = (1,1,1)$
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^2$	$(x+y, 2x-y+3z)$	$v_1 = (1,-2,0)$ $v_2 = (0,2,1)$ $v_3 = (1,1,1)$	$w_1 = (1,2)$ $w_2 = (1,3)$
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^2$	$(x+y, 2x-y+3z)$	$v_1 = (1,-2,0)$ $v_2 = (0,2,1)$ $v_3 = (1,1,1)$	$w_1 = (1,3)$ $w_2 = (1,2)$
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x-3y, x+4y)$	$v_1 = (1,2)$ $v_2 = (1,3)$	$w_1 = (1,4)$ $w_2 = (1,5)$
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x-3y, x+4y)$	$v_1 = (1,4)$ $v_2 = (1,5)$	$w_1 = (1,2)$ $w_2 = (1,3)$
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(x+y+z, 2x-z, 3x+2y+z)$	$v_1 = (1,2,0)$ $v_2 = (0,1,1)$ $v_3 = (1,1,1)$	$w_1 = (1,0,0)$ $w_2 = (0,1,0)$ $w_3 = (0,0,1)$
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(x+y+z, 2x-z, 3x+2y+z)$	$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (0,1,0)$ $v_3 = (0,0,1)$	$w_1 = (1,2,0)$ $w_2 = (0,1,1)$ $w_3 = (1,1,1)$
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(x+y+z, 2x-z, 3x+2y+z)$	$v_1 = (0,1,0)$ $v_2 = (0,0,1)$ $v_3 = (1,0,0)$	$w_1 = (0,0,1)$ $w_2 = (0,1,0)$ $w_3 = (1,0,0)$
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$p(x+1)$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x$ $v_3 = 1$	$w_1 = x^2+2x+1$ $w_2 = x+1$ $w_3 = 1$
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$(p(0), p'(0), p(-1))$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x+1$ $v_3 = x^2-1$	$w_1 = (1,-2,0)$ $w_2 = (0,2,1)$ $w_3 = (1,1,1)$

Applicazioni lineari 3

Argomenti: assegnazione di applicazioni lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: basi, teorema di struttura per applicazioni lineari

---

Nella seguente tabella vengono descritte delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e W. La descrizione consiste nell'indicare l'immagine di alcuni vettori dello spazio di partenza. Si chiede di stabilire se esiste (E) un'applicazione lineare che soddisfa le richieste, ed eventulamente se è unica (U). Nel caso in cui l'applicazione richiesta esista e sia unica, sarebbe opportuno determinare anche la matrice che la rappresenta tra le basi canoniche, nonché dimensione ed una base di ker e immagine.

V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (7,8)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (7,8)$	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (4,6)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (2,3)$	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,0)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,1)$	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (1,2,3)$ $(2,2) \to (1,2,3)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (1,0,-1)$ $(-1,-1) \to (-1,0,1)$	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,-1) \to (1,2,3)$ $(2,2) \to (1,2,3)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1) \to (0,0,0)$ $(12,11) \to (-1,0,1)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,2,-1) \to (-3,2,-1)$ $(1,-1,-1) \to (1,-1,1)$ $(-1,0,1) \to (-1,0,1)$		$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(-3,2,-1) \to (0,2,-1)$ $(1,-1,1) \to (1,-1,-1)$ $(-1,0,1) \to (-1,0,1)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,2,0) \to (0,0,1)$		$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,2)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,2,0) \to (0,0,2)$		$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}^2$	$x^2+3 \to (0,1)$ $x \to (-2,-1)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,1)$		$\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$	$\mathbb{R}^2$	$x+3 \to (-1,3)$ $x+2 \to (-1,3)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,1) \to (0,0,1)$ $(1,1,0) \to (0,0,2)$ $(1,0,0) \to (0,0,3)$		$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^2+3 \to (0,1,2)$ $x \to (-2,-1,5)$ $x^2-3 \to (1,0,1)$	
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,1) \to (0,0,1)$ $(1,1,0) \to (0,1,1)$ $(1,0,0) \to (1,1,1)$		$\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$	$\mathbb{R}^3$	$x^3+x \to (0,0,1)$ $x^2+2 \to (0,1,2)$ $(x+1)^4 \to (1,2,3)$	

Applicazioni lineari 4

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto sulle applicazioni lineari e cambi di base

Nella seguente tabella sono assegnati uno spazio vettoriale V, un po' di condizioni che determinano univocamente un'applicazione lineare $f : V \to V$, ed una base di V. Si chiede di determinare la dimensione D_K del ker, la dimensione D_I dell'immagine, la dimensione $D_{K\cap I}$ dell'intersezione tra ker e immagine (nota bene: questa intersezione ha senso solo perché lo spazio di partenza coincide con quello di arrivo), ed infine la matrice che rappresenta f usando in partenza ed arrivo la base assegnata.

V	Condizioni	Base	D_K	D_I	$D_{K\cap I}$	Matrice
$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (-1,1)$ $(1,0) \to (2,2)$	$v_1 = (-1,2)$ $v_2 = (1,-3)$				
$\mathbb{R}^2$	$(1,1) \to (2,6)$ $(1,3) \to (0,0)$	$v_1 = (3,2)$ $v_2 = (4,3)$				
$\mathbb{R}^2$	$(0,1) \to (1,1)$ $(-1,2) \to (2,2)$	$v_1 = (1,1)$ $v_2 = (0,1)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,0,1) \to (1,1,-1)$ $(2,2,0) \to (3,3,-3)$ $(0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,1,-1)$ $v_2 = (1,0,1)$ $v_3 = (2,1,1)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,0,1) \to (1,1,-1)$ $(2,2,0) \to (3,3,-3)$ $(0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,-1,2)$ $v_2 = (1,-1,1)$ $v_3 = (-1,2,1)$				
$\mathbb{R}^3$	$(1,0,2) \to (-17,27,7)$ $(1,1,0) \to (0,-1,1)$ $(0,1,1) \to (-7,11,3)$	$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (1,1,0)$ $v_3 = (1,1,1)$				
$\mathbb{R}^4$	$(1,0,-1,0) \to (1,1,0,0)$ $(0,1,0,-1) \to (0,0,1,1)$ $(1,0,1,0) \to (1,1,1,1)$ $(0,1,0,1) \to (3,3,2,2)$	$v_1 = (1,0,0,1)$ $v_2 = (0,1,0,1)$ $v_3 = (0,0,1,1)$ $v_4 = (0,0,0,1)$				
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3 \to 3x^2$ $x^2 \to 2x$ $x \to 1$ $1 \to 0$	$v_1 = x^3$ $v_2 = x^2$ $v_3 = x$ $v_4 = x^3 + 1$				
$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3 + 1 \to x^2 + 1$ $x^3 + 2 \to x^2 + 2$ $x^2 \to x^2 + 3$ $x \to x^2 + 4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				

Applicazioni lineari 5

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: tutto su applicazioni lineari, sottospazi, basi

1. Consideriamo l'applicazione lineare $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da
$$f(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A.$$
   (a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.
   (b) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di f.
   (c) Determinare la dimensione dell'intersezione tra il ker e l'immagine di f.
   (d) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$.

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f_\lambda : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da
$$f_\lambda(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix},$$
dove λ è un parametro reale.
   (a) Scrivere la matrice associata ad f_λ rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.
   (b) Dimostrare che esiste un unico valore di λ per cui $\dim(\ker(f_\lambda)) > 0$. Per tale valore di λ determinare la dimensione ed una base di ker ed immagine di f_λ.

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha che $(1, 1, 1, 1) \in \ker(f)$.
   (b) Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0,\ x - 2w = 0\}$.
   Determinare per quali valori dei parametri si ha che $f(v) \in V$ per ogni $v \in V$.
   (c) Sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4w = 0, \}$.
   Determinare per quali valori dei parametri si ha che $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$.

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\}$.
   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : W \to W$ che verifica le seguenti condizioni:
      - $f(1, -1, 1, -1) = (1, -1, -1, 1)$,
      - $f(f(w)) = 0$ per ogni $w \in W$.
   (b) Determinare $f(-1, 1, 0, 0)$.
   (c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ tali che $f(w) = (1, -1, -1, 1)$.

Applicazioni lineari 6

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su applicazioni lineari, sottospazi, basi

1. Dati due spazi vettoriali V e W, indichiamo con $\mathrm{End}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to W$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{End}(V, W)$ è a sua volta uno spazio vettoriale (detto così non ha molto senso, perché bisognerebbe definire prima le operazioni, ma diciamo che questo fa parte dell'esercizio).
   (b) Se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, determinare la dimensione di $\mathrm{End}(V, W)$.
   (c) Fissato un vettore non nullo $v \in V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \mathrm{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ è un sottospazio di $\mathrm{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio.
   (d) Fissato un sottospazio vettoriale $V' \subseteq V$, dimostrare che l'insieme di tutte le applicazioni lineari $f \in \mathrm{End}(V, W)$ tali che $f(v) = 0$ per ogni $v \in V'$ è un sottospazio di $\mathrm{End}(V, W)$. Determinare quindi la dimensione di tale sottospazio, in funzione della dimensione di V'.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ed il sottospazio $W = \mathrm{Span}\{(1, 2, 3)\}$.
   (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = V$ e $\mathrm{Im}(f) = W$.
   (b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente. Si tratta di uno spazio vettoriale?

3. Consideriamo i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^3$ descritti all'esercizio precedente.
   (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) \in W$ per ogni $v \in V$ e $f(w) \in V$ per ogni $w \in W$.
   (b) Dimostrare che l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente è uno spazio vettoriale, quindi determinarne la dimensione.

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f(f(v)) = 0$ per ogni $v \in V$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$.
   (b) Dimostrare che $\dim(\ker(f)) \geq \dfrac{1}{2}\dim(V)$.

5. (a) Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(f(f(v))) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, ma $f(f(w)) \neq 0$ per almeno un vettore $w \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Descrivere l'insieme di *tutte* le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni del punto precedente.

Cambi di base 2

Argomenti: matrici di cambio di base **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: cambi di base, calcolo della matrice inversa

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V, sia $\{w_1, w_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W, e sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare rappresentata, in quelle basi, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f rispetto alle basi indicate (se quelle indicate non sono basi, accorgersene e segnalare che la richiesta non ha senso).

Base V e Base W	Matrice	Base V e Base W	Matrice
$\{v_2, v_1, v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_2, v_3, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$	
$\{v_1, v_3, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$		$\{v_3, v_1, v_2\}$ $\{w_1 - w_2, w_1 + w_2\}$	
$\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_1, v_2 + v_3, v_3\}$ $\{w_1 + w_2, w_1\}$		$\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ $\{w_2 + w_1, w_1\}$	
$\{v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_2 + v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ $\{w_1, w_2\}$	
$\{v_1 + 2v_3, v_3, v_2\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1 + 2v_3, v_3, v_2\}$ $\{w_1 + 2w_2, w_2\}$	
$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ $\{w_2, w_1\}$	
$\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$ $\{w_1, w_2\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{w_1 - w_2, w_2 - w_1\}$	
$\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ $\{w_1, w_1 + w_2\}$		$\{v_1 - v_3, v_2 + v_3, v_1 - v_2\}$ $\{w_2, w_1 + w_2\}$	

Cambi di base 3

Argomenti: matrici di cambio di base **Difficoltà**: ⋆⋆⋆

Prerequisiti: cambi di base, calcolo della matrice inversa

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V, e sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = v_1, \qquad f(v_2) = 2v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3 + v_2.$$

Determinare le matrici che rappresentano la stessa applicazione f utilizzando in partenza ed arrivo le basi indicate.

{Base partenza} {Base arrivo}	Matrice	{Base partenza} {Base arrivo}	Matrice
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_3, v_2\}$ $\{v_1, v_3, v_2\}$	
$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_2, v_3, v_1\}$ $\{v_2, v_3, v_1\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_3, v_2, v_1\}$		$\{v_3, v_2, v_1\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, 2v_2, v_3\}$		$\{v_1, 2v_2, v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	
$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{v_1, 2v_2, 2v_3 + v_1\}$		$\{v_1, 2v_2, 2v_3 + v_1\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$	
$\{-v_1, v_2, v_3\}$ $\{-v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_2, -v_3\}$ $\{v_1, v_2, -v_3\}$	
$\{-v_1, -v_2, -v_3\}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$		$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\{-v_1, -v_2, -v_3\}$	

Determinare quali delle seguenti matrici rappresentano l'applicazione f descritta sopra usando in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, ed in arrivo una base eventualmente diversa (nei casi affermativi, determinare la base in arrivo).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Basi ortogonali e ortonormali 1

Argomenti: Basi ortogonali e ortonormali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: prodotto scalare, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

---

1. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ che contiene il vettore $(1, 2)$.
2. Determinare per quali valori del parametro a si ha che $\{(1, 2), (3, a)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che $\{(1, 2, 3), (4, 5, a), (6, b, c)\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
4. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $\text{Span}(v_1) = \text{Span}((3, 4))$.
5. Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2 \in V$.
6. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3, a, b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.
7. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da 3 vettori che hanno la stessa prima componente.
8. Siano $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_2$.
9. Determinare per quali valori dei parametri a, b, $\ldots$, f si ha che
$$\{(1, 1, 1, 1), (2, a, 2, 2), (3, 3, b, c), (d, e, f, -1)\}$$
è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.
10. Determinare una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che contiene il vettore $(1, 2, 2, 1)$ e tale che $(1, 1, 0, -1) \in \text{Span}(v_1, v_2)$. Fare in maniera che i vettori coinvolti abbiano tutte le componenti intere.
11. Determinare tutte le basi ortonormali $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che
    - $\text{Span}(v_1) = \text{Span}((1, 1, 0, 0))$,
    - $\text{Span}(v_1, v_2) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$,
    - $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$,
    - tutti i 4 vettori che ne fanno parte hanno la prima componente positiva.
12. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$:
$$(1, 0, -1, 2, 0), \quad (1, 1, 0, 0, -1), \quad (2, 1, 0, 1, 0), \quad (0, 2, 1, 0, 0), \quad (1, 1, -1, 1, 1).$$
Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$ costituita da tutti vettori a coordinate intere, e tale che lo Span dei primi k vettori della base coincida con lo Span dei primi k vettori assegnati (per $k = 1, 2, \ldots, 5$).

Basi ortogonali e ortonormali 2

Argomenti: Basi ortogonali e ortonormali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, cambi di base

Nel seguente esercizio viene assegnato un sottospazio vettoriale W di un certo $\mathbb{R}^n$. Il sottospazio W, a seconda dei casi, viene descritto in maniera parametrica (cioè come Span), o in maniera cartesiana (cioè mediante equazioni). Si chiede di fornire la descrizione parametrica e cartesiana di W e $W^\perp$, di determinare una base ortogonale per W e per $W^\perp$ (costituite da vettori a coordinate intere), e le matrici che rappresentano, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, la proiezione ortogonale su W e $W^\perp$.

1. Sottospazi di $\mathbb{R}^2$.
   (a) $W = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0$,
   (b) $W = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0$,
   (c) $W = \text{Span}((1, 3))$,
   (d) $W = \text{Span}((0, 4))$.
2. Sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$,
   (b) $W = \{(t, t + s, 2s - 3t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$,
   (c) $W = \text{Span}((1, -1, 1))$,
   (d) $W = \text{Span}((1, -1, 1), (1, 2, 3))$,
   (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = y + z = 0\}$.
3. Sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
   (a) $W = \text{Span}((1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0))$,
   (b) $W = \{(t + s, 0, t - s, s) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$,
   (c) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - 2w\}$,
   (d) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = 3y + 4z = 5z + 6w\}$,
   (e) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z + w = 0\}$.
4. Sottospazi di $\mathbb{R}^5$.
   (a) $W = \text{Span}((1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0, 0))$,
   (b) $W = \{(x, y, z, w, v) \in \mathbb{R}^5 : x + v = y + w = 0\}$,
   (c) $W = \{(x, y, z, w, v) \in \mathbb{R}^5 : x + y + z + v = 0\}$,
   (d) $W = \{(x, y, z, w, v) \in \mathbb{R}^5 : z = w = 0\}$,
   (e) $W = \{(a, b, c, b, a) : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Forme canoniche 1

Argomenti: matrici simili **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: autovalori, autovettori, forme canoniche, matrici di cambio di base

---

Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (x + y + z, y + z + w, w - x).$$

Determinare quali delle seguenti matrici rappresentano f per un'opportuna scelta delle basi in partenza ed arrivo (nei casi affermativi non sarebbe male anche fornire un esempio di tali basi).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt[5]{2} & \sqrt[5]{2} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

In ciascuna delle righe seguenti vengono presentate k matrici. Di queste, $(k-1)$ sono simili tra loro. Si richiede di determinare l'intrusa. Inoltre, per ogni coppia di matrici simili, non sarebbe male determinare la matrice di cambio di base (o meglio, una delle possibili matrici di cambio di base) che realizza la similitudine.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme canoniche 2

Argomenti: forme canoniche di applicazioni lineari **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: autovalori, autovettori, forme canoniche, matrici di cambio di base

1. Determinare, per ciascuna delle seguenti matrici, la forma canonica reale e quella complessa (se diversa da quella reale). Determinare anche, nel caso reale ed eventualmente nel caso complesso, una possibile matrice di cambio di base che realizza il passaggio alla forma canonica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$

   (a) è diagonalizzabile sui reali,
   (b) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale,
   (c) ha il ker non banale,
   (d) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,
   (e) ammette l'autovalore $\lambda = 2 + i$,
   (f) ammette $(1, 5)$ come autovettore,
   (g) non è diagonalizzabile sui complessi.

3. Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

   (a) ammette autovalori immaginari puri,
   (b) ammette l'autovalore $\lambda = 3 + 5i$,
   (c) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale e rappresenta un'applicazione lineare non surgettiva,
   (d) ammette $\lambda = 7$ come autovalore con autovettore corrispondente $(1, 1)$,
   (e) ammette $\lambda = -1$ come autovalore ma non è diagonalizzabile sui complessi,
   (f) è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Forme canoniche 3

Argomenti: forme canoniche di applicazioni lineari **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: autovalori, autovettori, forme canoniche, matrici di cambio di base

---

1. Determinare, per ciascuna delle seguenti matrici, la forma canonica reale e quella complessa (se diversa da quella reale). Determinare anche, nel caso reale ed eventualmente nel caso complesso, una possibile matrice di cambio di base che realizza il passaggio alla forma canonica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Determinare per quali valori del parametro a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

3. Determinare per quale valore del parametro reale a le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

sono simili.

4. Consideriamo le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) \to (y, z, z), \qquad (x, y, z) \to (x, x + y, x + y + z).$$

Per ciascuna di essere determinare la forma canonica, ed una base in cui la matrice assume la forma canonica.

5. Consideriamo le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:

$$p(x) \to p(-x), \qquad p(x) \to p(x) + p(-x), \qquad p(x) \to p(x) + p(2x),$$

$$p(x) \to p'(x), \qquad p(x) \to p(x) + p(x + 1), \qquad p(x) \to p(7) \cdot x^2,$$

$$p(x) \to xp'(x) + 2p(x), \qquad p(x) \to (x + 2)p'(x), \qquad p(x) \to p(3) \cdot x + x^2 \int_{-1}^{1} p(x)\, dx.$$

Per ciascuna di essere determinare la forma canonica, ed una base in cui la matrice assume la forma canonica.

Forme canoniche 4

Argomenti: forme canoniche di applicazioni lineari **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: autovalori, autovettori, forme canoniche, matrici di cambio di base

---

1. Determinare, per ciascuna delle seguenti matrici, la forma canonica reale e quella complessa (se diversa da quella reale). Determinare anche, nel caso reale ed eventualmente nel caso complesso, una possibile matrice di cambio di base che realizza il passaggio alla forma canonica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Consideriamo le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$:

$$(x, y, z, w) \to (y, z, w, x) \qquad (x, y, z, w) \to (z, w, x, y).$$

Per ciascuna di essere determinare la forma canonica, ed una base in cui la matrice assume la forma canonica.

3. Consideriamo le seguenti applicazioni lineari $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$:

$$p(x) \to p(3x), \qquad p(x) \to xp''(x), \qquad p(x) \to p(3), \qquad p(x) \to p(3) \cdot x^3.$$

Per ciascuna di essere determinare la forma canonica, ed una base in cui la matrice assume la forma canonica.

4. Consideriamo le seguenti applicazioni lineari $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$:

$$A \to A^t, \qquad A \to A - A^t, \qquad A \to A + 3A^t, \qquad A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A.$$

Per ciascuna di essere determinare la forma canonica, ed una base in cui la matrice (che rappresenta f) assume la forma canonica.

5. Consideriamo l'applicazione lineare $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ che ad ogni matrice 2×2 associa la matrice ottenuta sostituendo ogni elemento con la somma dei due elementi ad esso adiacenti.

Determinare la forma canonica di f, ed una base in cui la matrice (che rappresenta f) assume la forma canonica.

Forme quadratiche 1

Argomenti: segnatura di forme quadratiche **Difficoltà**: $\star\star$

Prerequisiti: criteri per la segnatura (completamento quadrati, Sylvester, Cartesio)

Determinare la segnatura delle seguenti forme quadratiche, cioè la terna (n_0, n_+, n_-) che rappresenta, sostanzialmente, il numero di autovalori nulli, positivi, negativi. Dedurne se la forma è (semi)definita positiva/negativa o indefinita. Determinare anche un sottospazio di dimensione n_+ su cui la forma è definita positiva, ed un sottospazio di dimensione n_- su cui è definita negativa. Per meglio familiarizzare con le tecniche, si consiglia di determinare la segnatura utilizzando, ove possibile e almeno per le prime volte, almeno 3 metodi (completamento dei quadrati, Sylvester in varie direzioni, Cartesio).

1. Forme quadratiche $q(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{cccc}
x^2 + y^2 & 3x^2 + y^2 & x^2 - y^2 & 2x^2 - 3y^2 \\
x^2 + y^2 + xy & x^2 + y^2 + 2xy & x^2 + y^2 + 3xy & x^2 + 2y^2 + 3xy \\
x^2 + y^2 - xy & x^2 + y^2 - 2xy & x^2 + y^2 - 3xy & x^2 + 2y^2 - 3xy \\
x^2 - y^2 + xy & x^2 - y^2 + 2xy & x^2 - y^2 + 3xy & x^2 - 2y^2 + 3xy \\
7xy & -x^2 - 2y^2 + 10xy & -y^2 - 7xy & 3x^2 + 16y^2 - 14xy \\
-y^2 & x^2 + xy & 5x^2 + 7y^2 + 12xy & -3x^2 - 16y^2 - 14xy
\end{array}$$

2. Forme quadratiche $q(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc}
x^2 + 3y^2 + 5z^2 & -x^2 + 3y^2 + 5z^2 & x^2 - 3y^2 - 5z^2 \\
x^2 + y^2 + yz & x^2 + y^2 - 2yz & x^2 + y^2 + 3yz \\
x^2 - y^2 - 3yz & z^2 + 3yz + 5xz & 2xy - y^2 - z^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz + 6yz & x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5xz + 6yz \\
x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz & x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \\
x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 2xz & x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 3xz \\
x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz & xy - 2yz + 3xz \\
-y^2 + z^2 + xy - yz & y^2 + 7xz
\end{array}$$

3. Forme quadratiche $q(x, y, z, w)$ in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{ccc}
x^2 - w^2 & x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4w^2 & y^2 - 3z^2 - 5w^2 \\
x^2 + yz - w^2 & x^2 + y^2 + w^2 + zx & -x^2 + z^2 + w^2 - zy \\
-y^2 - w^2 - 3xz & 2y^2 + 3z^2 - 5w^2 + xz - 3yw & xy - 3zw
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
x^2 + y^2 - z^2 - w^2 - 2xy - 2zw & x^2 + y^2 - z^2 - w^2 - 2xz - 2yw
\end{array}$$

Forme quadratiche 2

Argomenti: segnatura di forme quadratiche **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: criteri per la segnatura (completamento quadrati, Sylvester, Cartesio)

---

1. Consideriamo le seguenti forme quadratiche $q(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$:
$$x^2 + 2y^2 + axy, \qquad x^2 + ay^2 + 5xy, \qquad ax^2 - 2axy - 3y^2, \qquad -y^2 + axy.$$
Determinare, per ciascuna di esse, per quali valori del parametro reale a risulta
   (a) definita positiva,
   (b) indefinita,
   (c) nulla sul sottospazio $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$,
   (d) definita positiva sul sottospazio V di cui al punto precedente.

2. Consideriamo le seguenti forme quadratiche $q(x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$:
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + axz, \qquad x^2 + ay^2 + 3z^2 + 6xy - yz, \qquad y^2 + axz - 4ayz.$$
Determinare, per ciascuna di esse, per quali valori del parametro reale a risulta
   (a) definita positiva,
   (b) indefinita,
   (c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2,
   (d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2,
   (e) nulla sul sottospazio generato da $(1, 2, 3)$,
   (f) definita positiva su almeno un sottospazio di dimensione 2,
   (g) definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 1,
   (h) definita positiva sul sottospazio generato da $(1, 1, 3)$ e $(0, 2, 1)$.

3. Determinare, al variare del parametro reale a, la segnatura delle seguenti forme quadratiche $q(x, y, z, w)$ in $\mathbb{R}^4$:
$$x^2 - y^2 + az^2 - w^2 \qquad x^2 + ay^2 - w^2$$
$$ax^2 - y^2 - (a+3)z^2 - w^2 \qquad -x^2 - ay^2 + (a+4)z^2 - (2a+1)w^2$$
$$x^2 - y^2 + 2z^2 - w^2 - 2xz + ayw \qquad az^2 + 2y^2 + 3z^2 - x^2 + 2axy + 2yw$$
$$2x^2 + 3y^2 + 4w^2 + axz \qquad x^2 + ay^2 + w^2 + 2yz$$
$$ax^2 + w^2 + 2ayz + 2xz \qquad x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4w^2 + 2xz + 4zw + 2ayz$$

4. Consideriamo la seguente forma quadratica in $\mathbb{R}^3$:
$$q(x, y, z) = ax^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + byz.$$
Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la forma risulta semidefinita positiva e nulla sul sottospazio generato da $(-2, 2, 1)$.

Prodotti scalari 1

Argomenti: prodotti scalari generali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: prodotti scalari, forme quadratiche, Gram-Schmidt

1. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^2$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Per ciascuno di essi si richiede di

   (a) determinare se è definito positivo oppure no,
   (b) determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1, 2)$ e $(3, -1)$,
   (c) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{(-1, 2), (3, -2)\}$ (si consiglia per le prime volte di svolgere questo punto sia direttamente con la definizione, sia con il cambio di base),
   (d) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1)$,
   (e) determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $x+2y = 0$,
   (f) determinare una base "Sylvesterizzante".

2. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^3$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Per ciascuno di essi si richiede di

   (a) verificare che è definito positivo,
   (b) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base
   $$\{(-1, 2, 0), (3, 0, -2), (1, 1, 1)\},$$
   (c) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1, 3)$,
   (d) determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio di equazione cartesiana $x = 3y - z$,
   (e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1, 0, 0)$ e a $(0, 1, 1)$,
   (f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio generato da $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$,
   (g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,
   (h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

Prodotti scalari 2

Argomenti: prodotti scalari generali **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: prodotti scalari, forme quadratiche, Gram-Schmidt

---

Nei seguenti punti vengono presentate delle espressioni che coinvolgono due elementi generici di uno spazio vettoriale. Per ciascuna di essa si richiede di

(a) stabilire se definisce un prodotto scalare oppure no, ed in caso negativo specificare quali proprietà vengono a mancare,

(b) nel caso in cui si tratta di un prodotto scalare, determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica dello spazio in questione e stabilirne la segnatura,

(c) determinare una base dello spazio vettoriale di partenza rispetto alla quale la matrice che rappresenta il prodotto scalare assume la forma alla Sylvester.

1. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^3$. Elementi generici: (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2). Espressioni:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1, \qquad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1y_2 + z_2y_1 + 5z_1z_2,$$

$$x_1y_1, \qquad x_1x_2, \qquad x_1y_2, \qquad x_1y_2 + x_2y_1, \qquad x_1x_2 + y_1y_2, \qquad x_1y_1 + x_2y_2,$$

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2), \qquad (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 10z_1z_2, \qquad (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2),$$

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2), \qquad (2x_1 + y_1)(x_2 + 2y_2), \qquad (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2).$$

2. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ con base canonica $\{1, x, x^2\}$. Elementi generici: $p(x)$ e $q(x)$. Espressioni:

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} p(x)q(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} p(x)q'(x)\,dx,$$

$$p(x)q(x), \qquad p(0)q(0), \qquad p(1)q(0), \qquad p(0)q(1) + p(1)q(0), \qquad p'(0)q'(0),$$

$$p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1), \qquad p(0)q(0) + p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1),$$

$$(p(0) + 2p(1))(q(0) + 2q(1)), \qquad (p(0) + 2q(1))(q(0) + 2p(1)), \qquad p(0)q(0) - p(1)q(1),$$

$$\int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx + p(3)q(3), \qquad \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx - p(2)q(2).$$

3. Spazio vettoriale: $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ con base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$. Elementi generici: $p(x)$ e $q(x)$. Stesse espressioni del punto precedente.

4. Spazio vettoriale: $M_{2\times 2}$. Elementi generici: A e B. Espressioni:

$$AB, \qquad AB + BA, \qquad \operatorname{Tr}(AB), \qquad \operatorname{Tr}(A)\cdot\operatorname{Tr}(B), \qquad \operatorname{Tr}(A^tB), \qquad \operatorname{Tr}(AB^t),$$

$$\det(AB), \qquad (1,0)AB\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad (1,0)(AB + BA)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \det A \cdot \det B.$$

Prodotti scalari – Esercizi teorici 1

Argomenti: prodotti scalari generali **Difficoltà**: $\star\star\star\star\star$

Prerequisiti: prodotti scalari, teorema spettrale

1. (Prodotti scalari degeneri e non degeneri) Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V si dice *degenere* se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $\langle v, w\rangle = 0$ per ogni $w \in V$ (in altre parole, v è ortogonale rispetto a tutti i vettori dello spazio). Si dice *non degenere* in caso contrario.

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è degenere se e solo se la matrice che lo rappresenta rispetto ad una qualunque base di V è singolare.

   (b) Dimostare che l'insieme V_0 dei vettori che sono ortogonali rispetto a tutti i vettori dello spazio è un sottospazio vettoriale, e che la dimensione di tale sottospazio è uguale al numero di autovalori nulli della matrice.

   (c) Sia V_1 un sottospazio vettoriale di V tale che $V = V_0 \oplus V_1$. Dimostrare che il prodotto scalare ristretto a V_1 è non degenere, cioè che non esiste nessun vettore non nullo in V_1 che sia ortogonale a tutti i vettori di V_1.

   (d) Sia W un sottospazio vettoriale di V, e sia $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto al prodotto scalare. Dimostrare che, se il prodotto scalare è non degenere, allora $W \cap W^\perp = \{0\}$. Cosa succede in generale?

2. (Vera definizione di segnatura) Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Definiamo n_+ come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito positivo, cioè come il più grande intero k per cui esiste un sottospazio W di V di dimensione k tale che $\langle w, w\rangle > 0$ per ogni $w \in W$ con $w \neq 0$. Analogamente, definiamo n_- come la massima dimensione di un sottospazio su cui il prodotto scalare risulta definito negativo.

   (a) Dimostrare che n_+ ed n_- coincidono, rispettivamente, con il numero di autovalori positivi e negativi della matrice che rappresenta il prodotto scalare rispetto ad una qualunque base di V.

   (b) Sia W un sottospazio di dimensione n_+ su cui il prodotto scalare è definito positivo. Dimostrare che $W \cap W^\perp = \{0\}$ (anche se il prodotto scalare è degenere) e che il prodotto scalare è semidefinito negativo su $W^\perp$. Cosa possiamo dire in più se il prodotto scalare è non degenere?

   (c) Dimostrare che possiamo sempre scrivere
   $$V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-,$$
   dove V_0 è il sottospazio definito al primo punto, V_+ è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito positivo, V_- è un sottospazio su cui il prodotto scalare è definito negativo, e vettori appartenenti a sottospazi diversi sono tra loro ortogonali (in questo caso si parla di somma diretta ortogonale). I sottospazi V_+ e V_- sono univocamente determinati?

Prodotti scalari – Esercizi teorici 2

Argomenti: prodotti scalari generali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: prodotti scalari, teorema spettrale

---

1. (Vettori isotropi) Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Un vettore $v \in V$ di dice *isotropo* se $\langle v, v\rangle = 0$, cioè se è ortogonale a se stesso.
   (a) Dimostrare che esiste un vettore isotropo se e solo se il prodotto scalare non è né definito positivo, né definito negativo.
   (b) Dimostrare che, se il prodotto scalare è indefinito, allora esiste una base di V fatta di soli vettori isotropi.

2. (Indice di Witt) Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Si dice *indice di Witt* il più grande intero k per cui esiste un sottospazio W di V di dimensione k tale che il prodotto scalare è identicamente nullo su W, cioè $\langle w_1, w_2\rangle = 0$ per ogni w_1 e w_2 in W.

   Determinare l'indice di Witt di un prodotto scalare con segnatura (n_0, n_+, n_-).

3. Sia A una matrice simmetrica.
   (a) Dimostrare che esiste una matrice *ortogonale* M tale che M^tAM è diagonale (questo è banale con lo strumento giusto).
   (b) Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* M tale che M^tAM è diagonale e sulla diagonale compaiono solo 0, $+1$, -1 (non necessariamente devono comparire tutti). A cosa corrisponde il numero di 0, $+1$, -1 che compaiono?
   (c) Supponiamo che A abbia almeno un autovalore positivo ed almeno una autovalore negativo. Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* M tale che M^tAM ha tutti 0 sulla diagonale (ma ovviamente può avere elementi non nulli fuori dalla diagonale).

4. (Diagonalizzazione simultanea) Siano dati due prodotti scalari definiti positivi in uno spazio vettoriale V di dimensione finita.
   (a) Dimostrare che esiste una base di V che è ortogonale rispetto ad entrambi i prodotti scalari.
   (b) Interpretare il risultato in termini di matrici simmetriche e cambi di base.

5. (Potenze di matrici simmetriche) Sia A una matrice simmetrica.
   (a) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica B tale che $A = B^{2013}$.
   (b) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica B tale che $A = B^{2012}$ se e solo se non esiste nessun vettore (colonna) v tale che $v^tAv + 1 = 0$.
   (c) Se $B^2 = A$, possiamo necessariamente concludere che B è simmetrica?
   (d) Se $B^{2013} = A$, possiamo necessariamente concludere che B è simmetrica?

Affinità

Argomenti: trasformazioni affini e omotetie **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: affinità, matrici, sistemi lineari

1. Dimostrare che la composizione di due affinità da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è ancora un'affinità.
2. Dimostrare che un'affinità $Ax + b$ è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile, ed in tal caso determinare la trasformazione inversa.
3. Consideriamo le seguenti condizioni:
$$f(1, 1) = (1, 2), \qquad f(0, -4) = (2, 1), \qquad f(1, -1) = (2, 0).$$
   (a) Dimostrare che esiste un'unica affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni precedenti. Determinare esplicitamente tale affinità.
   (b) Determinare l'immagine della retta $y = 2x - 1$.
   (c) Determinare la retta che ha come immagine la retta $y = 2x - 1$.
4. Consideriamo il rettangolo del piano con vertici in $(3, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$, $(3, 4)$.
Determinare quante sono le affinità in $\mathbb{R}^2$ che mandano il rettangolo nel quadrato con vertici in $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Scrivere esplicitamente le espressioni di tali affinità.
5. (Omotetie rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$)
   (a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto all'origine di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.
   (c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:
$$y = 2x, \qquad y = 2x + 5, \qquad y = -2x + 3, \qquad x + y - 1 = 0.$$
   (d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.
   (e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.
6. (Omotetie rispetto ad un punto qualunque di $\mathbb{R}^2$)
   (a) Scrivere l'espressione dell'omotetia di fattore 3 rispetto al punto $(2, -1)$ di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare i punti fissi di tale omotetia.
   (c) Determinare l'immagine delle seguenti rette:
$$y = 2x, \qquad y = 2x + 5, \qquad y = -2x + 3, \qquad x + y - 1 = 0.$$
   (d) Determinare quali rette hanno come immagine le rette precedenti.
   (e) Determinare l'immagine della circonferenza $x^2 + y^2 - 3x = 0$.
7. Scrivere l'espressione generale dell'omotetia di fattore λ rispetto al punto (x_0, y_0) e determinare i suoi punti fissi.
8. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima l'omotetia di fattore 6 rispetto al punto $(3, 7)$ e poi l'omotetia di fattore $1/2$ rispetto al punto $(2, -5)$.

Isometrie del piano 1

Argomenti: isometrie del piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nel piano, matrici ortogonali

1. (a) Descrivere l'insieme di tutte le matrici 2×2 ortogonali.
   (b) Determinare quali matrici ortogonali hanno determinante uguale a $+1$ e quali hanno determinante uguale a -1.
   (c) Determinare chi sono gli autovalori delle matrici ortogonali descritte al punto precedente. Nel caso di autovalori reali, determinare anche i rispettivi autospazi.

2. Scrivere le espressioni generali delle seguenti isometrie del piano:
   (a) traslazione di vettore (x_0, y_0),
   (b) simmetria rispetto alla retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$,
   (c) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$,
   (d) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto all'origine,
   (e) rotazione antioraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
   (f) rotazione oraria di un angolo θ rispetto al punto (x_0, y_0),
   (g) simmetria centrale rispetto all'origine (in quale delle precedenti categorie rientra?)
   (h) simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) (in quale delle precedenti rientra?),
   (i) simmetria rispetto alla retta di equazione parametrica $(x_0, y_0) + t(a, b)$, seguita da una traslazione di vettore (a, b).

3. Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo ...
   (a) prima la traslazione di vettore (x_0, y_0) e poi la traslazione di vettore (x_1, y_1),
   (b) prima la simmetria centrale rispetto al punto (x_0, y_0) e poi la simmetria centrale rispetto al punto (x_1, y_1),
   (c) prima la simmetria rispetto ad una retta e poi nuovamente la simmetria rispetto alla stessa retta,
   (d) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' parallela ad r,
   (e) prima la simmetria rispetto ad una retta r e poi la simmetria rispetto ad una retta r' incidente con r,
   (f) prima la rotazione *antioraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione *oraria* di un angolo θ rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente,
   (g) prima la rotazione antioraria di un angolo θ_0 rispetto ad un punto (x_0, y_0) e poi la rotazione antioraria di un angolo θ_1, eventualmente diverso dal precedente, rispetto ad un punto (x_1, y_1), eventualmente diverso dal precedente.

Isometrie del piano 2

Argomenti: isometrie del piano **Difficoltà**: $\star\star\star$

Prerequisiti: isometrie nel piano, matrici ortogonali

Nel seguito sono descritte alcune isometrie del piano. Per ciascuna di esse si richiede di

- scrivere l'espressione generale,
- determinare i punti fissi,
- determinare l'immagine della retta $y = 2x - 3$ e della retta $2x + 3y + 5 = 0$,
- determinare la retta che ha come immagine la retta $2x + 3y + 5 = 0$,
- determinare l'immagine della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$.

Isometrie da esaminare:

(1) traslazione di vettore $(3, -1)$,

(2) simmetria rispetto all'asse x,

(3) simmetria rispetto all'asse y,

(4) rotazione di $90°$ in senso orario rispetto all'origine,

(5) simmetria rispetto alla retta $x = -8$,

(6) simmetria centrale rispetto al punto $(3, 4)$,

(7) simmetria rispetto alla retta $y = x$,

(8) simmetria rispetto alla retta $y = 4$ seguita da simmetria rispetto alla retta $x = 3$,

(9) simmetria rispetto alla retta $y = 2x$,

(10) simmetria rispetto alla retta $y = 2x$ seguita da simmetria rispetto alla retta $y = 2x - 3$,

(11) rotazione di $30°$ in senso antiorario rispetto al punto $(-2, 3)$,

(12) simmetria rispetto alla retta di equazione $3x + 4y + 7 = 0$,

(13) simmetria rispetto alla retta di equazione $3x + 4y + 7 = 0$ seguita da simmetria rispetto alla retta di equazione $3x - 4y + 11 = 0$,

(14) simmetria rispetto alla retta $y + x = 0$ seguita da traslazione di vettore $(2, -2)$,

(15) simmetria rispetto alla retta di equazione $3x - 4y - 7 = 0$ seguita da rotazione antioraria di $90°$ rispetto al punto $(1, 2)$,

(16) rotazione oraria di $120°$ rispetto al punto $(1, 2)$, seguita da rotazione oraria di $120°$ rispetto al punto $(3, -2)$, seguita da rotazione oraria di $120°$ rispetto al punto $(7, 1)$.

Isometrie del piano 3

Argomenti: isometrie del piano **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nel piano, matrici ortogonali

---

1. Esaminare le seguenti espressioni che rappresentano trasformazioni affini del piano, riconoscendo quali di esse sono omotetie (di fattore diverso da ± 1) e quali di esse sono isometrie. Per le omotetie, determinare il centro ed il fattore di omotetia. Per le isometrie, descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione.

$$(2x+y, y+3x+1), \qquad (2x+5, 2y-7), \qquad (-2x+5, -2y-7),$$
$$(7+x, 3+y), \qquad (7+x, 3-y), \qquad (7-x, 3+y),$$
$$(7-x, 3-y), \qquad (7+y, 3+x), \qquad (7+y, 3-x),$$
$$(7-y, 3+x), \qquad (7-y, 3-x), \qquad (7-x, 3-x),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x+y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x-y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x-y+5, x-\sqrt{3}\,y+7\right), \qquad \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,x-y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right),$$
$$\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5}\right), \qquad \left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5}\right),$$
$$\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5}\right), \qquad \left(\frac{-3x+4y-1}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}\right).$$

2. Un rettangolo ha un vertice nel punto $(2,3)$. Gli assi dei lati sono le rette $2x-3y+5=0$ e $3x+2y+7=0$. Determinare le coordinate dei restanti vertici del rettangolo.

3. Un triangolo equilatero ha un vertice in $A=(2,1)$, un vertice in $B=(7,-1)$, ed il restante vertice C nel semipiano delimitato dalla retta AB e contenente l'origine.

   Determinare le coordinate di C.

4. Un quadrato ha due vertici *opposti* nei punti $(112,113)$ e $(14,-27)$.

   Determinare le coordinate dei restanti due vertici.

5. Un quadrato ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A=(-2,3)$ e $B=(6,-3)$.

   Determinare le coordinate di C e D.

6. Un rettangolo ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A=(-2,3)$ e $B=(6,-3)$. Inoltre il lato BC è il doppio del lato AB.

   Determinare le coordinate di C e D, e l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo.

7. Un esagono regolare ha i vertici $ABCDEF$ ordinati in senso orario, con $A=(1,7)$ e $B=(3,1)$.

   Determinare le coordinate dei restanti vertici.

Isometrie dello spazio 1

Argomenti: isometrie dello spazio **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: isometrie nel piano e nello spazio, matrici ortogonali

---

Nel seguito sono descritte alcune isometrie dello spazio. Per ciascuna di esse si richiede di

- scrivere l'espressione generale,
- determinare i punti fissi,
- determinare l'immagine del piano $2x + 3y + 5z + 7 = 0$ e della retta $(1, 2, 3) + t(-1, 2, 1)$,
- determinare quale piano va a finire nel piano $2x + 3y + 5z + 7 = 0$ e quale retta va a finire nella retta $(1, 2, 3) + t(-1, 2, 1)$,
- determinare l'immagine della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y = 10$.

Isometrie da esaminare:

(1) traslazione di vettore $(3, -1, 5)$,

(2) simmetria rispetto al piano xy,

(3) simmetria rispetto al piano yz,

(4) simmetria rispetto al piano $z = 3$,

(5) simmetria rispetto al piano $x = -5$,

(6) simmetria rispetto al piano $y = 3$ seguita da simmetria rispetto al piano $z = -2$,

(7) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$,

(8) simmetria rispetto al piano $z = -2$ seguita da simmetria rispetto al piano $y = 3$, seguita a sua volta da simmetria rispetto al piano $x = 1$,

(9) simmetria centrale rispetto al punto $(-1, 3, 4)$,

(10) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 0$,

(11) simmetria rispetto al piano $x + 2y - 3z = 5$,

(12) rotazione intorno all'asse z di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

(13) rotazione intorno all'asse y di $90°$ in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y,

(14) rotazione intorno all'asse x di $45°$, in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle x, seguita da simmetria rispetto al piano $x = 3$,

(15) rotazione, intorno alla retta passante per $(1, 2, 3)$ e parallela all'asse x, di $30°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle x.

Isometrie dello spazio 2

Argomenti: isometrie dello spazio **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nello spazio, matrici ortogonali

1. Scrivere l'espressione generale e determinare i punti fissi per ciascuna delle seguenti isometrie dello spazio:

   (a) rotazione intorno all'asse y di $90°$ in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y, seguita da rotazione intorno all'asse z di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

   (b) rotazione intorno all'asse z di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da rotazione intorno all'asse y di $90°$ in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y,

   (c) rotazione, intorno alla retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$, di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

   (d) la rotazione del punto precedente, seguita da simmetria centrale rispetto al punto $(1, 0, -2)$,

   (e) rotazione, intorno alla retta passante per $(2, -1, 5)$ e per $(3, 0, 4)$, di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

   (f) rotazione, intorno alla retta passante per $(2, -1, 5)$ e per $(3, 0, 4)$, di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da simmetria rispetto al piano di equazione $2x - y + 5z = 3$.

2. Verificare che le seguenti espressioni rappresentano delle isometrie dello spazio e descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione, precisando anche gli elementi geometrici (cioè se si tratta di una simmetria occorre dire rispetto a quale piano, se si tratta di una rotazione occorre dire di quale angolo e rispetto a quale asse, e così via).

(x, y, z)	(y, z, x)	(y, x, z)
$(x, -y, z)$	$(y, -z, x)$	$(y, -x, z)$
$(3 + x, 5 + y, 7 + z)$	$(3 - x, 5 + y, 7 + z)$	$(3 + x, 5 - y, 7 - z)$
$(3 - x, 5 - y, 7 - z)$	$(3 + x, 5 + z, 7 + y)$	$(3 - x, 5 + z, 7 + y)$
$(3 + x, 5 + z, 7 - y)$	$(3 - x, 5 - z, 7 + y)$	$(3 + x, 5 - z, 7 - y)$
$(3 - x, 5 - z, 7 - y)$	$(3 + y, 5 + z, 7 + x)$	$(3 + y, 5 - z, 7 + x)$
$(3 - y, 5 + z, 7 - x)$	$(3 - y, 5 - z, 7 - x)$	$(3 + z, 5 + x, 7 + y)$

3. Consideriamo i 3 punti $A = (1, 2, 4)$, $B = (1, 3, 6)$, $C = (-1, 3, 4)$. Determinare le espressioni di tutte le isometrie dello spazio che mandano il triangolo ABC in se stesso (ma non è detto che mandino A in A, B in B e C in C).

Capitolo 2

Saper dire

[Spiegare il significato di questo capitolo]

2.1 Spazi vettoriali e applicazioni lineari

2.1.1 Spazi vettoriali, indipendenza lineare, generatori e basi

1. Definizione di campo (proprietà delle operazioni).

2. Definizione di campo (proprietà delle operazioni) indicando con $\sharp$ la somma e con $*$ il prodotto.

3. Definizione di spazio vettoriale.

4. Definizione di spazio vettoriale (proprietà delle operazioni) indicando con $\sharp$ la somma e con $*$ il prodotto di un vettore per una costante.

5. Definizione di vettori linearmente indipendenti.

6. Definizione di vettori linearmente dipendenti.

7. Dimostrare che n vettori sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di loro si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti.

8. In uno spazio vettoriale V siano dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$, due dei quali coincidono. Dimostrare che i vettori non sono linearmente indipendenti.

9. In uno spazio vettoriale V siano dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$, uno dei quali è il vettore nullo. Dimostrare che i vettori non sono linearmente indipendenti.

10. Definizione di sistema di generatori per uno spazio vettoriale.

11. Definizione di base per uno spazio vettoriale e di componenti di un vettore rispetto ad una base. Dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità delle componenti di un vettore rispetto ad una data base.

12. Fare un esempio di spazio vettoriale che non ha dimensione finita (con dimostrazione).

13. Spazi vettoriali di dimensione finita e teorema di esistenza di una base: enunciato e dimostrazione.

14. Teorema di sostituzione (relazione tra insiemi di vettori linearmente indipendenti ed insiemi di generatori): enunciato e dimostrazione.

15. Ottenimento di una base per completamento a partire da un insieme linearmente indipendente: enunciato e dimostrazione.

16. Ottenimento di una base per eliminazione a partire da un insieme di generatori: enunciato e dimostrazione.

17. Enunciare come si può ottenere una base per completamento a partire da ... e per eliminazione a partire da ....

18. Dimostrazione che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi (se serve, si può enunciare senza dimostrazione il teorema di sostituzione).

19. Se in uno spazio vettoriale di dimensione n abbiamo n vettori linearmente indipendenti, cosa possiamo concludere? Perché?

20. Se in uno spazio vettoriale di dimensione n abbiamo un insieme di generatori con n elementi, cosa possiamo concludere? Perché?

2.1.2 Sottospazi vettoriali

1. Definizione di sottospazio vettoriale.

2. Fornire un esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto alla somma ma non sia un sottospazio vettoriale.

3. Fornire un esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che sia chiuso rispetto al prodotto per scalari (positivi, negativi o nulli), ma non sia un sottospazio vettoriale.

4. Definizione di Span.

5. Dimostrazione che lo Span è un sottospazio vettoriale.

6. L'intersezione di due sottospazi vettoriali è a sua volta un sottospazio vettoriale? Perché? L'unione di due sottospazi vettoriali è a sua volta un sottospazio vettoriale? Perché?

7. Definizione di somma di due sottospazi vettoriali e dimostrazione che si tratta a sua volta di un sottospazio vettoriale.

8. Definizione di somma diretta di sottospazi vettoriali. Definizione di componenti rispetto ad una somma diretta e dimostrazione della loro unicità.

9. Formula di Grassmann (legame tra le dimensioni di somma e intersezione di sottospazi): enunciato e dimostrazione.

10. Se V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^5$ con $\dim(V) = 3$ e $\dim(W) = 4$, cosa possiamo dedurre della dimensione di $V \cap W$? Perché?

    (Questa domanda si può clonare con dimensioni diverse).

2.1.3 Applicazioni lineari

1. Definizione di applicazione lineare.

2. Teorema di struttura per le applicazioni lineari: enunciato e dimostrazione.

3. Descrivere come sono fatte tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

   (Questa domada si si può clonare con diversi spazi di partenza e di arrivo).

4. Descrivere come si associa una matrice ad una applicazione lineare.

5. Definizione di ker e immagine di una applicazione lineare.

6. Definizione di ker di una applicazione lineare e dimostrazione che si tratta di un sottospazio (come? di cosa?).

7. Definizione di immagine di una applicazione lineare e dimostrazione che si tratta di un sottospazio (come? di cosa?).

8. Enunciato del teorema della dimensione (quello che lega le dimensioni di ker e immagine di un'applicazione lineare).

9. Teorema della dimensione (quello che lega le dimensioni di ker e immagine di un'applicazione lineare): enunciato e dimostrazione.

10. Se un'applicazione lineare è invertibile, cosa possiamo dire dello spazio di partenza e di arrivo? Perché?

11. Se un'applicazione lineare è iniettiva, cosa possiamo dire dello spazio di partenza e di arrivo? Perché?

12. Se un'applicazione lineare è surgettiva, cosa possiamo dire dello spazio di partenza e di arrivo? Perché?

13. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Se $\dim(V) > \dim(W)$, cosa possiamo concludere in termini di iniettività e/o surgettività?

14. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Se $\dim(V) < \dim(W)$, cosa possiamo concludere in termini di iniettività e/o surgettività?

15. Dimostrare che un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali della stessa dimensione è iniettiva se e solo se è surgettiva (se serve, si può enunciare senza dimostrazione il teorema della dimensione).

16. Matrici di cambio di base: significato e costruzione.

2.1.4 Matrici

1. Definizione di prodotto di matrici. Enunciato dell'interpretazione del prodotto di matrici in termini di applicazioni lineari.

2. La trasposta del prodotto di due matrici è . . . : enunciato e dimostrazione.

3. La trasposta della potenza di una matrice è . . . : enunciato e dimostrazione.

4. Il prodotto di due matrici invertibili è a sua volta invertibile? Perché?

5. Il prodotto di due matrici simmetriche è a sua volta una matrice simmetrica? Perché?

6. Se A e B sono matrici simmetriche della stessa dimensione, la matrice $A^t BA$ è ancora simmetrica? Perché?

7. L'inversa del prodotto di due matrici è . . . : enunciato e dimostrazione.

8. La trasposta dell'inversa è . . . Perché? Sotto quali ipotesi?

2.1.5 Determinante e rango

1. Enunciare le proprietà basic che caratterizzano univocamente il determinante ed il teorema di esistenza ed unicità del determinante.

2. Cosa vuol dire che il determinante è alternante? Come si deduce l'alternanza dalle proprietà basic?

3. Dimostrare, a partire dalle proprietà basic, che il determinante di una matrice è nullo quando le righe sono linearmente dipendenti.

4. Dimostrare, a partire dalle proprietà basic, la formula per il determinante di una matrice 2×2.

5. Interpretazione geometrica del determinante di una matrice 2×2: enunciato e dimostrazione.

6. Come si comporta il determinante rispetto alle operazioni previste dall'algoritmo di Gauss? Perché?

7. Dimostrare il teorema di unicità del determinante.

8. Determinante di una matrice triangolare superiore: enunciato e dimostrazione.

9. Sviluppi di Laplace (sviluppi ricorsivi di un determinante per righe o per colonne).

10. Enunciato del teorema di Binet (determinante del prodotto di due matrici).

11. Legame tra il determinante di una matrice e quello della sua trasposta: enunciato e dimostrazione.

12. Legame tra il determinante di una matrice e quello della sua inversa: enunciato e dimostrazione.

13. Formula che permette, in $\mathbb{R}^3$, di determinare un vettore perpendicolare a due vettori dati: enunciato e dimostrazione.

14. Definizioni di rango di una matrice ed enunciato della loro equivalenza.

15. L'R-rango di una matrice è uguale all'R-rango della matrice a scala ottenuta mediante l'algoritmo di Gauss? Perché?

16. Il C-rango di una matrice è uguale al C-rango della matrice a scala ottenuta mediante l'algoritmo di Gauss? Perché?

17. Quanto vale il rango di una matrice a scala? Quale rango? Perché?

18. Enunciare e dimostrare la relazione tra R-rango e C-rango per una matrice.

19. Enunciare e dimostrare la relazione tra R-rango e D-rango per una matrice.

20. Dimostrare che il determinante di una matrice è diverso da 0 quando le righe sono linearmente indipendenti.

2.1.6 Forme canoniche

1. Definizione di matrici simili.

2. Se due matrici A e B sono simili, è vero che A^2 e B^2 sono simili? Perché? Cosa succede per esponenti più grandi?

3. Definizione di polinomio caratteristico ed enunciato del suo legame con gli autovalori.

4. Definizione di autovalore, autovettore, autospazio.

5. Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire dei loro polinomi caratteristici? Perché?

6. Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire dei loro autovalori? Perché?

7. Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire dei loro determinanti? Perché?

8. Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire delle loro tracce? Perché?

9. Relazione tra autovalori e polinomio caratteristico: enunciato e dimostrazione.

10. Quanti sono al massimo gli autovalori di una matrice $n \times n$? Perché?

11. Enunciare cosa hanno a che fare traccia e determinante con i coefficienti del polinomio caratteristico.

12. Relazione tra determinante e coefficienti del polinomio caratteristico: enunciato e dimostrazione.

13. Definizione(i) di molteplicità di un autovalore. Enunciato della relazione tra le due nozioni.

14. Relazione tra le due nozioni di molteplicità per un autovalore: enunciato e dimostrazione.

15. Caratterizzazione della diagonalizzabilità in termini di molteplicità degli autovalori.

16. Enunciato del teorema spettrale e dimostrazione di una delle due implicazioni.

17. Dando per buona la caratterizzazione della diagonalizzabilità in termini di molteplicità degli autovalori, dimostrare che una matrice $n \times n$ con n autovalori reali distinti è diagonalizzabile.

18. Che cosa si può dire degli autovalori di una matrice simmetrica? E delle loro molteplicità? Perché?

19. Che cosa si può dire degli autovalori di una matrice diagonale? E delle loro molteplicità? Perché?

20. Che cosa si può dire degli autovalori di una matrice triangolare? E delle loro molteplicità? Perché?

21. Definizione di polinomio minimo di una matrice (o applicazione). Come sono fatti tutti i polinomi che annullano una matrice (solo enunciato)?

22. Dimostrazione che esiste almeno un polinomio (non nullo) che annulla una matrice.
23. Enunciato del teorema di Hamilton-Cayley.
24. Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire dei loro polinomi minimi? Perché?
25. Enunciato delle relazioni tra polinomio minimo e diagonalizzabilità.
26. Cosa si può dire delle radici del polinomio minimo? E della loro molteplictà?

2.2 Prodotti scalari

2.2.1 Prodotto scalare canonico

1. Definizione di base ortogonale e ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico. Come si ottiene una base ortonormale a partire da una base ortogonale?
2. Cosa sono le componenti di un vettore qualunque rispetto ad una base ortonormale? E rispetto ad una base ortogonale?
3. Descrizione dell'algoritmo di Gram-Schmidt e delle relazioni tra la base che produce e quella di partenza.
4. Definizione di ortogonale di un sottospazio e dimostrazione che si tratta a sua volta di un sottospazio vettoriale.
5. Definizione di ortogonale di un sottospazio (caso del prodotto scalare canonico) e dimostrazione che la sua intersezione con il sottospazio di partenza è ...
6. Definizione di matrice ortogonale, legami tra la sua inversa e la sua trasposta, e legami con le basi ortogonali ed ortonormali.
7. Il prodotto di due matrici ortogonali è a sua volta ortogonale? Perché?
8. La somma di due matrici ortogonali è a sua volta ortogonale? Perché?
9. In prodotto di una matrice ortogonale per uno scalare è a sua volta una matrice ortogonale? Perché?
10. L'inversa di una matrice ortogonale è a sua volta ortogonale? Perché?
11. Quanto può valere il determinante di una matrice ortogonale? Perché?
12. Se una matrice ortogonale ha un autovalore reale, quanto può valere questo autovalore? Perché?
13. Definizione di applicazione simmetrica e di matrice simmetrica.
14. Un'applicazione simmetrica è rappresentata da una matrice simmetrica quando ...
15. Autovalori distinti di un'applicazione simmetrica sono ... Perché?

16. Dimostrare che una ... simmetrica ha almeno un autovalore reale.

17. Sia v un autovettore di una applicazione f simmetrica. Enunciare e dimostrare che l'insieme dei vettori ortogonali a v è invariante per f.

2.2.2 Forme quadratiche

1. Quando una forma quadratica si dice definita positiva? E semidefinita positiva?

2. Quando una forma quadratica si dice definita negativa? E semidefinita negativa?

3. Quando una forma quadratica si dice definita indefinita?

4. Enunciare il criterio che lega la segnatura di una forma quadratica agli autovalori della matrice ad essa associata.

5. Enunciare come dedurre la segnatura di una forma quadratica in due variabili basandosi su traccia e determinante della matrice ad essa associata.

6. Dimostrare (senza dare per buona la caratterizzazione della segnatura in termini di autovalori) che una forma quadratica la cui matrice associata ha almeno due autovalori di segno discorde è necessariamente ...

2.2.3 Prodotti scalari e applicazioni simmetriche in generale

1. Definizione di prodotto scalare in generale.

2. Descrivere come si associa una matrice (come?) ad un prodotto scalare generale.

3. Come cambia la matrice associata ad un prodotto scalare generale in conseguenza di un cambio di base? Perché?

4. Definizione di applicazione simmetrica rispetto ad un prodotto scalare generale. Cosa possiamo dire della matrice associata ad una tale applicazione?

5. Enunciare in termini di applicazioni simmetriche il teorema spettrale rispetto ad un generico prodotto scalare ...

6. Enunciare in termini di matrici il teorema spettrale rispetto ad un generico prodotto scalare ...

2.3 Sistemi lineari

1. Perché l'algoritmo di Gauss trasforma un sistema lineare in un altro sistema lineare che ha le stesse soluzioni?

2. Come si interpreta un sistema lineare in termini delle colonne della matrice dei coefficienti?

3. Come si interpreta un sistema lineare *omogeneo* in termini dell'applicazione lineare associata alla matrice dei coefficienti?

4. Come si interpreta un sistema lineare, omogeneo o non omogeneo, in termini dell'applicazione lineare associata alla matrice dei coefficienti?

5. Come è fatto l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo*? Perché?

6. Come è fatto l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare *non omogeneo*? Perché?

7. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le colonne linearmente *indipendenti*? Perché?

8. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le righe linearmente *indipendenti*? Perché?

9. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *non omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le colonne linearmente *indipendenti*? Perché?

10. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le colonne linearmente *dipendenti*? Perché?

11. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *non omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le righe linearmente *indipendenti*? Perché?

12. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le righe linearmente *dipendenti*? Perché?

13. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *non omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le colonne linearmente *dipendenti*? Perché?

14. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *non omogeneo* se la matrice completa ha le colonne linearmente *indipendenti*? Perché?

15. Cosa possiamo dire di un sistema lineare *non omogeneo* se la matrice completa ha le colonne linearmente *dipendenti*? Perché?

16. Formula di Cramer: enunciato e dimostrazione.

17. Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice . . . : completare l'enunciato e dimostrarlo.

18. È dato un sistema lineare *omogeneo* di 12 equazioni in 17 incognite. La matrice dei coefficienti ha rango 7. Cosa possiamo dire dell'insieme delle soluzioni?

    (La domanda si può clonare variando a piacere le dimensioni ed il rango).

2.4 Geometria analitica

2.4.1 Vettori geometrici

1. Definizione di prodotto scalare canonico, norma e distanza tra vettori in $\mathbb{R}^n$. Relazioni tra prodotto scalare, norma, distanza.

2. Prodotto scalare e angolo tra due vettori: enunciato e dimostrazione in $\mathbb{R}^2$.

3. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: enunciato e dimostrazione.

2.4.2 Trasformazioni affini e isometrie

1. Definizione di trasformazione affine e dimostrazione che la composizione di due affinità è a sua volta un'affinità.

2. Definizione di isometria ed enunciato del teorema di struttura delle isometrie di $\mathbb{R}^n$.

3. Dimostrazione che tutte le affinità con matrice ... sono isometrie.

4. Dimostrazione che un'isometria che fissa l'origine conserva le norme.

5. Dimostrazione che un'isometria che fissa l'origine conserva il prodotto scalare.

6. Teorema di struttura per le isometrie: enunciato e dimostrazione (si può dare per buono che un'isometria che fissa l'origine conserva norme e prodotti scalari).

7. Come sono fatte tutte le matrici $2 \cdot 2$ ortogonali? Perché?

8. Come è fatta la matrice che rappresenta nel piano la simmetria rispetto ad una generica retta passante per l'origine?

9. Come è fatta la matrice che rappresenta nel piano una rotazione rispetto all'origine?

10. Cosa possiamo dire degli autovalori di una matrice che rappresenta nel piano la simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine?

11. Cosa possiamo dire degli autovalori di una matrice che rappresenta nel piano una rotazione rispetto all'origine?

12. Cosa possiamo dire degli autovalori di una matrice che rappresenta nello spazio la simmetria rispetto ad un piano passante per l'origine?

13. Cosa possiamo dire degli autovalori di una matrice che rappresenta nello spazio una rotazione rispetto ad una retta passante per l'origine?

14. Enunciare la classificazione delle isometrie del piano sulla base del luogo dei punti fissi.

15. Enunciare la classificazione delle isometrie dello spazio sulla base del luogo dei punti fissi.

Capitolo 3

Saper fare

[Spiegare il significato di questo capitolo]

3.1 Spazi vettoriali e applicazioni lineari

3.1.1 Spazi vettoriali, indipendenza lineare, generatori e basi

1. Saper decidere se una data struttura algebrica è un campo; in caso negativo, saper indicare quale o quali degli assiomi non sono verificati.

2. Saper decidere se una data struttura algebrica è uno spazio vettoriale; in caso negativo, saper indicare quale o quali degli assiomi non sono verificati.

3. Saper decidere se un po' di elementi assegnati di uno spazio vettoriale sono linearmente indipendenti, oppure se sono un sistema di generatori.

4. Saper determinare se uno spazio vettoriale ha dimensione finita esibendo esplicitamente una base.

5. Saper trovare una base di uno spazio vettoriale estendendo un insieme assegnato di vettori linearmente indipendenti, oppure estraendola da un assegnato insieme di generatori.

6. Saper determinare le componenti di un vettore dato rispetto ad una base prestabilita.

7. Saper vedere gli spazi vettoriali complessi come spazi vettoriali reali, sapendo distinguere dimensioni e basi come spazi vettoriali complessi da dimensioni e basi come spazi vettoriali reali.

3.1.2 Sottospazi vettoriali

1. Saper decidere se un dato sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale; in caso negativo, saper indicare quale proprietà manca.

2. Saper passare dalla presentazione cartesiana a quella parametrica di un sottospazio vettoriale, e viceversa.

3. Saper determinare la dimensione di un sottospazio vettoriale, comunque questo sia definito.

4. Saper determinare lo Span di un insieme dato di vettori, anche non linearmente indipendenti, descrivendolo in maniera cartesiana o parametrica.

5. Dati due sottospazi vettoriali, comunque definiti, saper determinare la dimensione ed una base per la loro somma e la loro intersezione.

6. Saper decidere se uno spazio vettoriale è somma diretta di due sottospazi; in caso affermativo, saper calcolare le componenti di un dato vettore secondo i due sottospazi, e saper descrivere (ad esempio mediante le matrici ad esse associate) le due proiezioni dallo spazio grande ai due sottospazi.

3.1.3 Applicazioni lineari

1. Sapere stabilire se una data applicazione tra due spazi vettoriali è lineare oppure no. In caso negativo, saper stabilire quale proprietà viene a mancare.

2. Saper scrivere la matrice associata ad una applicazione lineare una volta che sono state fissate una base dello spazio di partenza ed una base dello spazio di arrivo.

3. Sapere cambiare la matrice associata ad una applicazione lineare in conseguenza di un cambiamento delle basi in partenza ed arrivo, sia usando la definizione, sia mediante le matrici di cambio di base.

4. Saper decidere l'eventuale iniettività e/o surgettività di un'applicazione lineare.

5. Date un po' di condizioni, ad esempio i valori assunti in un po' di vettori dati o su opportuni sottospazi, saper decidere l'esistenza e l'eventuale unicità di un'applicazione lineare che soddisfa le condizioni stesse.

6. Saper determinare il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare, nonché le relative dimensioni e basi, giungendo quindi ad una loro descrizione sia in maniera cartesiana sia in maniera parametrica.

3.1.4 Matrici

1. Sapere quando è possibile calcolare il prodotto tra due matrici, ed in caso affermativo calcolarlo.

2. Sapere operare con espressioni che contengono somme e prodotti di matrici, nonché inverse e trasposte.

3. Saper calcolare l'inversa di una matrice $n \times n$ mediante la matrice dei cofattori (cioè con i determinanti).

4. Saper calcolare l'inversa di una matrice $n \times n$ mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan.

5. Sapere contare quanti sono i minori $h \times k$ di una matrice $m \times n$, e saperli listare tutti se necessario.

3.1.5 Determinante e rango

1. Saper calcolare il determinanate di una matrice 2×2.

2. Saper calcolare il determinanate di una matrice 3×3 mediante la formula di Sarrus.

3. Saper calcolare il determinante di una matrice $n \times n$ mediante gli sviluppi ricorsivi di Laplace rispetto ad una qualunque riga o colonna (possibilmente scegliendo di volta in volta l'opzione più conveniente).

4. Saper calcolare il determinante di una matrice $n \times n$ mediante l'algoritmo di Gauss.

5. Saper determinare il rango di una matrice utilizzando i determinanti dei minori (D-rango).

6. Saper determinare il rango di una matrice mediante l'algoritmo di Gauss.

7. Saper dedurre la dipendenza o indipendenza lineare di vettori assegnati, e la dimensione del loro Span, basandosi sul rango di opportune metrici.

8. Saper dedurre, dal rango di una matrice, le dimensioni del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare ad essa associata.

3.1.6 Forme canoniche

1. Saper decidere se una data matrice rappresenta una data applicazione lineare (anche tra spazi di dimensione diversa), pur di scegliere opportunamente le basi in partenza ed arrivo.

2. Data una matrice $n \times n$, saper trovare il suo polinomio caratteristico servendosi della definizione.

3. Nel caso di matrici 2×2, saper scrivere il polinomio caratteristico guardando solo traccia e determinante.

4. Sapere trovare (o per lo meno cercare) gli autovalori, eventualmente complessi, di una matrice $n \times n$.

5. Dato un autovalore, saper determinare la sua molteplicità algebrica e la sua molteplicità geometrica, e saper descrivere (in maniera cartesiana o parametrica) il relativo autospazio.

6. Saper decidere se una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile sui reali o sui complessi. In caso affermativo, saper determinare una matrice di cambio di base che effettua la diagonalizzazione.

7. Saper decidere se una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale. In caso affermativo, saper determinare una matrice di cambio di base ortogonale che effettua la diagonalizzazione.

8. Saper determinare la forma canonica reale o complessa di una matrice qualunque $n \times n$ (in caso in cui la matrice non sia diagonalizzabile la cosa è limitata alla dimensione bassa), determinando anche la matrice di cambio di base che porta nella forma canonica.

9. Saper decidere se due matrici sono simili oppure no. In caso affermativo, saper trovare una matrice di cambio di base che realizza la similitudine.

3.2 Prodotti scalari

3.2.1 Prodotto scalare canonico

1. Saper utilizzare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale o ortonormale a partire da una base data.

2. Saper trovare una base ortogonale o ortonormale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ assegnato.

3. Saper determinare l'ortogonale di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ assegnato, descrivendolo in maniera cartesiana o parametrica (eventualmente ricorrendo ad una base ortogonale od ortonormale).

4. Saper scrivere la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ assegnato.

5. Saper decidere se una matrice è ortogonale oppure no, ed in caso affermativo saperne calcolare l'inversa molto velocemente.

3.2.2 Forme quadratiche

1. Saper trovare la matrice associata ad una forma quadratica e passare dall'espressione "polinomiale" a quella "matriciale" e viceversa.

2. Saper dedurre la segnatura di una forma quadratica in dimensione 2 dal segno del determinante e degli elementi sulla diagonale della matrice ad essa associata.

3. Saper scrivere una forma quadratica in ogni dimensione come somma e/o differenza di quadrati di termini linearmente indipendenti mediante il metodo di "completamento dei quadrati". Saper dedurre la segnatura della forma da tale espressione.

4. Saper dedurre la segnatura di una forma quadratica dal segno degli autovalori della matrice associata.

5. Saper dedurre la segnatura di una forma quadratica applicando, ove possibile, il metodo di Sylvester (minori orlati), procedendo in varie direzioni a seconda della convenienza.

6. Saper dedurre la segnatura di una forma quadratica dal segno dei coefficienti del suo polinomio caratteristico (metodo di Cartesio).

3.2.3 Prodotti scalari e applicazioni simmetriche in generale

1. Saper decidere se una data espressione rappresenta un prodotto scalare in uno spazio vettoriale. In caso negativo, saper indicare quali proprietà vengono a mancare.

2. Saper determinare la matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto ad una data base, e saperla utilizzare per il calcolo effettivo del prodotto scalare.

3. Saper utilizzare le matrici di cambio di base per determinare le matrici che rappresentano uno stesso prodotto scalare rispetto a basi differenti.

4. Saper decidere la segnatura di un dato prodotto scalare assegnato.

5. Saper determinare una base di uno spazio vettoriale che sia ortonormale rispetto ad un assegnato prodotto scalare definito positivo.

6. Saper determinare, mediante opportuni prodotti scalari, le componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale assegnata.

7. Saper decidere se una data applicazione lineare è simmetrica rispetto ad un prodotto scalare assegnato.

8. Saper trovare una base ortonormale costituita da autovettori di un'applicazione simmetrica.

3.3 Sistemi lineari

1. Saper scrivere un sistema lineare in termini di matrici e vettori.

2. Saper applicare l'algoritmo di Gauss, sia nella versione ultra-ortodossa sia nella versione più elastica, per ottenere la riduzione a scala di una matrice.

3. Saper applicare l'algoritmo di Gauss nella versione Gauss-Jordan, quella cioè che permette di arrivare ad una matrice a scala con tutti 0 sopra i pivot.

4. Saper risolvere un sistema lineare mediante l'algoritmo di Gauss, scrivendo le eventuali soluzioni utilizzando un numero opportuno di parametri liberi.

5. Saper interpretare un sistema lineare come ricerca di una combinazione lineare che fornisce un vettore dato.

6. Sapere intepretare un sistema lineare omogeneo come ricerca del nucleo di una applicazione lineare.

7. Sapere interpretare un sistema lineare in termini dell'applicazione lineare associata alla matrice dei coefficienti.

8. Sapere quando è possibile applicare il metodo di Cramer ad un sistema lineare e, in caso affermativo, saperlo applicare.

9. Sapere trarre conclusioni su di un sistema lineare (esistenza di soluzioni, loro eventuale unicità, eventuale dimensione dello spazio delle soluzioni) sulla base del rango della matrice incompleta e della matrice completa.

10. Saper studiare un sistema lineare (esistenza di soluzioni, loro eventuale unicità, eventuale dimensione dello spazio delle soluzioni) al variare di eventuali parametri che compaiono nel sistema stesso.

3.4 Geometria analitica

1. Saper svolgere le operazioni elementari tra vettori: somma, differenza, prodotto di un vettore per una costante, e saper interpretare tali operazioni in termini geometrici.

2. Saper calcolare il prodotto scalare tra due vettori, la norma di un vettore, e la distanza tra due vettori.

3. Saper operare algebricamente con prodotti scalari, norme, distanze, conoscendo le principali proprietà e le relazioni tra questi oggetti.

4. Saper calcolare l'angolo formato da due vettori mediante norme e prodotti scalari. Essere consapevoli che, se si pensa in termini di direzioni, ci sono due possibili angoli, che differiscono di π, e sapere come questa differenza si traduce nelle formule.

5. Saper utilizzare le coordinate polari nel piano, e passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari.

6. Saper passare dall'equazione cartesiana (implicita od esplicita) di una retta del piano a quella parametrica. Saper intepretare geometricamente i parametri che compaiono nelle varie equazioni.

7. Saper decidere se due rette del piano (presentate in vario modo) sono coincidenti, parallele o incidenti. Se sono parallele, saper determinare la distanza tra le stesse. Se sono incidenti, saper determinare il punto d'intersezione e l'angolo che formano.

8. Saper scrivere, sia in forma cartasiana sia in forma parametrica, l'equazione della retta del piano che passa per un punto dato e che è parallela o perpendicolare ad una retta data.

9. Saper scrivere, sia in forma cartasiana sia in forma parametrica, l'equazione delle rette del piano che passano per un punto dato e che formano un angolo assegnato con una retta data.

10. Saper determinare, nel piano, la distanza di un punto dato da una retta data.

11. Saper decidere se 3 punti nel piano, nello spazio, o più in generale in $\mathbb{R}^n$, sono allineati.

12. Saper decidere se 4 punti nello spazio, o più in generale in $\mathbb{R}^n$, appartengono ad uno stesso piano (sottospazio affine di dimensione 2).

13. Saper passare dall'equazione cartesiana (implicita od esplicita) di un piano nello spazio a quella parametrica.

14. Saper scrivere, nello spazio, l'equazione del piano che soddisfa opportune richieste: passare per 3 punti, passare per un punto e contenere una data retta, passare per un punto ed essere perpendicolare ad una data retta, o formare con essa un dato angolo.

15. Saper scrivere, nello spazio, l'equazione della retta che soddisfa opportune richieste: passare per due punti dati, passare per un punto ed essere parallela ad una retta data, passare per un punto ed essere perpendicolare ad un piano dato.

16. Saper determinare, nello spazio, la distanza di un punto dato da un piano assegnato.

17. Saper determinare, nello spazio, la distanza di un punto dato da una retta assegnata.

18. Saper decidere se due piani dello spazio (presentati in vario modo) sono coincidenti, paralleli o incidenti. Se sono paralleli, saper determinare la distanza tra i piani stessi. Se sono incidenti, saper determinare la retta d'intersezione (descrivendola in vari modi) e l'angolo che formano.

19. Saper decidere se una retta data nello spazio, rispetto ad un piano dato nello spazio, è contenuta, parallela o incidente. Se è parallela, saper determinare la distanza. Se è incidente, saper determinare il punto di intersezione e l'angolo che formano.

20. Saper decidere se due rette nello spazio sono coincidenti, parallele, incidenti o sghembe. Se sono parallele, saper determinare la distanza tra di esse. Se sono incidenti, saper determinare il punto di intersezione e l'angolo che formano. Se sono sghembe, saper determinare la minima distanza tra di esse.

21. Date due rette sghembe nello spazio, saper trovare il piano che contiene una ed è parallelo all'altra.

22. Saper trovare, nello spazio, un vettore perpendicolare a 2 vettori assegnati. Saper trovare, in $\mathbb{R}^n$, un vettore perpendicolare ad $(n-1)$ vettori assegnati.

23. Dati 3 punti nel piano, nello spazio, o più in generale in $\mathbb{R}^n$, saper determinare gli elementi geometrici più comuni del triangolo di cui sono vertici: i punti medi dei lati, il baricentro, i piedi delle altezze, l'ortocentro, il circocentro, le lunghezze dei lati, le ampiezze degli angoli, l'area.

24. Saper scrivere le equazioni di circonferenze nel piano e sfere nello spazio, intepretandole in termini di norma e distanza.

25. Saper scrivere le equazioni di circonferenze e sfere che soddisfano opportuni requisiti: avere centro e raggio assegnati, passare per opportuni punti, essere tangenti ad opportune rette o piani.

3.4.1 Trasformazioni affini e isometrie

1. Saper riconoscere se una data trasformazione affine rappresenta un'isometria.

2. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta l'omotetia di un dato fattore rispetto all'origine.

3. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta l'omotetia di un dato fattore rispetto ad un punto dato.

4. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto ad una retta data passante per l'origine.

5. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto ad una retta data non passante per l'origine.

6. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno all'origine.

7. Saper scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno ad un dato punto.

8. Data un'affinità nel piano, saper determinare dove vanno a finire punti o rette dati.

9. Data un'isometria del piano, saper determinare di cosa si tratta (sulla base della classificazione).

10. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta l'omotetia di una dato fattore rispetto ad un punto dato.

11. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta la simmetria rispetto ad una retta data passante per l'origine.

12. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta la simmetria rispetto ad un piano dato passante per l'origine.

13. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta la simmetria rispetto ad un piano dato non passante per l'origine.

14. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno ad una retta passante per l'origine.

15. Saper scrivere la trasformazione dello spazio che rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno ad una retta non passante per l'origine.

16. Data un'affinità nello spazio, saper determinare dove vanno a finire punti, rette o piani dati.

17. Data un'isometria dello spazio, saper determinare di cosa si tratta (sulla base della classificazione).

18. Saper calcolare la composizione di isometrie e più in generale di affinità.

Capitolo 4

Scritti d'esame

[Spiegare il significato di questo capitolo]

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 09 Novembre 2013

---

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (0, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, 3), \qquad D = (0, 1, 1).$$

   (a) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

   (b) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia ABD.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (0, 2, 3) \qquad v_2 = (-1, 0, 1) \qquad v_3 = (1, 1, 1).$$

   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_2 - v_3, \qquad f(v_3) = v_3 - v_1.$$

   (b) Scrivere la matrice associata ad f nella base canonica.

   (c) Trovare la dimensione ed una base per il ker e l'immagine di f.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 3. Consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(0) = p(2) \text{ e } p(1) = 0\right\}, \qquad W = \operatorname{Span}\left\{x^2 + 1, x\right\}.$$

   Determinare la dimensione ed una base di V, W, $V + W$, $V \cap W$.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} y + z &= -1 \\ 3x + 4y + 5z &= 2 \\ 6x + 7y + \lambda z &= 5 \end{aligned}$$

   dove λ è un parametro reale.

   (a) Risolvere il sistema nel caso particolare $\lambda = 0$.

   (b) Determinare per quali valori di λ il sistema ammette un'unica soluzione.

   (c) Determinare cosa accade per i restanti valori di λ.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 17 Novembre 2013

---

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (2, 3, 4), \qquad C = (-1, 2, 3).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB.
   Determinare l'intersezione tra r ed il piano xz e l'angolo che formano.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}.$$

   (a) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

   (b) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = -v$ per ogni $v \in V$ e $f(w) = 3w$ per ogni $w \in W$. Determinare quindi la matrice associata ad f nella base canonica.

3. Sia $M_{3\times 3}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3, e sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che l'insieme delle matrici $A \in M_{3\times 3}$ tali che $AB = 0$ è un sottospazio vettoriale, quindi determinarne una base e la dimensione.

   (b) Dimostrare che esiste una matrice B per cui il sottospazio descritto al punto precedente ha dimensione 6.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 3x - y + 2z &= b \\ y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

   dove a e b sono parametri reali.

   (a) Determinare, al variare dei parametri a e b, il numero di soluzioni del sistema.

   (b) Nei casi in cui il sistema ammette più di una soluzione, determinare l'insieme delle soluzioni.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Novembre 2013

---

1. Consideriamo le seguenti tre condizioni:

$$f(1,-2,3) = (1,0,\alpha), \qquad f(1,0,\beta) = (2,3,4), \qquad f(1,\beta,1) = (3,4,5).$$

   (a) Discutere, al variare dei parametri reali α e β, l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che verifica le tre proprietà.

   (b) Nei casi in cui l'applicazione esiste, determinare, sempre in funzione di α e β, la dimensione del nucleo di f.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (0,2,3) \qquad v_2 = (-1,0,1) \qquad v_3 = (1,1,1).$$

   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_2 - v_3, \qquad f(v_3) = v_3 - v_1.$$

   (b) Scrivere la matrice associata ad f nella base canonica.

   (c) Trovare la dimensione ed una base per il ker e l'immagine di f.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 3. Consideriamo i sottospazi

$$V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(0) = p(2) \text{ e } p(1) = 0 \right\}, \qquad W = \operatorname{Span}\left\{ x^2+1, x \right\}.$$

   Determinare la dimensione ed una base di V, W, $V+W$, $V \cap W$.

4. Scrivere un sistema di 5 equazioni in 4 incognite che verifica contemporaneamente le seguenti due condizioni:

   - nessuna equazione del sistema è multipla di un'altra equazione del sistema,
   - la soluzione del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(x,y,z,w) = (t+3, 2t-1, t-4, 5t-2).$$

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 16 Dicembre 2013

---

1. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $P = (2, 1)$ e $Q = (4, 4)$ e la retta r di equazione $5x + y + 2 = 0$.
   (a) Determinare quale punto si ottiene ruotando Q di 45° in senso antiorario intorno al punto P.
   (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando r di 45° in senso antiorario intorno al punto P.
   (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad r e poi la simmetria rispetto all'asse y.

2. Consideriamo la forma quadratica
$$q(x, y, z) = y^2 + 2xy - 6yz + axz,$$
   in cui a è un parametro reale.
   (a) Nel caso $a = 1$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 su cui la forma risulta definita positiva.
   (b) Determinare la segnatura della forma al variare del parametro a.

3. Sia b un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che
$$f(1, 2) = (6, b), \qquad f(1, 3) = (8, b + 5).$$
   (a) Determinare per quali valori di b l'applicazione f ammette una base ortonormale di autovettori, ed in tali casi determinare una tale base.
   (b) Determinare per quali valori di b l'applicazione f è diagonalizzabile sui reali.
   (c) Determinare per quali valori di b l'applicazione f *non* è diagonalizzabile sui complessi, ed in tali casi determinare la sua forma di Jordan reale.

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.
   (a) Dimostrare che la formula
$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + 3p(1)q(1) + 5p(2)q(2)$$
   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
   (b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
   (c) Determinare una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Dicembre 2013

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il triangolo con vertici nei punti
$$A = (1,1,0,0), \qquad B = (2,0,3,1), \qquad C = (-1,0,2,-1).$$
   (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza uscente dal vertice A.
   (b) Determinare l'area del triangolo.
   (c) Determinare una rappresentazione cartasiana del sottospazio affine di dimensione 2 (in poche parole, il piano) che contiene il triangolo ABC.

2. Consideriamo, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $z = x - 2y$.
   (a) Determinare l'espressione della simmetria.
   (b) Determinare l'immagine del piano $x + y - 3z = 0$,
   (c) Determinare quale isometria dello spazio si ottiene facendo prima tale simmetria e poi la simmetria centrale rispetto al punto $(2, 3, 0)$.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da
$$p(x) \to (x+2)p'(x).$$
   (a) Determinare la dimensione del ker e dell'immagine dell'applicazione.
   (b) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.
   (c) Determinare l'intersezione tra l'immagine e l'insieme dei polinomi dispari (cioè quelli tali che $p(-x) = -p(x)$).

4. Consideriamo la matrice $B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.
   (a) Determinare, al variare del parametro a, la segnatura del prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata nella base canonica è B_a.
   (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una matrice M tale che $M^t B_0 M$ sia l'identità.
   (c) Determinare, se esistono, i valori di a per cui esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^t B_a M$ sia l'identità.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Simulazione scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 31 Dicembre 2013

---

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (2, -1, 2)$ e $B = (2, 3, 0)$.
   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene A e B e non interseca la retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$.
   (b) Siano C e D punti appartenenti al piano precedente e tali che $ABCD$ sia un quadrato. Determinare le possibili coordinate di C e D.

2. Sia r la retta del piano che passa per $A = (-1, 3)$ e per $B = (3, 4)$.
   (a) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r' che passa per B, ha coefficiente angolare positivo, e forma con r un angolo θ tale che $\cos(\theta) = 3/5$.
   (b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r'', simmetrica di r rispetto ad r'.
   (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad r' e poi la simmetria centrale rispetto ad A.

3. Consideriamo le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che la matrice A è simile alla matrice B.
   (b) Nei casi in cui A è simile a B, determinare una matrice invertibile M che realizza la similitudine.

4. Sia $V = \operatorname{Span}\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari delle cinque funzioni indicate.
   (a) Dimostrare che la funzione $\sin^2 x$ appartiene a V.
   (b) Dimostrare che la formula
$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$
   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in V, e determinare quindi una base ortonormale rispetto a tale prodotto.
   (c) Dimostrare che la formula $f(x) \to f'(x)$ definisce un'applicazione lineare da V in V, e determinare gli autovalori (eventualmente complessi) di tale applicazione lineare.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 08 Gennaio 2014

1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, 0), \qquad D = (0, 1, 1).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.

   (c) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia BCD.

2. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 1 \\ 2x + \lambda z &= 1 \\ y + 4z &= \mu \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori *reali* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori *complessi* dei parametri λ e μ il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to (x + 1)p'(x) + p(2).$$

   (a) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.

   (b) Determinare la forma canonica di Jordan dell'applicazione ed una base nella quale la matrice assume tale forma.

4. Consideriamo la seguente forma quadratica in $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = 16x^2 + 6y^2 + z^2 + 2yz - 2\alpha xy.$$

   (a) Nel caso particolare $\alpha = 9$, determinare (fornendo esplicitamente delle basi costituite da vettori a coordinate intere) un sottospazio W_+ di dimensione 2 su cui la forma è definita positiva, ed un sottospazio W_- di dimensione 1 su cui la forma è definita negativa.

   (b) Determinare, al variare di α, la segnatura della forma quadratica.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 27 Gennaio 2014

---

1. Consideriamo i seguenti 4 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, 0), \qquad D = (0, 1, 1).$$

   (a) Determinare il punto del piano ABC più vicino a D.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali λ e μ, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ y + \lambda z &= \mu \\ 2x + 3y - \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo le seguenti 3 condizioni:

$$f(0, 1, 1) = (1, 2, 3), \qquad f(2, -1, 0) = (0, 1, 0), \qquad f(0, 0, 1) = (-1, 3, -3).$$

   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte.

   (b) Determinare la dimensione ed una base per il nucleo e l'immagine di f.

   (c) Determinare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo).

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, il punto $P = (2, -1)$ e la retta r di equazione $x - 2y + 5 = 0$.

   (a) Scrivere la trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di 90° in senso *orario* intorno al punto P.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta r.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana della retta la cui immagine è la retta r.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 15 Febbraio 2014

---

1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, -3).$$

   (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare il punto di intersezione e l'angolo formato tra r ed il piano $x - y = 0$.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x - y + bz &= 2 \\ 3x + 2z &= 5 \end{aligned}$$

   Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

   (a) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 5$. Per tali valori di A, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

   (b) Determinare per quali valori di a esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, ed in tal caso determinare tale matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W di equazione cartesiana $x+y-2z = 0$ ed il prodotto scalare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare rappresentato da B) costituita da vettori a coordinate intere.

   (c) Determinare $W^{\perp}$ (sempre rispetto al prodotto scalare di matrice B).

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 14 Giugno 2014

---

1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (0, -1, 1), \qquad C = (2, 0, 1).$$

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto C e perpendicolare alla retta AB.

   (b) Determinare la distanza tra il punto A e la retta BC.

   (c) Determinare l'ampiezza dell'angolo che il piano ABC forma con il piano xy.

2. Consideriamo la forma quadratica in $\mathbb{R}^4$

$$q(x, y, z, w) = y^2 + z^2 + 4xy + 6xw.$$

   (a) Determinare un vettore v a coordinate intere tale che $q(v) < 0$ ed un vettore w a coordinate intere (e non nullo) tale che $q(w) = 0$.

   (b) Determinare la segnatura della forma quadratica.

   (c) Sia $W = \mathrm{Span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ e sia $W^\perp$ l'ortogonale di W rispetto al prodotto scalare associato alla forma q.
   Determinare una base di $W^\perp$ costituita da vettori a coordinate intere.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 05 Luglio 2014

---

1. Consideriamo, nello spazio, il piano di equazione $y = x + 2z$ ed il punto $P = (1, 1, 1)$.
   (a) Determinare il punto del piano più vicino a P.
   (b) Determinare l'angolo formato dal piano e dalla retta che passa per P e per l'origine.
   (c) Scrivere l'espressione della trasformazione dello spazio che rappresenta la simmetria rispetto al piano dato.

2. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & a \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.
   (a) Determinare per quali valori di a l'applicazione lineare associata ad A (pensata rispetto alla base canonica) *non* è iniettiva.
   (b) Per i valori di a di cui al punto precedente, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine dell'applicazione.
   (c) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = -2$, e per tali valori di a determinare il relativo autospazio.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 08 Gennaio 2015

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (2, 3, 1), \qquad C = (-1, 1, 0), \qquad D = (0, 2, 1).$$

   (a) Determinare la distanza di B dal piano ACD.

   (b) Determinare il punto della retta AC più vicino a B.

   (c) Determinare la mutua posizione delle rette AB e CD.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2z &= 7 \\ y + 2w &= b \\ x + y + 2z + aw &= 5 \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori dei parametri l'insieme delle soluzioni ha dimensione massima, ed in tal caso determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo le quattro matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Tre delle quattro matrici sono simili tra loro. Determinare l'intrusa.

   (b) Determinare la forma canonica di Jordan della prima matrice (quella a sinistra) ed una matrice di cambio di base che la porta in tale forma.

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la rotazione di $60°$ in senso orario intorno al punto $(2, 1)$.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta di equazione $x+2y = 1$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 26 Gennaio 2015

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici in

$$A = (1, 2, 4), \qquad B = (1, 0, 3), \qquad C = (-1, 1, 1).$$

   (a) Calcolare l'area del triangolo.

   (b) Determinare se si tratta di un triangolo acutangolo, rettangolo o ottusangolo.

   (c) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B.

2. Consideriamo, al variare del parametro reale a, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 2x + ay + 8z &= 0 \\ ax + 8y + 16z &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Dimostrare che per $a = -8$ il sistema ha infinite soluzioni, e descrivere esplicitamente l'insieme di tali soluzioni.

   (b) Determinare per quali altri valori di a il sistema ha soluzione non unica, e risolvere esplicitamente il sistema per tali valori di a.

3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da $f(A) = 2A + 3A^t$ per ogni $A \in V$.

   Dimostrare che f è diagonalizzabile e determinare una base di V rispetto alla quale f assume la forma diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio W di equazione cartesiana $x + y + z = 0$.

   (c) Determinare una base di $W^\perp$.

   (La base ortogonale e $W^\perp$ si intendono ovviamente rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice data)

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 14 Febbraio 2015

---

1. Consideriamo nello spazio i tre punti

$$A = (1, 1, 1), \qquad B = (1, 1, 0), \qquad C = (3, 2, -1).$$

   (a) Determinare il punto di intersezione tra la retta AC ed il piano yz, e l'ampiezza dell'angolo che formano.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa C e per l'origine, ma non interseca la retta AB.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 3 - z \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x - z &= b \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzione.

   (c) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha più di una soluzione, ed in tal caso risolvere esplicitamente il sistema.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che A è simile ad una matrice diagonale.

   (b) Determinare la matrice diagonale simile ad A ed una matrice di cambio di base che realizza la similitudine.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz.$$

   (a) Nel caso $a = 1$, determinare la segnatura della forma quadratica.

   (b) Sempre nel caso $a = 1$, determinare (descrivendolo come span) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma risulti definita positiva.

   (c) Determinare per quali valori di a la forma quadratica è definita positiva.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 08 Giugno 2015

---

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (1,0,1), \qquad B = (0,1,1), \qquad C = (1,1,0), \qquad D = (1,2,3).$$

   (a) Determinare la distanza di D dal piano ABC.

   (b) Determinare l'angolo che il piano ABC forma con il piano ABD.

   (c) Determinare la distanza del punto C dalla retta AB.

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   in cui a è un parametro reale.

   (a) Determinare, in funzione di a, una base del nucleo di f.

   (b) Determinare per quali valori di a la matrice ammette l'autovalore $\lambda = 1$, ed in tal caso determinare il corrispondente autospazio.

   (c) Per i valori di a di cui al punto precedente, determinare la forma di Jordan di A.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 29 Giugno 2015

---

1. Consideriamo nel piano cartesiano la retta r di equazione $x - 3y = 4$ ed il punto $P = (-1, 1)$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del simmetrico dell'asse y rispetto alla retta r.

   (b) Scrivere l'espressione che rappresenta la rotazione di $120°$ in verso orario intorno al punto P.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q(x, y, z) = ax^2 + y^2 + 2z^2 + 8xy + 2yz,$$

   dove a è un parametro reale. Sia poi W il sottospazio generato da $(1, -1, 1)$.

   (a) Determinare per quali valori di a la forma è definita positiva.

   (b) Nel caso $a = 1$, determinare una base ortogonale di $W^\perp$ costituita da vettori a coordinate intere (l'ortogonale si intende rispetto al prodotto scalare a cui la forma data risulta associata).

   (c) Determinare, sempre nel caso $a = 1$, la segnatura della restrizione della forma a $W^\perp$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 21 Gennaio 2019

1. Consideriamo i seguenti cinque punti nello spazio:

$$A = (0,1,0), \qquad B = (1,1,0), \qquad C = (1,2,3), \qquad D = (0,0,1), \qquad E = (-1,0,-2).$$

   (a) Determinare il punto di intersezione tra il piano passante per A, B e C e la retta passante per D ed E.

   (b) Determinare l'angolo formato dalla retta e dal piano del punto precedente.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 7, \\ 3x + ay + 4z = 8, \\ 3x + y + 2z = b. \end{cases}$$

   (a) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione unica.

   (b) Determinare per quali valori reali di a e b il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\}$$

   ed il sottospazio V generato dal vettore $(3,2,1)$.

   (a) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

   (b) Determinare le componenti del vettore $(1,1,1)$ rispetto a tale somma diretta.

   (c) Determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione su W in tale somma diretta.

4. (a) Scrivere l'espressione della simmetria centrale rispetto al punto $(3,2)$ del piano.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ rispetto a tale simmetria.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 23 Febbraio 2019

---

1. Consideriamo i seguenti tre punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (4, 5, 6), \qquad C = (7, 7, 7).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

2. Consideriamo, nello spazio, la retta r di equazione

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4, \\ 2x - z = 3, \end{cases}$$

   ed il piano π di equazione $ax + y + z = b$.

   (a) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, il numero di intersezioni tra la retta r ed il piano π.

   (b) Nei casi in cui le intersezioni sono infinite, descrivere parametricamente l'insieme delle intersezioni.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to p(2x) - p(2) \cdot x^2.$$

   (a) Determinare nucleo e immagine dell'applicazione.

   (b) Determinare la forma canonica dell'applicazione, ed una base nella quale la matrice associata all'applicazione assume tale forma.

4. Consideriamo il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a il prodotto scalare risulta definito positivo.

   (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto scalare) del sottospazio di equazione $x + y - z = 0$ costituita da vettori a coordinate intere.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 08 Giugno 2019

(Domande da 4 punti)

[T1] Definizione di sistema di generatori per uno spazio vettoriale.

[T2] Rapporti tra autovalori e polinomio caratteristico: enunciato e dimostrazione.

[B1] Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(1, 2, 3)$ e perpendicolare alla retta di equazione parametrica $(-t + 1, 2t + 3, t - 4)$.

[B2] Determinare la segnatura della forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 + yz.$$

(Domande da 8 punti)

[L1] Nel piano cartesiano, indichiamo con R la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(2, -1)$, e con S la simmetria rispetto alla retta di equazione $x + 2y = 3$.

(a) Determinare l'espressione analitica di R.

(b) Determinare l'espressione analitica di S.

(c) Stabilire che tipo di trasformazione è la composizione $S \circ R$, ottenuta facendo prima R e poi S.

[L2] Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la forma canonica di A ed una matrice di cambio di base che porta A in tale forma canonica.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Giugno 2019

(Domande da 4 punti)

[T1] Definizione di autovalore, autovettore, autospazio.

[T2] Se un'applicazione lineare è iniettiva, cosa possiamo dire degli spazi di partenza ed arrivo? Perché?

[B1] Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ e $(1,2,3)$ dello spazio.

[B2] Determinare la forma canonica di Jordan complessa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Domande da 8 punti)

[L1] Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ 3x - z = 2 \\ y + 4z = b \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il sistema non ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tal caso determinare esplicitamente le soluzioni stesse.

[L2] Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che B è definita positiva.

(b) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito da tutti i vettori ortogonali a $(1,1,1)$ rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice B.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 15 Luglio 2019

(Domande da 4 punti)

[T1] Definizione di R-rango, C-rango, D-rango di una matrice.

[T2] Definizione di somma di due sottospazi vettoriali e dimostrazione che si tratta a sua volta di un sottospazio vettoriale.

[B1] Determinare l'espressione analitica della rotazione di 90° in verso orario intorno al punto $(3, 4)$ del piano cartesiano.

[B2] Determinare per quali valori del parametro reale a vale la disuguaglianza

$$2x^2 + ay^2 \geq 14xy \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(Domande da 8 punti)

[L1] Consideriamo nello spazio i punti $P = (5, 1, 0)$, $Q = (6, 1, 0)$, ed il piano π di equazione $x - 2y + 3z = 7$.

(a) Determinare la proiezione di P su π.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per P e Q e perpendicolare a π.

[L2] Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 21 Settembre 2019

(Domande da 4 punti)

[T1] Componenti di un vettore rispetto ad una base. Dimostrazione della loro esistenza e unicità.

[T2] Se due matrici sono simili, cosa possiamo dire dei loro polinomi caratteristici? Perché?

[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$$

ammette soluzione unica.

[B2] Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Domande da 8 punti)

[L1] Determinare l'espressione analitica della trasformazione che rappresenta, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $x + 2z = 0$.

[L2] Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy.$$

(a) Determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui $q(x, y, z)$ risulta definita positiva.

(b) Determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui $q(x, y, z)$ risulta definita negativa.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 11 Gennaio 2020

(Domande da 4 punti)

[T1] Il prodotto di due matrici $n \times n$ ortogonali è ancora una matrice ortogonale? Se sì, fornire una dimostrazione; se no, fornire un controesempio.

[T2] Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita, con $\dim(V) > \dim(W)$, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Cosa possiamo concludere in termini di iniettività/surgettività? Perché?

[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a il vettore $(1, 1)$ risulta autovettore della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}.$$

[B2] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ che abbia come ker il sottospazio

$$\operatorname{Span}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

(Domande da 8 punti)

[L1] Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (0, 1, 1), \qquad D = (1, 1, 1).$$

Determinare l'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

[L2] Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + 2y + az = 8, \\ 2x + ay - z = 9. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale a il sistema ammette soluzioni.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale a l'insieme delle soluzioni del sistema *non* interseca il piano di equazione $x + y + z = 0$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 01 Febbraio 2020

(Domande da 4 punti)

[T1] Che cosa possiamo dire di due autovettori di un'applicazione lineare simmetrica corrispondenti ad autovalori distinti? Perché?

[T2] Che cosa possiamo dire di un sistema lineare *omogeneo* se la matrice dei coefficienti ha le *colonne* linearmente indipendenti? Perché?

[B1] Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

risulta diagonalizzabile

[B2] Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Determinare la matrice che rappresenta l'applicazione f nella base $\{(1, 2), (1, 3)\}$ (usata in partenza ed arrivo).

(Domande da 8 punti)

[L1] Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(7, 2)$.

(a) Determinare l'immagine della retta $y = x + 1$.

(b) Determinare la controimmagine della retta $2x + 3y = 5$.

[L2] Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2axy - 2yz.$$

(a) Studiare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

(b) Nel caso particolare $a = 2$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto breve d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 22 Febbraio 2020

(Domande da 4 punti)

[T1] Definizione di componenti di un vettore rispetto ad una somma diretta e dimostrazione della loro esistenza e unicità.

[T2] Enunciare e dimostrare la relazione tra il determinante di una matrice ed il determinante della sua inversa.

[B1] Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, costituita da vettori a coordinate intere, che comprenda il vettore $(1, 2, 3)$.

[B2] Nel piano cartesiano, scrivere l'espressione analitica dell'omotetia che lascia fisso il punto $(2, 1)$, e manda l'origine nel punto $(-4, -2)$.

(Domande da 8 punti)

[L1] Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i punti

$$A = (1, 1, 0, 0), \qquad B = (0, 0, 1, 1), \qquad C = (1, 2, 3, 4).$$

(a) Determinare l'equazione dell'iperpiano passante per C e perpendicolare alla retta AB.

(b) Determinare l'area del triangolo ABC.

[L2] Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 4z, 2x + 3y - 4z).$$

(a) Determinare il ker di f.

(b) Determinare una rappresentazione cartesiana (cioè mediante equazioni) dell'immagine di f.

(c) Determinare l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettore $(1, 2, 2)$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 22 Gennaio 2022

---

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (1, 0, 1), \qquad C = (2, 1, 0), \qquad D = (-1, 1, 1).$$

   (a) Determinare la distanza tra il punto A e il piano passante per B, C e D.

   (b) Determinare la distanza tra il punto D e la retta passante per A e B.

   (c) Determinare la distanza tra la retta passante per A e B e la retta passante per C e D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z, w))

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= a, \\ y + 2z &= 2, \\ x - z + bw &= 5. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b l'insieme delle soluzioni del sistema ha dimensione massima, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare, al variare del parametro reale a, una base del Ker della matrice.

   (b) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.

   (c) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale, ed in tali casi determinare una possibile matrice ortogonale che la diagonalizza.

4. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 6xy + 4yz.$$

   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la forma quadratica è definita positiva.

   (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare la segnatura della forma quadratica ristretta al sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 26 Febbraio 2022

---

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (2, 3, 1), \qquad B = (-1, 0, 3), \qquad C = (1, -1, 0).$$

   (a) Determinare il seno dell'angolo in B, precisando se si tratta di un angolo acuto o ottuso.

   (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice B.

   (c) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B e C.

2. Consideriamo, nello spazio, la retta r passante per i punti $(1, 0, 1)$ e $(2, -1, 0)$, ed il piano π di equazione $ax + 2y - 3z = b$.

   (a) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la posizione relativa della retta r e del piano π.

   (b) Determinare la simmetrica della retta r rispetto al piano $x = 3$.

3. Sia $M_{2\times2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare se f è iniettiva e/o surgettiva.

   (b) Determinare autovalori e autospazi di f.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2xy - 2yz.$$

   (a) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita positiva.

   (b) Determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la restrizione della forma quadratica è definita negativa.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 11 Giugno 2022

---

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti

$$A = (2, 1, 0), \qquad B = (0, 2, 3), \qquad C = (1, 1, 1), \qquad D = (1, -1, 0).$$

   (a) Determinare il punto del piano passante per A, B, C più vicino a D.

   (b) Determinare il volume del tetraedro con vertici nei quattro punti.

   (c) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per i punti B, C, D.

2. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

   (a) rappresenta un'applicazione lineare surgettiva,

   (b) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,

   (c) ammette $(1, 1, 1)$ come autovettore.

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 4xy + y^2 + bz^2.$$

   (a) Determinare la segnatura al variare del parametro reale b.

   (b) Nel caso $b = -1$ determinare un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica è definita negativa.

   (c) Sia V il sottospazio generato dei vettori $(1, 2, 3)$ e $(1, 0, 1)$. Determinare per quali valori del parametro reale b la restrizione della forma quadratica a V è definita positiva.

4. Nel piano cartesiano, sia R_1 la rotazione di $90°$ in senso orario intorno al punto $(-2, 1)$, e sia R_2 la rotazione di $90°$ in senso antiorario intorno all'origine.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $y = 2x$ mediante R_1.

   (b) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene applicando prima R_1 e poi R_2.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 2 Luglio 2022

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti punti
$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (-1, 0, 1), \qquad C = (0, 0, 2), \qquad D = (1, -1, 0).$$
   (a) Determinare la distanza del punto C dalla retta BD.
   (b) Determinare il seno dell'angolo in A nel triangolo ABC.
   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per i punti A e B, e non interseca la retta CD.

2. Consideriamo i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da
$$V = \mathrm{Span}\left((1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)\right), \qquad W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z,\ y = w\right\}.$$
   (a) Determinare una base di $V + W$ e $V \cap W$.
   (b) Determinare una base ortogonale di $W^\perp$ (dove gli ortogonali sono intesi rispetto al prodotto scalare canonico).

3. Consideriamo la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice è diagonalizzabile sui reali.
   (b) Determinare, al variare del parametro reale a, la forma di Jordan reale della matrice.

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.
   (a) Dimostrare che la formula
$$\langle p(x), q(x) \rangle = 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + 3p(-1)q(-1)$$
   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
   (b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
   (c) Determinare una base ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 23 Luglio 2022

1. Consideriamo nello spazio il piano di equazione $x + 2y - 4z = 5$, il punto $P = (0, 1, 1)$ e il punto $Q = (1, a, b)$.

   (a) Determinare il punto del piano più vicino a P.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo che il piano forma con la retta passante per l'origine ed il punto P.

   (c) Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la mutua posizione del piano e della retta PQ.

2. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definita da

$$p(x) \to p(2x + 1).$$

   Determinare la forma canonica dell'applicazione, ed una base in cui la matrice associata all'applicazione assume tale forma canonica.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 17 Settembre 2022

---

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (3, 2, 1), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (-1, 0, 0).$$

   (a) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana di due piani che hanno come intersezione la retta AB.

2. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

   (a) è invertibile,

   (b) è invertibile con inversa a coefficienti interi,

   (c) ammette l'autovalore $\lambda = 4$,

   (d) è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale (ed in tal caso determinare tale matrice ortogonale).

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 14 Gennaio 2023

---

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (-1, -2, 4), \qquad B = (0, 1, 1), \qquad C = (2, 0, 1).$$

   (a) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (b) Determinare l'intersezione tra la retta AB e il piano che passa per C ed è parallelo al piano di equazione $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa per l'origine e per il punto C, ma non interseca la retta AB.

2. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due sottospazi

$$V = \operatorname{Span}((1, 0, 1, 0), (0, -2, 1, -3)),$$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = y + z + w = 0\}.$$

   (a) Determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, di W e di $W^\perp$.

   (b) Determinare una base di $V + W$ e di $V \cap W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo nel piano il punto $P = (1, 2)$ e la retta r di equazione $x + 3y = 4$.

   (a) Determinare i seni degli angoli acuti del triangolo rettangolo che la retta r forma con gli assi cartesiani.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando r di $90°$ in senso orario intorno al punto P.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana delle rette che passano per il punto P e formano con r un angolo θ tale che

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 4 Febbraio 2023

---

1. Consideriamo nello spazio i quattro punti
$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (-1, 0, 1), \qquad C = (0, 0, 2), \qquad D = (1, -1, 0).$$
   (a) Determinare il volume del tetraedro che ha i quattro punti come vertici.
   (b) Determinare la distanza tra la retta AB e la retta CD.
   (c) Determinare il simmetrico del punto A rispetto al piano passante per B, C, D.

2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da
$$p(x) \mapsto p(x+1) - p(x-1).$$
   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.
   (b) Determinare gli autovalori di f, con le relative molteplicità algebriche e geometriche.
   (c) Determinare la forma canonica di f, e una base in cui f assume tale forma canonica.

3. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo la forma quadratica
$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xz.$$
   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.
   (b) Nel caso particolare $a = -1$, determinare (esibendone esplicitamente una base) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma quadratica risulta definita negativa.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 18 Febbraio 2023

---

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1,2,3), \qquad B = (1,0,1), \qquad C = (2,1,0), \qquad D = (-1,1,1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta AB forma con il piano passante per B, C, D.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABD.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta AB ed è perpendicolare al piano passante per B, C, D.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x,y,z))

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ 3x + y - 2z &= b, \\ x + ay + 6z &= 4. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ammette soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ammette infinite soluzioni, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale (rispetto a questo prodotto) del sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

   (c) Determinare una matrice M tale che M^tBM sia l'identità.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 10 Giugno 2023

---

1. Consideriamo nello spazio la retta r che passa per il punto $(0, 1, 1)$ ed il punto $(a, 2, 3)$. Determinare per quali valori del parametro reale a la retta r
   (a) interseca il piano xy (cioè il piano che contiene l'asse x e l'asse y),
   (b) è parallela al piano $3x + y + 4z = 7$,
   (c) forma con il piano di equazione $x - z = 0$ un angolo θ tale che
   $$\cos\theta = \sqrt{\frac{27}{28}}.$$

2. Consideriamo la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A
   (a) è diagonalizzabile sui reali,
   (b) è diagonalizzabile sui complessi,
   (c) rappresenta un'applicazione lineare non iniettiva (in tal caso determinare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale).

3. (a) Determinare una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che
   $$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + 8yw < 0.$$
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale a esiste una quaterna $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tale che
   $$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5w^2 + 2xz + ayw < 0.$$

4. (a) Scrivere l'espressione della trasformazione del piano che rappresenta la simmetria rispetto alla retta $y = 2x + 1$.
   (b) Determinare l'immagine e la controimmagine dell'asse y rispetto a tale trasformazione.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 13 Gennaio 2024

---

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (0, 1, 2), \qquad B = (3, -1, 0), \qquad C = (1, 1, 1).$$

   (a) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (c) Determinare il punto della retta AC più vicino all'asse x.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} x + ay + 4z &= 4, \\ x - z &= 7, \\ y + 5z &= b. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ha soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha soluzione unica.

   (c) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha infinite soluzioni, ed il tali casi determinare anche l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

   (b) Nel caso particolare $a = 7/4$, determinare una terna di numeri interi (x, y, z) tali che $q(x, y, z) < 0$.

4. Consideriamo, nello spazio $\mathbb{R}^3$, il piano p di equazione $x - y + 3z = 0$ e il punto $Q = (1, -2, 4)$.

   (a) Scrivere la matrice che, rispetto alla basa canonica, rappresenta la proiezione ortogonale su p.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine di p quando si esegue la simmetria centrale rispetto a Q.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 27 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti
$$A = (4, 3, 7), \qquad B = (-2, 5, -1), \qquad C = (1, -1, -1).$$
   (a) Determinare il seno dell'angolo in C, precisando se si tratta di una angolo acuto o ottuso.
   (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.
   (c) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra l'altezza uscente dal vertice A e la mediana uscente dal vertice B (la mediana è la retta che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto).

2. Consideriamo, al variare dei parametri reale a e b, le tre rette nel piano di equazione
$$x + y = b, \qquad ax + 3y = 7, \qquad 5x - y = 8.$$
   (a) Stabilire per quali valori di a e di b le prime due rette formano un angolo di $30°$.
   (b) Nel caso particolare $b = 4$, determinare per quali valori di a le tre rette hanno un punto in comune.
   (c) Determinare, in funzione di b, quanti sono i valori di a per cui le tre rette hanno un punto in comune.

3. Consideriamo, al variare del parametro reale a, la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
   (a) Nel caso particolare $a = 3$, trovare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.
   (b) Determinare per quali valori di a la matrice A ha tre autovalori reali distinti.
   (c) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali.

4. Consideriamo il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da
$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = x - z - w = 0 \right\}.$$
   (a) Determinare una base ortogonale di W ed una base ortogonale di $W^\perp$, entrambe costituite da vettori a coordinate intere.
   (b) Determinare la proiezione ortogonale su W del vettore $(1, 2, 3, 4)$.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 17 Febbraio 2024

---

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (3, 2, 1), \qquad D = (-1, 2, -1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta CD forma con il piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo formato dal piano passante per A, B, C e il piano passante per B, C, D.

   (c) Determinare il simmetrico del punto D rispetto al piano passante per A, B, C.

2. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

   (b) Determinare autovalori e autospazi di f.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica associata a questo prodotto scalare.

   (b) Determinare una matrice M invertibile tale che M^tBM sia diagonale.

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 08 Giugno 2024

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (3, 2, 1), \qquad D = (-1, 2, -1).$$

   (a) Determinare il punto più vicino a D nel piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il punto della retta BC più vicino ad A.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che è perpendicolare al piano passante per A, B, C, e lo interseca lungo la retta AB.

2. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = y - z + w = 0\right\},$$

$$W = \mathrm{Span}((1, 2, 3, 4), (0, 5, 4, 2)).$$

   Determinare una base di $V \cap W$ e $V + W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione in senso antiorario intorno al punto $(3, 1)$ dell'angolo θ, compreso $0°$ e $90°$, tale che $\cos\theta = 3/5$.

   (a) Scrivere l'espressione della trasformazione.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $x - 2y = 1$ rispetto a tale trasformazione.

   (c) Determinare la controimmagine della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.