A.A. 2015/2016
Corso di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 01

Titolo nota 24/09/2015

Problemi di minimo: dato insieme X, data $f : X \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in arrivo sempre } \mathbb{R}}}{\mathbb{R}}$, studiare

$$\boxed{\min\{f(x) : x \in X\}}$$

[con minimo si intende il minimo valore, i p.ti di minimo sono i punti $x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) =$ minimo valore]

① Determinare se il minimo esiste

② Se sì, trovare quanto vale e trovare i p.ti di minimo

③ Se no, trovare $\inf\{f(x) : x \in X\}$ e capire
  - → perché il minimo non esiste
  - → come si raggiunge l'inf (ad esempio per $f(x) = \arctan x$ con $x \in \mathbb{R}$ l'inf. si raggiunge andando a $-\infty$)

— o — o —

Quattro p.ti essenziali del programma

$\boxed{1}$ Metodo INDIRETTO

$\boxed{2}$ Metodo DIRETTO

$\boxed{3}$ RILASSAMENTO

$\boxed{4}$ GAMMA - CONVERGENZA

Metodo indiretto Esempio $\min\{\underbrace{x^2+2x}_{f(x)} : x \in \mathbb{R}\}$

$f'(x) = 2x+2 \rightsquigarrow x = 1$ p.to di minimo $\rightsquigarrow \min f(-1) = -1$

Salvo la faccia: provo a dim. che $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2+2x \geq -1 \rightsquigarrow (x+1)^2 \geq 0$ ok

brutta copia

Dim. seria: $x^2+2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

↑ vale l'= se e solo se $x = -1$

Metodo diretto : dimostrare direttamente l'esistenza mediante teoremi astratti (Weierstrass e varianti)

Nell' esempio : $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua } + \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ esiste min su $\mathbb{R}$

Una volta che so che esiste posso procedere come sopra.

Rilassamento : cosa fare quando il min non esiste

Esempio $\min\{(x^2-2)^2 : x \in \mathbb{Q}\}$ non esiste

$\inf\{\quad " \quad\} = 0$

Però ho sbagliato l'ambientazione, se mi metto in $\mathbb{R}$ esiste

In $\mathbb{Q}$ le successioni minimizzanti, cioè le succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ t.c. $f(x_n) \to \inf = 0$ sono quelle che in $\mathbb{R}$ tendono a $\sqrt{2}$ oppure $-\sqrt{2}$.

Gamma convergenza Successione di problemi di minimo

$$\min\{f_n(x) : x \in X\}$$

Cosa succede per $n \to +\infty$? Speranza : che esista $f_\infty : X \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oppure} \\ \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}}{\mathbb{R}}$ t.c.

① $\min\{f_n(x) : x \in X\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{convergenza dei minimi}}}{\longrightarrow} \min\{f_\infty(x) : x \in X\}$

② convergenza in qualche senso dei p.ti di minimo.

Complicazioni : caso in cui $f_n : X_n \to \mathbb{R}$

Esempio $\min\{\underbrace{x^2 + n\cos^4 x}_{f_n(x)} : x \in \mathbb{R}\} = M_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \frac{\pi^2}{4}$. Inoltre una qualunque succ. di p.ti di minimo ha una s.succ. che conv. a $\pm\frac{\pi}{2}$

$$f_\infty(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \cos x = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SLOGAN: VORREI MA NON POSSO

Gli esempi saranno limitati ai FUNZIONALI INTEGRALI

X = spazio di funzioni, per esempio $X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5 \}$

Funzionale è un sinonimo di funzione e si usa tutte le volte che l'argomento è a sua volta una funzione

$$F(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 \, dx \qquad u \in X$$

Funzionali integrali sono del tipo

$$\boxed{F(u) = \int_a^b \varphi(x, u(x), u'(x), u''(x), \ldots, u^{(k)}(x)) \, dx}$$

si intende che φ è data e le funzioni di X sono almeno C^k

(spesso sarà $k=1$ perché poi cambia poco)

— o — o —

<u>Di cosa non possiamo parlare</u>

① <u>Funzionali geometrici</u>

Problema di DIDONE: $\min \{ \text{Area}(\partial V) : \underbrace{V \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ ha Vol}(V) = 1}_{X} \}$

Problema di PLATEAU: date un po' di curve Γ in $\mathbb{R}^3$, trovare

$\min \{ \text{Area}(S) : S$ è una sup. in $\mathbb{R}^3$ che ha quelle curve come bordo $\}$

② <u>Problemi di frontiera libera</u>

$$\min \left\{ \int_I [u'(x)]^2 \, dx + \text{lungh}^{([0,2] \setminus I)} : u \in C^1([0,2]),\ u(0) = 7,\ I \subseteq [0,2] \text{ è un insieme} \right\}$$

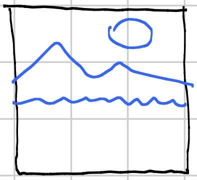
③ Problemi di discontinuità libera

MUMFORD - SHAH : è data una funzione $f(x,y)$ definita in un rettangolo $R = [0,1] \times [0,1]$

$$F(u,K) = \int_R |\nabla u|^2 dxdy + \int_R |u-f|^2 dxdy + c\,\text{Lunghezza}(K)$$

$$X = \{ (u,K) : K \subseteq \mathbb{R} \text{ è un compatto e } u \in C^1(\mathbb{R} \setminus K) \}$$

Deriva dalla ricostruzione di immagini

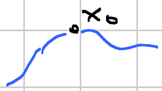


— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 02

Titolo nota 24/09/2015

Metodo INDIRETTO $f : \underset{\substack{\uparrow\\ \text{insieme}}}{X} \longrightarrow \mathbb{R}$



Supponiamo che $x_0 \in X$ sia p.to di min per f.

Supponiamo $\delta > 0$ e $\underbrace{\gamma : (-\delta,\delta) \to X \text{ tale che } \gamma(0) = x_0}_{\text{curva a valori in } X \text{ che passa per } x_0}$

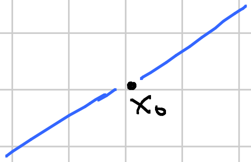
Considero la funzione

$$(-\delta,\delta) \ni t \longrightarrow \underbrace{f(\gamma(t))}_{\psi(t)} \in \mathbb{R}$$

Allora $\psi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ che ha un minimo per $t=0$. Quindi se per caso ψ è derivabile dove succedere che $\boxed{\psi'(0)=0}$

<u>Fatto generale</u> Se x_0 è un p.to di minimo, allora $\psi'(0)=0$ per ogni $\psi(t) = f(\gamma(t))$ dove γ è una curva con $\gamma(0) = x_0$ che risulta derivabile.

<u>Caso speciale 1</u> $X = V$ spazio vettoriale



Dato un qualunque $v \in V$ basta considerare

$$\gamma(t) = x_0 + tv \quad \text{(retta per } x_0 \text{ con direzione } v\text{)}$$

In tal caso

$$\psi'(0) = \frac{d}{dt} f(x_0+tv)\Big|_{t=0} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{deriv. direzionale}\\ \uparrow\\ \text{DERIVATE SECONDO GATEAUX}}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

<u>Caso speciale 2</u> $X = W$ spazio affine con spazio giacitura V

Dato $w_0 \in W$ posso prendere un qualunque $v \in V$ e considerare

$$\gamma(t) = \underbrace{w_0 + tv}_{\in W} \qquad t \in \mathbb{R}$$

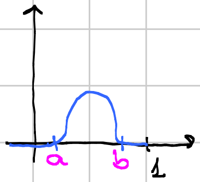
Caso degli spazi funzionali $X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5 \} = W$

$V = \{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0 \}$

$$\gamma(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{data in } X}}{u} + t\, v \quad \nwarrow \text{data in } V$$

VARIAZIONE "VERTICALE"

Variante interessante (forse): considerare $v \in C^1([0,1])$ con supporto contenuto in $(0,1)$



$$[\gamma(t)](x) = u(\underbrace{x + t v(x)})$$

se $|t|$ è piccolo, allora l'argomento sta in $[0,1]$ per ogni x, quindi $\gamma(t) \in X$

VARIAZIONE "ORIZZONTALE"

— o — o —

Esempi $X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5,\ u(2) = 10 \}$

$$F_1(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 dx \qquad F_2(u) = \int_0^2 |u'(x)|\, dx \qquad F_3(u) = \int_0^2 |u'(x)|^{1/2} dx$$

Voglio minimizzarli su X

X è spazio affine con giacitura $V = \{ v \in C^1([0,2]) : v(0) = v(2) = 0 \}$

$$\psi(t) = F_1(u + tv) = \int_0^2 [\dot u + t \dot v]^2 dx$$

$$= \int_0^2 (\dot u^2 + 2t \dot u \dot v + t^2 \dot v^2)\, dx$$

$$= \int_0^2 \dot u^2 + 2t \int_0^2 \dot u \dot v + t^2 \int_0^2 \dot v^2$$

$$\psi'(0) = 2 \int_0^2 \dot u \dot v\, dx = 0$$

$$\boxed{\int_0^2 \dot u \dot v\, dx = 0 \qquad \forall v \in V}$$

Prima forma integrale dell'eq. di EULERO

Vorrei integrare per parti: suppongo $u \in C^2$:

$$\int_0^2 \dot u\, \dot v\, dx = \underbrace{[\dot u\, v]_0^2}_{\dot u(2)\,\underset{0}{v(2)} - \dot u(0)\,\underset{0}{v(0)} = 0} - \int_0^2 \ddot u\, v\, dx$$

$$\boxed{\int_0^2 \ddot u(x)\, v(x)\, dx = 0 \qquad \forall v \in V}$$

Seconda forma integrale dell'eq. di Eulero

Lemma misterioso (Lemma DBR) $\Longrightarrow \boxed{\ddot u(x) = 0 \quad \forall x \in [0,2]}$

Eq. di Eulero in forma DIFFERENZIALE

Quindi u è l'unica retta che congiunge le due condizioni

$u(0) = 5 \qquad u(2) = 10 \qquad u(x) = 5 + \frac{5}{2}x$

Che cosa ho dimostrato veramente? Se esiste un minimo di classe C^2, questo è la retta.

Salvo la faccia ☺ : considero la funzione $u(x) = 5 + \frac{5}{2}x$. Considero un altro elemento $w \in X$. Allora lo posso scrivere come

$$w = \underbrace{w - u}_{\in V} + u$$

$F(w)$ = stessi conti di prima con $t = 1$

$$= \underbrace{\int_0^2 \dot u^2\, dx}_{F(u)} + 2\underbrace{\int_0^2 \dot u\, \dot v\, dx}_{} + \underbrace{\int_0^2 \dot v^2 dx}_{}$$

per parti viene $\int_0^2 \ddot u\, v\, dx = 0$

≥ 0 ed è $= 0 \iff \dot v(x) \equiv 0$

$\iff v(x) \equiv 0$

deve essere in V

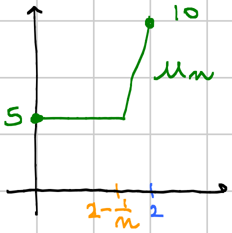
Ho così dimostrato che $F(w) \geq F(u)$ per ogni $w \in X$ e vale l'uguaglianza $\iff w = u$. Quindi la retta è il p.to di min. □

Oss. NON ho usato il lemma DBR nella dim., che parte dopo ☺

Vediamo $F_2(u)$ e $F_3(u)$

Nel caso di F_3 l'inf. è 0 e il min. non esiste (evidente)

Forziamo le regole...



$$F(u_m) = \int_{2-\frac{1}{m}}^{2} \underset{\uparrow \atop u_m'(x)}{\sqrt{5m}}\, dx = \frac{1}{m}\sqrt{5m} \to 0$$

Basta "smussare l'angolo" per avere un vero controesempio.

Nel caso di $F_2(u)$ ci sono infinite soluzioni, poiché tutte le $u \in X$ crescenti vanno bene:

$$F_2(u) = \int_0^2 |\dot{u}(x)|\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^2 \dot{u}(x)\, dx = u(2) - u(0) = 5$$

vale = se $\dot{u}(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,2]$

vale > se $\dot{u}(x) < 0$ da qualche parte

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 03

Titolo nota 29/09/2015

LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO VARIAZIONI

(DE BOIS — REYMOND)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) \cdot v(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, v \in V$$

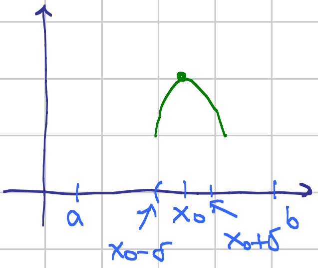
dove $V = \{ v \in C^1([a,b]) \;:\; v(a) = v(b) = 0 \}$.

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dim.: supponiamo $f(x) \not\equiv 0$. Allora WLOG (without loss of generalità) esiste $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) > 0$.

Per continuità esiste $\delta > 0$ tale

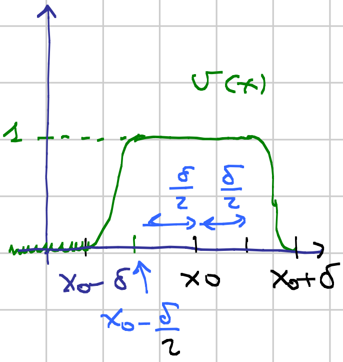
$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \qquad \forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$



Posso suppore anche che $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$.

Prendo ora $v(x)$ come nella figura, cioè

- $v(x) = 1$ per ogni $x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$
- $v(x) = 0$ se $x \notin [x_0-\delta, x_0+\delta]$
- $0 \leq v(x) \leq 1$ per ogni $x \in [a,b]$



Ma allora

$$\int_a^b f(x)\, v(x)\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \underbrace{f(x)\, v(x)}_{\geq 0} \geq \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} \underbrace{f(x)}_{\geq \frac{1}{2} f(x_0)} \underbrace{v(x)}_{=1} dx$$

$$\geq \frac{1}{2} f(x_0)\, \delta \; > 0$$

—— o —— o ——

Oss. L'esercizio di analisi 1 è mostrare che esiste $v \in C^1$ fatta come sopra.
La condizione $v(a) = v(b) = 0$ è immediata.

Problema Per quali classi V di "funzioni test" continua a valere il lemma DBR ?

① Posso aumentare la regolarità, per esempio

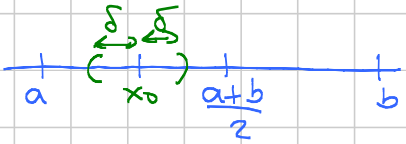
$$V = \{ v \in C^{\overset{\infty}{17}}([a,b]) : v(a) = v(b) = v^{(13)}(a) = 0 \}$$

(basta vedere che in questo V trovo la v come sopra)

③ Posso aggiungere p.ti di annullamento in mezzo ?

$$V = \{ v \in C^{\infty}([a,b]) : v(a) = v(b) = v\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \}$$

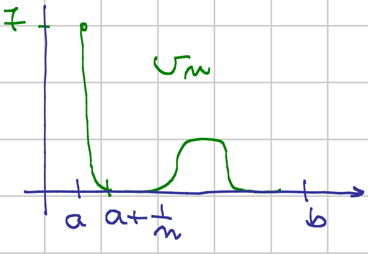
(Se $f(x) \not\equiv 0$ allora esiste $x_0 \neq a, b, \frac{a+b}{2}$ in cui $f(x_0) \neq 0$ a quel p.to procedo come prima evitando $\frac{a+b}{2}$)



④ Posso chiedere valori strani al bordo ?

$$V = \{ v \in C^{\infty}([a,b]) : v(a) = 7, v(b) = 0 \}$$

Ora devo usare una successione di funzioni test che vanno a 0 dopo $a + \frac{1}{n}$.



$$\int_a^b f(x) \cdot v_n(x)\, dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) \cdot v_n(x)\, dx$$

$$+ \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot v_n(x)\, dx}_{\text{come prima}}$$

Il primo integrale tende a 0 se $0 \leq v_n(x) \leq 7$ in $[a, a+\frac{1}{n}]$

$$\left| \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) \cdot v_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} \underbrace{|f(x)|}_{\leq \max |f|} \cdot \underbrace{|v_n(x)|}_{\leq 7}\, dx$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot 7 \cdot \max |f| \to 0$$

⑤ Se voglio essere minimalista su V?
Basta che esista una successione $\{v_n(x)\} \subseteq \operatorname{Span}(V)$ tale che $v_n(x) \to v(x)$ che ho usato nella dimostrazione uniformemente. A quel p.to

$$\int_a^b f(x) \cdot v_n(x)\, dx \underset{\text{cons. della conv. unif.}}{\longrightarrow} \int_a^b f(x) \cdot v(x)\, dx > 0$$

— o — o —

VARIANTE DEL LEMMA Supponiamo che

$$\int_a^b f(x)\, v(x)\, dx = 0 \qquad \forall v \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } v(a) = v(b) = 0$$

$$\text{e } \int_a^b v(x)\, dx = 0$$

Allora $f(x)$ è costante in $[a,b]$. (Stiamo sempre supponendo f continua)

Dim. Dimostrazione brutale $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot v(x)\, dx = -\int_a^b f'(x) \cdot \underbrace{V(x)\, dx}_{}$ $= 0$

Infatti posso suppore $V(a) = V(b) = 0$. Nota: sono uguali perché

$$V(b) - V(a) = \int_a^b v(x)\, dx = 0$$

Se applico DBR a $f'(x)$ ottengo $f'(x) \equiv 0$, cioè $f(x)$ costante

Serve una dim. che non usi che $f(x)$ è C^1...

Supponiamo per assurdo che $f(x)$ non sia costante. Allora esistono x_0 e y_0 t.c. $f(x_0) \neq f(y_0)$. Wlog $f(x_0) > f(y_0)$

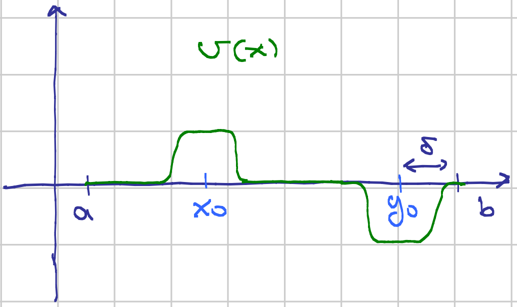
Scelgo $v(x)$ t.c.

$v(x) \sim 1$ vicino a x_0

$v(x) \sim -1$ vicino a y_0

e $\int v = 0$ e avremo che

$$\int_a^b f(x)v(x) \sim (f(x_0) - f(y_0))\,\delta$$



Più precisamente scelgo $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > \frac{f(x_0)+f(y_0)}{2} \quad \text{per ogni } x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

$$f(x) < \frac{f(x_0)+f(y_0)}{2} \quad \text{per ogni } x \in [y_0-\delta, y_0+\delta]$$

e concludo come prima.

—o—o—

Esempio $F(u) = \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2\,dx$

$$X = \left\{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 7, \int_0^2 u(x)\,dx = 25 \right\}$$

Prendo variazioni $\underbrace{v \in C^1([0,2]) : v(0) = 0, \int_0^2 v(x)\,dx = 0}_{V}$

Se $u \in X$, allora $u+tv \in X$ per ogni $v \in V$. Allora

$$F(u+tv) = \int_0^2 (\dot{u}+t\dot{v})^2\,dx = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t\int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2\int_0^2 \dot{v}^2$$

Derivo wrt t e ottengo

$$\boxed{2\int_0^2 \dot{u}\dot{v}\,dx = 0}$$ Eulero 1ª forma

Supponendo u più regolare integro per parti

$$[u'(x)\,v(x)]_0^2 - \int_0^2 u''(x)\cdot v(x)\,dx = 0$$

$$u'(2)\cdot v(2) - \int_0^2 u''(x)\cdot v(x)\,dx = 0$$

MI LIMITO a considerare le $v \in V$ tali che $v(2)=0$.
Ottengo

$$\boxed{\int_0^2 u''(x)\cdot v(x)\,dx = 0 \qquad \forall v \in V}$$

Eulero
2ª forma

Ottengo dal lemma DBR seconda versione che $u''(x)$ è costante, quindi $u(x)$ è una parabola.

Se oltre ad aver imposto $u(0)=7$ avessi imposto anche $u(2)=3$ ora concludevo perché

$$u(x) = ax^2+bx+c$$

e avevo 3 condizioni e 3 parametri e potevo risolvere

$\uparrow$
$u(0)$
$u(2)$
$\int u = 25$

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 04

Titolo nota 29/09/2015

wlog : without loss of generality
WRT : with respect to
RHS : right-hand side
LHS : left - " "

NASCITA DELLE CONDIZIONI AL BORDO

$$F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^2)\, dx$$

① $u \in C^1([a,b])$: $u(a) = A$, $u(b) = B$. In questo caso

$$V = \{ v \in C^1([a,b]) : v(a) = v(b) = 0 \}$$

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \ldots = \int_a^b \dot{u}^2 + 2t \int_a^b \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_a^b \dot{v}^2$$
$$+ \int_a^b u^2 + 2t \int_a^b uv + t^2 \int_a^b v^2$$

$$\varphi'(0) \Longrightarrow \boxed{\int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b uv = 0 \qquad \forall v \in V}$$ Eulero 1ª

Integro per parti il 1° integrale

$$[u'(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b \ddot{u} v + \int_a^b uv = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{0}$$

per merito di v

$$\boxed{\int_a^b (-\ddot{u} + u)\, v\, dx = 0 \qquad \forall v \in V}$$ Eulero 2ª

Lemma DBR $\Rightarrow$ $-\ddot{u} + u = 0$

$$\boxed{\ddot{u} = u}$$ Eulero differenziale

$u(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ e imponendo le cond. al bordo
$u(a) = A$ $u(b) = B$
trovo c_1 e c_2 univocamente.

Quindi ho avuto da risolvere

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(a) = A \\ u(b) = B \end{array}}$$

} condizioni al bordo di DIRICHLET (DBC) ← già scritte in X

<u>Oss.</u> 1 – Buona notizia: eq. di ordine 2 + 2 condizioni al bordo
2 – Cattiva notizia: NON è un problema di Cauchy, quindi nulla garantisce esistenza e unicità

Una volta che ho trovato la soluzione, posso dimostrare che è effettivamente un minimo con la disuguaglianza

② $X = \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = A \}$

Ora

$$V = \{ v \in C^1([a,b]) : v(a) = 0 \}$$

Procedo come prima e arrivo a

$$\boxed{\int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b u v = 0 \qquad \forall v \in V}$$ Eulero 1ª

Integro per parti

$$[u'(x) v(x)]_a^b - \int_a^b \ddot{u} v + \int_a^b u v = 0$$

$$\boxed{u'(b)\,v(b) + \int_a^b (-\ddot{u} + u)\,v\,dx = 0}$$ Eulero 2ª

Procedo in due fasi

Fase 1 Mi limito alle $v \in V$ t.c. $v(b) = 0$. Ottengo

$$\int_a^b (-\ddot{u} + u)\,v\,dx = 0 \qquad \boxed{\forall\, v \in V \text{ t.c. } v(b) = 0}$$

classe per cui vale DBR

da cui deduco (DBR) che $\ddot{u} = u$

Fase 2 Grazie alla fase 1 posso riscrivere Eulero 2ª come

$$u'(b)\,v(b) = 0 \qquad \forall\, v \in V$$

L'unica possibilità è che sia $\boxed{u'(b) = 0}$ (posso scegliere $v \in V$ con $v(b) = 14$)

Ho ottenuto il problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = u & \rightarrow \text{eq. di ordine 2} \\ u(a) = A & \rightarrow \text{DBC che c'era già in } X \\ u'(b) = 0 & \rightarrow \text{NEUMANN BC (NBC) nata dopo} \end{cases}$$

③ $X = \{ u \in C^1([a,b]) \text{ e basta} \}$

avrei trovato due NBC omogenee (= 0)

... la Eulero 2ª diventava

$$u'(b)\,v(b) - u'(a)\,v(a) + \underbrace{\int_a^b (-\ddot{u} + u)\,v\,dx}_{\downarrow \text{ se ne va in fase 1 quando considero } v \in V \text{ t.c. } v(a) = v(b) = 0} = 0$$

Fase 2: scelgo $v(a) = 0$ e $v(b) = 1 \rightsquigarrow u'(b) = 0$

$v(a) = 7$ e $v(b) = 0 \rightsquigarrow u'(a) = 0$

④ $X = \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) \}$

$V = \{ v \in C^1 \ldots : v(a) = v(b) \}$

$$\ldots \quad \int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b u v = 0 \qquad \forall v \in V \quad \leftarrow \text{Eulero } 1^a$$

integro per parti :

$$u'(b)\,v(b) - u'(a)\,v(a) + \int_a^b (-\ddot{u} + u)\,v = 0 \qquad \forall v \in V$$

Fase 1 : considero $v \in V : v(a) = v(b) = 0 \rightsquigarrow$ DBR $\rightsquigarrow \ddot{u} = u$

Fase 2 : $u'(b)\underset{k}{\underset{\parallel}{v(b)}} - u'(a)\underset{k}{\underset{\parallel}{v(a)}} = 0 \qquad \forall v \in V$

$$k\,(u'(b) - u'(a)) = 0$$

Basta prendere $k \neq 0$ per ottenere $u'(a) = u'(b)$.

In conclusione abbiamo

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{u} = u & \\ u(a) = u(b) & \leftarrow \text{era in } X \\ \dot{u}(a) = \dot{u}(b) & \leftarrow \text{nuova nata} \end{array}\right] \quad \text{PBC : PERIODIC boundary conditions}$$

* * *

$\boxed{\text{Problema della lezione 3}}$ $\quad F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2$

$$X = \left\{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 7 \text{ e } \int_0^2 u(x)\,dx = 9 \right\}$$

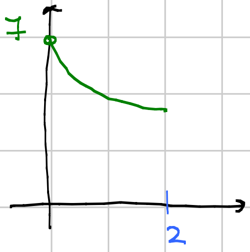
$$\int_0^2 \dot{u}\dot{v} = 0 \qquad \forall v \in V \qquad v(0) = 0 \text{ e } \int_0^2 v = 0$$

Per parti $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^2 \ddot{u}\,v\,dx + u'(2)\,v(2) = 0 \qquad \forall v \in V$

Fase 1 ⇝ $\ddot{u} = c$ (DBR modificato)

Fase 2 ⇝ $u'(2) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{u} = c & \leftarrow \text{Eq. ordine 2} \\ u(0) = 7 & \leftarrow \text{DBC data in } X \\ u'(2) = 0 & \leftarrow \text{NBC nata dopo} \end{cases}$$



Trovata la soluzione del problema diff., resta da dim. che è effettivamente un minimo.

Sia $u(x)$ la soluzione del problema. Prendo una qualunque $w \in X$ e osservo che $v = w - u \in V$. Ma allora

$$F(w) = F(u+v) = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}^2}_{\substack{\shortparallel \\ F(u)}} + 2\underbrace{\int_0^2 \dot{u}\dot{v}}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{per Eulero I}^o}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\geq 0}$$

$$\geq F(u)$$

Vale il segno di = se e solo se $\int \dot{v}^2 = 0$, cioè se e solo se $v(x)$ è costante, ma essendo nulla in $x=0$ l'unica possibilità è che sia $v(x) \equiv 0$.

—o—o—

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2)\,dx$$

$$X = \{ u \in C^1([0,2]) : \dot{u}(0) = 7, \ u(2) = 5 \}$$

$$\int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b uv = 0 \qquad \forall v \text{ t.c. } \dot{v}(0) = 0, \ v(2) = 0$$

$$\underbrace{u'(2)\cancel{v(2)} - u'(0)\,v(0)}_{\text{Fase 2: } u'(0)=0} + \underbrace{\int_0^2 (-\ddot{u}+u)\,v}_{\text{Fase 1} \rightsquigarrow \text{via}} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(2) = 5 \end{cases}$$

e che fine fa $\dot{u}(0) = 7$ ⇝ il minimo non esiste.

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 05

Titolo nota 01/10/2015

Esercizio Trovare l'errore nella dim. del Lemma DBR a media nulla e capire come si rimedia.

PROBLEMA
$$\min\left\{ \underbrace{\int_a^b \psi(u'(x))\,dx}_{F(u)} \; : \; u \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } u(a)=A \text{ e } u(b)=B \right\}$$

Già visto: → $\psi(x) = x^2$ l'unica soluzione è la retta

→ $\psi(x) = |x|$ se $A \neq B$ ci sono infinite soluzioni (tutte le funzioni monotone)

→ $\psi(x) = |x|^{1/2}$ e $A \neq B$ NON ci sono soluzioni e $\inf = 0$.

Parte inutile: calcolo l'eq. di Eulero. Prendo $\underbrace{v \in C^1([a,b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0}_{V}$ pongo

$$\varphi(t) = F(u+tv)$$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b \psi(u'(x)+t v'(x))\,dx$$

(servono ipotesi per poter derivare sotto il segno di integrale)

$$= \int_a^b \psi'(u'(x)+t v'(x))\, v'(x)\,dx$$

$$\varphi'(0) = 0 \iff \boxed{\int_a^b \psi'(u'(x))\, v'(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in V}$$

Eulero 1

Integriamo per parti:

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\left[\psi'(u'(x))\cdot v(x)\right]_a^b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\psi'(u'(x))\cdot v(x)\,dx = 0$$

$\|$ ← servono ipotesi

$$- \int_a^b \psi''(u'(x))\, u''(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b \psi''(u'(x))\, u''(x)\, v(x)\,dx = 0 \quad \forall v \in V}$$

Eulero 2

Lemma DBR $\Rightarrow$ $\boxed{\psi''(u'(x))\, u''(x) = 0}$ Eulero diff.

$\left.\begin{array}{l} u(a) = A \\ u(b) = B \end{array}\right\}$ (DBC)

Se $u''(x) \equiv 0$, allora l'equazione è risolta, cioè la retta è sempre una soluzione. È l'unica se uno sa che $\psi''(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alternativa: giunto ad Eulero 1 $\int_a^b \psi'(u'(x))\, v'(x)\, dx = 0$

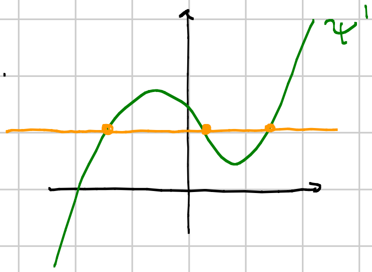
Osservo che come $v'(x)$ posso prendere una qualunque funzione continua o anche C^∞ che sia a media nulla

$$0 = v(a) - v(b) = \int_a^b v'(x)\, dx$$

Quindi lemma DBR a media nulla $\Rightarrow$ $\boxed{\psi'(u'(x)) = \text{costante}}$

Da questa possiamo dedurre che $u'(x) =$ costante a meno che $\psi'(x)$ non sia costante in un intero intervallo.

Oss.



Se $\psi'(x) = c$ ha solo p.ti isolati come soluzione, allora $u'(x)$ se è continua deve essere costante.

—o—o—

Domanda: la retta è un p.to di minimo?

Teorema Se $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa, allora la retta è l'unico punto di minimo.

Dim 1 Funziona se ψ è di classe C^2. Vale la disuguaglianza

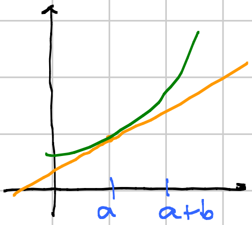
$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)\, b \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

con disuguaglianza stretta se $b \neq 0$.

[Infatti $\psi(a+b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor-Lagrange}}}{=} \psi(a) + \psi'(a)b + \frac{1}{2}\underbrace{\psi''(c)b^2}_{\geq 0} \geq \psi(a) + \psi'(a)b$

Se avessimo uguaglianza per un certo $b \neq 0$, avremmo uguaglianza in un intero intervallo]

Una funzione convessa sta sopra le rette tangenti



Sia $u(x)$ la retta che interpola i dati al bordo.
Sia $w(x)$ una qualunque altra funzione.
Pongo $v(x) = w(x) - u(x)$

$$F(w) = \int_a^b \psi(w)\,dx = \int_a^b \psi(\overset{\overset{a}{\downarrow}}{\dot{u}} + \overset{\overset{b}{\downarrow}}{\dot{v}})\,dx \overset{(*)}{\geq} \int_a^b \psi(\dot{u})\,dx + \underbrace{\int_a^b \overbrace{\psi'(\dot{u})}^{\text{costante}}\dot{v}(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\geq F(u)$$

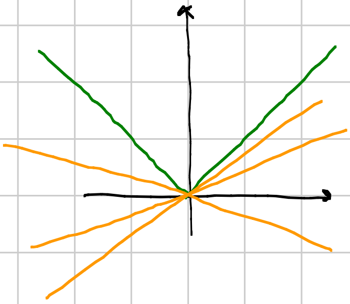
Vale il segno di uguale se e solo se vale in (*), cioè se e solo se $\dot{v}(x) \equiv 0$, cioè $v(x) \equiv 0$.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Non voglio supporre che ψ sia di classe C^2, e nemmeno C^1.

Fatto generale sulle funzioni convesse: sia x_0 qualunque, siano $\psi'_+(x_0)$ e $\psi'_-(x_0)$ la derivata dx e sx, sia $m \in [\psi'_-(x_0), \psi'_+(x_0)]$.
Allora vale

$$\psi(x_0 + h) \geq \psi(x_0) + mh$$

cioè ψ sta sopra la retta che passa per $(x_0, \psi(x_0))$ e ha coeff. ang. m
Se ψ è strett. convessa, allora la disug. è stretta per $h \neq 0$



Dato il fatto generale si chiude come prima.
Prendo $u(x)$ la retta, che sarà $u(x) = Cx + D$,
prendo $m \in [\psi'_-(c), \psi'_+(c)]$ e concludo

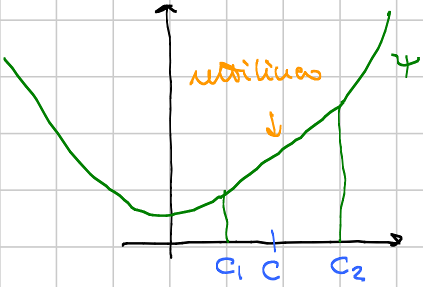
$$F(w) = \int \psi(\dot{u} + \dot{v}) = \int \psi(c + \dot{v}) \geq \underset{\overset{\shortparallel}{F(u)}}{\int \psi(c)} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\int m\dot{v}} \geq F(u) \quad . \ \square$$

Teorema Se ψ è solo convessa, ma non necessariamente strett. convessa, allora la retta è sempre un p.to di minimo.

[Dim: riga sopra]

Non è unico se e solo se il coeff. angolare della retta c casca all'interno di un intervallo in cui ψ è una funzione affine, cioè esistono $c_1 < c < c_2$ tale che $\psi''(x) = 0$ per ogni $x \in [c_1, c_2]$

Oss. c non può essere c_1 o c_2, cioè se lo è c'è unicità



Mettiamo che $c = c_1$

$$\psi(c + \dot{v}) \geq \psi(c) + \psi'(c)\,\dot{v}$$

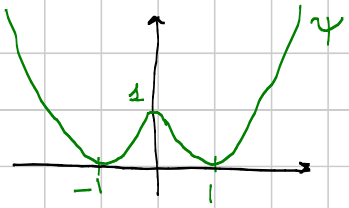
voglio il segno di =

Per avere uguaglianza devo avere $\dot{v}(x) \geq 0$, cioè v monotona, ma è nulla agli estremi.

Calcolo delle variazioni — LEZIONE 06

Titolo nota 01/10/2015

Caso non convesso $\int_0^2 \psi(u'(x))\,dx$

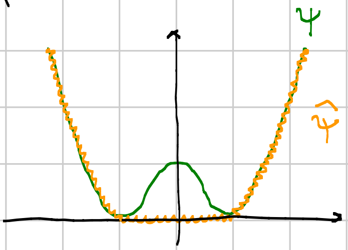


ψ DOPPIO POZZO (DOUBLE WELL)

$\psi(x) = (x^2-1)^2$

Cosa possiamo dire del problema con dati $u(0)=0$, $u(2)=\lambda$

Fatto Se $\lambda \geq 2$, allora c'è il minimo] ed è unico ed è
Se $\lambda \leq -2$ " "] la retta
Se $\lambda \in (-2,2)$, il minimo non c'è e $\inf = 0$.



Considero la funzione "convessificata", definita come la più grande funzione convessa $\leq \psi$.
È ovvio che

$$\psi(x) \geq \hat\psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\underbrace{\int_0^2 \psi(u'(x))\,dx}_{F(u)} \geq \underbrace{\int_0^2 \hat\psi(u'(x))\,dx}_{\hat F(u)}$$

Ora la retta che interpola i valori al bordo è $u(x) = \frac{\lambda}{2}x$. Ora se $\lambda \geq 2$ si avrà che

$\hat\psi(\frac{\lambda}{2}) = \psi(\frac{\lambda}{2})$

$$F(w) \geq \hat F(w) \geq \hat F(u) = F(u) \qquad \forall w \in X$$

oss. sopra

nel caso convesso la retta è minimo

Questo dimostra che u è un minimo anche per F!!! Inoltre è unico perché è unico per $\hat F$.

$\boxed{\text{LEMMA (TRIVIAL)}}$ Sia $F : X \to \mathbb{R}$ un funzionale

Sia $G : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme}}}{X} \to \mathbb{R}$ un altro funzionale

Supponiamo che

(i) $G(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

(ii) $\exists\, x_0 \in X$ tale che $G(x_0) \leq G(x)$ per ogni $x \in X$

(G ammette minimo e x_0 è p.to di min, cioè $x_0 \in \operatorname{argmin} G$)

(iii) $G(x_0) = F(x_0)$

Allora

$$F(x_0) \leq F(x) \qquad \forall x \in X$$

(cioè $x_0 \in \operatorname{argmin} F$).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $x \in X$ si ha che

$$F(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ (iii)}}{=} G(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ (ii)}}{\leq} G(x) \underset{\substack{\uparrow \\ (i)}}{\leq} F(x).$$

— o — o —

Dimostriamo che per $\lambda \in (-2,2)$ il minimo non c'è e l'inf. è 0.

$\boxed{1^a \text{ OSS}}$ Se dim. che $\inf = 0$, allora di sicuro non è minimo.

Infatti: se $F(u) = 0$ dovrebbe essere $\psi(u'(x)) = 0$ per ogni $x \in [0,2]$, ma allora per continuità $u'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre lo stesso segno}}}{\pm} 1$ per ogni $x \in [0,2]$

Ma allora $u(2) = \pm 2$ il che non è compatibile.

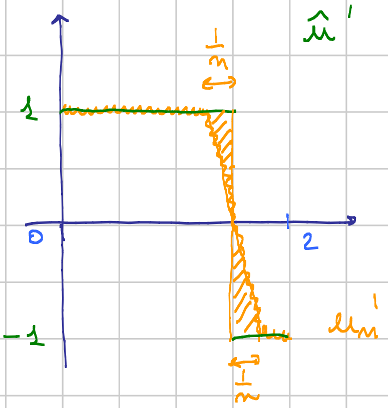
$\boxed{2^a \text{ OSS.}}$ Se posso violare le regole e prendere u C^1 solo a tratti, allora arrivo a 0.

$\boxed{3^a \text{ OSS.}}$ Basta ora "smussare l'angolo" e ottengo una successione u_n con $F(u_n) \to 0$

Per dirlo bene

Mi serve sulle approssimanti

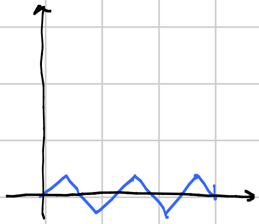
$$\int_0^2 u_n'(x)\,dx = \lambda$$



— o — o —

Esercizio $$\min\left\{ \int_0^2 \Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{doppio pozzo}}}{\psi}(u'(x)) + [u(x)]^2\Big)\,dx \ : \ \overset{u \in C^1\ldots}{u(0) = u(2) = 0} \right\}$$

Risposta: l'inf. è 0 ed è raggiunto dai denti di sega



— o — o —

EQUAZIONE DI EULERO IN GENERALE

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u})\,dx$$

$$\psi : \underset{\substack{\cup\\ x}}{[a,b]} \times \underset{\substack{\cup\\ s}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\cup\\ p}}{\mathbb{R}} \qquad \psi(x, s, p)$$

Prendo $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$ e pongo

$$\varphi(t) = F(u + tv) = \int_a^b \psi(x, u+tv, \dot{u} + t\dot{v})\,dx$$

$$\varphi'(t) = \int_a^b \psi_s(x, u+tv, \dot{u}+tv)\,v + \psi_p(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\,\dot{v}\,dx$$

$$\varphi'(0) = 0 \iff \boxed{\int_a^b \big(\psi_s(x,u,\dot{u})\,v + \psi_p(x,u,\dot{u})\,\dot{v}\big)\,dx = 0}$$ Eulero 1

Integro per parti il 2° termine

$$\int_a^b \psi_p(x,u,\dot{u})\,\dot{v}\,dx = \underbrace{\Big[\psi_p(x,u,\dot{u})\,v\Big]_a^b}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \int_a^b \frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u})\cdot v\,dx$$

Mettendo insieme

$$\boxed{\int_a^b \left\{ \psi_s(x,u,\dot{u}) - \frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u}) \right\} v\,dx \quad \forall v \in \dots} \quad \text{Eulero 2}$$

DBR $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u}) = \psi_s(x,u,\dot{u})} \quad \text{Eulero diff.}$$

Sviluppando

$$\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u}) = \psi_{px}(x,u,\dot{u}) + \psi_{ps}(x,u,\dot{u})\,\dot{u} + \psi_{pp}(x,u,\dot{u})\,\ddot{u}$$

quindi l'equazione è di ordine 2.

In alternativa, dopo Eulero 1 integro l'altro termine per parti

$$\int_a^b \psi_s(x,u,\dot{u})\,v\,dx = -\int_a^b \Big[\underbrace{\int \psi_s(x,u,\dot{u})\,dx}_{\text{primitiva}}\Big]\,\dot{v}\,dx + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bordo se ne va}}}{0}$$

Ottengo usando DBR a media nulla

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_p(x,u,\dot{u}) &= c + \text{primitiva} \\ &= c + \int_a^x \psi_s(y,u(y),\dot{u}(y))\,dy \end{aligned}}$$

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 07

Titolo nota 07/10/2015

Metodo diretto Eq. di Eulero + in generale

$$F(u) = \int_a^b \psi(x,u,\dot u)\,dx$$

$\psi : \underset{\substack{\cup \\ x}}{[a,b]} \times \underset{\substack{\cup \\ s}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\cup \\ p}}{\mathbb{R}}$ di classe C^2, ma si può risparmiare

$\varphi(t) = F(u+tv)$ $\quad v \in C^1([a,b]) \quad v(a)=v(b)=0$

$\in C_c^\infty((a,b))$

$\uparrow$ a supporto compatto

$$\varphi'(t) = \int_a^b [\psi_s(x,u,\dot u)\, v + \psi_p(x,u,\dot u)\, \dot v]\,dx = 0$$ Eulero 1º

$\boxed{\text{1ª strada}}$ Trasformare $\dot v$ in v

$$\int_a^b \psi_s(x,u,\dot u)\, v - \frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot u)\, v = 0$$ Eulero 2ª

Lemma FLCV $\rightsquigarrow$ $\boxed{\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot u) = \psi_s(x,u,\dot u)}$

Eulero diff.

$\boxed{\text{2ª strada}}$ Trasformare v in $\dot v$

$$-\int_a^b \left[\int_a^x \psi_s(t,u,\dot u)\,dt\right]\dot v + \int_a^b \psi_p(x,u,\dot u)\,\dot v = 0$$

Lemma DBR $\rightsquigarrow$

$$\boxed{\psi_p(x,u,\dot u) = c + \int_0^x \psi_s(t,u(t),\dot u(t))\,dt}$$

Eulero diff. in forma DBR

Oss. 1 Caso AUTONOMO, cioè ψ non dipende da x : $\psi(s,p)$

Allora posso riscrivere in forma più semplice

$$\frac{d}{dx}\psi_p(u,\dot u) = \psi_s(u,\dot u)$$

$$\psi_{ps}(u,\dot u)\dot u + \psi_{pp}(u,\dot u)\ddot u - \psi_s(u,\dot u) = 0$$

Moltiplico tutto per $\dot u$ e ottengo

$$\underbrace{\psi_{ps}(u,\dot u)\dot u^2 + \psi_{pp}(u,\dot u)\dot u\ddot u - \psi_s(u,\dot u)\dot u}_{\text{questa è una derivata}} = 0$$

$$\dot u\,\psi_p(u,\dot u) - \psi^{(u,\dot u)} = V(u,\dot u)$$

$$\frac{d}{dx}V(u,\dot u) = \ddot u\,\cancel{\psi_p(u,\dot u)} + \dot u\,\psi_{ps}(u,\dot u)\dot u + \dot u\,\psi_{pp}(u,\dot u)\ddot u - \psi_s(u,\dot u)\dot u - \cancel{\psi_p(u,\dot u)\ddot u} = 0$$

Quindi $V(u,\dot u)$ = costante, cioè

$$\boxed{\dot u\,\psi_p(u,\dot u) - \psi(u,\dot u) = c}$$

Eq. in forma ERDMANN
(1° ordine)
(alla fine c va determinato)

Oss. 2 Se nel problema iniziale non ho condizioni in qualche estremo, allora posso usare anche $v(x)$ che non sono nulle al bordo. Passando da Eulero 1 a Eulero 2 trovo

$$[\psi_p(x,u,\dot u)\,v]_a^b = 0 \rightsquigarrow \text{produce condizioni}$$

$$\boxed{\psi_p(x,u,\dot u) = 0}$$

negli estremi in cui non c'erano altre condizioni ⇝ NEUMANN nel caso generale

$\boxed{\text{Generalizzazione 1}}$ Cosa succede se ho n variabili

$$F(u_1, \dots, u_m) = \int_a^b \psi(x, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m)\, dx$$

$$\psi(x, s_1, \dots, s_m, p_1, \dots, p_m)$$

Idea: $(v_1, \dots, v_m)$ tutte in $C_c^\infty((a,b))$

$\varphi(t) = F(u_1 + t v_1, \dots, u_m + t v_m)$ e ottengo

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^m \psi_{s_k}(\dots) v_k + \sum_{k=1}^m \psi_{p_k}(\dots) \dot{v}_k \right] dx = 0$$

Integro per parti

$$\boxed{\int_a^b \sum_{k=1}^m \left[\psi_{s_k}(\dots) - \frac{d}{dx} \psi_{p_k}(\dots) \right] v_k \, dx = 0}$$

Ora uso $(v_1, \dots, v_m)$ con tutte le componenti nulle tranne una ed arrivo ad un sistema di equazioni

$$\boxed{\frac{d}{dx} \psi_{p_k}(x, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) = \psi_{s_k}(\dots)}$$

Allo stesso si trattano le BC.

— o — o —

<u>Seconda generalizzazione</u> Dipendenza da più derivate

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)})\, dx \qquad \psi(x, s, p_1, \dots, p_m)$$

Prendo $v \in C_c^\infty((a,b))$ e considero

$$\varphi(t) = F(u + tv)$$

$$\varphi'(0) = \boxed{\int_a^b \left[\psi_s(\dots) v + \sum_{k=1}^{m} \psi_{p_k}(\dots) v^{(k)} \right] dx = 0}$$

Eulero 1° : "richiede" in ipotesi di sicurezza $\psi_s, \psi_{p_1}, \dots, \psi_{p_m}$ continue.

Ora integro per parti quante volte serve

$$\boxed{\int_a^b \left[\psi_s(\dots) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \psi_{p_k}(\dots) \right] v \, dx = 0}$$

Eulero 2ª: richiede parecchie derivate di ψ

FLCV $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \psi_{p_k}(\dots) = -\psi_s(\dots)}$$

Eulero differenziale

—— o —— o ——

<u>Condizione SUFFICIENTE</u> per avere che le soluzioni di Eulero sono minimi, almeno nel caso

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) \, dx$$

Sono minimi quando sappiamo che

$$\boxed{(s,p) \longrightarrow \psi(x,s,p) \quad \text{è convessa} \quad \forall x \in [a,b]}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Facciamo per semplicità il caso con DBC $u(a) = A$

Sia u UNA soluzione di Eulero. $u(b) = B$

Sia w una qualunque funzione C^1 con le stesse BC.

Allora $v := w - u$ è nulla al bordo e C^1

$$F(w) = F(u+v) = \int_a^b \psi(x, u+v, \dot{u}+\dot{v})\, dx$$

$$\psi(x, s_0+s_1, p_0+p_1) \geq \psi(x, s_0, p_0) + \psi_s(x, s_0, p_0)\, s_1 + \psi_p(x, s_0, p_0)\, p_1$$

$$\geq \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) + \int_a^b \psi_s(x, u, \dot{u})\, v + \int_a^b \psi_p(x, u, \dot{u})\, \dot{v}$$

(Ho usato $s_0 = u$, $s_1 = v$, $p_0 = \dot{u}$, $p_1 = \dot{v}$)

$$= F(u) + \underset{\uparrow}{0}$$ Eulero 1°

La disuguaglianza che ho usato segue dalla convessità che ho assunto: grafico sopra piano tangente.

— o — o —

Ho usato solo che ψ è C^1 e convessa in (s, p).
La convessità è richiesta solo in 2 variabili

— o — o —

Riassunto metodo INDIRETTO:

ROAD MAP → Scrivo le equazioni di Eulero
→ Spero di riuscire a risolverle
→ Spero di riuscire a dimostrare che la/le soluzioni sono minimi e per ora le strade praticabili sono
- convessità
- usare il LEMMA TRIVIAL con un problema che so risolvere.

— o — o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 08

Titolo nota 07/10/2015

Esempio 1 $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^4)\,dx$ $u(0)=0$, $u(2)=7$

$u \in C^1([0,1])$

Equazione di Eulero $\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u}) = \psi_s(x,u,\dot{u})$

$\psi(x,s,p) = p^2 + s^4$ $\psi_p = 2p$ $\psi_s = 4s^3$

$\frac{d}{dx}(2\dot{u}) = 4u^3$ $2\ddot{u} = 4u^3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{u} = 2u^3 \\ u(0)=0 \\ u(2)=7 \end{array}}$$

Non è evidente esistenza / unicità della soluzione.

Supposto che u è soluzione, è vero che è minimo ?

SI, perché $\psi(s,p)$ è convessa in (s,p).

Se faccio il conto "a mano"

$$F(w) = F(u+v) = \int (\dot{u}+\dot{v})^2 + (u+v)^4$$

$$= \int \underbrace{\dot{u}^2} + \dot{v}^2 + \underbrace{2\dot{u}\dot{v}} + \underbrace{u^4} + \underbrace{4u^3v} + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$$

Eulero 1

$$= F(u) + \int\left(\underset{+}{\dot{v}^2} + 6\underset{+}{u^2v^2} + 4\underset{\uparrow}{uv^3} + \underset{+}{v^4}\right)$$

può essere negativo

Ora sappiamo che il minimo è unico perché ψ è strett. convessa quindi se $v \neq 0$ c'è disug. stretta.

Quindi Eulero se ha soluzione ce l'ha unica.

Oss. Essendo il problema autonomo, possiamo scrivere la ERDMANN $V(s,p) = p\psi_p - \psi = 2p^2 - p^2 - s^4 = p^2 - s^4$

quindi $\dot{u}^2 - u^4 = \text{costante}$.

A questa si poteva arrivare direttamente:

$$\ddot{u} = 2u^3 \rightsquigarrow \ddot{u}\dot{u} = 2u^3\dot{u} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}\dot{u}^2\right)' = \left(\frac{1}{2}u^4\right)'$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}u^4 = \text{costante} \rightsquigarrow \dot{u}^2 - u^4 = c$$

$$\rightsquigarrow \dot{u} = \pm\sqrt{c+u^4}$$

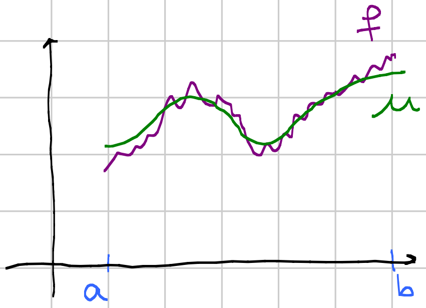
Una soluzione formula non c'è

— o — o —

<u>Esempio 2</u> Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (ma anche meno)

$$\boxed{F(u) = \int \dot{u}^2 + \int (u-f)^2} \qquad u \in C^1([a,b])$$

Utilità applicativa: f è un segnale "sporco" ricevuto e vogliamo "ripulirlo"



Minimizzare F punta a sostituire f con una funzione u (il minimo) che deve essere
→ abbastanza poco oscillante
→ " simile a $f(x)$

Esiste il min di F? Chi è? È unico?

$$\psi(x,s,p) = p^2 + (s-f(x))^2 \qquad \psi_p = 2p \qquad \psi_s = 2(s-f)$$

$$\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot{u}) = \psi_s(x,u,\dot{u}) \rightsquigarrow 2\ddot{u} = 2(u-f)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u'' = u - f(x)}$$

$$\boxed{u'(a) = u'(b) = 0} \quad \text{NBC}$$

Teoria delle equazioni lineari: esiste una sol. dell'eq. diff. e tutte le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = \bar{u}(x) + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Andando ad imporre le NBC ottengo un sistema lineare in C_1 e C_2 che ha Det $\neq 0$, quindi sol. unica.

L'unica soluzione è un minimo perché $\psi(x,s,p)$ è convessa in (s,p).

— o — o — o —

<u>Esempio 3</u> $F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^3)$ $u \in C^1 \ldots$

$u(a) = A$ $u(b) = B$

Eulero: $(2\dot{u})' = 3u^2$ $2\ddot{u} = 3u^2$.

Non è vero che $\psi(s,p) = s^2 + p^3$ è convessa

Dico che il minimo non esiste e $\inf = -\infty$.
Prendo u una qualunque funzione che rispetta le BC.
Prendo v una qualunque funzione nulla al bordo e positiva in (a,b)

$$F(u - nv) = \int_a^b (\dot{u} - n\dot{v})^2 + (u - nv)^3$$

$$= \ldots \text{ tutta roba con } n^2 \text{ o meno } - n^3 \int_a^b v^3$$

da cui $\lim_{n \to +\infty} F(u - nv) = -\infty$.

<u>Oss.</u> Punto fondamentale $\int \dot{u}^2$ cresce quadratico

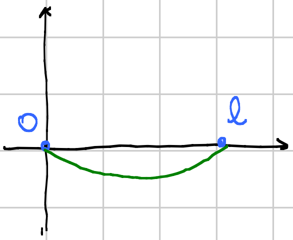
$\int u^3$ cresce cubicamente.

— o — o —

Esempio 4

$$F(u) = \int_0^{\ell} (\dot{u}^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante data} \\ \text{positiva}}}{k}\, u)\, dx \qquad u(0) = u(\ell) = 0$$

Modello: posizione di equilibrio di una corda elastica



$2\ddot{u} = k$, quindi $\ddot{u} = \frac{k}{2}$

Quindi la sol. di Eulero è la parabola $u(x) = \frac{k}{4}x^2 + a(x) + b$ con a e b scelti in modo che passi per i p.ti dati.

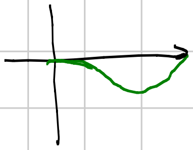
Si verifica per convessità che è l'unico minimo.

Esempio 4.1 Stesso con solo $u(0) = 0$ ⇝ nasce il Neumann nell'altro estremo.

Esempio 5 $F(u) = \int_0^{\ell} \ddot{u}^2 + ku$ $\qquad u(0) = u(\ell) = 0$

$\underbrace{\dot{u}(0) = 0}$ potevo permettermelo prima ?

Modello: sbarra in cui l'energia elastica dipende da $\ddot{u}$, cioè in prima approx. dalla curvatura



Eulero: 1ª forma $\int_0^{\ell} 2\ddot{u}\ddot{v} + kv = 0$

2ª forma $\int (u^{IV} + k)\, v = 0 \rightsquigarrow \boxed{u^{IV} = -k}$

Cosa posso dire delle BC $u(0) = 0$ $\quad u(\ell) = 0$ $\quad u'(0) = 0$

Nelle integrazioni per parti ...

$$\underset{\dot{v}(0) = 0}{[\ddot{u}\dot{v}]_a^b} + \dots \underbrace{[\ ?\ \ v]_a^b}_{= 0 \text{ perché } v = 0 \text{ al bordo}}$$

La condizione che nasce è $\boxed{\ddot{u}(\ell) = 0}$

— o — o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 09

Titolo nota 09/10/2015

METODO DIRETTO Per dimostrare che $\min\{f(x) : x \in X\}$ ESISTE.

X → insieme
$\boxed{\to}$ insieme con nozione di convergenza
→ spazio topologico
$\boxed{\to}$ spazio metrico
→ spazio di Banach
$\boxed{\to}$ spazio di Hilbert
→ $\mathbb{R}^n$

c'è anche una struttura di spazio vettoriale

Nozione di convergenza Dichiarare in X chi sono le succ. convergenti e a cosa convergono.

$$\text{Succ}(X) = \{\text{successioni in } X\} = \{f : \mathbb{N} \to X\}$$

$$\text{Nozione di convergenza} = \underbrace{\text{sottoinsieme}}_{\uparrow \text{QUALUNQUE}} \text{ di } \text{Succ}(X) \times X$$

$x_n \to x_\infty$

Nozione di convergenza ⇝ teo. di Weierstrass

Def. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice compatto (per succ.) se ogni successione $\{x_n\} \subseteq K$ ha una s.succ. convergente, cioè

$$\forall \{x_n\} \quad \exists\, n_k \to +\infty \quad \exists\, x_\infty \in K \quad \text{t.c.} \quad x_{n_k} \to x_\infty$$

Def. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inf. (per succ.) (sci) se per ogni $x_n \to x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Teorema Sia $K \subseteq X$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) K è compatto $(\neq \emptyset)$ } rispetto ad una nozione di

(ii) f è SCI } convergenza in X

Allora esiste per forza

$$\min\{f(x) : x \in K\}.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Poniamo $I := \inf\{f(x) : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Dalla def. di inf. segue che esiste una succ. $\{x_n\} \subseteq K$ t.c.

$$f(x_n) \to I$$

Per l'ipotesi (i) la succ. x_n ammette una s.succ. $x_{n_k} \to x_\infty$.

Allora

$$I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{inf}}}{\le} f(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ SCI}}}{\le} \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x_n) \text{ ha lim.,} \\ \text{quindi tutte le s.succ.} \\ \text{hanno lo stesso limite} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{=} \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. di} \\ x_n}}{=} I.$$

Da ora in poi $I \in \mathbb{R}$ ed è il minimo richiesto e $x_\infty \in \operatorname{argmin}$. □

— o — o —

Metodo diretto: trovare una nozione di convergenza che renda

→ $f(x)$ s.c.i.

→ X compatto

Oss. Le due richieste sono ANTITETICHE perché

- se metto tante succ. conv. è + facile essere compatti, ma più difficile essere SCI
- se ne metto troppe ho il problema opposto.

<u>Variante di Weierstrass</u> Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è SCI

(ii) esiste un sottolivello compatto, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\{x \in X : f(x) \le M\} \quad \text{è compatto (e non } \emptyset)$$

Allora esiste $\min\{f(x) : x \in X\}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Chiamo X_M il sottolivello. Su X_M applico W. e ottengo che

$$\exists\, x_0 \in X_M \quad \text{t.c.} \quad f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in X_M.$$

Dico che x_0 è p.to di min. in generale, cioè

$$f(x) \ge f(x_0) \qquad \forall x \in X$$

- se $x \in X_M$ è scritto sopra
- se $x \notin X_M$, allora

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \notin X_M}}{>} M \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \in X_M}}{\ge} f(x_0).$$

— o — o —

<u>Esempio</u> In $\mathbb{R}^n$ se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è SCI e verifica

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora ammette minimo.

<u>Dim</u> Pongo $M := f$ (p.to a caso) $+ 1$. Ora è ovvio che

- $X_M \ne \emptyset$ (contiene p.to a caso)
- X_M è limitato (per via del limite)
- X_M è chiuso (perché f è SCI e X_M è definito con $\le M$)

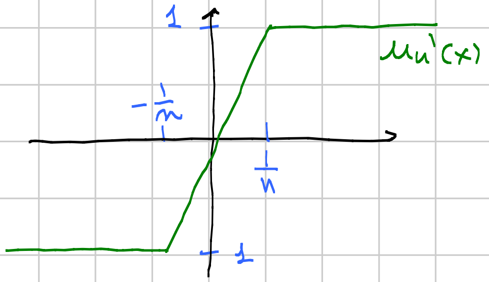
Quindi X_M è compatto $\ne \emptyset$.

— o — o —

Oss. I funzionali integrali del tipo $\int_a^b [\dot{u}(x)]^2 dx$ pensati con $X = C^1([a,b])$ (con la norma C^1) hanno enormi problemi di compattezza

$$X_M := \{ u \in C^1([a,b]) : \int_a^b \dot{u}^2 \, dx \le M \} \text{ non è compatto}$$

Basta prendere funzioni che hanno come derivata $\rightsquigarrow$ tendono a $|x|$ che non è C^1.



— o — o —

ROAD MAP È dato un funzionale $F : X \to \mathbb{R}$

Estendo il funzionale, cioè trovo un insieme $\hat{X} \supseteq X$ e una funzione

$$\hat{F} : \hat{X} \to \mathbb{R}$$

che "estende" F (FORMULAZIONE DEBOLE)

Supponiamo

(i) $\hat{F}(x) \le F(x)$ per ogni $x \in X$,

(ii) $\hat{F}$ verifica su $\hat{X}$ le ipotesi di Weierstrass generalizzato, quindi ammette minimo,

(iii) esiste un p.to di minimo x_0 per $\hat{X}$ che appartiene ad X e verifica $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$.

Allora x_0 è minimo per F in X

Dim. $$F(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ (iii)}}{=} \hat{F}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \text{ è p.to} \\ \text{min per } \hat{F}}}{\le} \hat{F}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ (i)}}{\le} F(x).$$

ROAD MAP

① Estendere ad un $\hat{X}$ opportuno (FORM. DEB.)

② Dimostrare che $\hat{F}$ e SCI (teo. SCI)

③ Dimostrare che i sottoliv. di $\hat{F}$ sono cpt. (teo. cp.t.)

④ Dimostrare che $x_0 \in X$ e $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$ $\uparrow$ teoremi di regolarità

— o — o —

$\boxed{\text{SPAZI DI HILBERT}}$ → Spazio vettoriale H

→ prodotto scalare $<x, y>$ definito positivo

→ completo rispetto alla metrica

$$\text{dist}(x,y) = \underset{\|x-y\|}{|x-y|} = <x-y, x-y>^{1/2}$$

Nozione di convergenza : $v_n \longrightarrow v_\infty \iff |v_n - v_\infty| \to 0$

Proposizione La norma è continua WRT alla nozione di convergenza di cui sopra.

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\|x_n\|^2 = \|x_\infty + x_n - x_\infty\|^2$$

$$= \|x_\infty\|^2 + \underbrace{\|x_n - x_\infty\|^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché } x_n \to x_\infty}} + 2\underbrace{<x_\infty, x_n - x_\infty>}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$|<x_\infty, x_n - x_\infty>| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C.S.}}}{\leq} \|x_\infty\| \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n - x_\infty\|} \longrightarrow 0.$$

$\square$

* * *

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 10

Titolo nota 09/10/2015

BASI HILBERTIANE

Serie a valori in uno spazio Hilbert / Banach H

Data una succ. $\{v_n\} \subseteq H$, dico che $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = S_\infty$ se

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{S_n = \text{somma parziale}} = S_\infty$$

<u>Proposizione</u> Se $\{v_n\} \subseteq H$ Banach, allora vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < +\infty}_{\text{serie di numeri}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONVERG.} \\ \text{TOTALE}}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\hat{S}_n = |v_0| + \dots + |v_n|$$

Allora $|S_n - S_m| \underset{\substack{\uparrow \\ n > m}}{=} |v_{m+1} + \dots + v_n| \le |v_{m+1}| + \dots + |v_n|$

$$= \hat{S}_n - \hat{S}_m$$

$\sum |v_n| < +\infty \Rightarrow \hat{S}_n$ succ. di Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n$ succ. di Cauchy in H $\Rightarrow$ S_n converge. □

— o — o —

<u>Oss.</u> La classica conv. totale è il risultato precedente in

$C^0([a,b])$ con la norma del sup.

Base algebrica É un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq H$ tale che ogni $v \in H$ è comb. lin. $\boxed{\text{finita}}$ di el. di $\mathcal{B}$

$\forall v \in H \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B} \ \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Teorema (che non servirà) In ogni Banach esiste una base algebrica ed è sempre

- → o finita
- → o più che numerabile.

Serve il lemma di BAIRE o equiv. BS

Oss. I polinomi $\mathbb{R}[x]$ non possono diventare un Banach.

Basi Hilbertiane Sia H uno sp. di Hilbert.

Una base Hilbertiana è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq H$ con queste proprietà

(1) ORTONORMALE $\langle v, w \rangle = 0$ se $v \neq w$ $v, w \in \mathcal{B}$

$|v| = 1$ per ogni $v \in \mathcal{B}$

(2) "GENERANO H" ogni vettore $v \in H$ si scrive nella forma

$$v = \sum_{n \geq 0}^{\infty} c_n v_n$$

per opportuni vettori $v_1, \dots, v_n, \dots \in \mathcal{B}$

" " coeff. $c_1, \dots, c_n, \dots \in \mathbb{R}$

Teorema (Molto generale) In ogni Hilbert esiste almeno una base Hilbertiana.

Def. Uno spazio di Hilbert H si dice SEPARABILE se esiste un sottoinsieme denso numerabile

Teorema In ogni Hilbert separabile esiste una base Hilbertiana finita o numerabile.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Idea: → dal denso $\{d_n\}$ numerabile costruiamo una sottosucc. $\{d_{n_k}\}$ di el. lin. indip con

$$\text{Span}(d_{n_1}, \dots, d_{n_k}) = \text{Span}(d_1, d_2, \dots, d_{n_k})$$

→ ortonormalizzo con Gram-Schmidt i d_{n_k}

→ verifico che si tratta di una base Hilbertiana

— o — o —

Proposizione Sia $\{v_n\}$ una base Hilbertiana in uno spazio H. Sia $\{c_n\}$ una succ. di numeri reali.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

Inoltre se la serie converge a v_∞, allora $|v_\infty|^2 = \sum c_i^2$

$\boxed{\text{Dim}}$ Esercizio

— o — o —

Oss. Negli spazi di Hilbert di dimensione infinita le palle non sono compatte.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero una base $\{e_n\}$. Allora $\text{dist}(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ per ogni $i \neq j$ quindi $\{e_n\}$ non è di Cauchy.

↑ o in generale un sottoinsieme numerabile di una base

Def. Si dice che $x_n \to x_\infty$ (FORTE) se $\| x_n - x_\infty \| \to 0$

Def. (convergenza debole) Si dice che $x_n \to x_\infty$ (DEBOLE) se

$$< x_n, v > \underset{\overset{\uparrow}{\text{numeri}}}{\longrightarrow} < x_\infty, v > \qquad \forall v \in H$$

Proprietà banali

(1) Se $v_n \to v_\infty$ e $w_n \to w_\infty$, allora

$$v_n + w_n \longrightarrow v_\infty + w_\infty$$

(2) Se $v_n \to v_\infty$, allora

$$\lambda v_n \longrightarrow \lambda v_\infty \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) Se $v_n \to v_\infty$, allora $v_n \longrightarrow v_\infty$

(4) Se $v_n \to v_\infty$ e $w_n \to w_\infty$, allora
e $|v_n|$ è limitata

$$< v_n, w_n > \longrightarrow < v_\infty, w_\infty >$$

(5) Se $v_n \to v_\infty$ e $w_n \to w_\infty$ $\boxed{\text{NON}}$ è detto che

$$< v_n, w_n > \longrightarrow < v_\infty, w_\infty >$$

$\boxed{\text{Dim}}$ (i) + (ii) Banale esercizio

(iii) Ipotesi $v_n \longrightarrow v_\infty$

Tesi $v_n \longrightarrow v_\infty$, cioè $< v_n, w > \to < v_\infty, w >$ per ogni $w \in H$

$$| < v_n, w > - < v_\infty, w > | = | < v_n - v_\infty, w > |$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{\text{c.s.}}}{\le} \underbrace{\| v_n - v_\infty \|}_{\downarrow \atop 0} \cdot \| w \| \to 0$$

(iv) $| < v_n, w_n > - < v_\infty, w_\infty > |$

$$\le \underbrace{| < v_n, w_n > - < v_n, w_\infty > |} + \underbrace{| < v_n, w_\infty > - < v_\infty, w_\infty > |}_{\downarrow \atop 0}$$

$$\le \| v_n \| \cdot \| w_n - w_\infty \|$$

$\| v_n \|$ ↓ se fosse limitato avrei finito

$\| w_n - w_\infty \|$ ↓ 0

per definizione di conv. debole

(5) Controesempio in dimensione infinita

$v_n = e_n \quad w_n = e_n \quad \langle e_n, e_n \rangle \to 1$ MA $e_n \not\to 0$

$\boxed{\text{Fatto}}$ Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightharpoonup 0$

$v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$, allora $\langle v, e_m \rangle = c_m \to 0$

perché la serie converge.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Vero, ma che non useremo MAI)
Sia H un Hilbert. Allora le successioni che convergono debolmente sono limitate, cioè

$v_n \rightharpoonup v_\infty \implies \exists M$ t.c. $|v_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Idea per una dimostrazione: se $|v_n|$ non sono limitate, trovare $w \in H$ t.c. $\langle v_n, w \rangle$ non abbia limite reale

$\boxed{\text{Dim ufficiale}}$ (Idea) Per ipotesi sappiamo che

$\forall w \in H$ la succ. $\langle v_n, w \rangle$ ha limite, quindi è limitata.

Pongo $H_k := \{ w \in H : |\langle v_n, w \rangle| \leq k \}$

Ma allora $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$ e non è difficile vedere che gli H_k sono chiusi.

Baire $\implies$ uno degli H_k ha parte interna $\neq \emptyset$.

A questo p.to segue ... che $|\langle v_n, w \rangle| \leq$ costante $\forall |w| \leq 1$
e da questo segue che $|v_n| \leq$ costante.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 11

Titolo nota 22/08/2015

Spazi di Hilbert e basi Hilbertiane che permettono di lavorare in un Hilbert H separabile con le componenti come in $\mathbb{R}^n$.

$$H \ni v = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{compon.}}}{c_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{e_n} \qquad c_n = \langle v, e_n \rangle$$

$$w = \sum b_n e_n \qquad \langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \qquad |v|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

Def. Si definisce ℓ^2 l'insieme delle successioni $\{u_n\}$ di reali t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \qquad \text{(quadrato sommabili)}$$

con prodotto scalare definito in modo ovvio

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

Teorema (dell'altra volta) Tutti gli spazi di Hilbert separabili sono (isomorfi a) $\mathbb{R}^n$ oppure ℓ^2 $(\mathbb{R}^\infty)$.

Nozioni di convergenza:

① $H \ni v_n \longrightarrow v_\infty$ e $\| v_n - v_\infty \| \to 0$

② $H \ni v_n \rightharpoonup v_\infty$ se $\langle v_n, w \rangle \longrightarrow \langle v_\infty, w \rangle$ $\forall w \in H$

Titolo nota 14/10/2015

Oss. Se $v_n \to v_\infty$, allora $\underbrace{\langle v_n, e_k \rangle}_{\substack{\downarrow \\ k\text{-esima componente}}} \to \langle v_\infty, e_k \rangle$

Domanda: per dimostrare che $v_n \to v_\infty$, devo proprio usare tutti i $w \in H$?

Proposizione Sia $\{v_n\} \subseteq H$ una succ., sia $v_\infty \in H$, sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme DENSO.

Supponiamo che

(i) $\langle v_n, w \rangle \to \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in W$

(ii) v_n è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v_n\| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$v_n \to v_\infty$$

Oss. Serve davvero la limitatezza? SI, perché basta considerare la succ. $\{n e_n\} = \{v_n\}$

È evidente che

$$\langle v_n, w \rangle \to 0$$

per ogni w che ha un numero finito di componenti.

D'altra parte $v_n \not\to 0$. Questo si può vedere in 2 modi:

① Pongo

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \qquad \left(\text{converge perché } \sum \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$$

e osservo che $\langle v_n, w \rangle = 1 \not\to 0$

② Usare che $v_n \to$ q.c. $\Rightarrow \|v_n\|$ limitate.

Dim. Devo dimostrare che

$$\langle v_n, w \rangle \longrightarrow \langle v_\infty, w \rangle \qquad \forall w \in H$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la densità di W trovo $w_\varepsilon \in W$ t.c.

$$\| w - w_\varepsilon \| \leq \varepsilon$$

Ora

$$\begin{aligned} |\langle v_n, w\rangle - \langle v_\infty, w\rangle| \leq\ & |\langle v_n, w\rangle - \langle v_n, w_\varepsilon\rangle| + & ① \\ & + |\langle v_n, w_\varepsilon\rangle - \langle v_\infty, w_\varepsilon\rangle| & ② \\ & + |\langle v_\infty, w_\varepsilon\rangle - \langle v_\infty, w\rangle| & ③ \end{aligned}$$

Stimo i 3 pezzi

① $$\begin{aligned} |\langle v_n, w\rangle - \langle v_n, w_\varepsilon\rangle| &= |\langle v_n, w - w_\varepsilon\rangle| \\ &\overset{\text{C.S.}}{\leq} \|v_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \\ &\leq \varepsilon M \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} |\langle v_\infty, w_\varepsilon\rangle - \langle v_\infty, w\rangle| &= |\langle v_\infty, w_\varepsilon - w\rangle| \\ &\leq \|v_\infty\| \cdot \|w_\varepsilon - w\| \\ &\leq \varepsilon \|v_\infty\| \end{aligned}$$

Quindi

$$|\langle v_n, w\rangle - \langle v_\infty, w\rangle| \leq \underbrace{|\langle v_n, w_\varepsilon\rangle - \langle v_\infty, w_\varepsilon\rangle|}_{\downarrow\ 0 \text{ perché } w_\varepsilon \in W} + \varepsilon M + \varepsilon \|v_\infty\|$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \text{LHS} \leq \varepsilon M + \varepsilon \|v_\infty\|$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario ho finito.

— o — o —

Oss. Nella proposizione posso sostituire $W \subseteq H$ denso con $W \subseteq H$ tale che $\text{Span}(W)$ è denso. In particolare se $\{v_n\}$ è LIMITATA basta testare $\langle v_n, w\rangle \to \langle v_\infty, w\rangle$ con $w \in$ base Hilbertiana di H.

Fatto importante Una successione v_n limitata tende debole a v_∞ se e solo se le componenti di v_n tendono (come numeri) alle componenti di v_∞.

Teorema In uno spazio di Hilbert separabile le palle sono debolmente compatte, cioè ogni successione $\{v_n\}$ limitata ammette una s. succ. conv. DEBOLMENTE.

Dim. Data $\{v_n\}$ basta trovare $v_\infty \in H$ e $n_k \longrightarrow +\infty$ t.c.

$$\langle v_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow \langle v_\infty, e_i \rangle \qquad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}$$

Osservo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la successione di numeri $\langle v_n, e_i \rangle$ è limitata (C.S.). Allora faccio il solito procedimento diagonale cioè

→ estraggo s. succ. in modo t.c. $\langle v_n, e_1 \rangle \longrightarrow \alpha_1$

→ estraggo <u>dalla precedente</u> s. succ. t.c. $\langle v_n, e_2 \rangle \longrightarrow \alpha_2$

⋮

concludo diagonalmente. Così trovo una s. succ. n_k t.c.

$$\langle v_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow \alpha_i \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Ora vorrei tanto porre $v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ e concludere

Per far questo serve sapere PRIMA che $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty$

Basta che dim. che le somme parziali sono EQUILIMITATE

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma finita}}}{=} \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} \langle v_{n_k}, e_i \rangle^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \le \|v_{n_k}\|^2}}{\le} M^2 .$$

* * *

Teorema (SCI della norma wrt alla convergenza debole)

Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$ in H, allora $\liminf_{n \to +\infty} \|v_n\| \geq \|v_\infty\|$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\|v_n\|^2 = \| v_\infty + (v_n - v_\infty) \|^2$$

$$= \|v_\infty\|^2 + 2 < v_\infty, v_n - v_\infty > + \|v_n - v_\infty\|^2$$

$$\geq \|v_\infty\|^2 + 2 \underbrace{\left(< v_\infty, v_n > - < v_\infty, v_\infty > \right)}_{\downarrow \\ 0}$$

(prod. scalare con quantità fissa)

Basta ora fare liminf al RHS e LHS

— o — o —

Achtung! Da non fare mai: se $v_n \rightharpoonup v_\infty$

$$\|v_n\|^2 = < v_n, e_1 >^2 + < v_n, e_2 >^2 + \ldots + < v_n, e_i >^2 + \ldots$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$< v_\infty, e_1 >^2 + < v_\infty, e_2 >^2 + \ldots + < v_\infty, e_i >^2 + \ldots$$

$$= \|v_\infty\|^2$$

NON SI SCAMBIANO SOMME INFINITE CON I LIMITI.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 12

Titolo nota 14/10/2015

Misura di Lebesgue → BEPPO-LEVI (convergenza MONOTONA)
→ FATOU
→ convergenza DOMINATA

Teorema di LEBESGUE Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (anche $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) integrabile secondo Lebesgue sui compatti ($L^1_{loc}(\mathbb{R})$), allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$) di misura nulla tale che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{meas}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy = \underset{\uparrow}{f(x)}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

dunque in particolare il limite esiste per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

—o—o—

Spazi di LEBESGUE L^p

Dato un intervallo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e dato $p \geq 1$ si pone

$$L^p((a,b)) := \left\{ f: (a,b) \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Più precisamente bisogna quozientare per la relazione di equivalenza

$$f \sim g \iff \operatorname{meas}\{x \in (a,b) : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

Oss. Si possono definire analogamente spazi a partire da una funzione data $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imponendo

$$\int_a^b \varphi(f(x))\,dx < +\infty$$

Esercizio Capire quali proprietà di φ garantiscono le proprietà tipiche degli spazi L^p, ad esempio

1: essere uno spazio vettoriale

2: il fatto che

$$f \to \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$$

è una norma

3: completezza. ← entra in gioco la misura di LEBESGUE.

Disuguaglianza di Hölder

$$\left.\begin{array}{l} f \in L^p((a,b)) \\ g \in L^q((a,b)) \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow fg \in L^1((a,b)) \text{ e } \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Più in generale: se ho $f_1, \dots, f_n$ con $f_k \in L^{p_k}((a,b))$ e

$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}$, allora $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \in L^r$ e vale

$$\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \ldots \cdot \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

(stessa dim. del caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Caso $p = 2$ $L^2((a,b))$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

e la Hölder con $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ è proprio Cauchy - Schwarz.

È separabile: un sottoinsieme denso sono le comb. lin. finite a coeff. in $\mathbb{Q}$ delle funzioni caratteristiche di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

DERIVATE DEBOLI E SPAZI DI SOBOLEV

→ Definizione W
→ Definizione H

Definizione W

<u>Def.</u> Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (integrabile localmente secondo Lebesgue)
Dico che $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ è $\boxed{\text{la}}$ <u>derivata debole</u> di f se

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, v'(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in C^\infty_c(\mathbb{R})}$$

<u>Def.</u> Lo <u>spazio di Sobolev</u> $W^{\overset{\text{der. prima}}{1},\overset{\text{sommabilità}}{p}}((a,b))$ è l'insieme delle $f \in L^p((a,b))$ la cui derivata debole $g \in L^p((a,b))$.

<u>Oss.</u> Gli integrali nella definizione sono integrali su un intervallo, quindi sono ben definiti.

<u>Oss.</u> Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, allora vale la formula di sopra pur di prendere $g = f'$: è l'integrazione per parti, senza bordo perché v è nulla al "bordo".

<u>Lemma</u> La derivata debole, posto che esista, è UNICA.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $g_1(x)$ e $g_2(x)$ siano derivate deboli di una stessa $f(x)$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x)\, v(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, v'(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g_2(x)\, v(x)\, dx$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} [g_1(x) - g_2(x)]\, v(x)\, dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

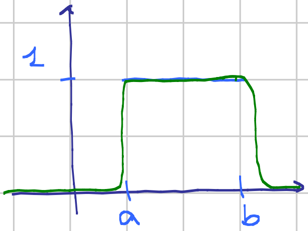
Vorrei tanto poter usare il FLCV in versione Lebesgue.

<u>Lemma</u> (FLCV in versione Lebesgue) Sia $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, v(x)\, dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Allora $g(x) = 0$ a meno di insiemi di misura nulla.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Non posso dire che wlog esiste un intervallo in cui $g(x) \geq a > 0$.
Ci sono 2 vie di uscita, entrambe passano per dire che la relazione vale per ogni $v(x)$ caratteristica di intervallo



Dato un intervallo (a,b) esiste $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

(i) $0 \leq v_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(ii) $v_n(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conv. puntuale}}}{\longrightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caratteristica } (0/1)}}{I_{(a,b)}}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Questo basta per concludere che

$$v_n(x)\, g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{puntuale}}}{\longrightarrow} \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b) \end{cases}$$

Inoltre $|v_n(x)\, g(x)| \leq |g(x)|$ e questo basta per la convergenza dominata

$$0 = \int_{\mathbb{R}} v_n(x)\, g(x)\, dx \longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx = 0$$

Ora chiudo con Lebesgue e ho che per quasi ogni x:

$$g(x) \overset{\uparrow}{=} \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2r} \underbrace{\int_{x-r}^{x+r} g(y)\,dy}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

Lebesgue. 0 (perché integrale su intervallo)

— o — o —

Esercizio Dimostrare FLCV a media nulla in versione Lebesgue.

— o — o —

Oss. Alternativa per la dim. di FLCV in versione Lebesgue: dimostrare per approssimazione che se vale la relazione per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, allora vale per ogni $v \in L^1$ e concludere prendendo $v = g$.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 13

Titolo nota 16/10/2015

Derivate deboli e spazi di Sobolev

Def. (W) Sia $f \in L^1((a,b))$ e sia $g \in L^1((a,b))$.
Si dice che g è la derivata debole di f se

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$$

Def. (H) Siano f e g come sopra.
Si dice che g è la derivata debole di f se esiste una successione

$$f_n \subseteq C^\infty([a,b])$$

tale che

- $\boxed{f_n} \to f$ in $L^1((a,b))$, $L^p((a,b))$
- $\boxed{f_n'} \to g$ in $L^1((a,b))$. $L^p((a,b))$

↑ funzioni e derivate vere

Def Si dice che $f \in W^{1,p}((a,b))$ se $f \in L^p((a,b))$ e la sua derivata debole $g \in L^p((a,b))$.
Si dice che $f \in H^{1,p}((a,b))$ se vale come nella def. (H) con convergenza in $L^p((a,b))$.

Oss. La definizione H è equivalente alla seguente: considero l'insieme $X = C^1([a,b])$ oppure $C^\infty([a,b])$ e considero in X la distanza:

$$\text{dist}(f,g) = \|f-g\|_{L^p} + \|f'-g'\|_{L^p}$$

Posso definire $H^{1,p}$ come il completamento di X wrt alla distanza appena introdotta.

Notazione H^k è sinonimo di $H^{k,2}$ o $W^{k,2}$

Esempio 1 $f(x) = |x|+3$ sta in $H^{1,p}((-2,2))$ per ogni p.

Verifica W Dico che la sua derivata debole è

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x<0 \\ 1 & \text{per } x>0 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (-x+3)\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{2} (x+3)\varphi'(x)\,dx$$

$$= \Big[(-x+3)\varphi(x)\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (-1)\varphi(x)\,dx$$

$$+ \Big[(x+3)\varphi(x)\Big]_{0}^{2} - \int_{0}^{2} 1\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \cancel{3\varphi(0)} - \cancel{3\varphi(0)} - \int_{-2}^{2} g(x)\varphi(x)\,dx$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty((-2,2))$

Verifica (H) Devo approssimare $|x|+3$ con funzioni C^1 o C^∞ in maniera che $f_n \to f$ e $f_n' \to g$

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Verifiche per esercizio.

Esercizio Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ 1 & \text{per } x>0 \end{cases}$$

Dico che $f \notin W^{1,p}((-2,2))$ per ogni $p>1$.

Formalismo (W): supponiamo $\exists\, g \in L^1((-2,2))$ t.c.

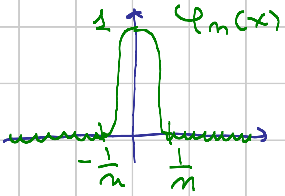
$$\int_{-2}^{2} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-2}^{2} g(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{0}^{2} \varphi'(x)\,dx = \varphi(2)-\varphi(0) = -\varphi(0)$$

Allora dovrebbe accadere che

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((-2,2))$$

Me la gioco con una succ. $\varphi_n(x)$ fatta così



Allora RHS = 1 fisso, mentre LHS → 0 per convergenza dominata.

<u>Esercizio</u> $W^{k,p}$ e $H^{k,p}$ sono spazi vettoriali e la derivata debole è un'applicazione lineare.

<u>Derivata del prodotto</u> Se $f \in W^{1,p}$ e $g \in W^{1,p}$, allora

$$f \cdot g \in W^{1,p} \quad \text{e} \quad (f\cdot g)' = f'g + f\,g'$$

Questo è per nulla ovvio in def. (W) e molto più semplice con def. (H).

—o—o—

$\boxed{\text{Teorema}}$ $\boxed{H \subseteq W}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $f_n(x)$ una succ. di funzioni $C^1((a,b))$ tali che

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{in } L^1((a,b)) \qquad f_n'(x) \to g(x) \ \text{in } L^1((a,b))$$

Dico che $g(x)$ è la derivata debole di $f(x)$ nel senso W.

Per le $f_n(x)$ vale la vera integrazione per parti:

$$\begin{tikzcd}
\int_a^b f_n(x)\,\varphi'(x) \arrow[d] & = & -\int_a^b f_n'(x)\,\varphi(x)\,dx \arrow[d] \\
\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx & = & -\int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx
\end{tikzcd}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Lemma}}$ Sia $\{f_n(x)\} \subseteq W^{1,2}((a,b))$ e siano $f_n'(x)$ le rispettive derivate deboli

Supponiamo che

$$f_n \longrightarrow f_\infty \quad \text{in } L^2((a,b)) \qquad f_n' \longrightarrow g_\infty \quad \text{in } L^2((a,b))$$

Allora $f_\infty \in W^{1,2}((a,b))$ e $g_\infty = f_\infty'$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sopra ho usato solo la convergenza debole.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Le funzioni in $W^{1,p}((a,b))$ sono l'integrale della propria derivata.

Dim. (W) Sia $g(x)$ la derivata debole di $f(x)$. Pongo

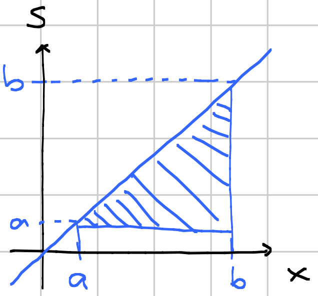
$$G(x) := \int_a^x g(s)\,ds \qquad (\text{la "primitiva" di } g(x))$$

Calcolo

$$\int_a^b \varphi'(x)\,G(x)\,dx = \int_a^b \varphi'(x)\int_a^x g(s)\,ds\,dx$$

$$= \int_a^b\int_a^x \varphi'(x)\,g(s)\,ds\,dx$$

(Fubini-Tonelli) $$= \int_a^b ds\int_s^b dx\,\varphi'(x)\,\underline{g(s)}$$



$$= \int_a^b g(s)\,ds \underbrace{\int_s^b \varphi'(x)\,dx}_{\substack{\varphi(b)-\varphi(s)\\ = -\varphi(s)}} = -\int_a^b g(s)\,\varphi(s)\,dx$$

Ho quindi dim. che

$$\int_a^b G(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a g(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

Quindi applicando DBR in versione L^1 deduco che

$$f(x) = \text{costante} + G(x)$$

— o — o —

In particolare potremo scrivere

$$f(x) - f(y) = \int_y^x g(s)\,ds$$

— o — o —

$\boxed{\text{Corollario}}$ Se g è la derivata debole di f e g è continua, allora $f \in C^1$ e g è la "vera" derivata

Dim senza teorema Chiamo G la primitiva di g e ragiono come nella dim. del teorema senza bisogno di passare dall'integrale doppio.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 14

Titolo nota 16/10/2015

Teorema Le funzioni $W^{1,2}((a,b))$ sono $\underbrace{\frac{1}{2}\text{-Hölderiane}}_{C^{0,1/2}([a,b])}$

Dim. Sia $f \in W^{1,2}$ e sia g la sua derivata debole.
Sia $a \leq x < y \leq b$. Allora

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y g(s)\,ds\right| \leq \int_x^y |g(s)|\,ds$$

$$= \int_a^b \overbrace{|g(s)|}^{\in L^2} \cdot \underbrace{\overbrace{\mathbb{1}_{[x,y]}(s)}^{\in L^2}}_{\substack{\downarrow \\ \text{caratteristica } (0/1) \\ \text{di } [x,y]}} ds \leq \left[\int_a^b g^2(s)\,ds\right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b \mathbb{1}^2_{[x,y]}\,ds\right]^{1/2}$$

$$= \|g\|_{L^2} \cdot |y-x|^{1/2}.$$

— o — o —

Ho dimostrato che $\|g\|_{L^2}$ va bene come costante di Hölder.

Analogo Le funzioni $W^{1,p}$ sono $C^{0,1/q}([a,b])$ dove $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Dim. Come prima

$$|f(y)-f(x)| = \int_a^b \underbrace{|g(s)|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[x,y]}(s)}_{\in L^q}\,ds \overset{\substack{\text{Hölder}\\ \downarrow}}{\leq} \|g\|_{L^p}\,|y-x|^{1/q}.$$

— o — o —

Oss. Le funzioni $W^{1,p}$ sono CONTINUE. Detto meglio: data $f(x) \in W^{1,p}((a,b))$ esiste $\hat{f}(x) \in C^0([a,b])$ t.c.

$$f(x) = \hat{f}(x) \qquad \text{per ogni } x \in [a,b] \setminus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{meas}(E)=0.}}{E}$$

— o —

La Heaviside 0/1 è continua quasi ovunque, ma non coincide q.o. con una continua.

Ripasso: $\boxed{\text{teorema di ASCOLI-ARZELÀ}}$

Caso base: Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ (con estremi) e siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) per ogni $x \in [a,b]$ la successione $\{f_n(x)\}$ è tale che ogni sottosuccessione ammette s.s.succ. convergenti,

(ii) $f_n(x)$ è equicontinua, cioè $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$|y-x| \leq \delta,\ n \in \mathbb{N} \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora esiste una s.succ. convergente UNIFORMEMENTE, cioè esiste $n_k \to +\infty$ ed esiste $f_\infty : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{n_k}(x) \to f_\infty(x) \quad \text{unif. in } [a,b].$$

Caso più generale Sia X un metrico compatto, siano $f_n : X \to Y$ con Y metrico completo.

Supponiamo che valgano le ipotesi come sopra

(i) la chiusura di $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è compatto per ogni $x \in X$

(ii) equicontinuità

Allora esiste s.succ. conv. unif. in X

Oss. Se X non è compatto, ma unione numerabile di compatti, allora con le stesse ipotesi la tesi diventa esiste una s.succ. che converge unif. sui compatti.

—o—o—

Back to definizione (H) Supponiamo che
$$f_n \to f_\infty \text{ in } L^2$$
$$f_n' \to g_\infty \text{ in } L^2$$

Dico che le $f_n(x)$ soddisfano le ipotesi di A.A.

Infatti

→ $f_n' \to g_\infty$ in $L^2 \implies \|f_n'\|_{L^2}$ sono equilimitate, ma allora tutte le f_n sono $\frac{1}{2}$-Hölder con una costante comune

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \|f_n'\|_{L^2}\, |y-x|^{1/2} \qquad \forall (x,y) \in [a,b]^2$$

$\implies$ sono equi-continue

→ Dico che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(x)| \le M$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

da cui segue l'hp (i) di A.A.
Se $f_n \to f_\infty$, allora le norme $\|f_n\|_{L^2}$ sono equilimitate, quindi

$$\int_a^b |f_n(x)|^2 \, dx \le K$$

Ma allora per il teo. della media integrale (qui va bene perché) le $f_n(x)$ sono continue sappiamo che $\exists \, x_n \in [a,b]$ t.c.

$$K \ge \int_a^b |f_n(x)|^2 \, dx = (b-a)\,|f_n(x_n)|^2$$

Ma allora $|f_n(x_n)| \le \left(\frac{K}{b-a}\right)^{1/2}$

Usano l'Hölderianità ottengo

$$|f_n(x)| = |f_n(x_n) + f_n(x) - f_n(x_n)|$$

$$\le \underbrace{|f_n(x_n)|}_{\le \left(\frac{K}{b-a}\right)^{1/2}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_n)|}_{\substack{\le H|x-x_n|^{1/2} \\ \le H|b-a|^{1/2}}}$$

Ma allora a meno di sottosucc. $f_n(x) \to \hat{f}_\infty(x)$ uniformemente, ma allora $\hat{f}_\infty(x)$ è continua.
Ma allora

$$\begin{array}{lll} f_n(x) \longrightarrow \hat{f}_\infty(x) & & \text{unif.} \\ f_n(x) \longrightarrow f_\infty(x) & & L^2 \end{array} \quad \text{sono uguali}$$

Quindi in particolare $f_\infty(x)$ è continua.

— o — o —

Teorema $\boxed{W \subseteq H}$

Idea della dim. Data una $f(x) \in L^p$ con deriv. deb. $g(x) \in L^p$ devo trovare funzioni $f_n(x) \in C^1$ t.c.

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{in } L^p$$
$$f_n'(x) \to g(x) \quad \text{in } L^p$$

Appossimo $g(x)$ con funzioni continue o C^∞ e faccio vedere che vanno bene come $f'_n(x)$.

— o — o —

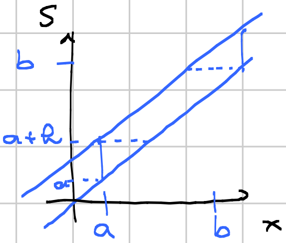
Esercizio La derivata debole è il limite in qualche senso del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = R_h(x) .$$ Cosa posso dire di $R_h(x)$?

$$R_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(s)\,ds$$ Quindi

$$|R_h(x)| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |g(s)|\,ds \leq \frac{1}{h}\sqrt{h}\left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds\right]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds\right]^{1/2}$$

$$\int_a^b |R_h(x)|^2 dx \leq \frac{1}{h}\int_a^b \left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds\right] dx$$



Invertendo l' ordine di integrazione ottengo che è $\leq$ costante (bisogna spezzarlo in 3 parti)

Morale $\|R_h(x)\|_{L^2}$ sono equilimitate $\Rightarrow$ esiste s.succ. che converge debolmente a qualcosa

$\Rightarrow$ il qualcosa è la derivata debole.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 15

Titolo nota 21/10/2015

[Ogni problema ammette almeno una soluzione, pur di indebolire abbastanza il concetto di soluzione.
E. De Giorgi]

ESEMPIO MOTIVAZIONALE

$$\min\left\{ \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2 + \arctan(u(x))\, dx \ : \ u \in C^1([0,2]) \atop u(0)=0,\ u(2)=3 \right\}$$

Equazione di Eulero:

$$2u'' = \frac{1}{1+u^2} \quad \leadsto \text{ non so risolvere}$$

Metodo diretto :
1 – Formulazione debole
2 – Compattezza
3 – Semicontinuità
4 – Regolarità

Cerco una nozione di convergenza per cui valgano (2 – 3)

soluzione debole → (3)

1 FORMULAZIONE DEBOLE

Estendo

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + \arctan u)\, dx$$

ad un ambiente più grande di $C^1([0,2])$. In questo caso scelgo

$$H^1((0,2)) = W^{1,2}((0,2))$$

Osservo che le condizioni al bordo $u(0)=0$ e $u(2)=3$ hanno senso in H^1, perché le funzioni H^1 ammettono un rappresentante continuo, che è quello che useremo sempre.
Diverso sarebbe stato con $u'(0)=3$

Considero quindi $F(u)$ definito su

$$X = \{ u \in H^1((0,2)) \; : \; u(0) = 0 \, , \; u(2) = 3 \}$$

dove ovviamente intendo $\dot{u}$ = derivata debole.

$\boxed{2}$ Nozione di convergenza e compattezza.

Prendo un sottolivello:

$$\{ u \in X \; : \; F(u) \le M \}$$

Punto fondamentale: dedurre una stima sul gradiente

$$M \ge F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 \, dx + \underbrace{\int_0^2 \arctan u \, dx}_{\ge 2 \cdot (-\frac{\pi}{2})} \ge \int_0^2 \dot{u}^2 \, dx - \pi$$

Quindi

$$\boxed{\int_0^2 \dot{u}^2 \, dx \le M + \pi}$$

Se $\{u_n\} \subseteq X$ con $F(u_n) \le M$, allora $\|\dot{u}_n\|^2_{L^2} \le M + \pi$ quindi posso estrarre una s.succ. debolmente convergente

$$\dot{u}_{n_k} \longrightarrow v_\infty$$

Vorrei far convergere pure le funzioni in qualche senso.

[Come far convergere funzioni e derivate insieme. Ci sono solo 2 casi in cui non funziona

① $u_n(x) \equiv n$ Derivate ok, funzione scappa

② $u_n(x) = \sin(nx)$ Funzione limitata, derivata scappa

Se voglio la convergenza, servono ipotesi per controllare funzioni e derivate]

Qui controllo le funzioni grazie alle BC

$$\left|u_n(x) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{u_n(0)}\right| \le \|\dot u_n\|_{L^2}\cdot\sqrt{x}$$

da cui $|u_n(x)| \le \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ampiezza intervallo}}}{\sqrt{2}}\,\|\dot u_n\|_{L^2}$

Conclusione: le $u_n(x)$ in un qualunque sottolivello sono equilimitate + continue

Ascoli – Arzelà $\Rightarrow$ a meno di s.succ. $u_{n_k}(x) \longrightarrow u_\infty(x)$ unif.

Oss. ① Posso trovare una stessa s.succ. t.c.

$$\begin{array}{lcl} u_{n_k}(x) & \longrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} u_\infty(x) \\ \\ V_\infty(x) \end{array}} \end{array}\quad \begin{array}{l}\text{unif.}\\ \\ \text{debolmente}\end{array}$$

$$\dot u_{n_k}(x) \longrightarrow V_\infty(x)$$

② Teorema già visto: $V_\infty(x) = \dot u_\infty(x)$
(basterebbero 2 deboli)

Nozione di conv. wrt abbiamo compattezza dei s.livelli ⤴

[3] Semicontinuità: serve che

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow u_\infty \ \text{unif} \\ \dot u_n \longrightarrow \dot u_\infty \ \text{debolm.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \ge F(u_\infty)$$

$$F(u_n) = \underbrace{\int_0^2 \dot u_n^2\,dx}_{\downarrow\ \|\dot u_n\|^2_{L^2}} + \underbrace{\int_0^2 \arctan u_n\,dx}_{\downarrow}$$

e la norma è
sci
wrt debole

$u_n \to u_\infty$ unif. $\Rightarrow$
arctan $u_n \to$ arctan u_∞ unif.
$\Rightarrow$ passo al limite negli integrali

$$\int_0^2 \arctan u_\infty\,dx$$

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf \int_0^2 \dot u_n^2 \, dx + \lim \int_0^2 \arctan u_n \, dx$$
$$\geq \int_0^2 \dot u_\infty^2 \, dx + \int_0^2 \arctan u_\infty \, dx = F(u_\infty)$$

Devo solo verificare che $u_\infty \in X$, cioè rispetta le B.C.
Questo segue ancora una volta dalla conv. unif., anzi basterebbe puntuale

$$u_n(0) = 0 \qquad\qquad u_n(2) = 3$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$u_\infty(0) = 0 \qquad\qquad u_\infty(2) = 3$$

Ora esiste $\min\{F(u) : u \in X\}$

$\boxed{4}$ Regolarità : dimostrare che $u \in C^1([0,2])$, anzi C^∞.

Si tratta di fare l'eq. di Eulero in H^1 come si faceva in C^1.
Sia u un p.to di minimo in X.
Prendo $v \in C^1([0,2])$ con $v(0) = v(2) = 0$

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^2 [(\dot u + t\dot v)^2 + \arctan(u+tv)] \, dx$$
$$= \int_0^2 \dot u^2 + 2t\dot u \dot v + t^2 \dot v^2 + \arctan(u+tv)$$

$$\varphi'(t) = 2\int_0^2 \dot u \dot v + 2t \int_0^2 \dot v^2 + \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{1+(u+tv)^2} v \, dx}$$

ho supposto di poter derivare sotto il segno di integrale

$$0 = \varphi'(0) = 2\int_0^2 \dot u \dot v + \int_0^2 \frac{v}{1+u^2}$$ Eulero prima forma

cioè $$2\int_0^2 \underbrace{\dot u}_{f} \dot v \, dx = -\int_0^2 \underbrace{\frac{1}{1+u^2}}_{g} v \, dx$$ $\forall v \in C^1$ nulla al bordo

$\Rightarrow$ f è derivabile debolmente e $\mathring{f} = g$

$\Rightarrow$ $\mathring{u}$ è derivabile debolmente e $2(\mathring{u})' = \underbrace{+\frac{1}{1+u^2}}_{\text{continua}}$

Ma allora $(\mathring{u})'$ è continua, quindi $\mathring{u}$ è C^1 (Lemma: se $f' \in C^0 \Rightarrow f \in C^1$), quindi $u \in C^2$ e risolve Eulero in senso classico

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivata VERA}}}{2u''(x)} = \frac{1}{1+u(x)^2} \qquad \forall x \in [0,2]$$

BOOTSTRAP $\Rightarrow$ $u \in C^\infty([0,2])$

(Per induzione: $u \in C^k \Rightarrow u'' = \text{RHS} \in C^k \Rightarrow u \in C^{k+2}$)

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 16

Titolo nota 21/10/2015

TEOREMI DI COMPATTEZZA

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\quad u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

Idea generale: $\left.\begin{array}{l} \to \text{qualcosa che controlla } u_n \\ \to \text{qualcosa che controlla } \dot{u}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_n \to u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty \text{ debol.} \end{array}$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Siano $\{u_n\} \subseteq H^1((a,b))$.

Supponiamo che

(i) $\exists\, M_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\displaystyle\int_a^b \dot{u}_n(x)^2\,dx \le M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\exists\, M_2 \in \mathbb{R}$ $\exists \{x_n\} \subseteq [a,b]$ t.c. $|u_n(x_n)| \le M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora esiste $n_k \to +\infty$ ed esiste $u_\infty \in H^1((a,b))$ t.c.

$$u_{n_k} \to u_\infty \text{ unif.} \qquad \dot{u}_{n_k} \rightharpoonup \dot{u}_\infty$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Verifichiamo le ipotesi di Ascoli - Arzelà

- Compattezza a x fisso (equilimitatezza) ⇝ dopo
- Equicontinuità, anzi equi $\frac{1}{2}$- Hölder

$$|u_n(y) - u_n(x)| = \left|\int_x^y \dot{u}_n(s)\,ds\right| \le \int_x^y |\dot{u}_n(s)|\,ds$$

$$\le |y-x|^{1/2}\, \|\dot{u}_n\|_{L^2((x,y))}$$

$$\le |y-x|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2}$$

Ora posso fare l'equilimitatezza

$$
\begin{aligned}
|u_n(x)| &\le |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)| \\
&\le M_2 + |x-x_n|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2} \\
&\le M_2 + |b-a|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Per Ascoli–Arzelà esiste $u_{n_k} \longrightarrow u_\infty$ unif.
Pur di estrarre una s.succ. ulteriore faccio convergere debolmente le derivate

$$\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v_\infty \rightsquigarrow v_\infty = \dot{u}_\infty \text{ per il solito lemma.}$$

—— o —— o ——

<u>Casi speciali</u> L'ipotesi (ii) può derivare

- da una DBC in un estremo dell'intervallo
- da una condizione integrale, ad esempio

$$\int_a^b u_n(x)\,dx = 7$$

[Per il teo. della media integrale, essendo u_n continua

$$\exists\, x_n \in [a,b] \text{ t.c. } \quad u_n(x_n) = \frac{1}{b-a}\int \dots = \frac{7}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fisso}}}{b-a}} \quad]$$

—— o —— o ——

Teoremi per la semicontinuità

<u>Facile</u>: consideriamo $\displaystyle\int_a^b \psi(x, u_n(x))\,dx$

Supponiamo $\psi : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua
Supponiamo $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cont.}}}{u_n(x)} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cont.}}}{u_\infty(x)}$ uniformemente

Allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi(x, u_n(x))\,dx = \int_a^b \psi(x, u_\infty(x))\,dx$

$\boxed{\text{Dim.}}$ È un esercizio sulla conv. uniforme far vedere che

$$\psi(x, u_n(x)) \longrightarrow \psi(x, u_\infty(x)) \quad \text{uniformemente}$$

a quel punto è fatta. Serve la uniforme continuità di ψ sui compatti.

Oss. Il teorema è del tutto non ottimale.
Ad esempio, se ψ fosse limitata, basta che
$u_n(x) \longrightarrow u_\infty(x)$ puntualmente
(uso conv. dominata di Lebesgue)

Altro esempio, se ψ fosse limitata ma solo SCI, allora potrei avere la SCI dell'integrale per FATOU

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_a^b \psi(x, u_n(x))\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FATOU} \\ \text{(basta lim. dal basso)}}}{\geq} \int_a^b \liminf_{n\to+\infty} \psi(x, u_n(x))\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \psi\ \text{SCI}}}{\geq} \int_a^b \psi(x, u_\infty(x))\,dx$$

— o — o —

Meno facile: $\int_a^b \psi(V_n(x))\,dx$

Visto: se $V_n(x) \longrightarrow V_\infty(x)$, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_a^b [V_n(x)]^2\,dx \geq \int_a^b [V_\infty(x)]^2\,dx$$

Dim rifatta nel concreto:

$$\int_a^b v_m^2 = \int_a^b (v_\infty + (v_m - v_\infty))^2 = \overset{\text{ok}}{\int v_\infty^2} + 2\overbrace{\int v_\infty (v_m - v_\infty)}^{\substack{0 \text{ per conv.} \\ \uparrow \text{ debole}}} + \overset{\geq 0}{\int v_m^2}$$

Vale lo stesso discorso se ψ è convessa

$\boxed{\text{Dim. barata}}$ Parto dalla disuguaglianza

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)\, b \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}$$

La applico con $a = v_\infty(x)$ e $b = (v_n(x) - v_\infty(x))$.
Ottengo

$$\psi(v_n(x)) \geq \psi(v_\infty(x)) + \psi'(v_\infty(x))\,(v_n(x) - v_\infty(x))$$

Integro

$$\int \psi(v_n)\, dx \geq \int \psi(v_\infty) + \underbrace{\int \psi'(v_\infty)(v_n - v_\infty)}_{\downarrow\ 0}$$

— o — o —

Dove ho barato?

① Non è detto che $\psi \in C^1$

② Posto che $v_n \longrightarrow v_\infty$ in L^2, servirebbe sapere che $\psi'(v_\infty)$ sta in L^2. Per essere sicuri di questo serve una stima di crescita su ψ' del tipo

$$|\psi'(x)| \leq A + B|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se ho questa, allora

$$\int_a^b |\psi'(v_\infty)|^2 \leq \int_a^b (A + B|v_\infty(x)|)^2\, dx$$

e questo è limitato se $v_\infty \in L^2$

Conclusione: la dimostrazione di sopra è ok se $\psi \in C^1$ e ψ' è sublineare.

Oss. Posso anche includere dipendenza da x, del tipo

$$\int_a^b \psi(x, v(x))\, dx$$

pur di avere convessità e ipotesi di crescita su $\psi_p(x,p)$

— o — o —

FUTURO Cosa succede se abbiamo nel teo. di compattezza

$$\int_a^b \dot{u}_n(x)^8\, dx \leq M,$$

$\rightsquigarrow$ le u_n sono equi $\frac{7}{8}$-Hölder, quindi con una ipotesi (ii) $u_{n_k} \longrightarrow u_\infty$ unif

Per quanto riguarda le derivate, mi piacerebbe che

$$\int_a^b v(x)\,(\dot{u}_{n_k}(x) - \dot{u}_\infty(x))\, dx \longrightarrow 0$$

per una buona classe di $v(x)$

Questo lo posso ottenere quasi gratis per tutte le $v(x)$ che sono caratteristiche di sotto intervalli a estremi in $\mathbb{Q}$.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 17

Titolo nota 23/10/2015

Esempio
$$\begin{cases} u'' = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2015 \end{cases}$$
Domande: esistenza / unicità

Idea: costruire un funzionale di cui quella data sia l'eq. di Eulero, quindi dim. che c'è il minimo.

Sia $g(x)$ una primitiva di arctan : $g(x) := \int_0^x \arctan t \, dt$

Considero il funzionale $\frac{d}{dx}\psi_p(x,u,\dot u) = \psi_s(x,u,\dot u)$

$$F(u) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\dot u^2 + g(u)\right] dx$$

ed il problema di minimo

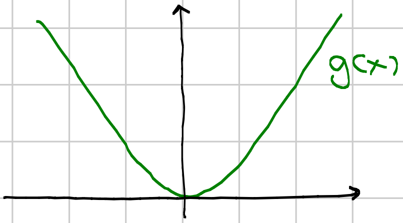
$$\min\{F(u) : u \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } u(0)=0, u(1)=2015\}$$

Studio esistenza / unicità con il metodo DIRETTO

① Formulazione debole: stesso $F(u)$ solo per $u \in H^1((0,1))$. Noto che le BC hanno senso perché $u \in C^0([0,1])$.

② Compattezza dei sottolivelli di $F(u)$

Sapendo che $F(u) \le M$, voglio dedurre limitazioni su u e $\dot u$.



Osservo che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi

$$M \geq F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}\dot{u}^2 + g(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{u}^2 dx$$

$$\Rightarrow \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq 2M$$

$\Rightarrow$ u è $\frac{1}{2}$-Hölder con costante limitata dall'alto

$\Rightarrow$ grazie alle BC (ne basterebbe una) $\exists\, M_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|u(x)| \leq M_2 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Solite storie $\Rightarrow$ esiste s. succ. $u_{n_k}(x)$ t.c.

Nozione di convergenza che dà compattezza

$$\begin{cases} u_{n_k}(x) \longrightarrow u_\infty(x) & \text{unif. in } [0,1] \\ \dot{u}_{n_k}(x) \longrightarrow \dot{u}_\infty(x) & \text{in } L^2((0,1)) \end{cases}$$

Data $\{u_n\} \subseteq H^1((0,1))$ t.c. $F(u_n) \leq M$ esiste s.succ.

③ $\boxed{\text{Semicontinuità}}$ Se $u_n \longrightarrow u_\infty$ nella nozione di sopra, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Facile: $$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 \dot{u}_n^2\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{norma sci}}}{\geq} \int_0^1 \dot{u}_\infty^2\, dx$$

Inoltre $g(u_n) \longrightarrow g(u_\infty)$ unif. in $[0,1]$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g(u_n)\, dx = \int_0^1 g(u_\infty)\, dx$$

Sommando le 2 si ha la tesi.

④ Regolarità   Mostrare che "il" minimo di $F(u)$ in $H^1((0,1))$ (che ora esiste per W.) è in realtà C^∞.

per ora "un qualunque"

Sia u la soluzione trovata, e proviamo a ricavare Eulero

$$\varphi(t) := F(u+tv) \qquad v \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{garantisce BC}}}{C_c^\infty}((0,1))$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{w} + t^2\dot{v}^2 + \int_0^1 g(u+tv)\,dx$$

$\rightarrow v \in C^1([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$

$\rightarrow v \in H^1((0,1))$ + B.C.

$$\varphi'(t) = \int_0^1 \dot{u}\dot{v}\,dx + t\int_0^1 \dot{v}^2 dx + \int_0^1 \arctan(u+tv)\,v\,dx$$

$$\varphi'(0) = 0 \iff \boxed{\int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\dot{u}}\,\dot{v}\,dx = -\int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\arctan u}\cdot v\,dx}$$

Questo dice che $\dot{u}$ è derivabile debolmente e la sua derivata debole è $\arctan u$, quindi

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata debole di } \dot{u} \in L^2((0,1))}}{\underline{(\dot{u})'}} = \arctan u$$

Ora RHS $\in C^0 \Rightarrow \dot{u} \in C^1 \Rightarrow u \in C^2 \Rightarrow u$ risolve l'equazione iniziale.

Ovviamente u rispetta le BC perché sono stabili rispetto alla convergenza unif (andava detto in sede di compattezza)

Per BOOTSTRAP, $u \in C^\infty$.

⑤ $\boxed{\text{UNICITÀ}}$ Due tecniche → lavorare sul funzionale
→ lavorare sull'equazione

Sul funzionale: mostrare che tutte le soluzioni dell'eq. sono minimi di F(u) ed il pto di minimo è unico.

Entrambe seguono dalla convessità di F(u) come nel metodo diretto. Sia u una sol. di Eulero, sia w un altro competitore.
Allora

$$F(w) = F(\underset{w-u}{\underset{\uparrow}{u+v}}) = \frac{1}{2}\int \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2 + g(u+v)$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2}\int \dot{u}^2} + \int \dot{u}\dot{v} + \underbrace{\int g(u)} + \underbrace{\int g(u+v) - g(u)}_{\substack{\geq \arctan u \cdot v \\ \text{perché } g \text{ è convessa}}}$$

$$= F(u) + \underbrace{\int \dot{u}\dot{v} + \arctan u \cdot v}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{per Eulero}}}$$

Oss. Posso dire che $\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \arctan u \cdot v = 0$

purché sappia che

→ u è $\underbrace{\text{soluzione debole}}_{\substack{u \in H^1 \\ \dot{u} \text{ ammette derivata debole uguale ad } \arctan u}}$ di $u'' = \arctan u$

→ v può essere regolare, ma per approx. vale lo stesso anche per $v \in H^1((0,1))$.

Questo dim. che ogni sol. è pto di min. e dim. anche l'unicità, in quanto se non lo fosse $\int \dot{v}^2 = 0$, ma allora...

Unicità stile Analisi 2 Prendiamo più in generale

$$u'' = f(u) \leftarrow \text{monotona strett. crescente}$$

Siano u e v due soluzioni, diciamo in C^2

$$u'' = f(u) \qquad (u-v)'' = f(u) - f(v)$$
$$v'' = f(v)$$

Moltiplico per $u-v$ e ottengo

$$\underbrace{(u-v)''}_{w''}\underbrace{(u-v)}_{w} = (f(u)-f(v))\cdot(u-v) \geq 0$$

$$0 \leq \int_0^1 w''w \, dx = \underbrace{[w'w]_0^1}_{=0 \text{ per BC}} - \int_0^1 [w']^2 dx \implies w' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w = \text{cost}$$
$$\Downarrow$$
$$w \equiv 0.$$

— o — o —

Oss. Derivare sotto il segno di integrale non è gratis

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 g(u+tv)\,dx \overset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} g(u+tv)\,dx$$

Se fosse solo $v \in L^2$ potrebbe non essere così scontato.
Quindi meglio prendere $v \in C^0$.

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 18

Titolo nota 23/10/2015

Esempio $\begin{cases} u'' = \lambda \sin u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$

Una soluzione si vede subito: $u(x) \equiv 0$.

Claim: se λ è abbastanza grande, ce n'è almeno un'altra.

Idea: vedo l'eq. come l'Eulero di

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 \mathring{u}^2 \, dx - \lambda \int_0^1 \cos u \, dx$$

e mostro che per $\lambda \gg 1$ il minimo è $< F(\overset{\text{funz. nulla}}{0})$, quindi $u(x) \equiv 0$ non è pto di minimo, quindi ci deve essere un'altra soluz.

L'esistenza del minimo segue dal metodo diretto.
Basta dim. che $\forall \lambda \gg 1$ esiste u da qualche parte t.c. $F(u) < F(0)$.

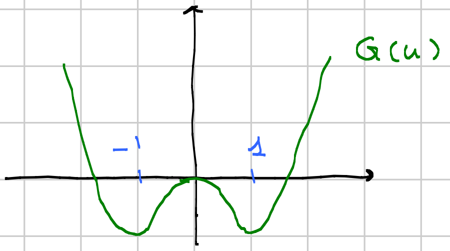
NO: qui banalmente il minimo è la funzione nulla.

Esempio $\begin{array}{l} u'' = \lambda g(u) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{array}$ $\quad F(u) = \frac{1}{2}\int \mathring{u}^2 + \lambda \int G(u)$

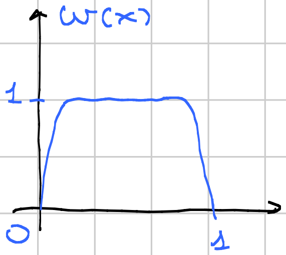
Abbiamo scelto $G(u)$ t.c. $G(0) = 0$.

Così è ovvio che $F(u \equiv 0) = 0$. Se anche $g(0) = 0$, allora ok che $u \equiv 0$ è una soluzione.

Se G è come in figura, allora per $\lambda \gg 1$ si ha che $u \equiv 0$ non è minimo.



Idea: prendo una $w(x)$ che vale quasi sempre 1, tranne vicino al bordo e allora



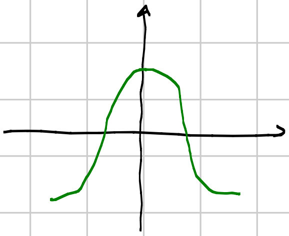
$$F(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enorme} \\ \text{ma fisso}}}{\dot{w}^2} + \lambda \underbrace{\int_0^1 G(w)\,dx}_{\text{negativo}}$$

Quindi $F(w) < 0$ per $\lambda \gg 1$, quindi c'è un'altra soluzione.

(Oss.: basta una qualunque w che sta in $(0,1)$

<u>Esempio iniziale rivisitato</u> $u'' = -\lambda \sin u$

$$\rightsquigarrow \quad F(u) = \frac{1}{2}\int \dot{u}^2 + \lambda \int \cos u$$



Per λ grande $u(x) \equiv 0$ non è p.to di min.

Come sopra serve una $w(x)$ che sia quasi sempre π

— o — o —

Quando posso ottenere limitazioni su $\dot{u}$

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b g(x,u)\,dx$$

Sapendo che $F(u) \leq M$, voglio limitare $\int_a^b \dot{u}^2\,dx$

Caso banale: $g(x,s)$ limitata inferiormente $g(x,s) \geq k$

Caso quasi banale: $g(x,s) \geq k(x)$ $\quad \forall x \in [a,b]\ \forall s \in \mathbb{R}$

$$\uparrow \int_a^b k(x)\,dx > -\infty$$

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 dx - \int_a^b u \sin u \, dx$$

Qui ce la faccio se ho DBC in un estremo $u(a) = A$.

Idea: sfruttare disuguaglianze che legano u a $\dot{u}$

$$|u(x) - u(a)| \le \int_a^x |\dot{u}(s)| ds \underset{\text{solito}}{\le} \sqrt{x-a} \, \|\dot{u}\|_{L^2((a,x))}$$

$$\le |b-a|^{1/2} \, \|\dot{u}\|_{L^2((a,b))}$$

Ma allora

$$\boxed{|u(x)| \le |A| + |b-a|^{1/2} \|\dot{u}\|_{L^2((a,b))} \qquad \forall x \in [a,b]}$$

Ma allora $\left| \int_a^b u \sin u \right| \le \int_a^b |u| dx$

$$\le |A|(b-a) + |b-a|^{3/2} \|\dot{u}\|$$

Questo basta per concludere. Infatti

$$M \ge F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 - \int_a^b u \sin u \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\text{Quadratico}}{\|\dot{u}\|^2} = \int_a^b \dot{u}^2 \le M + \int_a^b u \sin u$$

$$\le \underbrace{M + |A|(b-a) + |b-a|^{3/2} \|\dot{u}\|}_{\text{Lineare}}$$

$\Rightarrow$ limitazione su $\|\dot{u}\|^2$.

Fatto generale $F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b g(x,u)$

Per ottenere una stima su $\|\dot{u}\|_{L^2}$ da DBC + stima su $F(u) \leq M$ servono ipotesi del tipo

$$\boxed{g(x,s) \geq -A - B|s|^\beta \qquad \text{con } \beta < 2}$$

Esempio $F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 - u^3)\,dx$

Esiste il minimo con $u(a) = u(b) = 0$?
Basta prendere $w(x) < 0$ in (a,b) e poi considerare

$$F(n\,w(x)) = n^2 \text{ roba fissa} - n^3 \cdot \text{roba fissa} \to -\infty$$

—o—o—

Il grosso guaio sono gli esempi con esponente 2

$$\int_a^b (\dot{u}^2 - u^2)\,dx$$

Si vede subito l'alternativa: → o $\min = 0$
→ o $\inf = -\infty$

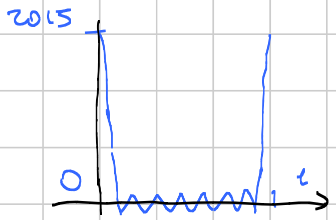
Meno banale: se $|b-a|$ è piccolo, è ancora vero che il minimo è 0.

Morale: per esponenti $\neq 2$ contano solo gli ordini
nel caso di crescita quadratica contano le costanti.

—o—o—

$F(u) = \int_0^1 \cos(\dot{u}) + u^2 \qquad u(0) = u(1) = 2015$

$\text{Inf} = -1$



Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 19

Titolo nota 28/10/2015

RILASSAMENTO (RELAXATION, LOWER SEMICONT. ENVELOPE)

Richiami sulla semicontinuità Sia (X,d) uno spazio metrico. I seguenti fatti sono equivalenti per una $f: X \to \mathbb{R}$

(i) per ogni $x \in X$ vale

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$$

(ii) per ogni successione convergente $x_n \to x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

(iii) per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq M\}$ è CHIUSO

(iv) il sopragrafico (epigrafico)

$$\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : x \in X,\ y \geq f(x)\}$$

è chiuso nel prodotto.

— o — o —

<u>Def.</u> Sia (X,d) uno sp. metrico e sia $F: X \to \mathbb{R}$ un funzionale. Si dice RILASSATO di F il funzionale così definito

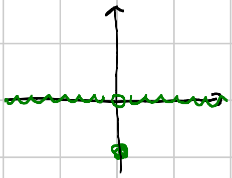
$$\boxed{\overline{F}(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \to +\infty} F(x_n) : x_n \to x \right\}}$$

<u>Oss.</u> Il rilassato <u>non</u> è $\overline{F}(x) = \liminf_{y \to x} F(y)$, ma è solo $\leq$

Infatti a competere per l'inf c'è anche la succ. costante $x_n \equiv x$

Esempio

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ -1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad X = \mathbb{R}$$



In questo caso $\overline{F}(x) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre

$$\liminf_{y \to 0} F(y) = 0 \neq -1 = \overline{F}(0).$$

Fatto 1 $\overline{F}(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

[Dim. Basta usare $x_n \equiv x$]

Fatto 2 L'inf nella def. di rilassato è un minimo, anzi per ogni $x \in X$ esiste $x_n \to x$ t.c.

$$\overline{F}(x) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$$

Dim. Osserviamo che $\overline{F}(x)$ può anche fare $-\infty$. Supponiamo che

$$\overline{F}(x) \in \mathbb{R}$$

per un certo $x \in X$. Voglio trovare $x_n \to x$ t.c. $F(x_n) \to \overline{F}(x)$. Per def. di inf, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste

$$x_n^{(\varepsilon)} \to x \quad \text{t.c.} \quad \liminf_{n \to +\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$$

A meno di estrarre posso anche supporre che

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$$

Pertanto esiste $x^{(\varepsilon)}$ tale che $F(x^{(\varepsilon)}) \leq \overline{F}(x) + 2\varepsilon$

$\operatorname{dist}(x^{(\varepsilon)}; x) \leq \varepsilon$

(Basta prendere n abbastanza grande)

Ma allora se definisco $x_k := x^{(\frac{1}{k})}$ ho raggiunto l'obiettivo

$$\operatorname{dist}(x_k, x) \leq \frac{1}{k} \qquad F(x_k) \leq \overline{F}(x) + \frac{2}{k}$$

Passo al limite per $k \to +\infty$

— o —

Se $\overline{F}(x) = -\infty$ si procede allo stesso modo partendo da

$$F(x_n^{(M)}) \leq -M$$

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per ogni $F : X \to \mathbb{R}$ il rilassato è s.c.i.

Lemma Supponiamo che $\overline{F}(x) \in \mathbb{R}$.
Allora

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad F(y) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per assurdo supponiamo che non sia vero. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists y \in B_\delta(x) \qquad F(y) < \overline{F}(x) - \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ e ottengo y_k t.c.

$$\operatorname{dist}(y_k, x) \leq \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad F(y_k) \leq \overline{F}(x) - \varepsilon_0$$

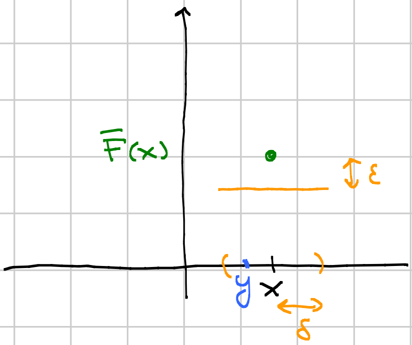
Ma allora $y_k \to x$, quindi compete nella def. di rilassato, quindi

$$\overline{F}(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} F(y_k) \leq \overline{F}(x) - \varepsilon_0$$

il che è assurdo

— o — o —

Dim. del fatto 3 dato il Lemma



Sia dato $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ come nel Lemma.

Allora $F(y) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon$ per ogni y con $\operatorname{dist}(y, x) < \delta$.

Ma data una succ. $y_n \longrightarrow y$, questa definitivamente entra in $B_\delta(x)$, quindi

$$F(y_n) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon \qquad \text{definitiv.}$$

quindi

$$\liminf F(y_n) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon$$

Visto che vale per ogni successione $y_n \to y$, questo mostra che

$$\overline{F}(y) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon \qquad \forall\, y \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperta}}}{B_\delta}(x)$$

Questo implica che

$$\liminf_{y \to x} \overline{F}(y) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon$$

Ma essendo ε ed x arbitrari abbiamo dimostrato che $\overline{F}$ è sci.

—o —o —

Def. Data $F : X \to \mathbb{R}$ possiamo considerare

$$G(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è s.c.i. e } g(x) \leq F(x)\ \forall x \in X \}$$

↑ è il sup di tutte le funzioni sci che sono $\leq F$.

Si chiama $(G(x))$ inviluppo semicontinuo inferiormente di $F(x)$. (Potrebbe essere $-\infty$ a tappeto).

—o —o —

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Sia $F_i : X \to \mathbb{R}$ per $i \in I$ una famiglia di funzioni SCI. Poniamo

$$F_*(x) := \sup\{ F_i(x) : i \in I \}$$

Allora F_* è SCI.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ $F_*(x) \geq F_i(x) \quad \forall x \in X \quad \forall i \in I$

quindi fissato $x \in X$

$$\liminf_{y \to x} F_*(y) \geq \liminf_{y \to x} F_i(y) \geq F_i(x) \qquad \forall i \in I$$

Facendo il sup su $i \in I$ al LHS non cambia nulla, al RHS ottengo proprio $F_*(x)$.

$\boxed{\text{Dim.2}}$ I sottolivelli di F_* sono l'intersezione dei sottolivelli (chiusi di F_i)

$\boxed{\text{Dim.3}}$ Stesso discorso con gli epigrafici.

<u>Conclusione</u>: L'inviluppo SCI di $F(x)$, cioè $G(x)$, è SCI

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Il rilassato coincide con l'inviluppo SCI di $F(x)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sappiamo che $\overline{F}(x)$ è SCI, quindi $\overline{F}(x) \leq G(x)$ per ogni $x \in X$.

D'altra parte dico che tutte le $g(x)$ S.C.I. che stanno sotto $F(x)$ stanno anche sotto $\overline{F}(x)$.

Prendo un qualunque $x_0 \in X$ e prendo una succ. $x_n \to x_0$ tale che

$$F(x_n) \longrightarrow \overline{F}(x_0)$$

(sappiamo che esiste dal fatto 2)

Allora $F(x_n) \geq g(x_n)$ e anche $F(x_n) \geq G(x_n)$

Faccio liminf a dx e sx

$$\overline{F}(x_0) \underset{\uparrow}{=} \liminf_{n\to+\infty} F(x_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} G(x_n) \underset{\uparrow}{\geq} G(x_0)$$

è un limite G è sci

Questo completa la dimostrazione

— o — o —

Def. Ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$ t.c. $F(x_n) \longrightarrow \overline{F}(x_0)$ si chiama

RECOVERY SEQUENCE

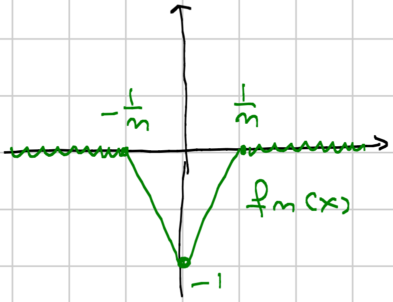
per il p.to x_0.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 20

Titolo nota 28/10/2015

<u>Oss.</u> Il sup di funzioni continue è solo sci in generale



<u>Esempio</u> Se $F(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x)$ su $\mathbb{R}$, allora

$$\overline{F}(x) \equiv 0$$

$\boxed{\text{RILASSATO E PROBLEMI DI MINIMO}}$ Sia $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

① $\inf\{F(x) : x \in X\} = \inf\{\overline{F}(x) : x \in X\}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ È banale in $\boxed{\geq}$. Vediamo l'altra.
Supponiamo che $\inf \overline{F} \in \mathbb{R}$ (se è $-\infty$ la dim. è analoga)
Chiamiamolo ℓ
Per def. di inf $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in X$ t.c.

$$\overline{F}(x) \leq \ell + \varepsilon$$

Prendo la recovery di x e ho che $x_n \to x$ e

$$\inf F \leq F(x_n) \leq \ell + 2\varepsilon$$

Quindi $\inf F \leq \inf \overline{F} + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Faccio $\varepsilon \to 0^+$.

② Supponiamo x_0 sia p.to di min. del rilassato e supponiamo che

$$\overline{F}(x_0) = F(x_0)$$

Allora x_0 è p.to di minimo di $F(x)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\forall x \in X$: $F(x) \geq \overline{F}(x) \geq \overline{F}(x_0) = F(x_0)$.

③ Supponiamo che

$$m := \min\{\bar{F}(x) : x \in X\} \in \mathbb{R}$$

e supponiamo che $\exists\, M > m$ t.c.

$$\{x \in X : \bar{F}(x) \le M\} \text{ è compatto}$$

(Questo è gratis se tutti i sottolivelli di $\bar{F}(x)$ sono compatti)

Allora

$\longrightarrow$ $m = \inf\{F(x) : x \in X\}$

$\longrightarrow$ ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $F(x_n) \longrightarrow m$

(successioni "infizzanti")

ha una sottosuccessione che tende ad un p.to di min. del rilassato.

Se in aggiunta il p.to di min. di $\bar{F}(x)$ è unico, allora tutte le succ. infizzanti di $F(x)$ tendono a lui

$\boxed{\text{Dim.}}$ La prima conclusione è un fatto precedente.

Data una qualunque succ. x_n con $F(x_n) \to m$, definitivamente $M \ge F(x_n) \ge \bar{F}(x_n)$, quindi la succ. sta nel sottolivello, quindi converge a meno di s.succ.

Mettiamo che $x_{n_k} \longrightarrow x_\infty$. Allora

$$\begin{tikzcd} F(x_{n_k}) \arrow[d] & \ge \bar{F}(x_{n_k}) \ge & m \arrow[d] \\ m & & m \end{tikzcd}$$

Quindi $\bar{F}(x_{n_k}) \longrightarrow m$, d'altra parte

$$m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga sopra}}}{=} \liminf \bar{F}(x_{n_k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{F} \text{ è SCI}}}{\ge} \bar{F}(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ m = \min \bar{F}}}{\ge} m$$

— o — o —

$\boxed{\text{FATTO} \sim}$ Sia $F : X \to \mathbb{R}$ e sia $G : X \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\overline{F+G}\,(x) = \overline{F}(x) + G(x)$$

(se G è solo sci vedere che succede)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\overline{F}(x) + G(x)$ è sci e $\leq F(x) + G(x)$

Quindi per la caratterizzazione del rilassato come inviluppo

$$\overline{F}(x) + G(x) \leq \overline{F+G}\,(x)$$

(Questo vale allo stesso modo se $G(x)$ è solo sci)

Resta da dim. la disug. opposta, cioè $\overline{F+G}\,(x) \leq \overline{F}(x) + G(x)$

Prendo $x_0 \in X$ arbitrario, prendo $x_n \to x_0$ la sua recovery per $F(x)$ e vedo cosa succede

$$\begin{tikzcd} F(x_n) + G(x_n) \arrow[r] \arrow[r, bend right, "\text{continuità}"'] & \overline{F}(x_0) + G(x_0) \end{tikzcd}$$

Visto che $\overline{F+G}\,(x_0)$ è l'inf. su tutte le successioni, ho la tesi.

—o—o—

Per allenamento, vedere cosa succede se $G(x)$ è solo sci o in generale cosa succede per il rilassato della somma.

—o—o—

<u>Def</u>. Sia $E : X \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice $\boxed{\text{DENSO IN ENERGIA}}$ (wrt E) se

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{x_n \to x}_{\text{D è denso in X}} \quad \text{e} \quad \underbrace{E(x_n) \to E(x)}_{\text{densità rispetto alla funzione}}$$

<u>Esempio</u> (banale) Se E è continua, ogni $D \subseteq X$ denso è denso in energia.

METADISCORSO Come calcolo il rilassato di una data $F(x)$?

Cerco di capire in qualche modo chi è. Sia $G(x)$ quello che penso essere il rilassato. A questo punto dimostro

- → $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in X$] da queste deduco che
- → $G(x)$ è sci $\qquad G(x) \leq \overline{F}(x)$
- → devo far vedere che per ogni $x_0 \in X$ esiste $x_n \to x_0$ tale che

$$F(x_n) \longrightarrow G(x_0)$$

[<u>Dim.</u> A quel punto

$$\overline{F}(x_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(x_n) = G(x_0)$$ che è quello che serve]

Fatto n+1 Se trovo un denso in energia $D \subseteq X$ per $G(x)$ tale che

$$\forall x_0 \in \boxed{D} \quad \exists\ x_n \to x_0 \quad \text{tale che} \quad F(x_n) \longrightarrow G(x_0)$$

allora vale lo stesso in X, cioè

$$\forall\ x_0 \in X \quad \exists\ x_n \to x_0 \quad \text{tale che} \quad F(x_n) \longrightarrow G(x_0)$$

e ancora meglio

$$\overline{F}(x_0) \leq G(x_0) \qquad \forall x_0 \in X$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $x_0 \in X$ qualunque, prendo $\{x_n\} \subseteq D$ tale che

$$x_n \to x_0 \quad \text{e} \quad G(x_n) \longrightarrow G(x_0)$$

Allora per ipotesi

$$\bar F(x_n) \le G(x_n)$$

e facendo tendere $n \to +\infty$ ottengo

$$\bar F(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \bar F \text{ è sci}}}{\le} \liminf_{n\to+\infty} \bar F(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. sopra}}}{\le} \liminf_{n\to+\infty} G(x_n) = G(x_0)$$

□

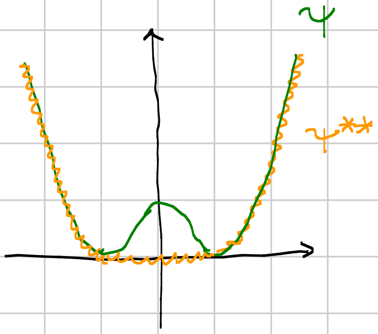
—o—o—

<u>Programma per il futuro</u>

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot u(x))\,dx$$

Visto in parte: F è sci rispetto alla conv. debole sulle derivate e forte sulle funzioni se ψ è convessa.

Se ψ non è convessa, il rilassato sarà



$$\bar F(u) = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione} \\ \text{convessificata}}}{\psi^{**}} (\dot u(x))\,dx$$

"Se lo so fare per le rette, lo so fare in generale".

—o—o—

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 21

Titolo nota 30/10/2015

Def. (X,d) metrico, $E : X \to \mathbb{R}$. Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice denso in energia se

$$\boxed{\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \quad \text{t.c.} \quad x_n \to x \quad \text{e} \quad E(x_n) \to E(x)}$$

Oss. È equivalente a dire che i p.ti $\{(x, E(x)) : x \in D\}$ sono un sottoinsieme denso del grafico di E.

Lemma (X,d) metrico, $F : X \to \mathbb{R}$, $G : X \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) $D \subseteq X$ è denso in energia per $G(x)$,
(ii) $F(x) \le G(x)$ per ogni $x \in D$,
(iii) $F(x)$ è SCI in X.
Allora

$$F(x) \le G(x) \qquad \forall x \in X$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo un arbitrario $x_0 \in X$ e prendo $\{x_n\} \subseteq D$ t.c. $x_n \to x_0$ e $G(x_n) \to G(x_0)$.
Allora

$$F(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ è SCI}}}{\le} \liminf_{n \to +\infty} F(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ (ii)}}{\le} \liminf_{n \to +\infty} G(x_n) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n \to +\infty} G(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ x_n \text{ ha la propr. di sopra}}}{=} G(x_0)$$

— o — o —

Utilizzo operativo Sospetto che $G(x)$ sia il rilassato di una certa $F(x)$
Devo dimostrare

① $F(x) \le G(x)$ ② $F(x) \ge G(x)$

Per la ② una possibile strategia è mostrare che

(i) $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in X$

(ii) $G(x)$ è SCI

Per la ① grazie al lemma basta fare la verifica per ogni $x \in D$, dove D è denso in energia per G.

— o — o —

<u>Oss.</u> Per verificare che $G(x)$ è il rilassato di $F(x)$ posso mostrare due cose

(i) (Liminf inequality) $\forall\, x_n \to x$ vale $\liminf\limits_{n \to +\infty} F(x_n) \geq G(x)$

(Questo dice che $\overline{F}(x) \geq G(x)$)

(ii) (Limsup inequality) $\forall\, x \in D$ (denso in energia per G) esiste $x_n \to x$ tale che

$$\limsup_{n \to +\infty} F(x_n) \leq G(x)$$

(Questa dice che $\overline{F}(x) \leq G(x)$) Se è vero per il limsup, a maggior ragione lo sarà per il liminf.
In realtà a posteriori il limsup è un limite.

$$G(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(x_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} F(x_n) \leq G(x)$$

— o — o —

<u>Lemma</u> Sia $\overline{F}$ il rilassato di F. Allora

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in X$ t.c. $\operatorname{dist}(y,x) \leq \varepsilon$ e
$F(y) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo una recovery per x e ho $x_n \to x$, $F(x_n) \to \overline{F}(x)$.
Posso prendere $y = x_n$ per n grande.

$\boxed{\text{Nuova dim. che } \overline{F}(x) \text{ è sci}}$ Sia $x_n \longrightarrow x_0$ una qualunque successione.

Uso il lemma con $x = x_n$ e $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Trovo un p.to $y_n \in X$ t.c.

$$\mathrm{dist}\,(y_n, x_n) \le \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad F(y_n) \le \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

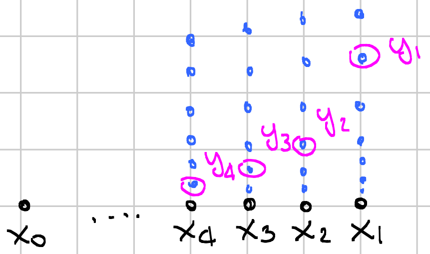
Osservo che $y_n \longrightarrow x_0$ perché

$$\mathrm{dist}\,(y_n, x_0) \le \underset{\le \frac{1}{n}}{\mathrm{dist}\,(y_n, x_n)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\mathrm{dist}\,(x_n, x_0)}$$

e quindi

$$\overline{F}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } \overline{F}}}{\le} \liminf_{n \to +\infty} F(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. sopra}}}{\le} \liminf_{n \to +\infty} \left(\overline{F}(x_n) + \frac{1}{n} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. liminf}}}{=} \liminf_{n \to +\infty} \overline{F}(x_n).$$

* * *



Morale: ho costruito una recovery di x_∞ attingendo alle recovery degli x_n.

* * *

ESTENSIONE PER RILASSAMENTO

$(\hat{X}, d)$ spazio metrico

$X \subseteq \hat{X}$

$f : X \to \mathbb{R}$

Voglio estendere f a tutto $\hat{X}$, cioè trovare

$$\hat{f} : \hat{X} \to \mathbb{R}$$

tale che (almeno)

$$\hat{f}(x) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Un modo per farlo è di considerare come $\hat{f}(x)$ la più grande $g : \hat{X} \to \mathbb{R}$ semicontinua tale che

$$g(x) \leq f(x) \qquad \text{per ogni } x \in X.$$

Questo è equivalente a rilassare

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>Esempio 1</u> $X = C^1([a,b])$ $\hat{X} = C^0([a,b])$

oppure C^{27} ↑Decide la distanza

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2\, dx\,.$$ Voglio estendere F a $\hat{X}$.

L'estensione sarà

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b \dot{u}^2 dx & \text{se } u \in H^1((a,b)) \\ +\infty & \text{se } u \in C^0 \setminus H^1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dimostrare due cose

(LIMINF) $\forall\, u_n \underset{\text{in } C^0}{\xrightarrow{\uparrow}} u_\infty$ vale $\liminf F(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$

Se $\liminf = +\infty$, non c'è nulla da dim.

Se $\liminf < +\infty$, allora esiste una s.succ. con $F(u_{n_k}) \leq M$

Ma allora $\dot{u}_{n_k}$ ammette una sottosucc. (che non rinomino) convergente

$$\dot{u}_{n_k} \longrightarrow v_\infty$$

Sapendo già che $u_{n_k} \longrightarrow u_\infty$ in C^0, deduco che $u_\infty \in H^1$ e $\dot{u}_\infty = v_\infty$.

A quel p.to concludo con la semicontinuità della norma.

(LIMSUP) Devo mostrare che per ogni $u \in C^0$ esiste

$$\underset{\uparrow\ \text{in } C^1}{u_n} \longrightarrow u \quad \text{in } C^0$$

tale che

$$\limsup F(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

Non devo dim. nulla se $\hat{F}(u) = +\infty$, cioè $u \notin H^1$.

Se invece $u \in H^1$, è proprio la definizione (H) dello spazio di Sobolev a garantire l'esistenza di u_n.

$u_n \longrightarrow u \quad L^2$ ⇝ si rinforza a convergenza in C^0.

$\dot{u}_n \longrightarrow \dot{u} \quad L^2$ ⇝ $F(u_n) \longrightarrow \hat{F}(u)$

Esempio 2 Allo stesso modo di prima voglio estendere $F(u)$ da C^1 ad L^2.

Si possono ripercorrere tutti i passaggi e l'estensione risulta la stessa.

Si può anche definire lo spazio di Sobolev H^1 come l'insieme delle $u \in L^2$ o dove preferisco in cui $\hat{F}(u) < +\infty$.

Esempio 3 $X = \{ u \in C^1([a,b]) : \dot{u}(a) = 7,\ u(b) = 14 \}$

$$F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^2)\, dx$$

Cosa succede se estendo per rilassamento in C^0 o in L^2

Risposta

$$\hat{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (\dot{u}^2 + u^2)\, dx & u \in H^1((a,b)) \text{ e } u(b) = 14 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Morale: la condizione su $\dot{u}$ viene persa.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 22

Titolo nota 30/10/2015

GAMMA CONVERGENZA Sia (X, d) metrico

Sia $F_n : X \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni

↑ o anche $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Sia $F_\infty : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si dice che F_n gamma converge a F_∞ e si scrive

$$F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$$

se valgono questi due fatti:

(1) (LIMINF INEQUALITY) $\forall\, x_n \to x$ (succ. conv. in X) si ha

$$\liminf_{n \to +\infty} F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$$

(2) (LIMSUP INEQUALITY) Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \to x$ t.c.

$$\limsup_{n \to +\infty} F_n(x_n) \leq F_\infty(x).$$

Ogni $x_n \to x$ che verifica la disug. di sopra si dice RECOVERY SEQUENCE per x.

Oss. Quando c'è Γ-convergenza tutte le recovery sequence soddisfano

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(\underset{\sim}{x_n}) = F_\infty(x)$$

Dim. Infatti

$$F_\infty(x) \underset{\uparrow \text{ liminf ineq.}}{\leq} \liminf F_n(x_n) \overset{\text{banale}}{\leq} \limsup F_n(x_n) \overset{\text{recovery}}{\leq} F_\infty(x)$$

<u>Oss.</u> Si può generalizzare molto, arrivando a supporre

$$F_n : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tutti diversi}}}{X_n} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

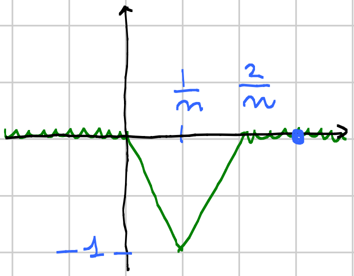
$$F_\infty : X_\infty \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

pur di avere una nozione di convergenza

$$\begin{matrix} x_n & \longrightarrow & x_\infty \\ \cap & & \cap \\ X_n & & X_\infty \end{matrix}$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $X = \mathbb{R}$



$F_n(x)$ come in figura.
Allora

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_\infty(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo mostrare 2 disuguaglianze

① (liminf) $\forall\, x_n \to x$ si ha $\liminf F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$

- se $x = 0$ è banale perché $F_n(x_n) \geq -1 = F_\infty(0)$
- se $x \neq 0$ allora definitivamente $F_n(x_n) = 0$

② (limsup) Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \to x$ t.c.

$$\limsup F_n(x_n) \leq F_\infty(x)$$

- se $x \neq 0$ basta prendere $x_n \equiv x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- se $x = 0$ prendo $x_n = -\frac{1}{n}$ e ho la tesi.

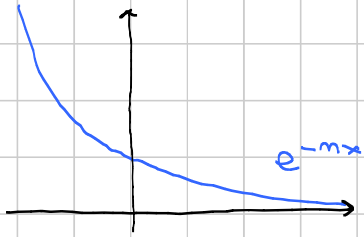
— o — o —

Oss. Nell' esempio $F_n(x) \longrightarrow 0$ puntualmente, ma il Γ-limite è diverso.

Quindi

Γ-limite e limite puntuale

non hanno nulla a che fare.



Esempio 2 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) := e^{-nx}$

Puntualmente

$$F_n(x) \xrightarrow{} \begin{cases} +\infty & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$\uparrow$ PUNTUALMENTE

Invece

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_\infty(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

[Dim.: tutto banale, tranne trovare la recovery per $x=0$.
Basta prendere

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad F_n(x_n) \to 0 \quad]$$

Esempio 3 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) = \sin(nx)$

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \equiv -1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

[L'unico problema è trovare la recovery che segue dalla densità dei p.ti del tipo

$$nx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad x_n = \frac{3\pi}{2} + \frac{2k\pi}{n} \quad]$$

Esempio 4 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) = x^2 + n\cos^2 x$

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}+k\pi \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$ $\leftarrow$ verificare liminf ineq.

Def. Si definiscono Γ-liminf e Γ-limsup in questo modo

$$\Gamma\text{-}\liminf_{n\to+\infty} F_n(x) := \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty} F_n(x_n) : x_n \to x\right\}$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n\to+\infty} F_n(x) := \inf\left\{\limsup_{n\to+\infty} F_n(x_n) : x_n \to x\right\}$$

Oss. Γ-liminf e Γ-limsup esistono sempre e coincidono se e solo se c'è il Γ-limite. In generale vale solo

$$\Gamma\text{-}\liminf F_n(x) \leq \Gamma\text{-}\limsup F_n(x) \qquad \forall x \in X$$

[Dim.: esercizio]

Def. ulteriore Quelli sopra sono Γ^--liminf e Γ^--limsup. Si possono definire anche Γ^+-liminf e Γ^+-limsup semplicemente mettendo sup invece di inf. in partenza.

Esempio $X = \mathbb{R}$ $\quad F_n(x) = (-1)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

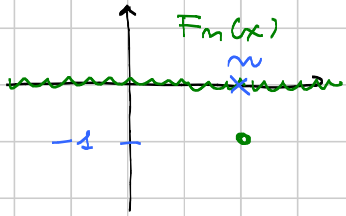
In questo caso Γ^--liminf $= -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Γ^--limsup $= +1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Domanda: è vero che

$$\inf\{F_n(x) : x \in X\} \longrightarrow \inf\{F_\infty(x) : x \in X\} \; ?$$

No!



Esempio Se tutte le $F_n(x)$ sono la stessa funzione $F(x)$, il Γ-limite non è $F(x)$, ma è il rilassato.

Proposiz. (X,d) metrico, $F_n : X \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la F_n ha minimo in $x_n \in X$
(ii)

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_\infty(x)$$

(iii) $x_n \to x_\infty$

Allora x_∞ è p.to di minimo per $F_\infty(x)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo y qualunque in X e prendo una sua recovery $y_n \to y_\infty$ (quindi $F_n(y_n) \to F_\infty(y)$).
Allora

$$F_\infty(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{liminf ineq.}}}{\leq} \liminf F_n(x_n) \underset{\substack{\uparrow\\ x_n \text{ è minimo}\\ \text{per ogni } n\in\mathbb{N}}}{\leq} \liminf F_n(y_n) \underset{\substack{\uparrow\\ y_n \text{ è recovery}\\ \text{per } y\\ \text{(è anche lim.)}}}{=} F_\infty(y)$$ □

—— o —— o ——

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 23

Titolo nota 04/11/2015

Def. Data una succ. $F_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si definiscono

$$\Gamma\text{-}\liminf F_n(x) := \inf \{ \liminf_{n\to+\infty} F_n(x_n) : x_n \to x \}$$

$$\Gamma\text{-}\limsup F_n(x) := \inf \{ \limsup_{n\to+\infty} F_n(x_n) : x_n \to x \}$$

Questi esistono sempre. Se coincidono il valore comune è il Γ-limite e si caratterizza in questo modo:

→ (liminf inequality) $\forall x_n \to x$ si ha $\liminf_n F_n(x_n) \geq \overset{\Gamma\text{-limite}}{F_\infty(x)}$

→ (limsup inequality) $\forall x \in X \ \exists x_n \to x$ t.c. $\limsup F_n(x_n) = F_\infty(x)$

è in realtà un limite

Proposizione Gli inf. nella definizione di Γ-liminf e Γ-limsup sono in realtà dei minimi

Teorema Γ-liminf e Γ-limsup, che esistono sempre, sono SCI

Teorema (Stabilità per perturbazioni continue)

Supponiamo che

(i) $F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$

(ii) $G : X \to \mathbb{R}$ continua

Allora tesi $\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} (F_n(x) + G(x)) = F_\infty(x) + G(x)$

Variante al teo precedente (Stabilità per perturbazioni SCI)

Supponiamo

(i) come sopra

(ii) $G : X \to \mathbb{R}$ solo SCI

(iii) $F_\infty(x)$ è anche limite puntuale di $F_n(x)$.

Allora vale ancora la tesi

Dim della stabilità Voglio dim. che $F_\infty(x) + G(x)$ è il Γ-limite di $F_n(x) + G(x)$.

LIMINF Data una qualunque $x_n \to x_\infty$ si ha che

$$\liminf_{n \to +\infty} F_n(x_n) + G(x_n) \geq \liminf_{n \to +\infty} F_n(x_n) + \liminf_{n \to +\infty} G(x_n)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ G \text{ è SCI e disug. del liminf per } F_\infty}}{\geq} F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty)$$

LIMSUP Dato $x_\infty \in X$, sia $x_n \to x_\infty$ una recovery per F_∞.

Dico che è una recovery per $F_\infty + G$

$$\limsup_{n \to +\infty} F_n(x_n) + \underbrace{G(x_n)}_{\substack{\downarrow \text{ se } G \text{ è continua} \\ G(x_\infty)}} = \limsup F_n(x_n) + G(x_\infty)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x_n \text{ è recovery}}}{\leq} F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty)$$

Quindi se G è continua ho una recovery.

Se F_∞ è anche il limite puntuale posso usare $x_n \equiv x_\infty$ come recovery, e allora

$$\limsup_{n \to +\infty} F_n(x_n) + G(x_n) = \limsup_{n \to +\infty} F_n(x_\infty) + G(x_\infty)$$

$$= F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty).$$

Teorema (convergenza di minimi e 'minimizers').

Sia $F_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una successione

Supponiamo che esista

$$F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \qquad \forall x \in X$$

Supponiamo che esista $K \subseteq X$ compatto tale che

$$\inf\{F_n(x) : x \in X\} = \inf\{F_n(x) : x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lo stesso per ogni } n}}{K}\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

(1) $F_\infty(x)$ ammette minimo in X

(2) si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\{F_n(x) : x \in X\} = \min\{F_\infty(x) : x \in X\}$$

(3) Sia x_n una qualunque successione in K tale che

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x_n) - \inf\{F_n(x) : x \in X\} = 0 \qquad \text{(quasi minimi)}$$

Supponiamo che $x_{n_k} \to x_\infty$. Allora

$$F_\infty(x_\infty) = \min\{F_\infty(x) : x \in X\}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero la successione $I_n := \inf\{F_n(x) : x \in \overset{K}{X}\}$.

Sia

$$I_\infty = \liminf_{n\to+\infty} I_n$$

Allora esiste $n_k \to +\infty$ t.c. $I_{n_k} \to I_\infty$. Prendo una qualunque succ. come nel p.to (iii) e posso supporre, a meno di ulteriori s.succ., che $x_{n_k} \to x_\infty$. Riassumendo

$$I_{n_k} \longrightarrow I_\infty \qquad\qquad x_{n_k} \longrightarrow x_\infty$$

Dico che x_∞ è un p.to di minimo per F_∞, cioè

$$F_\infty(x_\infty) \le F_\infty(y) \qquad \forall y \in X$$

Prendo una recovery $y_n \to y$ per y. Allora

$$F_\infty(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{recovery}}}{\ge} \limsup_{n\to+\infty} F_n(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di } I_n}}{\ge} \limsup_{n\to+\infty} I_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{banale}}}{\ge} \liminf_{n\to+\infty} I_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } I_\infty}}{=} I_\infty$$

Vorrei dire che $I_\infty \ge F(x_\infty)$. Infatti

$$I_\infty = \lim_{k\to+\infty} I_{n_k} \underset{\substack{\uparrow \\ I_{n_k} = F_{n_k}(x_{n_k}) + \underbrace{I_{n_k} - F_{n_k}(x_{n_k})}_{\downarrow \atop 0}}}{=} \lim_{k\to+\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \overset{(*)}{\ge} F_\infty(x_\infty)$$

(*) Fatto generale: se F_∞ è il Γ-limite di F_n, allora

$$x_{n_k} \to x_\infty \Rightarrow \liminf F_{n_k}(x_{n_k}) \ge F_\infty(x_\infty)$$

Questo è banalmente la (liminf inequality): basta completare x_{n_k} ad una successione definita $\forall n \in \mathbb{N}$ ponendo $x_n = x_\infty$ se n non è nella s.succ. (se $F_n \xrightarrow{\Gamma} F_\infty$, allora $F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} F_\infty$)

Questo completa la dim. di (1), ma essendo tutte uguaglianze abbiamo che che

$$F_\infty(x_\infty) = \limsup I_n = \liminf I_n = F_\infty(x_\infty)$$

il che dimostra la (2).

In realtà abbiamo dim. anche la (3) cioè che $F_{n_k}(x_{n_k}) \to F_\infty(x_\infty)$ quindi ogni limite di s.succ. di x_n è p.to di min. per F_∞.

—o—o—

Lemma (Successioni a 2 indici)

Sia $x_{m,k}$ una succ. a 2 indici a valori in un metrico X.

Supponiamo che

$$\begin{tikzcd} x_{m,k} \arrow[r, "m\to+\infty"] \arrow[dr] & \ell_k \arrow[d, "k\to+\infty"] \\ & \ell_\infty \end{tikzcd}$$

(i) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{m\to+\infty} x_{m,k} = \ell_k \in X$$

(ii) esiste $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \ell_k = \ell_\infty \in X.$

Allora

(1) esiste $k_m \longrightarrow +\infty$ (volendo anche strett. crescente) tale che

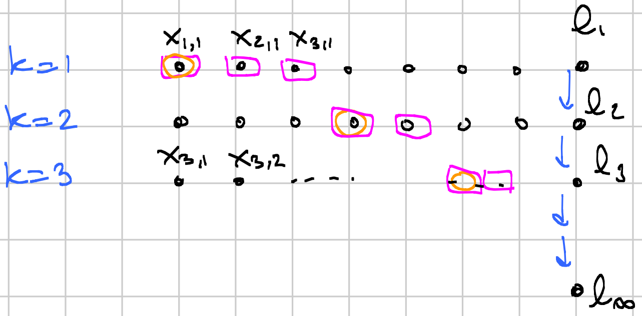
$$\lim_{m\to+\infty} x_{m,k_m} = \ell_\infty$$

(2) esiste $n_k \longrightarrow +\infty$ (volendo anche strett. cresc.) tale che

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k,k} = \ell_\infty$$

(1) uno per riga
(2) uno per colonna

aggiunto dopo video: è il contrario



Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 24

Titolo nota 04/11/2015

GAMMA CONVERGENZA E MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Enunciato Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, sia

$f : \overline{B}_\delta(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzione da minimizzare)

e siano

$\Phi_i : \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ (eq. del vincolo) $i = 1, \ldots, k$

Sia

$$V = \{ x \in \overline{B}_\delta(x_0) : \Phi_1(x) = \ldots = \Phi_k(x) = 0 \}$$

Sia x_0 p.to di minimo di f ristretta a V, cioè

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in V$$

Supponiamo f e le Φ_i diff. in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e C^1.

Allora vale una delle due alternative

→ $\nabla\Phi_1(x_0), \ldots, \nabla\Phi_k(x_0)$ sono lin. dip.

→ $\nabla f(x_0)$ è comb. lin. di $\nabla\Phi_1(x_0), \ldots, \nabla\Phi_k(x_0)$, cioè

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla\Phi_1(x_0) + \ldots + \lambda_k \nabla\Phi_k(x_0).$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{1^\circ \text{ passo}}$ La tesi equivale a dire che la matrice con colonne (o righe) $\nabla f, \nabla\Phi_1, \ldots, \nabla\Phi_k$ ha rango $\leq k$.

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Posso supporre wlog che x_0 sia p.to di min. stretto, cioè

$$f(x_0) < f(x) \qquad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Basta infatti considerare

$$\hat{f}(x) = f(x) + |x - x_0|^2$$

e osservare che $\hat{f}(x)$ ha minimo stretto in x_0 e $\nabla\hat{f}(x_0) = \nabla f(x_0)$.

3° passo Problema con penalizzazione del vincolo. Pongo

$$F_n(x) := f(x) + n\,\Phi_1^2(x) + \dots + n\,\Phi_k^2(x)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $F_n(x)$ ammette minimo in $\overline{B}_\delta(x_0)$ per Weierstrass. Sia x_n un qualunque p.to di minimo di $F_n(x)$. Dico che

$$x_n \longrightarrow x_0 .$$

Se riesco a dimostrarlo, allora per n grande $x_n \in \overset{\text{aperta}}{\overset{\downarrow}{B_\delta}}(x_0)$, ma allora è p.to staz. interno, ma allora

$$\nabla F_n(x_n) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \nabla f(x_n) + 2n\,\Phi_1(x_n)\,\nabla\Phi_1(x_n) + \dots = 0$$

Ora evito la tentazione di passare al limite, ma osservo che la condizione equivale a dire che

$$\text{Rango}\left(\nabla f(x_n), \nabla\Phi_1(x_n), \dots, \nabla\Phi_k(x_n)\right) \le k$$

Quando $n \to +\infty$ la matrice tende a $\left(\nabla f(x_0) \,|\, \nabla\Phi_1(x_0) \,|\, \dots \,|\, \nabla\Phi_k(x_0)\right)$ e il rango è SCI (infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ tutti i minori $(k+1)\times(k+1)$ si annullano, dunque per continuità si annullano al limite)

Resta solo da dim. che $x_n \to x_0$. Se così non fosse esisterebbe una s.succ. $x_{n_k} \to y_0 \neq x_0$. Ci sono 2 casi

- se $y_0 \notin V$, allora esiste un indice i t.c. $\Phi_i(y_0) \neq 0$. Ma allora

$$\lim_{k\to+\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} \underset{\underset{f(y_0)}{\downarrow}}{f(x_{n_k})} + \underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{n_k}\, \underset{\underset{\underset{\neq 0}{\Phi_i^2(y_0)}}{\downarrow}}{\Phi_i^2(x_{n_k})} = +\infty$$

il che è assurdo perché $F_{n_k}(x_{n_k}) \underset{\underset{\text{def. min.}}{\uparrow}}{\leq} F_{n_k}(x_0) \underset{\underset{\text{sostituz.}}{\uparrow}}{=} f(x_0)$

- se $y_0 \in V$, allora

$$F_{n_k}(x_{n_k}) \underset{\uparrow}{\geq} f(x_{n_k})$$

butto via
roba ≥ 0

Quando $k \to +\infty$

$$f(x_0) \geq \lim_{k\to+\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(y_0) > f(x_0)$$

il che è assurdo come prima se $y_0 \neq x_0$ (e qui ho usato il minimo stretto).

—o—o—

Linguaggio più moderno: dimostrare che

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_\infty(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ +\infty & \text{se } x \notin V \end{cases}$$

C'è un equicompatto $\overline{B_\delta(x_0)}$ e quindi per il teo. di Gamma conv. i minimi di $F_n(x)$ hanno come p.ti limite solo minimi di $F_\infty(x)$, ma F_∞ ha come unico minimo x_0

$\boxed{\text{Dim. della Gamma convergenza di } F_n(x) \text{ a } F_\infty(x)}$

(LIMSUP) $F_n(x) \to F_\infty(x)$ puntualmente, quindi le recovery posso prenderle costanti

(LIMINF) Prendo una qualunque $x_n \to x_\infty$. Distinguo 2 casi

→ se $x_\infty \notin V$, allora $\exists\, i$ t.c. $\Phi_i(x_\infty) \neq 0$ e faccio il limite come sopra

→ se $x_\infty \in V$, allora $F_n(x_n) \geq \underset{\displaystyle f(x_\infty)}{\underset{\downarrow}{f(x_n)}}$ basta fare liminf a RHS e LHS.

—o—o—

Esempio

$$\min\left\{\int_0^1 n\dot{u}^2 + \arctan(xu^2)\,dx \ : \ u(0)=0,\ u(1)=7\right\}$$

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ esiste il minimo.
Posto m_n il valore del minimo, dimostrare che $m_n \to +\infty$ e calcolare la sua parte principale

$$F_n(u) := \int_0^1 \left[\dot{u}^2 + \frac{1}{n}\arctan(xu^2)\right]dx.$$

Idea: $m_n = n \cdot \min\{F_n(u) : u \in \dots\}$

$$F_n(u) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 \dot{u}^2\,dx = F_\infty(u)$$

quindi $\min\{F_n(u) : u \in \dots\} \to \underbrace{\min\{F_\infty(u) : u \in \dots\}}_{\text{lo sappiamo fare e fa 49}}$

Esistenza del minimo si vede con metodo diretto.
Se voglio dim. Gamma conv. in H^1 ...
(LIMSUP) banale perché c'è conv. puntuale
(LIMINF) me la cavo osservando che $u_n \to u_\infty$

$$F(u_n) \geq \underbrace{\int_0^1 \dot{u}_n^2\,dx}_{\downarrow\ \text{è sci}} - \underbrace{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n}}_{\downarrow\ 0}$$

$$\geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2\,dx$$ messi i liminf al posto giusto

Infine i p.ti di minimo del problema con parametro n tendono all'unico p.to di min del pbm. limite, che è la retta

$$u_\infty(x) = 7x.$$

* * *

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 25

Titolo nota 06/11/2015

Teoria classica del CdV.

DEFINIZIONI DI PUNTO DI MINIMO

$$\min\left\{ \underbrace{\int_a^b \psi(x,u,\dot u)\,dx}_{F(u)} \;:\; \underbrace{u(a)=A\,,\ u(b)=B}_{DBC} \right\}$$

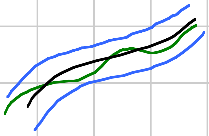
$$\varphi_v(t) := F(u+tv) \qquad v \in C_c^\infty((a,b))$$

$$\in C^1 \quad \text{con} \quad v(a)=v(b)=0$$

Def. Una funzione $u_0 \in C^1([a,b])$ si dice

- MINIMO LOCALE DIREZIONALE (DLM) se $\varphi_v(t)$ ha minimo locale per $t=0$ per ogni v
- MINIMO LOCALE DEBOLE (WLM) se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di u_0 nella metrica di C^1 tale che

$$F(u) \geq F(u_0) \qquad \forall u \in \mathcal{U}$$



detto meglio, se $\exists\, \delta > 0$ t.c.

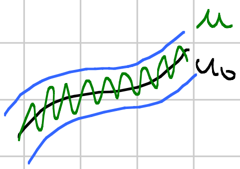
$$\underset{\uparrow}{\|u-u_0\|} \leq \delta \qquad \underset{\uparrow}{\|\dot u-\dot u_0\|} \leq \delta \;\Rightarrow\; F(u) \geq F(u_0)$$

norma del sup + DBC su u

- MINIMO LOCALE FORTE (SLM) se vale la stessa cosa in intorno nella metrica C^0, quindi

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $\|u-u_0\| \leq \delta \Rightarrow F(u) \geq F(u_0)$

+ DBC su u



- MINIMO GLOBALE (GM) se $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni u ammissibile.

Proposizione (banale)

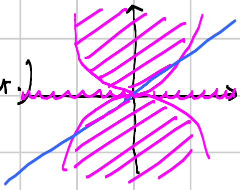
$$(GM) \Rightarrow (SLM) \Rightarrow (WLM) \Rightarrow (DLM)$$

Non vale nessuna delle implicazioni inverse

(SLM) $\not\Rightarrow$ (GM) : facili controesempi di analisi 1

(DLM) $\not\Rightarrow$ (WLC) : facili controesempi di analisi 2

$f(x,y) = 1$ nella zona rosa (asse x + dentro par.)
0 altrimenti



(WLM) $\Rightarrow$ (SLM) Esempio classico

$$\min \left\{ \int_0^1 \dot u^3 \, dx \ : \ u(0)=0 \ , \ u(1)=1 \right\}$$

Dico che $u_0(x) = x$ è (WLM) ma non (SLM)

$\boxed{\text{Dim}}$ → Dico che è (WLM) perché ogni $u(x)$ con $\dot u(x) \geq 0$ sempre ha funzionale $F(u) \geq F(u_0)$. Perché ?
Trucco : considero

$$\hat\varphi(p) := |p|^3$$

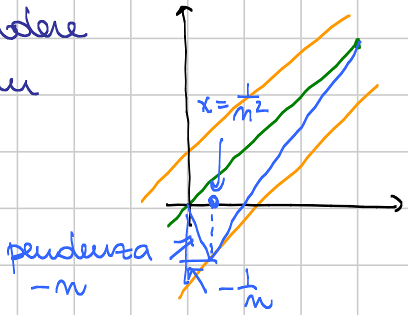
questa è convessa e coincide con $\varphi(p) = p^3$ per ogni $p \geq 0$. È facile verificare che $u_0(x) = x$ è l'unico minimo globale di

$$\int_0^1 \hat\varphi(\dot u) \, dx$$

(risolve Eulero + convessità). Ma se $\dot u(x) \geq 0$ $\forall x$ allora

$$\int_0^1 \varphi(\dot u)\,dx \overset{\dot u \geq 0}{\underset{\downarrow}{=}} \int_0^1 \hat\varphi(\dot u) \overset{u_0 \min}{\underset{\downarrow}{\geq}} \int_0^1 \hat\varphi(\dot u_0) \overset{\hat\varphi(1)=\varphi(1)}{\underset{\downarrow}{=}} \int_0^1 \varphi(\dot u_0)$$

→ Dico che non è (SLM) perché posso scendere ben sotto $F(u_0)$ pur rimanendo in un intorno C^0



In figura tengo pendenza $-n$ su un tratto lungo $\frac{1}{n^2}$.
Nell' integrale ho un $(-n)^3 \cdot \frac{1}{n^2} = -n$
e mi sono mosso in verticale solo di $\frac{1}{n}$

<u>Oss</u> Nell' esempio, l' inf di $F(u)$ in ogni intorno C^0 di u_0 vale $-\infty$.

— o — o —

<u>Programma</u> Determinare condizioni necessarie e/o suff. per essere (SLM) o (WLM)

Ci sono varie condizioni:

(E)			EULERO	(Eulero – Lagrange)
(L)	(L^+)		LEGENDRE	($\sim$1780)
(J)	(J^+)	(J^{++})	JACOBI	($\sim$ 1830)
(W)	(W^+)	(W_{loc})	WEIERSTRASS	($\sim$1880)
(F)			FIELD	

— o — o —

ECCESSO DI WEIERSTRASS Data $\psi(x,s,p)$ si pone

$$\boxed{E(x,s,p,q) := \psi(x,s,q) - \psi(x,s,p) - (q-p)\,\psi_p(x,s,p)}$$

Caso speciale: $\psi(x,s,p) = f(p) + g(x,s)$. In questo caso

$$E(x,s,p,q) = f(q) + \cancel{g(x,s)} - f(p) - \cancel{g(x,s)} - (q-p)\,f'(p)$$

Nel caso speciale $E(x,s,p,q) \geq 0$ sempre è come dire che f è convessa

$\boxed{\text{Oss.}}$ Se $\varphi(x,s,p)$ è convessa in p per ogni (x,s), allora $E(x,s,p,q) \geq 0$ ovunque definito.

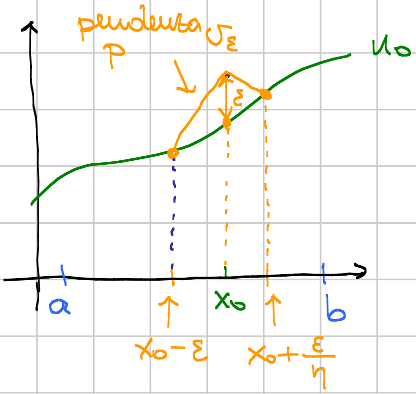
$\boxed{\text{Condizione (W)}}$ Si dice che $u_0(x)$ soddisfa (W) se

$$E(x, u(x), \dot{u}(x), p) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b], \ \forall p \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se u_0 è (SLM) per un funzionale con DBC, allora $u_0(x)$ verifica (W).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$

Fisso $p \in \mathbb{R}$ [Aggiunto dopo video: NOTAZIONE ORRIBILE: questo p è quello che si chiamava q nell'eccesso]



Considero $v_\varepsilon(x)$ che coincide con $u_0(x)$ fuori dall'intervallo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}]$ e che ha pendenza p in $[x_0 - \varepsilon, x_0]$

Imponiamo che $F(v_\varepsilon) \geq F(u_0)$ cioè $F(v_\varepsilon) - F(u_0) \geq 0$.

Restano solo i termini nell'intervallo

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \varphi(x, v_\varepsilon(x), p)\, dx - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \varphi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}} \varphi(x, v_\varepsilon(x), \dot{v}_\varepsilon(x))\, dx - \int_{x_0}^{x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}} \varphi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \geq 0$$

Divido tutto per ε e uso il teorema della media integrale

I quattro pezzi diventano

$$\psi(x_\varepsilon, v_\varepsilon(x_\varepsilon), p) - \psi(y_\varepsilon, u_0(y_\varepsilon), \mathring{u}_0(y_\varepsilon))$$

$$+\frac{1}{\eta}\psi(z_\varepsilon, v_\varepsilon(z_\varepsilon), \mathring{v}_\varepsilon(z_\varepsilon)) - \frac{1}{\eta}\psi(w_\varepsilon, u_0(w_\varepsilon), \mathring{u}_0(w_\varepsilon)) \geq 0$$

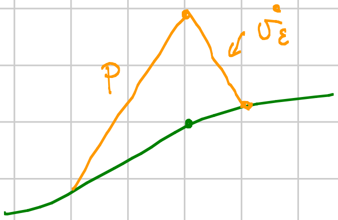
Ora η sta fisso e $\varepsilon \to 0^+$ (garantisce $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}] \subseteq (a,b)$)

Tutti i punti tendono ad x_0 e quindi ho

$$\psi(x_0, u_0(x_0), p) - \psi(x_0, u_0(x_0), \mathring{u}_0(x_0))$$

$$+\frac{1}{\eta}\Big[\psi(x_0, u_0(x_0), \underset{\eta(\mathring{u}_0(x_0)-p)+\mathring{u}(x_0)}{\uparrow} \qquad) - \psi(x_0, u_0(x_0), \mathring{u}_0(x_0))\Big] \geqslant 0$$

Bisogna capire il limite di $\dot{v}_\varepsilon(z_\varepsilon)$



Nel tratto discendente

$$\mathring{v}_\varepsilon(x) = \frac{-v_\varepsilon(x_0) + v_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta})}{\frac{\varepsilon}{\eta}}$$

$$= \frac{-\overset{u_0}{\overset{\shortparallel}{v_\varepsilon}}(x_0 - \varepsilon) - p\varepsilon + \overset{u_0}{\overset{\shortparallel}{v_0}}(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta})}{\frac{\varepsilon}{\eta}}$$

Quando $\varepsilon \to 0$, $\mathring{v}_\varepsilon(x) \to -\eta p + \mathring{u}_0(x_0)(1+\eta)$

Quando faccio il limite per $\eta \to 0$ viene

$$(p - \mathring{u}_0(x))\,\psi_p(x_0, u_0(x_0), \mathring{u}_0(x_0)).$$

Mettendo insieme i
4 termini si ha
la condizione (W).

$$u_0(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}) - u_0(x_0 - \varepsilon) = \cancel{u_0(x_0)} + \frac{\varepsilon}{\eta}\mathring{u}_0(x_0) - \cancel{u_0(x_0)} + \varepsilon\,\mathring{u}_0(x_0)$$

Dividendo per ε trovo $\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)\mathring{u}_0(x_0)$

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 26

Titolo nota 06/11/2015

VARIAZIONE SECONDA Calcolare $\varphi_v''(0)$

dove $\varphi_v(t) := F(u+tv) = \int_a^b \psi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\,dx$

$$\varphi_v'(t) = \int_a^b \psi_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\,v + \psi_p(x,\dots)\,\dot{v}\,dx$$

Mettendo $t=0$ si ottiene variazioni prima ⇝ eq. Eulero

$$\varphi_v''(0) = \int_a^b [\psi_{ss}(\dots)\,v^2 + 2\psi_{sp}(\dots)\,v\dot{v} + \psi_{pp}(\dots)\,\dot{v}^2]\,dx$$

Proposizione banale u_0 (DLM) $\Rightarrow \varphi_v''(0) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$ dove si intende che tutte le derivate seconde ψ_{ss}, ψ_{sp}, ψ_{pp} sono calcolate in $(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$

Questo motiva lo studio dei funzionali quadratici, che sono l'equivalente delle forme quadratiche.

Obiettivo: consideriamo funzionali del tipo

$$Q(v) = \int_a^b [A(x)\,v^2 + 2B(x)\,v\dot{v} + C(x)\,\dot{v}^2]\,dx$$

e cerchiamo cond. nec. e/o suff. affinché

$$Q(v) \geq 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Oss. (da gente del 2015) La condizione è equivalente a chiedere

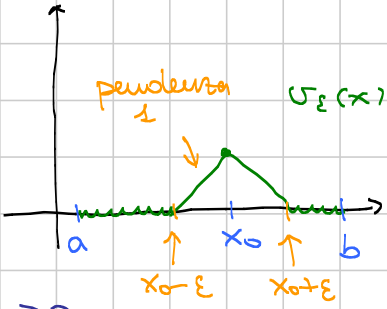
$Q(v) \geq 0 \qquad \forall v \in H^1((a,b))$ nulla al bordo (basterà C^1 a tratti)

Teorema (condizione necessaria di Legendre)

Se $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in \dots$, allora $C(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

Conseguenza: se non vale la condizione, allora la forma non è ≥ 0.

Dim. Supponendo $C(x)$ continua, basta dimostrare che $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$



Calcolo $Q(v_\varepsilon) =$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} A(x)\, v_\varepsilon^2(x) + 2B(x)\, \overset{\overset{\dot v_\varepsilon(x)=1}{\downarrow}}{v_\varepsilon(x)} + C(x)\, dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} A(x)\, v_\varepsilon^2(x) - 2B(x)\, v_\varepsilon(x) + C(x)\, dx \geq 0$$

Divido per ε e uso teo. media integrale

$$A(x_\varepsilon)\, \overset{\overset{0}{\uparrow}}{v_\varepsilon^2}(x_\varepsilon) + 2B(x_\varepsilon)\, \overset{\overset{0}{\uparrow}}{v_\varepsilon}(x_\varepsilon) + \overset{\overset{C(x_0)}{\uparrow}}{C(x_\varepsilon)}$$

$$+ A(y_\varepsilon)\, \underset{\underset{0}{\downarrow}}{v_\varepsilon^2}(y_\varepsilon) - 2B(y_\varepsilon)\, \underset{\underset{0}{\downarrow}}{v_\varepsilon}(y_\varepsilon) + \underset{\underset{C(x_0)}{\downarrow}}{C(y_\varepsilon)} \geq 0$$

Passando al limite ottengo che $C(x_0) \geq 0$.

(Ho usato nel limite che $0 \leq v_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$)

— o — o —

(L) Un candidato minimo $u_0(x)$ verifica (L) se

$$\underbrace{\mathcal{L}_{pp}(x, u_0(x), \dot u_0(x))}_{C(x)} \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Def. Si dice Equazione di Jacobi l'equazione LINEARE

$$\boxed{[C(x)\dot u + B(x)u]' = B(x)u' + A(x)u}$$

Equazione di Eulero di Q

$$Q(v) = \int A v^2 + 2Bv\dot v + C\dot v^2$$

$$[\varphi_p(x,u,\dot u)]' = \varphi_s(x,u,\dot u)$$

$$[2C\dot u + 2Bu]' = 2Au + 2B\dot u$$

Def. Consideriamo l'equazione di Jacobi con dati iniziali
$u(a)=0$ $\dot u(a)=1$
Dico che $x_0 \in (a,b]$ è un p.to coniugato se $u(x_0)=0$

Oss. Se mettevo $\dot u(a)=7$, la soluzione per linearità si annullava anche lei in x_0.

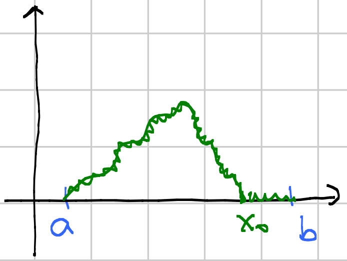
Def. (L^+) $C(x)>0$ in $[a,b]$

(J) Non esistono p.ti coniugati $x_0 \in (a,b)$

↑ b può essere coniugato

Teorema Consideriamo un funzionale quadratico che verifica (L^+). Allora se $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in \dots$ vale anche (J)
In altre parole: se vale (L^+) la condizione (J) diventa necessaria per avere funzionale quadratico ≥ 0.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi abbiamo che $Q(v) \geq 0$ sempre. Supponiamo che ci sia una soluz. di Jacobi che si annulla in $x_0 \in (a,b)$. Considero la v ottenuta unendo la soluzione e poi prolungando a 0.



Dico che $Q(v) = 0$. Se lo dimostro ottengo che v è p.to di minimo, ma allora v deve risolvere Jacobi e non lo può fare perché tutte le soluzioni di Jacobi sono C^1 e v non lo è.

<u>Primo fatto</u>: non può essere $v(x_0) = \dot v(x_0) = 0$ perché altrimenti v sarebbe identicamente nulla (esistenza ed unicità per eq. lineare)

<u>Secondo fatto</u>: dove serve (L^+)? Serve per scrivere l'eq. di Jacobi in forma normale (devo fare le derivate e dividere per $C(x)$): questo mi garantisce la regolarità delle soluzioni.

<u>Terzo fatto</u>: perché $Q(v) = 0$? Basta integrare tra a e x_0. Partiamo dall'eq.

$(C\dot u + Bu)'u = (B\dot u + Au)u$ ho moltiplicato per u

$\int (C\dot u + Bu)'u = \int B\dot u u + Au^2$ integro per parti

$-\int C\dot u^2 + Bu\dot u = \int B\dot u u + Au^2$

Portando dalla stessa parte ottengo $Q(u) = 0$

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 27

Titolo nota 11/11/2015

Funzionali quadratici $Q(v) = \int_a^b [A(x)v^2 + 2B(x)v\dot{v} + C(x)\dot{v}^2]dx$

(L) $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$

(L⁺) $C(x) > 0$ " " $x \in [a,b]$ (quindi $C(x) \geq c_0 > 0$ $\forall x \in [a,b]$)

Equazione di Jacobi (JDE) = eq. di Eulero di Q =

$$\boxed{[C(x)\dot{v} + B(x)v]' = B(x)\dot{v} + A(x)v}$$

Se i coeff. sono regolari posso fare la derivata

$$C'(x)\dot{v} + C(x)\ddot{v} + B'(x)v + \cancel{B(x)\dot{v}} = \cancel{B(x)\dot{v}} + A(x)v$$

Se vale (L⁺) posso portarla in forma normale $\ddot{v} = \alpha(x)\dot{v} + \beta(x)v$

A questo p.to si applica la teoria delle eq. diff. lineari

(J) La soluzione di (JDE) con dati iniziali $v(a) = 0$, $\dot{v}(a) = 1$ non si annulla in (a,b) (ma magari in b sì)

(J⁺) Stessa cosa ... non si annulla in $(a,b]$

Def. Si dice p.to coniugato (di a) ogni punto in cui la soluz. di sopra si annulla.

Quindi: (J) NO p.ti coniugati in (a,b)

(J⁺) NO p.ti coniugati in $(a,b]$

Oss. Se faccio tutto imponendo $v(a) = 0$ e $\dot{v}(a) = \alpha \neq 0$ ottengo gli stessi p.ti coniugati (per linearità dell'equ.)

CONDIZIONE NECESSARIA Supponiamo che $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty$

Allora

(1) Vale la cond (L)

(2) se vale (L^+), allora vale (J)

$$\boxed{Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \dots \quad \Longrightarrow \quad (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)]}$$

<u>Conseguenze in negativo</u>

- NO $(L) \Rightarrow \inf\{Q(v) : v \in C_c^\infty((a,b))\} = -\infty$
- (L^+) ma no $(J) \Rightarrow$ "

CONDIZIONE SUFFICIENTE

Supponiamo che valgano (L^+) e (J^+). Allora $Q(v) \geq 0$ per ogni...

$$\boxed{(L^+) + (J^+) \Longrightarrow Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \dots}$$

CONDIZIONE MEGA-SUFFICIENTE Se vale

$$A(x)\,C(x) \geq [B(x)]^2 \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$A(x) \geq 0 \qquad \text{"}$$
$$C(x) \geq 0 \qquad \text{"}$$

allora $Q(v) \geq 0$ addirittura per ogni v, indipendentemente dai dati al bordo.

Dim. Banale algebra lineare: la forma risulta definita positiva. $\begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x) & C(x) \end{pmatrix}$

Sotto queste ipotesi

$$A(x)\,v^2(x) + 2B(x)\,v(x)\,\dot{v}(x) + C(x)\,\dot{v}(x)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

ROAD MAP PER DIM. COND. SUFFICIENTE

$$(L^+)+(J^+) \underset{①}{\Longrightarrow} (J^{++}) \underset{②}{\Longrightarrow} (z) \underset{③}{\Longrightarrow} Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \ldots$$

dove

(J^{++}) esiste una soluzione $v(x)$ di (JDE) tale che $v(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$ (quindi $v(x) \geq v_0 > 0$ $\forall x \in [a,b]$)

(z) esiste una funzione $z \in C^1([a,b])$ tale che risolve

$$z' = \frac{[z+B(x)]^2}{C(x)} - A(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

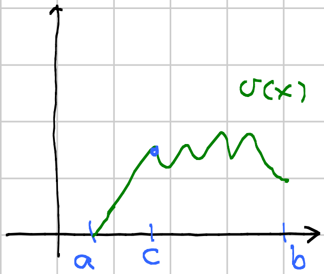
Oss. 1 – Posso dividere per $C(x)$ grazie a (L^+)

2 – Non è ovvio che esistono sol. in tutto $[a,b]$ perché RHS è quadratico in z $\rightsquigarrow$ potenziale blow-up.

Dim ① $(L^+)+(J^+) \Longrightarrow (J^{++})$.

Per ipotesi so che la sol. di (JDE) con dato iniziale $v(a)=0$, $\dot{v}(a)=1$ non si annulla in $(a,b]$.

Provo a risolvere (JDE) con dati
$v_\varepsilon(a) = \varepsilon$, $\dot{v}_\varepsilon(a) = 1$.



Per continuità esiste $c \in (a,b)$ tale che

$\dot{v}(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [a,c]$

$v(x) \geq v_0 > 0 \quad \forall x \in [c,b]$

Per dipendenza continua dai dati iniziali

$v_\varepsilon(x) \longrightarrow v(x)$ unif. in $[a,b]$

$\dot{v}_\varepsilon(x) \longrightarrow \dot{v}(x)$ " " "

Allora per ε abbastanza piccolo si avrà

$$v_\varepsilon(x) \geq \frac{v_0}{2} > 0 \qquad \forall x \in [c,b]$$

$$\dot{v}_\varepsilon(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,c], \text{ quindi } v_\varepsilon(x) \geq v_\varepsilon(0) = \varepsilon \quad \forall x \in [a,c]$$

Oss. (domanda) Cosa succede se risolvo (JDE) con dati

$$w(b)=0 \qquad \dot w(b) = -1$$

Se riesco a dim. che $w(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b)$ poi basta sommare con la v data da (J^+).

— o — o —

Dim. ② Per ipotesi sappiamo che esiste una sol. di (JDE) $v(x)$ tale che $v(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Pongo

$$z(x) = -\frac{\underbrace{[C(x)\dot v(x) + B(x)v(x)]}_{\text{LHS di (JDE)}}}{v(x)} = -C(x)\frac{\dot v}{v} - B(x)$$

Calcolo la derivata

$$\dot z = -\frac{[C\dot v + Bv]'}{v} + \frac{C\dot v + Bv}{v^2}\dot v \underset{(JDE)}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{\cancel{B\dot v} + Av}{v} + C\frac{\dot v^2}{v^2} + B\cancel{\frac{\dot v}{v}}$$

$$= -A + C\frac{\dot v^2}{v^2}$$

Ora calcolo il RHS dell'equazione per z

$$\frac{[z+B]^2}{C} - A = \frac{1}{C}\left[-C\frac{\dot v}{v}\right]^2 - A = C\frac{\dot v^2}{v^2} - A = z'$$ ☺

— o — o —

È un miracolo quello che è successo? NI

C'è sotto la teoria delle EQ. DI RICCATI

$$\boxed{y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)}$$

(RHS è pol. quadratico in y)

Fatto generale: le Riccati sono imparentate con le lineari di ordine 2

$$v'' = \alpha(x)v' + \beta(x)v$$

in questo senso

Se cerco una soluzione positiva della lineare di ordine 2 ha senso cercarla della forma $v(x) = e^{w(x)}$

Sostituisco: $\mathring{v} = e^{w} \mathring{w}$ $\qquad \overset{\cdot\circ}{v} = e^{w} \mathring{w}^{2} + e^{w} \overset{\cdot\circ}{w}$

$$\cancel{e^{w}} \mathring{w}^{2} + \cancel{e^{w}} \overset{\cdot\circ}{w} = \alpha(x) \cancel{e^{w}} \mathring{w} + \beta(x) \cancel{e^{w}}$$

$$\overset{\cdot\circ}{w} = -\mathring{w}^{2} + \alpha(x) \mathring{w} + \beta(x)$$

quindi $\mathring{w}$ risolve una Riccati. Tra l'altro $w(x) = \log v(x)$
quindi $\mathring{w}$ che è la sol. della Riccati, sarebbe

$$\mathring{w} = \frac{\mathring{v}}{v}$$

— ∘ — ∘ —

Resta da fare (2) $\Rightarrow$ Tesi.

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 28

Titolo nota 11/11/2015

Dim di ③ Ipotesi: esiste sol. di $z' = \frac{[z+B]^2}{C} - A$

Tesi: $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty((a,b))$

Consideriamo, data una qualunque $z(x)$, la forma

$$\hat{Q}(v) = Q(v) + \underbrace{\int_a^b [z(x)v^2(x)]' dx}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ se } v \text{ è nulla agli estremi}}$$

Osservando che $[z(x)v^2(x)]' = z'(x)v^2(x) + 2z(x)v(x)\dot{v}(x)$

quindi

$$\hat{Q}(v) = \int_a^b \{ [A(x)+z'] v^2 + 2[B(x)+z] v\dot{v} + C(x)\dot{v}^2 \} dx$$

Se $\hat{Q}(v)$ soddisfa la mega-sufficiente ho finito perché

$$Q(v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } v \text{ è} \\ \text{nulla al bordo}}}{=} \hat{Q}(v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ogni } v}}{\geq} 0$$

Ma la mega-suff. su $\hat{Q}$ è

$$[A(x)+z'(x)][C(x)] \geq [B(x)+z(x)]^2$$

Se riesco a trovare una $z(x)$ che verifica l'uguaglianza, ancora meglio

$$A(x) + z' = \frac{[z+B(x)]^2}{C}$$

Porto $A(x)$ al RHS e ho l'eq. per z.

—o—o—

$\boxed{\text{Primo passo avanti}}$ Nelle ipotesi della cond. suff. esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$Q(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}^2(x)\,dx \qquad \forall v \in \ldots$$

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Considero la forma differenza

$$Q_\varepsilon(v) = Q(v) - \varepsilon \int_a^b \dot{v}^2\,dx = \int_a^b A(x)v^2 + 2B(x)v\dot{v} + (C(x)-\varepsilon)\dot{v}^2$$

Se Q verifica (L^+), allora anche Q_ε verifica (L^+) per $\varepsilon > 0$ piccoli

Se Q verifica (J^+), " " " " (J^+) " " "

(J^{++}) (J^{++})

Questo segue dalla dipendenza continua delle soluzioni di (JDE) dai coefficienti. La dipendenza continua è uniforme

$$\ddot{v}_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(x)\,\dot{v}_\varepsilon + \beta_\varepsilon(x)\,v_\varepsilon \qquad \text{e} \quad \begin{array}{l} \alpha_\varepsilon \to \alpha_0 \\ \beta_\varepsilon \to \beta_0 \quad \text{unif} \end{array}$$

allora $v_\varepsilon \to v_0$

Quindi $Q_\varepsilon(v) \geq 0$ per ogni v per ε piccolo, da cui la tesi.

—— o —— o ——

$\boxed{\text{Secondo passo avanti}}$ Data $Q(v)$ esiste M t.c.

$$|Q(v)| \leq M \int_a^b \dot{v}^2 dx \qquad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

$\boxed{\text{Idea della dim}}$ $$\int_a^b C(x)\,\dot{v}^2(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} |C(x)| \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

$$\int_a^b A(x)\,v^2(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]} |A(x)| \int_a^b v^2(x)\,dx$$ Usando le "solite"

stime $$|v(x)| \leq \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v(a)} + \left|\int_a^x \dot{v}(s)\,ds\right| \leq \sqrt{b-a}\left[\int_a^b \dot{v}^2(s)\,ds\right]^{1/2}$$

Basta ora fare i $\square$ ed integrare. Idem per $B(x)\,v(x)\,\dot{v}(x)$

$$\left| \int_a^b B(x)\, v(x)\, \dot{v}(x)\, dx \right| \leq \max B(x) \cdot \left| \int_a^b v(x)\, \dot{v}(x) \right|$$

e concludo con Hölder o C.S.

—o—o—

Consideriamo ora un funzionale integrale generale

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u})\, dx$$

Sia $u_0(x)$ una soluzione di Eulero e consideriamo la variazione seconda

$$Q(v) = \int_a^b A v^2 + 2 B v \dot{v} + C \dot{v}^2$$

dove
$$A(x) = \psi_{ss}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$
$$B(x) = \psi_{sp}(\quad \ldots \quad)$$
$$C(x) = \psi_{pp}(\quad \ldots \quad)$$

$\boxed{\text{Condizione necessaria}}$ Consideriamo la forma associata. Se non verifica $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C^\infty_c((a,b))$, allora $u_0(x)$ non può essere un minimo nemmeno direzionale. Visto dall'altra parte

$$\boxed{u_0 \ (DLM) \Longrightarrow (E) + \underbrace{(L) + [\,(L^+) \Rightarrow (J)\,]}}$$

↑ pensate sulla forma $Q(v)$ costruita a partire da $u_0(x)$

Ricordo: u_0 è (DLM) se $\varphi_v(t) := F(u_0 + tv)$ ha minimo locale per $t=0$

[Dim. $\varphi''_v(0) = Q(v)$]

CONDIZIONE SUFFICIENTE

$$\boxed{(E) + \underbrace{(L^+) + (J^+)}_{\text{sulla forma costruita da } u_0(x)} \implies u_0 \text{ è } (WLM)}$$

Dim. Devo dim. che $F(u_0+v) \geq F(u_0)$ se v si annulla al bordo ed è piccola in norma C^1.

Considero

$$\varphi_v(t) := F(u_0 + tv)$$

e allora

$$F(u_0+v) = \varphi_v(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor-Lagrange}}}{=} \varphi_v(0) + \overset{\substack{0 \text{ se vale } (E) \\ \parallel}}{\varphi_v'(0)} \cdot 1 + \frac{1}{2}\varphi_v''(t_0)\, 1^2$$

con $t_0 \in (0,1)$

$$= F(u_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\varphi_v''(t_0)}_{\text{se fosse } \geq 0 \text{ ho finito}}$$

Ora

$$\varphi_v''(t_0) = \int_a^b A^{t_0}(x)\, v^2 + 2B^{t_0}(x)\, v\dot v + C^{t_0}(x)\, \dot v^2 \,, \text{ dove}$$

$$A^{t_0}(x) = \mathcal{L}_{ss}\,(x, u_0(x) + t_0 v(x), \dot u_0(x) + t_0 \dot v(x))$$

$$B^{t_0}(x) = \mathcal{L}_{sp}\,(\quad \ldots \quad)$$

$$C^{t_0}(x) = \mathcal{L}_{pp}\,(\quad \ldots \quad)$$

Indichiamo questa forma con $Q^{t_0}(v)$. Indichiamo con $Q^0(v)$ la forma corrispondente a $t=0$

$$Q^{t_0}(v) = Q^0(v) + [Q^{t_0}(v) - Q^0(v)]$$

Per ipotesi Q^0 verifica (L^+) e (J^+), quindi esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$Q^0(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}^2(x)\,dx$$

uso l'unif. continuità di $\psi_{ss}, \psi_{sp}, \psi_{pp}$

La forma $Q^{t_0}(v) - Q^0(v)$ ha i coeff. A, B e C che sono piccoli a piacere se $v(x)$ e $\dot{v}(x)$ sono piccole abbastanza. Quindi se v è piccola in norma C^1, i coeff. della forma diff. sono piccoli, quindi per il secondo passo avanti

$$|Q^{t_0}(v) - Q^0(v)| \leq \underbrace{\text{quello che voglio}}_{= \varepsilon_0} \cdot \int_a^b \dot{v}^2(x)\,dx$$

Sommando concludo che $Q^{t_0}(v) \geq 0$ per ogni v abb. piccola.

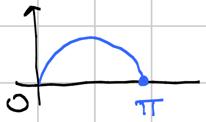
<u>Esempio degli esempi</u> $F(u) = \int_0^\ell (\dot{u}^2 - u^2)\,dx$

Si vede che $Q(v) = \int_0^\ell \dot{v}^2 - v^2$ $A(x) \equiv -1$ $B(x) \equiv 0$

$C(x) \equiv 1$ $\Rightarrow (L^+)$ ok

(JDE) $[\dot{v}]' = -v$ $\ddot{v} = -v$

risolvo con dati $v(0) = 0$, $\dot{v}(0) = 1$ e trovo $v(x) = \sin x$



π è il primo pto coniugato.

Quindi

- se $\ell > \pi$, allora addio (J) $\Rightarrow$ inf $= -\infty$
- se $\ell < \pi$, allora (J^+) è ok $\Rightarrow F(u) \geq 0$ per ogni u nulla al bordo

Se $\ell = \pi$, allora è ancora vero che $Q(v) \geq 0$ $\forall v \in \ldots$

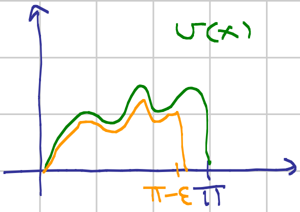
$\boxed{\text{Dim}}$ Se fosse che $Q_\pi(v)$ non è ≥ 0 sempre, troverei v t.c.

$Q_\pi(v) \leq -1000$ per omogeneità

Ma allora troverei v_ε tale che

$$Q_{\pi-\varepsilon}(v_\varepsilon) \leq -500 \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

e quindi $Q_{\pi-\varepsilon}(v)$ non sarebbe semidefinita positiva



$$v_\varepsilon(x) = v\left(\frac{\pi}{\pi-\varepsilon} x\right)$$

non resta che sostituire e vedere che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} Q_{\pi-\varepsilon}(v_\varepsilon) = Q_\pi(v) \leq -1000$$

<u>Esercizio</u> vedere che succede per $F(u) = \int_0^\ell (\dot{u}^2 - u^2 - u^4)\, dx$
e vedere quando
$u_0(x) \equiv 0$ è (WLM)

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 29

Titolo nota 13/11/2015

[Se c'è un idiota in mezzo ad una folla non se ne accorge nessuno, ma se c'è un intero gruppo di idioti, questi si fanno notare benissimo.
(Liberamente tratto da) E. De Giorgi]

CALIBRAZIONE (calibration, verification function)

<u>Esempio motivazionale</u> $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 \, dx : u(0)=0, \ u(1)=3 \right\}$

L'unico pto di min. è $u_0(x) = 3x$.
Come lo dimostro?

$$\underset{\overset{\uparrow}{\psi(x,s,p)}}{p^2} \geq \underset{\overset{\uparrow}{\hat{\psi}(x,s,p)}}{6p-9} \quad \forall p \in \mathbb{R} \qquad \int_0^1 \dot{u}^2 \, dx \geq \int_0^1 (6\dot{u}-9)\, dx$$

$$= 6\,[u(x)]_0^1 - 9 = 18-9 = \underset{F(u_0)}{9}$$

Ho così dimostrato che

$F(u) \geq F(u_0)$ $\forall u$ ammissibile e vale il segno di $=$ se e solo se vale nella $p^2 \geq 6p-9$, cioè $\Leftrightarrow$ $\dot{u}(x) = 3$ per ogni x

Altro esempio: scelgo un parametro $a>0$ e pongo

$$\underbrace{p^2}_{\psi(x,s,p)} \geq \underbrace{2\,\frac{s+3a}{x+a}\,p - \frac{(s+3a)^2}{(x+a)^2}}_{\hat{\psi}(x,s,p)} \qquad \forall p \in \mathbb{R} \ \ \forall s \in \mathbb{R} \ \ \forall x \geq 0$$

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 \, dx \geq \int_0^1 2\,\frac{u(x)+3a}{x+a}\,\dot{u}(x) - \frac{(u(x)+3a)^2}{(x+a)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[\frac{(u(x)+3a)^2}{x+a}\right] dx = \frac{(3+3a)^2}{1+a} - \frac{(3a)^2}{a}$$

$$= 9(1+a) - 9a = 9 = F(u_0)$$

Inoltre vale il segno di = se e solo se $\dot{u}(x) = \frac{u(x)+3a}{x+a}$ che ha come soluzione per $(0,0)$ proprio $u_0(x) = 3x$.

Osservazione la prima scelta $6p-9$ è il lim della 2^a per $a \to +\infty$. Facendo il limite per $a \to 0$ ne otteniamo ancora un'altra

$$p^2 \geq 2\frac{s}{x}p - \frac{s^2}{x^2}$$ (verifica per esercizio: coinvolge un integrale potenzialmente improprio).

— o — o —

Quali $\hat{\varphi}(x,s,p)$ permettono di fare bene la primitiva?
Possibilità: prendo $V(x,s)$ di classe C^1 e pongo

$$\hat{\varphi}(x,s,p) := V_x(x,s) + V_s(x,s)p$$ è l'integrale della forma $V_x\,dx + V_s\,ds$ lungo il grafico

$$\int_a^b \hat{\varphi}(x,u(x),\dot{u}(x))\,dx = \int_a^b [V_x(x,u(x)) + V_s(x,u(x))\,\dot{u}(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dx}[V(x,u(x))]\,dx$$
$$= V(b,u(b)) - V(a,u(a))$$

Sorpresona: $\hat{F}(u) = \int_a^b \hat{\varphi}(x,u,\dot{u})\,dx$ dipende solo dai valori di u agli estremi

$\boxed{\text{Metodo di calibrazione}}$ Data $u_0(x)$ candidato minimo per $F(u)$ cerco una funzione $V(x,s)$ tale che la $\hat{\varphi}$ ottenuta come sopra verifichi due proprietà

(i) $\varphi(x,s,p) \geq \hat{\varphi}(x,s,p)$ per ogni $x \in [a,b]$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{R}$
(ii) $\varphi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) = \hat{\varphi}(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))$ per ogni $x \in [a,b]$.

Se ci riesco, allora

$$F(u_0) = \min\{F(u) : u(a) = A,\ u(b) = B\}$$

Dim. $F(u) = \int_a^b \varphi(x,u(x),\dot{u}(x))\,dx$

$$\overset{(i)}{\longrightarrow} \geq \int_a^b \hat{\varphi}(x,u(x),\dot{u}(x))\,dx$$ (dipende solo dagli estremi, quindi lo calcolo con $u_0(x)$)

$$= \int_a^b \hat{\varphi}(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))\,dx$$

$$\overset{(ii)}{\longrightarrow} = \int_a^b \varphi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))\,dx = F(u_0)$$

(Sostanzialmente è il lemma trivial di una volta)

—o —o —

Domanda: come posso fare per costruire $V(x,s)$?

VALUE FUNCTION Supponiamo wlog che $V(a,A)=0$.
Quanto deve valere $V(b,B)$? Il minimo del funzionale con quei dati al bordo!

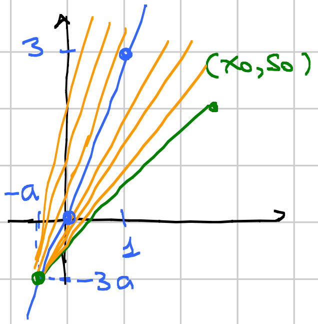
Pongo $$V(x_0,s_0) := \min\left\{\int_a^{x_0} \varphi(t,u(t),\dot{u}(t))\,dt : u(a)=A,\ u(x_0)=s_0\right\}$$

↑ posto che esista

Teorema Se per caso fosse $V \in C^1$, allora V è UNA calibrazione possibile.

Utilizzo pratico: voglio dimostrare che $u_0(x)$ è minimo con dati (a,A), (b,B).
Mi sento smart e penso di saper risolvere con ogni coppia di dati (a,A), (x_0,s_0).
Usando le presunte soluzioni calcolo V e verifico a mano a posteriori (i) e (ii).
Se funziona ho vinto.

Esempio $\int_0^1 \dot{u}^2\,dx$



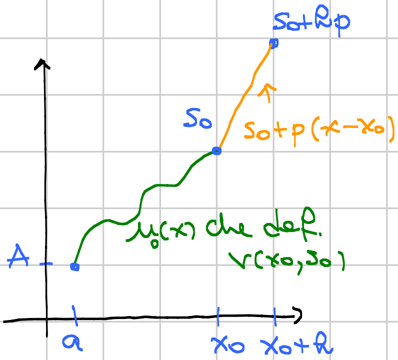
Uso come p.to base $(-a,-3a)$. Chi è il minimo con dati $(-a,-3a)$ e (x_0,s_0) ?

$$\underbrace{\left(\frac{s_0+3a}{x_0+a}\right)^2}_{\dot{u}^2}\cdot\underbrace{(x_0+a)}_{\text{integrato tra } -a \text{ e } x_0} = \frac{(s_0+3a)^2}{x_0+a}$$

Congettura : $V(x,s) := \dfrac{(s+3a)^2}{x+a}$

$$\hat{\psi}(x,s,p) = V_x(x,s) + V_s(x,s)\,p = -\frac{(s+3a)^2}{(x+a)^2} + 2\,\frac{(s+3a)}{x+a}\,p$$

$\boxed{\text{Dim. teorema}}$ Supponiamo $V(x,s) \in C^1$. Devo dimostrare che valgono (i) e (ii).



$V(x_0+h,\, s_0+hp) \le$ lo calcolo su una retta

$$\le V(x_0,s_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(x,\, s_0+p\,(x-x_0),\, p)\,dx$$

divido per h e riorganizzo

$$\frac{V(x_0+h,\, s_0+hp) - V(x_0,s_0)}{h} \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \psi(x,\, s_0+p\,(x-x_0),\, p)\,dx$$

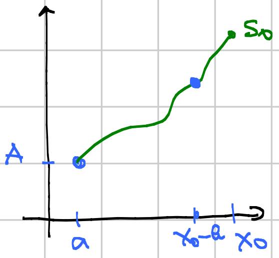
Faccio il limite per $h \to 0^+$

$$\underbrace{V_x(x_0,s_0) + V_s(x_0,s_0)\,p}_{\hat{\psi}(x_0,s_0,p)} \le \psi(x_0,s_0,p)$$

$$\le \psi(x_0,s_0,p)$$

Questo dimostra la (i).

Per dimostrare la (ii) uso x_0 e x_0-h



Chi è $V(x_0-R, u_0(x_0-R))$?

È ottenuto dalla stessa $u_0(x)$, altrimenti potrei risparmiare nel 1o tratto.

Quindi

$$V(x_0,u_0(x_0)) - V(x_0-R, u_0(x_0-R)) = \int_{x_0-R}^{x_0} \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))\,dx$$

Divido per R e passo al limite

$$V_x(x_0, u(x_0)) + V_s(x_0, u(x_0))\,\dot{u}(x_0) = \psi(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

Questa è la (ii).

—o—o—

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 30

Titolo nota 13/11/2015

Altri due esempi di calibrazione

Cond. sufficiente $(L^+) + (J^+) \Rightarrow$ funzionale quadratico ≥ 0

$$\psi(x,s,p) = A(x)s^2 + 2B(x)sp + C(x)p^2$$

$V(x,s) = -z(x)s^2$ da cui $\hat{\psi}(x,s,p) = V_x + V_s p = -z'(x)s^2 - 2sz(x)p$

Quindi la (i) diventa $(A(x)+z'(x))s^2 + 2(B(x)+z(x))sp + C(x)p^2$
e se voglio che sia ≥ 0 per ogni s,p,x mi ritrovo che la forma

$$\begin{pmatrix} A(x)+z'(x) & B(x)+z(x) \\ B(x)+z(x) & C(x) \end{pmatrix}$$

deve essere semidef. pos., il che porta alla cond. (z).

—o—

Supponiamo $\psi(x,s,p)$ convessa nella coppia s,p per ogni $x \in [a,b]$
Allora la dim. classica passava per

$$\int_a^b \psi(x,u(x),\dot{u}(x))dx \geq \int_a^b \psi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))dx + \int_a^b (u(x)-u_0(x))\psi_s(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))dx + \int_a^b (\dot{u}(x)-\dot{u}_0(x))\psi_p(\ldots)dx$$

Lo si può interpretare pensando

$$\hat{\psi}(x,s,p) = \psi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) + (s-u_0(x))\psi_s(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) + (p-\dot{u}_0(x))\psi_p(\ldots)$$

$$= p\,\overset{A}{\underbrace{\psi_p(\ldots)}_{V_s}} + \overset{B}{\underbrace{\psi(\ldots) + (s-u_0(x))\psi_s(\ldots) - \dot{u}_0(x)\psi_p(\ldots)}_{V_x}}$$

L'esistenza di $V(x,s)$ è immediata se verifico che $A_x = B_s$

$$A_x = \frac{d}{dx}\left[\psi_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))\right] \qquad B_s = \psi_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

Se $u_0(x)$ risolve (E), allora $A_x = B_s$ e V esiste.

— o — o —

CONDIZIONE SUFFICIENTE DI WEIERSTRASS

Ricordo la def. di eccesso di Weierstrass

$$\boxed{E(x,s,p,q) = \psi(x,s,q) - \psi(x,s,p) - (q-p)\,\psi_p(x,s,p)}$$

(W) Una funzione $u_0(x)$ verifica (W) se

$$E(x, u_0(x), \dot{u}_0(x), q) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b],\ \forall q \in \mathbb{R}$$

(W^+) $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che

$$E(x,s,p,q) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b],\ \forall q \in \mathbb{R},\ \forall s \in [u_0(x)-\varepsilon, u_0(x)+\varepsilon]$$
$$\forall p \in [\dot{u}_0(x)-\varepsilon, \dot{u}_0(x)+\varepsilon]$$

COND. NEC. $u_0(x)$ e (SLM) $\Longrightarrow$ (W)

COND. SUFF. $(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Longrightarrow (SLM)$

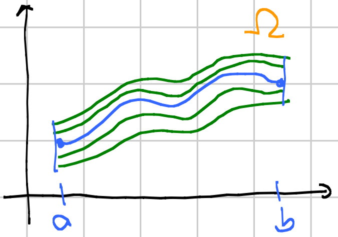
Road map della dim ① $(E) + (L^+) + (J^+) \Longrightarrow (F)$
② $(F) + (W^+) \Longrightarrow (SLM)$

↑
IMBEDDING THEOREM

(F) sta per FIELD

(F) Si dice che $u_0(x)$ verifica (F) se $u_0(x)$ si può immergere in una famiglia di soluzioni di E

Detto meglio, esiste una funzione



$u : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad u(\varepsilon, x)$

abbastanza regolare (C^2 basta)

tale che

- $u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in [a,b]$
- per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ la funzione $x \to u(\varepsilon,x)$ risolve (E)
- per ogni $x \in [a,b]$ la funzione $\varepsilon \to u(\varepsilon,x)$ è strett. cresc.

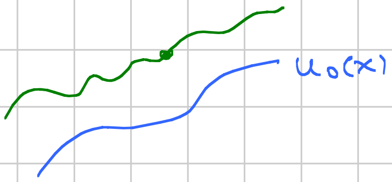
Notazione Indichiamo con Ω l'immagine di u, cioè la zona di piano ricoperta dalla famiglia

Per ogni $(x,s) \in \Omega$ esiste un'unica soluzione di Eulero nella nostra famiglia che passa per (x,s). Si pone

$$p(x,s) = u_x(\varepsilon,x) \qquad s = u(\varepsilon,x)$$

↑ è la derivata della funzione che passa per (x,s)

In particolare $\boxed{u_x(\varepsilon,x) = p(x, u(\varepsilon,x))}$



Da qui ricavo

$$u_{xx}(\varepsilon,x) = p_x\,(x, u(\varepsilon,x)) + p_s\,(x, u(\varepsilon,x)) \cdot \underbrace{u_x\,(\varepsilon,x)}_{p(x,s)}$$

quindi

$$\boxed{u_{xx} = p_x + p p_s}$$

Back to analisi 2 $\quad y' = f(t,y) \rightsquigarrow y'' = f_t(t,y) + f_y f$

$\rightsquigarrow y'' = f_t + f_y f$

Quella sopra è la stessa.

Cosa diventa l'equazione di Eulero usando la $p(x,s)$

$$\frac{d}{dx}\psi_p(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) = \psi_s(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x))$$

$$\psi_{px}(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) + \psi_{ps}(\dots)u_x(\varepsilon,x) + \psi_{pp}(\dots)u_{xx} = \psi_s(\dots)$$

$$\psi_{px}(x,s,p(x,s)) + \psi_{ps}(\ )\,p(x,s) + \psi_{pp}(\dots)(p_x + p p_s) = \psi_s(\dots)$$

— o — o —

Fatto generale Se vale (F), allora

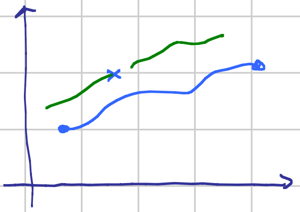
$$F(u) - F(u_0) = \int_a^b E(x, u(x), p(x,u(x)), \dot{u}(x))\,dx$$

Se è vero il fatto generale e vale (W^+), allora $F(u) - F(u_0) \geq 0$ per ogni u che sta nella zona in cui $E \geq 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Voglio calibrare usando l'eccesso, cioè spero che

$$\psi(x,s,p) \geq \hat{\psi}(x,s,p) = \psi(x,s,p(x,s)) + (p - p(x,s))\,\psi_p(x,s,p(x,s))$$

Spero che $\hat{\psi}$ sia del tipo $V_x + p\,V_s$



$$\hat{\psi}(x,s,p) = p\,\overbrace{\psi_p(x,s,p(x,s))}^{A} +$$
$$+ \underbrace{\psi(x,s,p(x,s)) - p(x,s)\,\psi_p(x,s,p(x,s))}_{B}$$

Mi serve $A_x = B_s$, cioè

$$\psi_{px}(x,s,p(x,s)) + \psi_{pp}(\dots)p_x(x,s) = \psi_s(\dots) + \cancel{\psi_p p_s} - \cancel{p_s \psi_p} - p\,\psi_{ps} - p\,\psi_{pp}\,p_s$$
$$\psi_{px}(\dots) + \psi_{ps}\,p + \psi_{pp}(p_x + p p_s) = \psi_s(\dots)$$

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 31

Titolo nota 18/11/2015

Condizioni suff. per (SLM)

Metodo di calibrazione   Cond. suff. affinché $u_0(x)$ sia minimo è che possa trovare

$$\hat{\psi}(x,s,p) = \underset{\overset{\shortparallel}{V_x}}{A(x,s)} + p\,\underset{\overset{\shortparallel}{V_s}}{B(x,s)}$$

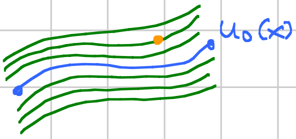
tali che

(i) $A_s(x,s) = B_x(x,s)$

(ii) $\psi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) = \hat{\psi}(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) \quad \forall x \in [a,b]$

(iii) $\psi(x,s,p) \geq \hat{\psi}(x,s,p) \quad \forall x \in [a,b],\ \underbrace{\forall s \in \mathbb{R}\ \forall p \in \mathbb{R}}_{\text{eventualmente con restrizioni su } s,p}$

(F) $u_0(x)$ fa parte di una famiglia di soluzioni di (E)



Fatto 1 Supponiamo che valga (F). Poniamo

$$\hat{\psi}(x,s,p) = \psi(x,s,p(x,s)) + (p-p(x,s))\,\psi_p(x,s,p(x,s))$$

$$= p\underbrace{\psi_p(x,s,p(x,s))}_{B} + \underbrace{\psi(x,s,p(x,s)) - p(..)\,\psi_p(...)}_{A}$$

Abbiamo visto che $B_x = A_s$, il che vuol dire che (i) è ok.

[$p(x,s)$ = derivata della curva che passa per (x,s)]

Fatto 2 La $\hat{\psi}$ definita sopra verifica (ii), basta sostituire $u_0(x)$ e ricordarsi che

$$p(x,u_0(x)) = \dot{u}_0(x)$$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ La condizione (iii) è equivalente a dire che

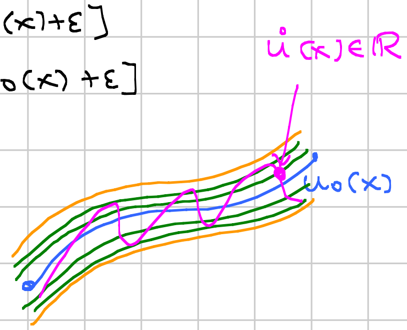
$$E(x,s,p(x,s),p) \geq 0$$

per definizione di eccesso.
Quindi se vale (W^+) vale la (iii) pur di considerare un intorno piccolo a suff. di $u_0(x)$

Nota bene: bastano (i) e (ii) per concludere che

$$F(u) - F(u_0) = \int_a^b E\big(x,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vicino}\\ \text{a } u_0(x)}}{u(x)},\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vicino a}\\ \dot{u}_0(x)}}{p(x,u(x))},\underset{\substack{\uparrow\\ \text{dove gli pare}}}{\dot{u}(x)}\big)\,dx$$

$$(W^+)\quad E(x,s,p,q) \geq 0 \quad \begin{aligned} &\forall x \in [a,b]\\ &\forall s \in [u_0(x)-\varepsilon, u_0(x)+\varepsilon]\\ &\forall p \in [\dot{u}_0(x)-\varepsilon, \dot{u}_0(x)+\varepsilon]\\ &\forall q \in \mathbb{R}\end{aligned}$$



Punto essenziale

- $u(x)$ è vicino a $u_0(x)$ per definizione
- $p(x,u(x))$ è vicino a $p(x,u_0(x))$ volendo per continuità di $p(x,s)$. Occhio $p(x,s)$ non ha nulla a che fare con $\dot{u}(x)$

— o — o —

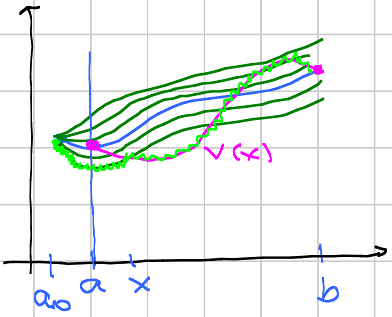
Fatto 1 + Fatto 2 $\Rightarrow$ $F(u) - F(u_0) = \int_a^b E(\dots)$

Come lo abbiamo fatto è l'approccio $\boxed{\text{ALLA HILBERT}}$

In alternativa si può dimostrare $\boxed{\text{ALLA WEIERSTRASS}}$

— o — o —

Caso semplificato: tutte le soluzioni della famiglia (F)
passano per uno stesso p.to (a_0, A_0)
con $a_0 < A$



Fissato $x \in [a,b]$ considero la curva

$v(t)$ per $t \geq x$
famiglia per $t \in [a_0, x)$
$\uparrow u(\varepsilon,t) = u(\varepsilon(x),t)$

Pongo

$$f(x) := \int_{a_0}^{x} \psi(t, u(\varepsilon(x),t), u_t(\varepsilon(x),t)) \boxed{dx}$$

dt, of course
(corretto dopo video)

$$+ \int_{x}^{b} \psi(t, v(t), \dot{v}(t))\, dt$$

Calcolo

$$f(b) = \int_{a_0}^{b} \psi(t, u_0(t), \dot{u}_0(t))\, dt$$

$$f(a) = \int_{a_0}^{a} \psi(t, u_0(t), \dot{u}_0(t))dt + \int_{a}^{b} \psi(t, v(t), \dot{v}(t))\, dt$$

quindi

$$f(a) - f(b) = F(v) - F(u_0)$$

Se fosse ≥ 0 ... ☺

Spero che $f(x)$ sia decrescente. Ora con tanta pazienza

$$f'(x) = -E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x))$$

Calcolo qualche pezzo

$-\psi(x,s,q)$

La derivata del 2° integrale è $-\psi(x, v(x), \dot{v}(x))$

La derivata del 1° integrale ha vari pezzi

$$\psi(x, u(\varepsilon(x),x), u_t(\varepsilon(x),x)) = \psi(x, v(x), p(x, v(x)))$$

Il termine difficile è

$$\int_{a_0}^{x} \frac{d}{dx}\, \psi(t, u(\varepsilon(x),t), u_t(\varepsilon(x),t))\, dt$$

↖ dopo video

$$= \int_{a_0}^{x} \Big[\underbrace{\psi_s(\dots)\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),t)\, \varepsilon_x(x)}_{\text{ok}} + \underbrace{\psi_p(\dots)\, u_{\varepsilon t}(\varepsilon(x),t)\, \varepsilon_x(x)}_{\text{integro per parti}}\Big]\, dt$$

↑ dopo video

Il termine integrale se ne va per Eulero. Resta il termine di bordo

$$\Big[\psi_p(t, u(\varepsilon(x),t), u_t(\varepsilon(x),t))\, \varepsilon_x(x)\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),t)\Big]_{t=a_0}^{t=x}$$

Quando metto $t=a_0$ se ne va il termine con u_ε.
Quando metto $t=x$ mi ritrovo

$$\psi_p(x, v(x), p(x, v(x)))\ \boxed{\varepsilon_x(x)\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),x)}$$

Ora ricordo che $u(\varepsilon(x),x) = v(x)$ quindi derivando

$$u_\varepsilon(\varepsilon(x),x)\, \varepsilon_x(x) + u_t(\varepsilon(x),x) = \dot v(x)$$

coincidono: aggiunto dopo video

quindi $u_\varepsilon(\varepsilon(x),x)\, \varepsilon_x(x) = \dot v(x) - p(x, \overset{v(x)}{\overset{\shortparallel}{u(x)}})$

quindi abbiamo ricostruito l'eccesso.

—o —o —

$$(F) \Rightarrow \quad F(u) - F(u_0) = \int \text{Eccesso}$$

↑ ci si arriva o calibrando o alla Weierstrass.

Resta da fare $(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F)$

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 32

Titolo nota 18/11/2015

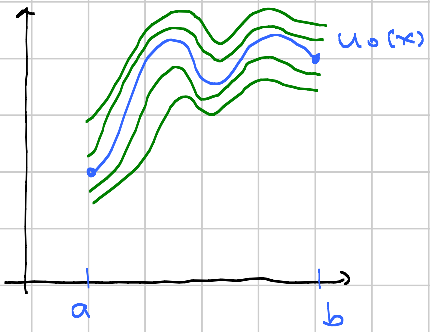
$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F)$

$(L^+) + (J^+) \Rightarrow (J^{++}) \Rightarrow$ esiste una soluzione di Jacobi $w(x)$
tale $w(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

$$\left[C(x)\mathring{w} + B(x)\, w \right]' = B(x)\,\mathring{w} + A(x)\, w$$

dove

$$A(x) := \psi_{ss}\left(x, u_0(x), \mathring{u}_0(x)\right)$$
$$B(x) := \psi_{sp} \quad (\ldots)$$
$$C(x) := \psi_{pp} \quad (\ldots)$$



Definisco $u(\varepsilon, x)$ come la soluzione di (E) con dati iniziali

$$u(\varepsilon, a) = u_0(a) + \varepsilon\, w(a)$$
$$\mathring{u}(\varepsilon, a) = \mathring{u}_0(a) + \varepsilon\, \mathring{w}(a)$$

Per $\varepsilon = 0$ ritrovo $u(0,x) = u_0(x)$, per ε vicini troverò sol. vicine (per dipendenza continua).

Per avere (F) mi serve solo che $u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$
$\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

Affinché $u_\varepsilon(\varepsilon, x)$ esista serve dipendenza C^1 dai dati iniziali.

Pur di prendere ε_0 piccolo basta sapere che

$$u_\varepsilon(0,x) \geq c_0 > 0 \quad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

Sorpresona: $u_\varepsilon(0,x) = w(x)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (Quasi) Scrivo Eulero $[\psi_p(x,u,\mathring{u})]' = \psi_s(x,u,\mathring{u})$

$$[\psi_p(x,u(\varepsilon,x),\mathring{u}(\varepsilon,x))]' = \psi_s(x,u(\varepsilon,x),\mathring{u}(\varepsilon,x))$$
$$[\psi_p(x,u(0,x),\mathring{u}(0,x))]' = \psi_s(x,u(0,x),\mathring{u}(0,x))$$

$$[\psi_p(x,u(\varepsilon,x),\mathring{u}(\varepsilon,x)) - \psi_p(x,u(0,x),\mathring{u}(0,x))]' = \psi_s - \psi_s$$

La differenza la tratto con Lagrange

$$[\psi_{ps}(\ldots)[u(\varepsilon,x)-u(0,\varepsilon)] + \psi_{pp}(\ldots)[\mathring{u}(\varepsilon,x)-\mathring{u}(0,x)]]' =$$

$$\psi_{ss}(\ldots)\,[u(\varepsilon,x)-u(0,\underset{\overset{\uparrow}{x}}{\varepsilon})] + \psi_{sp}(\ldots)\,[\mathring{u}_{\cancel{\varepsilon}}(\varepsilon,x)-\mathring{u}(0,x)]$$

dopo video

Divido per ε e chiamo $w_\varepsilon(x) = \dfrac{u(\varepsilon,x)-u(0,x)}{\varepsilon}$

$$[\underset{\substack{\downarrow \\ \psi_{ps}(x,u_0(x),\mathring{u}_0(x)) \\ \shortparallel \\ B(x)}}{\psi_{ps}(\ldots)}\, w_\varepsilon(x) + \underbrace{\psi_{pp}(\ldots)}_{\substack{\downarrow \\ C(x)}}\, \mathring{w}_\varepsilon(x)]' = \underbrace{\psi_{ss}(\ldots)}_{\substack{\downarrow \\ A(x)}}\, w_\varepsilon + \underbrace{\psi_{sp}(\ldots)}_{\substack{\downarrow \\ B(x)}}\, \mathring{w}_\varepsilon$$

Quindi $w_\varepsilon(x)$ risolve un'eq. diff. lineare i cui coeff. tendono ai coeff. dell'eq. di Jacobi, quindi $w_\varepsilon(x) \to w(x)$ per $\varepsilon \to 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Stessa cosa in versione analisi 2}}$ $\begin{array}{l} \mathring{y}_\varepsilon = f(t,y_\varepsilon) \\ y_\varepsilon(0) = \varepsilon \end{array}$

Calcolare la derivata della soluzione rispetto ad ε.
Indicando con $u(\varepsilon,x)$ la soluzione, voglio calcolare

$$u_\varepsilon(0,x)$$

Idea: considerare il rapporto incrementale

$$w(\varepsilon,x) = \frac{u(\varepsilon,x) - u(0,x)}{\varepsilon}$$

Cosa risolve $w(\varepsilon,x)$? Calcolo la derivata

$$\dot{w}(\varepsilon,x) = \frac{\dot{u}(\varepsilon,x) - \dot{u}(0,x)}{\varepsilon} = \frac{f(x,u(\varepsilon,x)) - f(x,u(0,x))}{\varepsilon}$$

$$= \underset{\substack{\| \\ f_u(x,\,\xi_x)}}{f_u(\dots)} \, \frac{u(\varepsilon,x) - u(0,x)}{\varepsilon}$$

$$= f_u(\dots)\, w(\varepsilon,x)$$

Quindi $w(\varepsilon,x)$ risolve

$$\dot{w}(\varepsilon,x) = C(\varepsilon,x)\, w(\varepsilon,x)$$

Quando $\varepsilon \to 0$ si ha $C(\varepsilon,x) \longrightarrow f_u(x,u(0,x))$ e quindi $w(\varepsilon,x)$ tende alla soluzione di

$$\dot{w} = f_u(x,u(0,x))\, w \qquad \text{e} \quad w \text{ è la } u_\varepsilon(0,x)$$

— o — o —

$\boxed{\text{Oss.}}$ Supponiamo che $\psi(x,s,p)$ sia convessa in p, anzi con $\psi_{pp}(x,s,p) > 0$ sempre.

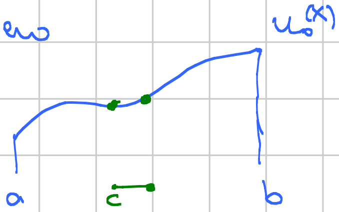
Allora ogni soluzione di Eulero è un $\overset{\text{(SLM)}}{\overset{\uparrow}{\text{minimo}}}$ se ristretta ad un intervallo abbastanza piccolo.

Detto meglio: per ogni $c \in [a,b]$, esiste $d \in [a,b]$ t.c.

$$\int_c^d \psi(x,u(x),\dot{u}(x))\,dx \geq \int_c^d \psi(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))\,dx$$

↑sol. di Eulero

per ogni u t.c. $u(c) = u_0(c)$
$u(d) = u_0(d)$



[Dim]: (E) + (L^+) + (W^+) sono gratis.
Resta da verificare (J^+) e basta scegliere d vicino a c per averla gratis.

— o — o —

RIASSUNTONE

$$\begin{tikzcd}
 & (E)+(L^+)+(J^+)+(W^+) \arrow[d, Rightarrow] & (E)+(L^+)+(J^+) \arrow[d, Rightarrow] & \\
(GM) \arrow[r, Rightarrow] & (SLM) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (WLM) \arrow[r, Rightarrow] & (DLM) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & (W) & & \begin{array}{c} (L) \text{ e} \\ (L^+) \Rightarrow (J) \\ \text{e } (E) \end{array}
\end{tikzcd}$$

Condizioni intermedie

$$(L^+) + (J^+) \Rightarrow (J^{++}) \Rightarrow (Z) \leftarrow \text{Riccati}$$

$$(E) + (J^+) + (L^+) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} (F)$$

embedding theorem

— o — o —

Esempio 1

$$\int_0^\ell [\dot{u}^2 - \sin(u^2)]\,dx \qquad u(0) = u(\ell) = 0$$

Per ogni $\ell > 0$ esiste il minimo (metodo diretto)

Domanda: quando il minimo è $u_0(x) \equiv 0$?

- Per $\ell > \pi$ non è nemmeno (DLM) perché manca (J).
  Infatti $\psi(x,s,p) = p^2 - \sin(s^2)$
  $C(x) = \psi_{pp} = 2 > 0$ sempre
  $B(x) = \psi_{sp} \equiv 0$
  $A(x) = \psi_{ss}(x,0,0) = -2$
  La Jacobi è $\ddot{u} = -u$, quindi la sol. è $\sin x$
  che si annulla nuovamente in π
- Per $\ell \leq \pi$ è minimo assoluto perché

$$F(u) \geq \underbrace{\int_0^\ell (\dot{u}^2 - u^2)\,dx}$$

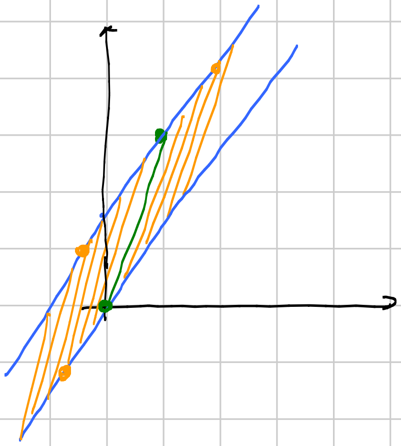
Funzionale quadratico che verifica (L^+) e (J^+), almeno per $\ell < \pi$.

— o — o —

Oss. $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2\,dx \qquad u(0) = 0 \qquad u(1) = 3$

$p^2 \geq 6p - 9 \qquad V(x,s) = 6s - 9x$

Considero le linee di livello $6s - 9x = \lambda \qquad s = \frac{3}{2}x + \frac{\lambda}{6}$



Posso concludere che $u_0(x) \equiv 3x$ minimizza tra tutte le u che hanno estremi sulle 2 rette.

In questo modo riesco a risolvere problemi ad estremi variabili

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 33

Titolo nota 19/11/2015

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Analisi 2 : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

funzione ⤳ min $\qquad$ vincolo

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ è p.to di minimo locale vincolato $\iff \exists\, r > 0$ t.c.

$$F(x_0) \leq F(x) \qquad \forall x \in B_r(x_0) \text{ t.c. } G(x) = 0$$

Teo. molt. Lagrange Se x_0 è p.to di min. loc. vincolato e F e G sono di classe C^1, allora vale almeno una delle seguenti due alternative

(i) $\nabla G(x_0) = 0$

(ii) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

è come dire che x_0 è p.to stazionario di $F(x) - \lambda G(x)$

Strategie dimostrative:

(1) problemi penalizzati alla De Giorgi

(2) usare teo. funzioni implicite per parametrizzare il vincolo

(3) usare il teo. funzioni implicite solo in $\mathbb{R}^2$ $\Big]$ simili

(4) usare teorema di invertibilità locale in $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Dim (3)}}$ Supponiamo di non essere nel caso (i), quindi $\nabla G(x_0) \neq 0$

Wlog supponiamo

$$\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$$

Considero $\quad f_k(t,s) = F(x_0 + t e_k + s e_n) \qquad k = 1, \dots, n-1$

$\qquad\qquad\quad g_k(t,s) = G(x_0 + t e_k + s e_n) \qquad k = 1, \dots, n-1$

dove $e_1, \dots, e_n$ sono i vettori della base canonica

Allora $g(0,0) = G(x_0) = 0$

$g_s(0,0) = \frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$

Per teorema del Dini 2-dim esiste $s:(-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ t.c. $s(0)=0$

$$g(t,s(t))=0 \qquad \text{per ogni } t \in (-\delta,\delta)$$

Questo ci dice che $x_0 + te_k + s(t)e_n \in$ vincolo per ogni $t \in (-\delta,\delta)$, quindi

$$f(t,s(t)) \geq f(0,0) \qquad \forall t \in (-\delta,\delta)$$

quindi

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} f(t,s(t))\Big|_{t=0} = 0 \\ \shortparallel \\ \frac{\partial F}{\partial x_k}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x_m}(0,0)\, s'(0) = 0\end{gathered}$$

Dal teorema del Dini otteniamo $s'(0) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial t}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial s}(0,0)} = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0)}$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0) = \boxed{\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0)}} \frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0)$$

λ che NON DIPENDE da k

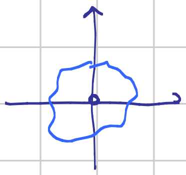
—o —o —

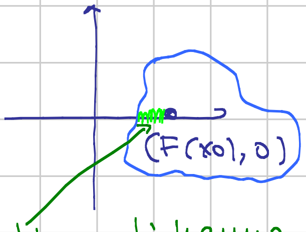
$\boxed{\text{Dim 4}}$ Considero $f_k(t,s)$ e $g_k(t,s)$ come sopra.
Considero poi

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \Phi(t,s) = (f(t,s), g(t,s))$$

$$\Phi(0,0) = (F(x_0), 0) \qquad J\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0) & \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0) & \frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Se fossero false (i) e (ii), allora $J\Phi(0,0)$ sarebbe invertibile, quindi Φ sarebbe localmente invertibile vicino a $(0,0)$, quindi $(F(x_0),0)$ sarebbe interno all'immagine





Questi punti hanno $\overset{G=0}{g=0}$, quindi provengono dal vincolo, e hanno $f \leq F(x_0)$.

— o — o —

CASO DEI FUNZIONALI

$$F(u) = \int_a^b \psi(x,u,\dot{u})\,dx \qquad\qquad G(u) = \int_a^b \gamma(x,u,\dot{u})\,dx$$

Voglio $\quad \min\{F(u) : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{reg., B.C.}}}{u \in X} \quad e \quad G(u)=0\}$

<u>Notazione</u> $\quad \delta F(u_0,v)$ = variazione prima di F in u_0 rispetto ad una direzione $v \in C_c^\infty((a,b))$

$$= \frac{d}{dt} F(u_0+tv)\Big|_{t=0}$$

<u>Teorema</u> Sotto ipotesi decenti su ψ e γ se $u_0(x)$ è p.to di min. vincolato (basta locale), allora vale almeno una di queste 2 possibilità

(i) $\delta G(u_0,v)=0$ per ogni $v \in C_c^\infty((a,b))$, cioè u_0 è p.to stazionario di $G(u)$

(ii) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u_0,v) = \lambda\,\delta G(u_0,v)$ per ogni $v \in C_c^\infty$ (cioè $u_0(x)$ risolve Eq. Eulero di $F(u)-\lambda G(u)$)

Dim Vecchia ③ parola per parola.

Supponiamo che (i) non valga. Allora

$\exists\, v \in C_c^\infty$ t.c. $\delta G(u_0, v) \neq 0$.

Per ogni altra $w \in C_c^\infty$ definisco

$$f(t,s) = F(u_0 + tw + sv), \qquad g(t,s) = G(u_0 + tw + sv)$$

Come prima $g(0,0) = 0$, $g_s(0,0) = \delta G(u_0, v) \neq 0$

Allora posso esplicitare

Aggiunto dopo video

$$g(t, s(t)) = 0 \qquad \text{con} \qquad s'(0) = \frac{-g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = \frac{-\delta G(u_0, w)}{\delta G(u_0, v)}$$

Ma allora $f(t, s(t))$ ha derivata che si annulla per $t=0$.
Facendo il conto viene

$$\boxed{\delta F(u_0, w) = \underbrace{\boxed{\frac{\delta F(u_0, v)}{\delta G(u_0, v)}}}_{\lambda} \delta G(u_0, w)}$$

Esempio 1 $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot u^2\, dx}_{F(u)} : \underbrace{\int_0^1 u^2\, dx = 8}_{G(u)},\ u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Il minimo esiste (metodo diretto) (il vincolo si mantiene passando al limite)

Sia $u_0(x)$ un p.to di minimo. Allora dico che $\delta G(u_0, v) \neq 0$ per almeno qualche v. Altrimenti sarebbe $u \equiv 0$ che non soddisfa il vincolo (scrivere Eulero).

L'unica possibilità è che sia u_0 stazionario per $\underbrace{F(u) - \lambda G(u)}_{\mathcal{L}(x,u,\dot u) = \dot u^2 - \lambda u^2}$

$$\begin{cases} \ddot u = -\lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo trovo $\lambda > 0$ e

$u(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + b \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

e trovo i 3 parametri imponendo BC e vincolo.

Esempio 2

$$\min\left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2\,dx}_{F(u)} \ : \ u(0)=0,\ u(1)=1,\ \underbrace{\int_0^1 u\,dx = 0}_{G(u)} \right\}$$

Come prima si arriva a u stazionario per $F(u) - \lambda G(u)$ e questo ha equ. di Eulero

$$2\ddot{u} = \lambda$$

Allo stesso risultato si arrivava con DBR.

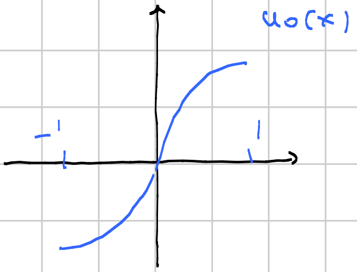
Esempio 3

$$\min\left\{ \int_{-1}^{1} \dot{u}^2\,dx \ : \ \int_{-1}^{1} u\,dx = 0,\ \int_{-1}^{1} |u|^p\,dx = 8 \right\}$$

Il minimo esiste.

Domanda: $u_0(x)$ è dispari?

Problema quasi aperto !!!!



— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 34

Titolo nota 19/11/2015

Calcolo delle variazioni per integrali multipli

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e l'incognita è $u : \Omega \to \mathbb{R}$

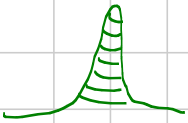
$\to \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow$ grossi GUAI

Esempio classico (integrale di Dirichlet) $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$F(u) = \int_\Omega \varphi(\nabla u) = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$$

Ora DBC = assegnare $u(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Oss. (Non dimostrata) Se assegno $u(x)$ per $x \in$ insieme finito l'inf. viene 0 sempre.



Capacità di un sottoinsieme $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è definita come l'inf. del funzionale tra tutte le u nulle al bordo e 1 su S.
Ha senso assegnare BC su insiemi di capacità $\neq 0$.

— o — o —

Calcoliamo variazione prima. Scelgo $v \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\Omega})$ e calcolo

$$F(u+tv) = \int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2 = \int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^2 dx$$

$$= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v\rangle\right) dx$$

Derivo e metto $t=0$. Ottengo

$$\boxed{\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx = 0} \qquad \forall v \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\Omega})$$

Prima forma integrale di Eulero

Ora applico Gauss-Green

$$\int_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} f \, (\vec{E}, \vec{n}) \, d\sigma - \int_\Omega < \nabla f, \vec{E} > dx$$

Scelgo $f = v$, $\vec{E} = \nabla u$

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla v > dx = - \int_\Omega v \cdot \Delta u \, dx = 0$$

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty(\mathring{\Omega})}$$

Eulero 2ª forma integrale

FLCV (funziona uguale) => $\boxed{\Delta u = 0}$

Eulero differenziale + B.C.

—o—o—

<u>Prima variante</u> Metto D.B.C. solo su 3 lati del quadrato

$\boxed{1^a \text{ fase}}$ Uso $v \in C_c^\infty$ come prima e ritrovo $\Delta u = 0$

$\boxed{2^a \text{ fase}}$ Ritorno nella 1ª forma integrale di Eulero e integro per parti. Arrivo

$$0 = \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > dx = \underbrace{- \int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx}_{\overset{\|}{0}} \pm \underbrace{\int_{\partial\Omega} v < \nabla u, \vec{n} > d\sigma}$$

per 1ª fase

nullo per DBC su 3 lati (v si deve annullare sui 3 lati)

Sul restante lato v è praticamente arbitraria, quindi

$< \nabla u, \vec{n} > = 0$ sul lato libero (FLCV sul lato)

$$\overset{\|}{\frac{\partial u}{\partial n}}$$ = derivata direzionale in direzione ⊥ al bordo.

Alla fine dovrei risolvere
$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u = \text{data} \quad \text{su tre lati di } \partial\Omega$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{N.B.C. su un pezzo}}}{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0 \quad \text{sul restante lato}$$

—o —o —

Esempio 1 $\int_\Omega (|\nabla u|^2 - 7u)\, dx = F(u)$ $\qquad \Omega = [0,\pi]\times[0,\pi]$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1(\Omega) \text{ e } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

Eulero diventa
$$\begin{cases} \Delta u = 7 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Si può risolvere usando serie di Fourier sul quadrato

$$u_{n,m}(x,y) = \sin(nx)\sin(my)$$

base Hilbertiana (va rinormalizzata) di $H^1(\Omega)$

$$\Delta u_{n,m} = -(n^2+m^2)\, u_{n,m}$$

Unicità e fatto che sia minimo discendono dalla convessità del funzionale, esatt. come in una variabile.

—o —o —

Eq. di Eulero più in generale

$$F(u) = \int_\Omega \varphi(x, u, \nabla u)\, dx \qquad \varphi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Se facciamo il solito conto

$$\delta F(u,v) = \int_\Omega \varphi_s(x,u,\nabla u)v + \langle \nabla_p \varphi(x,u,\nabla u), \nabla v \rangle\, dx$$

1a forma integrale di Eulero

Integrando per parti (Gauss-Green) ottengo

$$\int_\Omega \left[\psi_s(x,u,\nabla u) - \operatorname{div} \nabla_p \psi(x,u,\nabla u)\right] v = 0$$

da cui la forma diff. di Eulero

$$\boxed{\operatorname{div}\left[\nabla_p \psi(x,u,\nabla u)\right] = \psi_s(x,u,\nabla u)}$$

Un' eventuale condizione di Neumann diventa

$$\boxed{\langle \nabla_p \psi(x,u,\nabla u), \vec{n} \rangle = 0} \qquad \text{su } \partial\Omega$$

Esempio $\quad \Delta u = u^5 \qquad\qquad \Delta u = -u^5$

BUONA CATTIVA

Sono le equazioni di Eulero di

$$F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{1}{6}\int u^6 \qquad\qquad F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6}\int u^6$$

↓ Funzionale convesso :

→ ragionevole esistenza via metodo diretto

→ unicità praticamente gratis

↘ Manca tutto

→ convessità no

→ limitatezza delicata

→ unicità critica.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 35

Titolo nota 25/11/2015

Esempio motivazionale

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^4 + u^2)\,dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]),\ u(0) = 0,\ u(1) = 37 \}$$

Strumenti per il metodo diretto:

sapendo che $\int_0^1 \dot{u}^4 dx \le M$ deduco che u è $\frac{3}{4}$ – Hölder

$\dot{u} \in L^p \Rightarrow u \in$ Holder $\frac{1}{q}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Prendendo una succ. con $\int_0^1 \dot{u}_n^4 \le M$ posso applicare A.A.

e dedurre che, a meno di s.succ., $u_n \to u_\infty$ unif.

E la derivata? Prima soluzione: appoggiarsi su L^2.

Poichè

$$x^4 \ge x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da una limitazione su $\dot{u}_n^4$ deduciamo una limit. su $\dot{u}_n^2$ (uso che $[a,b]$ è limitato). In altre parole

$$\{\dot{u}_n\} \text{ limitata in } L^4 \Rightarrow \{\dot{u}_n\} \text{ limitata in } L^2$$

e quindi a meno di s.succ. $\dot{u}_n \longrightarrow v_\infty$ che poi è $\dot{u}_\infty$ per lo stesso motivo di sempre.

L'unica cosa usata è che $4 \ge 2$.

Domanda: è vero che $v_\infty = \dot{u}_\infty \in L^4$ e che

$$\int_0^1 \dot{u}_\infty^4 \leq \liminf \int_0^1 \dot{u}_n^4 \quad ?$$

Ritorno al passato:

$$\int_0^1 \psi(\dot{u}_n) = \int_0^1 \psi\left(\dot{u}_\infty + (\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)\right) dx$$

$$\geq \int_0^1 \psi(\dot{u}_\infty) + \underbrace{\int_0^1 \psi'(\dot{u}_\infty)(\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)\, dx}_{\substack{\downarrow\ ?\\ 0}}$$

se ψ è convessa e C^1

Se so che $\dot{u}_n - \dot{u}_\infty \longrightarrow 0$ in L^2 avrei il limite voluto se $\psi'(\dot{u}_\infty) \in L^2$.

$\boxed{\text{Parentesi}}$ Convergenza debole più in generale

$$v_n \longrightarrow v_\infty \text{ in } L^2((a,b)) \iff \int_a^b v_n \varphi \to 0 \quad \forall \varphi \in L^2((a,b))$$

$$v_n \longrightarrow v_\infty \text{ in } L^p((a,b)) \iff \int_a^b v_n \varphi \to 0 \quad \forall \varphi \in L^q((a,b))$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$v_n \longrightarrow v_\infty \text{ in } L^1((a,b)) \iff \int_a^b v_n \varphi \to 0 \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b))$$

Oss. Più p è piccolo, più è facile convergere debolmente, perché l'insieme delle funzioni test si riduce.

Quindi la convergenza debole L^1 è la più debole di tutte.

Supponiamo di sapere nell' esempio che $\dot{u}_n \to \dot{u}_\infty$ in L^4.
Questo dice che

$$\int_0^1 (\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)\varphi \to 0 \qquad \forall \varphi \in L^{\frac{4}{3}}$$

A me serviva

$$\int_0^1 (\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)\underset{\substack{\uparrow \\ \psi'(u_\infty) \\ \in L^{4/3}}}{\dot{u}_\infty^3} \to 0$$

e quindi avrei il limite che voglio.

Quindi le domande diventano: se v_n è limitata in L^4 e
$v_n \to v_\infty$ in L^2
è vero che $v_n \to v_\infty$ in L^4, e quindi anche $v_\infty \in L^4$. ?

Se la risposta è affermativa, abbiamo semicontinuità e compattezza.

Proposizione Supponiamo che v_n sia una successione di funzioni in $[a,b]$ t.c.

(i) $\{v_n\}$ è limitata in L^p per un qualche $p > 1$
(ii) $v_n \to v_\infty$ nel senso L^1, cioè il più debole di tutti
(iii) $v_\infty \in L^p$
Allora $v_n \to v_\infty$ in L^p.

Dim. Per ipotesi sappiamo che $\int_a^b (v_n - v_\infty)\varphi \to 0 \quad \forall \varphi \in L^\infty$.

Tesi: stessa cosa con $\varphi \in L^q$.

Data $\varphi \in L^q$ fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $\psi \in L^\infty$ t.c. $\|\varphi - \psi\|_q \le \varepsilon$

Ora aggiungo e tolgo

$$\int_a^b (v_n - v_\infty)\varphi = \underbrace{\int_a^b (v_n - v_\infty)\psi}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi}\\ 0}} + \int_a^b (v_n - v_\infty)(\varphi - \psi)$$

$$\left| \int_a^b (v_n - v_\infty)(\varphi - \psi) \right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hölder}}}{\leq} \|v_n - v_\infty\|_p \, \|\varphi - \psi\|_q$$

$$\leq \underbrace{\left(\|v_n\|_p + \|v_\infty\|_p\right)}_{\substack{\text{per ipotesi è}\\ \text{equilimitato}}} \cdot \varepsilon$$

Questo basta per concludere che LHS → 0, quindi ho conv. debole in L^p.

— o — o —

Quindi l'esempio motivazionale è ok se so che $\dot{u}_\infty \in L^4$.

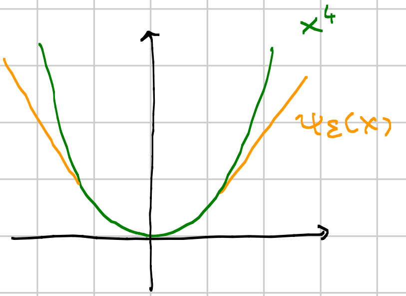
— o — o —

Tornando all'esempio: $\int_0^1 \dot{u}_n^4 \leq M$ $\quad \dot{u}_n \longrightarrow \dot{u}_\infty$ in L^2

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \dot{u}_\infty \in L^4$$

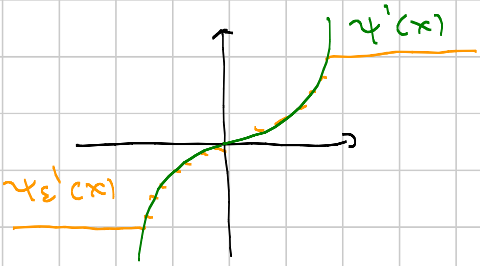
$$\int_0^1 \psi_\varepsilon(\dot{u}_n) \geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\dot{u}_\infty) + \int_0^1 \psi_\varepsilon'(\dot{u}_\infty)(\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)$$

Posso approssimare dal basso $\psi(x) = x^4$ con delle funzioni convesse con derivata limitata. Ora



$$M \geq \int_0^1 \dot{u}_n^4 \underset{\substack{\uparrow\\ \psi_\varepsilon(x) \leq x^4}}{\geq} \int_0^1 \psi_\varepsilon(\dot{u}_n)$$

$$\geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\dot{u}_\infty) + \overset{\substack{0\\ \nearrow}}{\boxed{\int_0^1 \psi_\varepsilon'(\dot{u}_\infty)(\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)}}$$



Per dire che

$$\int_0^1 \psi'_\varepsilon(\mathring{u}_\infty)(\mathring{u}_n - \mathring{u}_\infty) \to 0$$

ho usato solo che $\mathring{u}_n \longrightarrow \mathring{u}_\infty$ in L^1

Passando al limite otteniamo che

$$M \geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\mathring{u}_\infty)\, dx \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

NON SI PUÒ CONCLUDERE CON CONVERGENZA DOMINATA

MA posso concludere con Beppo - Levi.

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 36

Titolo nota 25/11/2015

Lemma (misterioso) Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Allora esiste una famiglia di funzioni $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

(i) $\psi_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon > 0$

(ii) $|\psi_\varepsilon'(x)|$ è limitata per ogni $\varepsilon > 0$ (la limit. dipende da ε)

(iii) $\psi_\varepsilon(x) \leq \psi(x)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$

(iv) $\psi_\varepsilon(x) \to \psi(x)$ per $\varepsilon \to 0^+$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Oss. La dim. è facile se $\psi \in C^1$: basta troncare la derivata tra $-\frac{1}{\varepsilon}$ e $\frac{1}{\varepsilon}$.
Altrimenti bisogna prima regolarizzare.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Sia $v_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni.
Supponiamo che

(i) esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_a^b \psi(v_n(x))\,dx \leq M$$

(ii) $v_n \longrightarrow v_\infty$ debole in L^1 (che è il più debole di tutti)

Allora

$$\int_a^b \psi(v_\infty(x))\,dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_a^b \psi(v_n(x))\,dx$$

Oss. È un teorema di semicontinuità $\boxed{\text{assumendo}}$ la compattezza

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo la ψ_ε del lemma misterioso e su quella

$$M \geq \int_a^b \psi(v_n)\,dx \geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_n)\,dx$$

$$\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) + \underbrace{\int_a^b \psi_\varepsilon'(v_\infty)(v_n - v_\infty)}_{\downarrow \atop 0}$$

da cui $\displaystyle\int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b \psi(v_n)$

Concludo con Beppo Levi. □

—o —o —

<u>Oss.</u> L'ipotesi (i) in realtà non è stata usata. Certo se il liminf è $+\infty$ la tesi è banalmente vuota.

—o —o —

<u>Teorema</u> Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\liminf_{t\to\pm\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} > 0$$

(il che è equivalente a dire che $\psi(t) \geq c_1 t^2 - c_2$ per opportune costanti positive c_1 e c_2).

Sia $v_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una succ di funzioni tale che

$$\int_a^b \psi(v_n(x))\,dx \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

per una opportuna M.

Allora a meno di sottosucc. $v_n \longrightarrow v_\infty$ in $L^2((a,b))$, cioè esiste $n_k \to +\infty$ ed esiste $v_\infty \in L^2$ t.c.

$$v_{n_k} \longrightarrow v_\infty \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Vedi inizio esempio motivazionale. □

Teorema (Vero, ma qui non dimostrabile)

$\psi(x) \geq c_1 |x|^p - c_2$ con $p > 1$ $\rightsquigarrow$ $v_n \longrightarrow v_\infty$ in $L^p((a,b))$

$\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{\psi(t)}{|t|} = +\infty$ $\rightsquigarrow$ $v_n \longrightarrow v_\infty$ in $L^1((a,b))$

Oss. (Non capibile) se $\psi(t) \geq c_1 |t| - c_2$ e basta, allora entra in gioco BV.

— o — o —

Mettendo insieme i teoremi dimostrati possiamo fare il metodo diretto per funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) + g(x,u)$$

purché ψ soddisfi le ipotesi $\psi(x) \geq c_1 x^2 - c_2$.

— o — o —

Esempio motivazionale

$$F(u) = \int_a^b [(1+u^2)\dot{u}^4 + \sin u]\, dx$$

Voglio fare il minimo con DBC.

Prendo una u_n minimizzante. Da $F(u_n) \leq M$ deduco

$$\int_a^b \dot{u}_n^4 \leq M_2$$

Da qui deduco che a meno di s.succ. $u_n \to u_\infty$ unif. (A.A.) e

$\dot{u}_n \longrightarrow \dot{u}_\infty$ in L^2 (e volendo pure in L^4)

serve prima che $\dot{u}_\infty \in L^4$

Mi servirebbe la semicontinuità

Proviamo a mano cosa succede

$$\int (1+u_n^2)\,\dot u_n^4 = \int (1+u_n^2)\left[\dot u_\infty + (\dot u_n - \dot u_\infty)\right]^4$$

$$\geq \int (1+u_n^2)\,\underset{\substack{\uparrow \\ \psi(\dot u_\infty)}}{\dot u_\infty^4} + 4\int (1+u_n^2)\,\underset{\substack{\uparrow \\ \dot\psi(\dot u_\infty)}}{\dot u_\infty^3}\,(\dot u_n - \dot u_\infty)$$

Mi servirebbe

$$\int (1+u_n^2)\,\dot u_\infty^3\,(\dot u_n - \dot u_\infty) \longrightarrow 0$$

$$\int (1+u_n^2)\,\dot u_\infty^4 \longrightarrow \int (1+u_\infty^2)\,\dot u_\infty^4$$

La 2ª è come dire che

$$\int \dot u_\infty^4\,\underbrace{(u_n^2 - u_\infty^2)}_{\substack{\text{questo è } \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande} \\ \text{per convergenza uniforme}}} \longrightarrow 0$$

Il 1º sarebbe facile se avessi $\int \underbrace{(1+u_\infty^2)\,\dot u_\infty^3}_{\in L^{4/3}}\,\underbrace{(\dot u_n - \dot u_\infty)}_{\to 0 \text{ in } L^4} \to 0$

Non resta che aggiungere e togliere ed il resto tende a 0 per convergenza uniforme

$$\int \underbrace{(u_n^2 - u_\infty^2)}_{\leq \varepsilon}\,\dot u_\infty^3\,(\dot u_n - \dot u_\infty)$$

$$\left|\int (\ )\,\dot u_\infty^3\,(\dot u_n - \dot u_\infty)\right| \leq \varepsilon \int \underbrace{|\dot u_\infty|^3}_{\in L^{4/3}} \cdot \underbrace{|\dot u_n - \dot u_\infty|}_{L^4}$$

$$\leq \varepsilon \|\dot u_\infty^3\|_{4/3}\left(\|\dot u_n\|_4 + \|\dot u_\infty\|_4\right)$$

Teoremone generale (Si dimostra bene nei casi particolari)

$$F(u,v) = \int_a^b \psi(x, u, v)\, dx \qquad \psi(x,s,p)$$

Ipotesi: → continuità in tutte le variabili
→ convessità in p per ogni (x,s) fissi

Se $u_n \to u_\infty$ unif. e $v_n \longrightarrow v_\infty$ debole L^1, allora c'è sci, cioè

$$\liminf_{n \to +\infty} F(u_n, v_n) \geq F(u_\infty, v_\infty)$$

Esercizio: provare a fare la dimostrazione.
Se ψ è C^1 nell'ultima variabile con derivata limitata sarebbe fatta!

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 37

Titolo nota 27/11/2015

RILASSAMENTO DI FUNZIONALI INTEGRALI

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u})\,dx$$

Possiamo pensare $F(u)$ definito per $u \in C^1([a,b])$.
Vogliamo estenderlo per rilassamento ad un ambiente più grande tipo H^1, C^0, L^2, L^1, ...

Parole d'ordine: → convessità
→ crescita.

Ipotesi di crescita $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} \quad \boxed{\psi(p) \geq ap^2 - b} \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Basta in realtà meno, cioè crescita superlineare

$$\liminf_{p \to \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} > 0$$

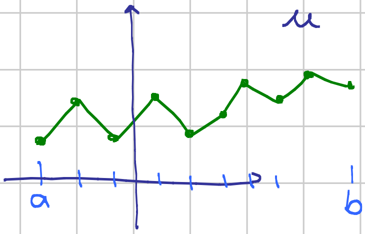
Caso facile Se ψ è pure convessa, allora l'estensione per rilassamento ad $L^2((a,b))$ sarebbe

$$\overline{F}(u) = \int_a^b \psi(\underset{\uparrow \text{derivata debole}}{\dot{u}})\,dx \qquad \text{(che può valere } +\infty)$$

Dim. Il funzionale al RHS è sci per i teoremi di semicontinuità.
Tutto sta a trovare la recovery, cioè per ogni u per cui il RHS è reale, trovare $\underset{\uparrow C^1}{u_n} \to \underset{\uparrow L^2}{u}$ tale che $F(u_n) \to \overline{F}(u)$

Si lavora in due tappe

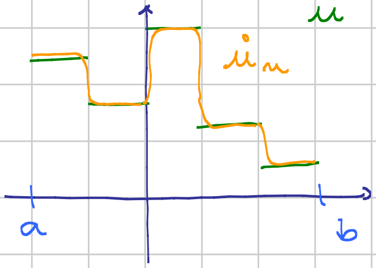
1ª tappa Per ogni u affine a tratti esiste la u_n (numero finito di tratti).
La derivata $\dot{u}$ è costante a tratti.
Approssimo $\dot{u}$ con funzioni $\dot{u}_n$ suff. regolari e pago pochissimo



2ª tappa Dalla 1ª tappa sappiamo che

$$\overline{F}(u) \le \int_a^b \psi(\dot{u})\, dx$$

per ogni u affine a tratti.
Ci basta dimostrare che le affini a tratti sono un denso in energia, wrt L^2



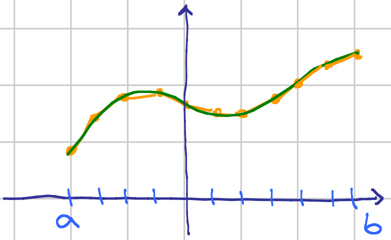
Lemma Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa con l'ipotesi di crescita almeno quadratica.
Sia $u \in H^1((a,b))$ tale che

$$\int_a^b \psi(\dot{u})\, dx < +\infty$$

Allora esiste $u_n \to u$ in L^2 con le u_n affini a tratti tale che

$$\int_a^b \psi(\dot{u}_n) \longrightarrow \int_a^b \psi(\dot{u})$$

Dim. Dalle Hp. da crescita deduco che $\int_a^b \dot{u}^2 < +\infty$, quindi u è continua, anzi $\frac{1}{2}$-Hölder.
Divido $[a,b]$ in n parti uguali e collego i p.ti sul grafico.
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$



In ogni tratto vale

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(\dot{u}_m)\,dx \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(\dot{u})\,dx$$

$$\|$$

$$(x_k - x_{k-1})\,\psi\left(\frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{\frac{b-a}{m}}\right)$$

per almeno 2 motivi

→ in ogni tratto se minimizzo $\int_{\text{tratto}} \psi(\dot{v})$ tra tutte le v che coincidono con u al bordo del tratto, il minimo è proprio la retta

→ disuguaglianza di Jensen, la cui dimostrazione è la stessa dell' ottimalità della retta congiungente.

Sommando sui vai tratti

$$\int_a^b \psi(\dot{u}_m)\,dx \le \int_a^b \psi(\dot{u})\,dx,$$

da cui

$$\limsup_{m\to+\infty} \int_a^b \psi(\dot{u}_m)\,dx \le \int_a^b \psi(\dot{u})\,dx$$

che è la disug. difficile (che implica il limite).
È poi immediato che

$$u_m(x) \to u(x) \qquad \text{unif. in } [a,b].$$

Questo segue dall' uniforme continuità di u.

—o—o—

Oss. Che cosa abbiamo ottenuto / usato
→ ottenuto densità in energia in L^2 e C^0
→ usato solo la continuità di u.

—o—o—

Cosa succede senza ipotesi di crescita

Esempio 1 $F(u) = \int_a^b \sin(\dot{u})\, dx$

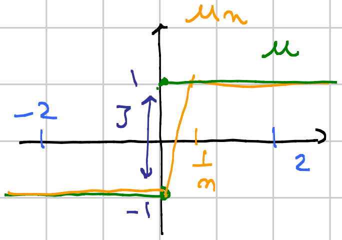
Il rilassato in L^2 o in C^0 è il funzionale banale

$$\overline{F}(u) = -(b-a) \quad \text{(come se integrassi } -1\text{)}$$

Il liminf è ovvio, il limsup va conquistato (vediamo dopo)

Esempio 2 $F(u) = \int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx$

Problema: crescita 1.
In questo caso esistono funzioni discontinue su cui il rilassato è FINITO.
$[a,b] = [-2,2]$

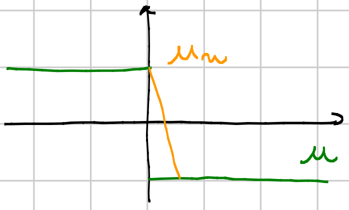


Facile: il rilassato ha la stessa forma per le u affini a tratti

A questo p.to approssimo u in modo ovvio

$$F(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+(2n)^2}\, dx = \frac{1}{n}\sqrt{1+4n^2} \longrightarrow 2 = J$$

Esempio 3 $F(u) = \int_a^b e^{\dot{u}}\, dx$



Problema: ψ cresce solo da una parte

$\exists\, u_n \to u$ t.c. $F(u_n) \to b-a$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} {}'' \; e^{-2n} = \frac{1}{n} e^{-2n}$$

Tutte le u decrescenti (anche discontinue) pagano "nulla".

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 38

Titolo nota 27/11/2015

Convessificata (o inviluppo convesso) di una funzione

Def. Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque.
Si dice convessificata di ψ la funzione $\psi^{**} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\boxed{\psi^{**}(x) := \sup\{\varphi(x) : \varphi \text{ è convessa e } \varphi(y) \le \psi(y) \ \forall y \in \mathbb{R}\}}$$

Oss. La definizione ha senso se esiste almeno una $\varphi \le \psi$ con φ convessa. In caso contrario si può porre $\psi^{**} \equiv -\infty$.

Proposizione Date ψ e ψ^{**} come sopra, si ha

(i) ψ^{**} è convessa (fatto generale: il sup di convesse è convesso ad esempio via epigrafici)

(ii) $\psi^{**}(x) \le \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

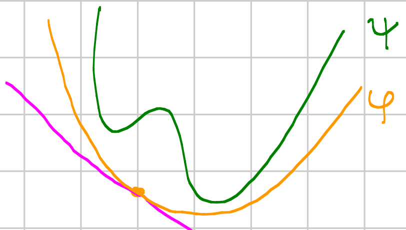
(iii) $\psi^{**}(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \psi$ è convessa

(iv) ψ^{**} è continua (le convesse in $\mathbb{R}$ lo sono)

(v) basta fare il sup sulle rette

$$\psi^{**}(x) = \sup\{ax+b : ay+b \le \psi(y) \ \forall y \in \mathbb{R}\}$$

(ogni valore $\varphi(x)$ di una φ convessa $\le \psi$ è anche valore $r(x)$ di una retta $r(x) \le \psi$ ovunque)



esiste anche se φ non è C^1

(vi) $\psi^{**}(x)$ è l'inf di tutti i segmenti che congiungono due p.ti del grafico $(x_1, \psi(x_1))$, $(x_2, \psi(x_2))$ con $x_1 < x < x_2$
[Esercizio]

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua (ma basta meno) con ipotesi di crescita almeno quadratica (basta superlineare)

Allora il rilassato di

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u})\,dx \qquad \text{pensato in } C^1 \text{ o } C^\infty$$

a L^2 o C^0 è

$$\overline{F}(u) = \int_a^b \psi^{**}(\dot{u})\,dx.$$

(se $\dot{u} \in L^2$ esiste e l'integrale è finito, $+\infty$ altrimenti)

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Chiamo $G(u)$ il RHS. È facile che $\overline{F}(u) \geq G(u)$.
Il motivo è che

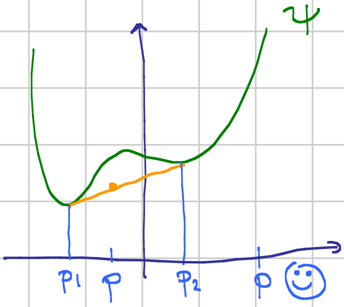
$$F(u) \geq G(u) \quad \text{in } C^1 \text{ o } C^\infty$$

e inoltre $G(u)$ è sci in L^2 o in C^0.
Qui ho già usato la crescita

Devo fare il limsup, cioè per ogni $u \in L^2$ con $G(u) < +\infty$ devo esibire

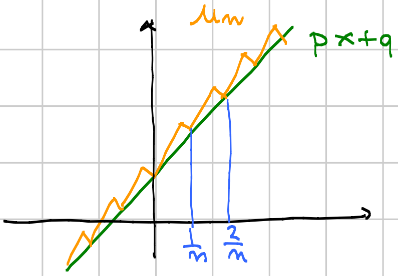
$$C^1 \ni u_n \longrightarrow u \quad \text{con} \quad \limsup F(u_n) \leq G(u)$$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Farlo nel caso in cui u è una retta.
Prendo una retta $u(x) = px + q$.
Se $\psi^{**}(p) = \psi(p)$ non c'è nulla da fare, cioè uso $u_n \equiv u$.
Altrimenti esistono p_1 e p_2 e $\lambda \in [0,1]$ t.c.

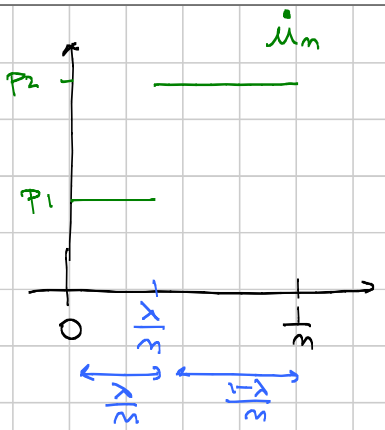


$$p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$$
$$\psi^{**}(p) = \lambda\,\psi(p_1) + (1-\lambda)\,\psi(p_2)$$

Costruisco u_n in modo che in ogni tratto di ampiezza $\frac{1}{n}$ abbia derivata un po' p_1 e un po' p_2 in rapporto λ, $(1-\lambda)$



In questo modo $u_n(x)$ coincide con u agli estremi di ogni intervallino.
Se chiamo x_k gli estremi



$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(\dot u_m(x))\,dx =$$

$$\frac{\lambda}{m}\psi(p_1) + \frac{1-\lambda}{m}\psi(p_2)$$

$$= \frac{1}{m}\psi^{**}(p) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi^{**}(\dot u(x))\,dx$$

Sommando su tutti i tratti abbiamo ottenuto che

$$\int_a^b \psi(\dot u_m(x))\,dx = \int_a^b \psi^{**}(\dot u(x))\,dx$$

$\boxed{\text{Step 0}}$ $F(u) \le \int \psi(u)$ per ogni u affine a tratti

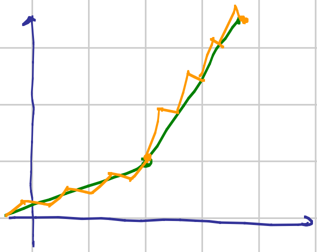
Tornando allo step 1, è facile che $u_m(x) \to u(x)$ unif. in $[a,b]$, perché le oscillazioni sono proporzionali a $\frac{1}{m}$ in ogni tratto.

Alla fine dello step 1 sappiamo che

$$F(u) \le G(u) \quad \forall\, u \text{ retta.}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Sia ora u affine a tratti. Basta ripetere la procedura in ogni tratto, quindi

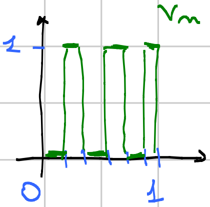
$$F(u) \le G(u) \quad \forall u \text{ affine a tratti}$$



$\boxed{\text{Step 3}}$ Le affini a tratti sono dense in energia per il lemma della lez. precedente.

— o — o —

Esempio



$$v_n \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\int v_n \varphi \to \int \tfrac{1}{2} \varphi \qquad \forall \varphi \in \ldots$$

Basta dimostrarlo per φ = indicatrice di un intervallo ☺

Oss. Quando p non sta esattamente su un segmento che congiunge 2 p.ti del grafico uso la (vi) della proposizione per ottenere

$$F(u) \leq G(u) + \varepsilon \qquad \rightsquigarrow \text{corretto dopo video}$$

$$G(u) \leq F(u) + \varepsilon \qquad \forall u \text{ retta}$$

e quindi posso passare $\varepsilon \to 0^+$ e ritornare a

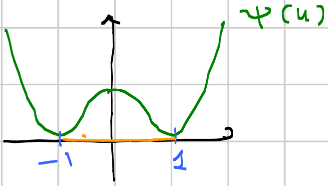
$$F(u) \leq G(u) + \varepsilon \qquad \rightsquigarrow \text{corretta dopo video}$$

$$G(u) \leq F(u) \qquad \forall u \text{ retta.}$$

Esempio

$$\int_0^3 \left[\underbrace{(\dot{u}^2 - 1)^2}_{\psi} + (u - \sin x)^2 \right] dx = F(u)$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,3]) \}$$



Dico che min N.E. e inf = 0

$$\inf F(u) = \inf \overline{F}(u) = \int_0^3 \psi^{**}(\dot{u}) + (u - \sin x)^2$$

e ogni succ. minimizzante tende a $\sin x$

— o — o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 39

Titolo nota 02/12/2015

$\boxed{\text{GEODETICHE}}$ Trovare la curva più corta tra due punti dati

$\boxed{\text{Caso piano}}$ $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ $\gamma(a) = A \in \mathbb{R}^2$

$\gamma(b) = B \in \mathbb{R}^2$

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}\, dt}_{F(u,v)} : (u(a), v(a)) = A,\ (u(b), v(b)) = B \right\}$$

Problema grosso: l'integranda ha crescita lineare in $\dot{u}$ e $\dot{v}$

$$\psi(t, s_1, s_2, p_1, p_2) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Da subito c'è NON unicità: qualunque param. del segmento AB risolve il problema

Eq. Eulero $(\psi_{p_1})' = \psi_{s_1}$ $\left(\dfrac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}}\right)' = 0$ $\left(\dfrac{\dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}}\right)' = 0$

$(\psi_{p_2})' = \psi_{s_2}$

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}} = c_1 \qquad \frac{\dot{v}}{\sqrt{\cdots}} = c_2$$

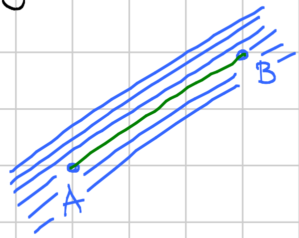
Dopo un minimo di discussione si può dividere ed ottenere

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \text{costante} \rightsquigarrow \dot{u} = c\,\dot{v} \rightsquigarrow \text{segmento.}$$

Calibriamo: voglio trovare $\hat{\psi}(\dots)$ tale che

$\psi \geq \hat{\psi}$ sempre

$\psi = \hat{\psi}$ sulle curve della famiglia (cioè tutte le rette)



Sia (α, β) il versore nella direzione di AB, cioè $\dfrac{B-A}{\|B-A\|}$

$$\underset{\overset{\uparrow}{\text{C.S.}}}{\sqrt{\dot u^2+\dot v^2} \geq} \alpha \dot u + \beta \dot v$$

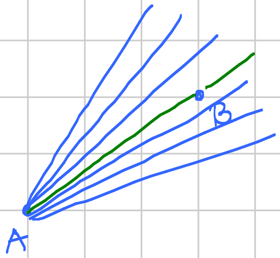
(vale = $\iff$ $(\dot u, \dot v)$ è multiplo di (α, β))

Per ogni curva che unisce A e B $\qquad A = (A_1, A_2) \quad B = (B_1, B_2)$

$$\int_a^b \sqrt{\dot u^2+\dot v^2}\, dt \geq \alpha \int_a^b \dot u \, dt + \beta \int_a^b \dot v \, dt$$

$$= \alpha (B_1 - A_1) + \beta (B_2 - A_2) \qquad \alpha = \dots \quad \beta = \dots$$

$$= \|B - A\| = \text{lungh. segmento}$$

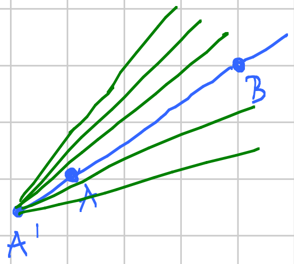


Altra calibrazione wlog A = origine

Uso come campo le soluzioni per A.

$$\sqrt{\dot u^2+\dot v^2} \underset{\overset{\uparrow}{\text{C.S.}}}{\geq} \frac{\dot u u}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\dot v v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

C.S. con uguaglianza $\iff$ $(\dot u, \dot v)$ è parallelo di u, v



Faccio il conto e vedo che

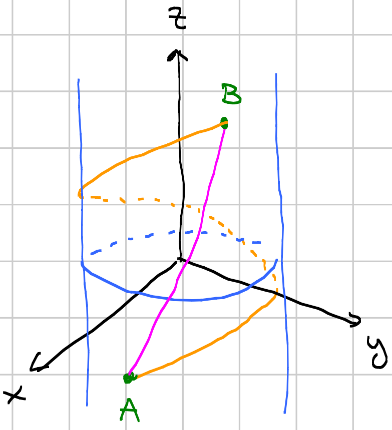
$$\int_a^b \sqrt{\dot u^2+\dot v^2}\, dt = \int_a^b \text{RHS} = \int_a^b \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)' dt = \left[\sqrt{u^2+v^2}\right]_a^b = \|B\|$$

Oss. Ognuna di queste calibrazioni mostra la minimalità (GM) di tutte le rette della famiglia.

—o—o—

CASO DEL CILINDRO $x^2+y^2=1$

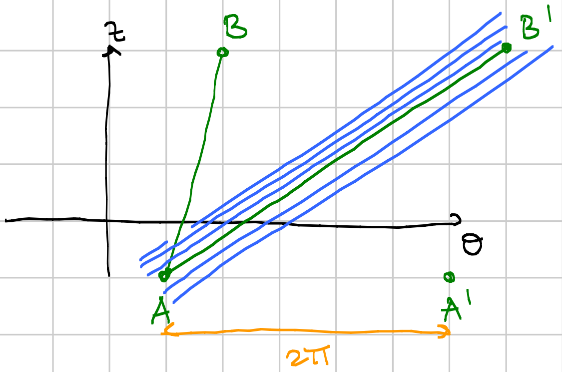
Una curva nel cilindro la scrivo come



$$(\cos\theta(t), \sin\theta(t), z(t))$$

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}\,dt$$

Dati due p.ti sul cilindro, nello sviluppo diventano tanti punti a distanza 2π



Anche AB' risolve Eulero ma non è (GM)

Posso calibrare AB' usando le rette // ad AB' nello sviluppo, che diventano eliche parallele. Questo mostra che AB' è (SLM).

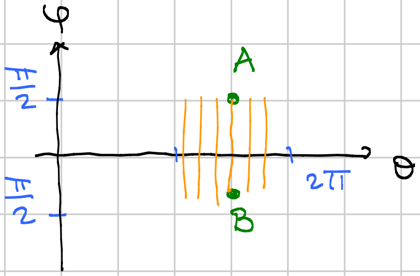
CASO DELLA SFERA Uso coord. sferiche (quelle dei geografi: $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Una curva $(\theta(t), \varphi(t))$ ha lunghezza

$$\text{lungh} = \int_a^b \sqrt{\dot\varphi^2 + \cos^2\varphi\,\dot\theta^2}\,dt$$ (controllare)

Wlog assumiamo che A sia il polo NORD. Vorrei che la geodetica avesse θ = costante, cioè $\dot\theta = 0$

Calibro:



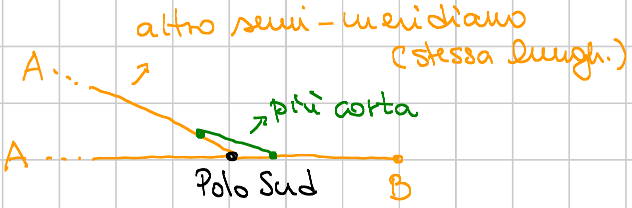
$$\sqrt{\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\cdot\dot\theta^2} \geq |\dot\varphi|$$

$$\int_a^b \sqrt{\dot\varphi^2+\cos^2\varphi\cdot\dot\theta^2}\,dt \geq \int_a^b |\dot\varphi|\,dt$$

$$\geq \left|\int_a^b \dot\varphi(t)\,dt\right| \text{``}=\text{''} |\varphi_B-\varphi_A|$$

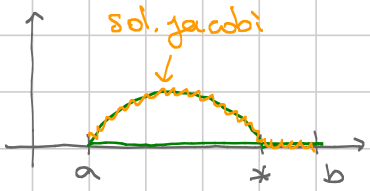
Geometricamente sto calibrando con i meridiani.

L'altro pezzo di meridiano (A → polo Sud → B) cos'è?
Risolve Eulero (basta verificare).
Non è nemmeno (WLM)



Sorpresona: il polo sud è il p.to coniugato del Polo Nord, quindi le sol. di Eulero e passano per il polo Sud NON possono essere (WLM).

Ritorno al passato: se c'è un p.to coniugato tra a e b le sol. di Eulero non possono essere WLM



— o — o —

Vorrei ma non posso : $\boxed{\text{MIRACOLO DELLE GEODETICHE}}$

La curva a valori in una qualunque superficie che minimizza

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

è una geodetica, cioè minimizza anche

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Inoltre il minimo di sopra è l' unica geodetica percorsa a velocità costante.

Si tratta di vedere che le sol. di Eulero della prima lo sono anche della seconda.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 40

Titolo nota 02/12/2015

OBSTACLE PROBLEMS

POINT-TO-CURVE PROBLEMS

TRANSVERSALITY

$$\min\left\{ \int_0^1 \dot{u}^2+70u\,dx \ : \ u\in C^1,\ u(0)=u(1)=1,\ \boxed{u(x)\geq 0 \ \forall x\in[0,1]} \right\}$$

Ostacolo sulla funzione

In generale posso pensare ostacoli del tipo

$$\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

$$\min\left\{ \int_0^1 \dot{u}^2+70u\,dx \ : \ u\in C^1,\ u(0)=u(1)=1,\ \boxed{u'(x)\geq -1 \ \forall x\in[0,1]} \right\}$$

ostacolo sulla derivata

Ostacolo sulla funzione

→ il metodo diretto si applica alla grande. Tutto funziona come sempre e il vincolo passa al limite, anche se ci fossero φ_1 e φ_2 perché è stabile per conv. unif.

⇒ esiste sol. debole.

Ostacolo sulla derivata

→ metodo diretto ok fino a $u_n \to u_\infty$ unif

$\dot{u}_n \to \dot{u}_\infty$ deb. L^2

Domanda: $\dot{u}_\infty$ rispetta il vincolo $\dot{u}_\infty(x) \geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

SI! Trucco dell'integrale.

Prendo ψ convessa, regolare quanto voglio e nulla $\psi(x)=0 \iff x\geq -1$.

Ora $\int_0^1 \psi(\dot u_n(x))\,dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Inoltre essendo ψ convessa avremo

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \psi \geq 0 \\ \text{sempre}}}{\leq} \int_0^1 \psi(\dot u_\infty)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sci}}}{\leq} \liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 \psi(\dot u_n) = 0$$

Questo mostra che $\dot u_\infty(x)$ è < -1 solo in un insieme di misura nulla.

Alternativa Scontrare con $\dot u_n$ l'indicatrice dell'insieme dove $\dot u_\infty(x) < -1$.

— o — o —

Approssimazione dell'ostacolo per Gamma-convergenza

$$F_n(u) = \int_0^1 \Big(\dot u^2 + 70u + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{penalizza essere} \\ \text{negativi}}}{e^{-nu}}\Big)\,dx$$

Si verifica facilmente che $F_n(u) \xrightarrow{\Gamma} F(u)$ (con $+\infty$ se $u(x) < 0$ da qualche parte) e che gli $F_n(u)$ sono equicoercivi

Per l'ostacolo sulla derivata

$$F_n(u) = \int_0^1 \left(\dot u^2 + e^{-n(\dot u+1)} + 70u\right)dx$$

anche in questo caso si ha Gamma-convergenza

— o — o —

Come sono fatti i minimi?

Ostacolo sulla funzione

$$\int_0^1 \dot u^2 + 70u \, dx \qquad u \geq 0 \qquad u(0) = u(1) = 1$$

Con ragionamenti elementari si vede che non può staccarsi in mezzo.
Come trovo x_0?

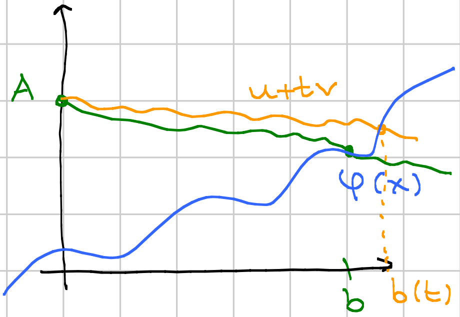
* * *

POINT-TO-CURVE PROBLEMS

$$F(u,b) = \int_0^b \psi(x,u,\dot u)\, dx$$

Voglio fare

$$\min \{ F(u,b) : u(0) = A, \ u(b) = \varphi(b) \}$$



Anche b è incognito.

Facile: u deve risolvere Eulero in $[0,b]$: $(\psi_p)' = \psi_s$

Voglio trovare la BC in b. Sia u una sol. di Eulero, definita anche dopo b. Prendo una $v \in C^\infty$ nulla in a, ma non nec. in b, e considero $u+tv$.
Domanda: $u+tv$ incontra φ? Dove?

Considero

$$\Phi(x,t) = u(x) + t v(x) - \varphi(x)$$
$$\Phi(b,0) = 0$$
$$\Phi_x(x,t) = \dot u(x) + t\dot v(x) - \dot\varphi(x)$$
$$\Phi_x(b,0) = \dot u(b) - \dot\varphi(b)$$

Quindi, se $\Phi_x(b,0) = \dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b) \neq 0$ posso esplicitare e trovare $b(t)$ t.c.

$$\Phi(b(t),t) = 0$$

Inoltre

$$\dot{b}(0) = -\frac{\Phi_t(b,0)}{\Phi_x(b,0)} = -\frac{v(b)}{\dot{u}(b)-\dot{\varphi}(b)}$$

Ora pongo

$$\varphi(t) = \int_0^{b(t)} \psi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\,dx$$

e impongo $\varphi'(0)=0$. Ora

$$\varphi'(t) = \int_0^{b(t)} \psi_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\, v + \psi_p(\dots)\,\dot{v}$$

$$+ \psi(b(t),\dots)\,\dot{b}(t)$$

Mettendo $t=0$:

$$0 = \varphi'(0) = \int_0^b (\psi_s v + \psi_p \dot{v})\,dx + \psi(b, u(b), \dot{u}(b))\,\dot{b}(0)$$

$$= [\psi_p v]_0^b - \psi(b, u(b), \dot{u}(b))\,\frac{v(b)}{\dot{u}(b)-\dot{\varphi}(b)}$$

$$= \left[\psi_p(b, u(b), \dot{u}(b)) - \frac{\psi(\dots)}{\dot{u}(b)-\dot{\varphi}(b)}\right] v(b)$$

Moltiplicando ottengo

$$\boxed{\psi_p(b, u(b), \dot{u}(b))\,(\dot{u}(b)-\dot{\varphi}(b)) = \psi(b, u(b), \dot{u}(b))}$$

Oss. La formula vale anche se $\dot{u}(b) = \dot{\varphi}(b)$. In quel caso basta considerare la curva che fa $u(x)$ e dopo b prosegue lungo $\varphi(x)$.

Oss. Portato tutto al LHS ricorda l'eccesso di Weierstrass.

— o — o —

Tornando al pbm. con ostacolo sulla funzione, in x_0 si dovrà avere

$$\psi_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\,(\dot{u}(x_0) - 0) = \psi(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

che in questo caso ci dice che $\dot{u}(x_0) = 0$, quindi si attacca C^1.

Caso più generale di ostacolo $u(x) \geq \varphi(x)$

Allo stesso modo trovo la condizione

$$\boxed{\psi_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\,(\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)) = \psi(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - \psi(x_0, u(x_0), \dot{\varphi}(x_0))}$$

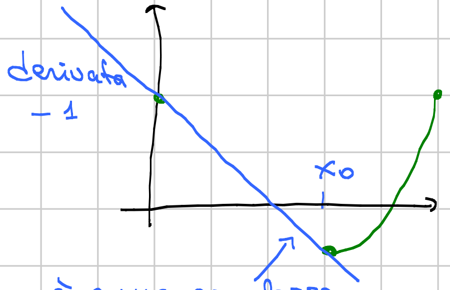
ora è l'eccesso!

Oss. Se ψ è strettamente convessa, l'unico modo di avere uguaglianza è attaccarsi C^1 cioè con $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.

— o — o —

E con l'ostacolo sulla derivata?

Se sapessi che la u minimizzante è convessa, la derivata -1 è all'inizio.



è come se fosse un ostacolo sulla funzione

Sui problemi approx la sol. è convessa (scrivo Eulero e osservo che $\ddot{u} \geq 0$).

Le soluz. dei pbm. approx convergono unif. e il limite uniforme di convesse è convessa.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 41

Titolo nota 04/12/2015

FENOMENI DI LINEARIZZAZIONE

Esempio 1 $\quad F_\varepsilon(u) = \int_0^\ell [\sin^2(\dot{u}^2) + \varepsilon \sin u]\, dx \qquad \varepsilon > 0$

$$\min\{F_\varepsilon(u) : u \in C^1([0,\ell]),\ u(0) = u(\ell) = 0\}$$

→ Facile: ad $\varepsilon > 0$ fisso esiste il minimo ed è < 0
(metodo diretto classico + regolarità via bootstrap)

→ Cosa succede quando $\varepsilon \to 0$?

Idea: pongo $u(x) = \varepsilon v(x)$ e scrivo tutto in termini di $v(x)$

$$\int_0^\ell [\sin^2(\varepsilon^2 \dot{v}^2) + \varepsilon \sin(\varepsilon v)]\, dx$$

$$= \varepsilon^2 \underbrace{\boxed{\int_0^\ell \frac{\sin^2(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin(\varepsilon v)}{\varepsilon}\, dx}}_{G_\varepsilon(v)}$$

Ragionevolmente $\quad G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} G_0(v) = \int_0^\ell (\dot{v}^2 + v)\, dx$

Se questo fosse vero, e in aggiunta ci fosse equi-coercività, avremmo che

$$\min\{F_\varepsilon(u) : \dots\} \sim \varepsilon^2 \min\{G_0(v) : v(0) = v(\ell) = 0\}$$

e se $u_\varepsilon \in \operatorname{argmin}\{F_\varepsilon(u) : u \dots\}$, allora

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon v_0(x), \quad \text{dove} \quad v_0 \in \operatorname{argmin}\{G_0(v) : \dots\}$$

Perché $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} G_0(v)$? (In C^0, L^2 o L^1)

$\boxed{\text{LIMINF}}$ Data $v_\varepsilon \longrightarrow v$, devo mostrare che

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G_0(v)$$

Se il liminf è $+\infty$, allora è gratis. Altrimenti a meno di s.succ. suppongo $G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq M_1$.
Da questo ottengo

$$\|\dot{v}_\varepsilon\|_{L^2} \leq M_2 \qquad \int_0^\ell \dot{v}_\varepsilon^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \sinh x \geq x \text{ per } x \geq 0}}{\leq} \int_0^\ell \frac{\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\,dx$$

A meno di s. succ. ancora ottengo che

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\longrightarrow v && \text{unif} \quad (\text{A.A.}) \\ \dot{v}_\varepsilon &\longrightarrow \dot{v} && \text{debole } L^2 \end{aligned}$$

A quel punto passo al limite nei 2 termini

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\ell \frac{\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. sopra}}}{\geq} \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\ell \dot{v}_\varepsilon^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{NORMA SCI}}}{\geq} \int_0^\ell \dot{v}^2$$

Per l'altro termine basta osservare che

$$\frac{\sin(\varepsilon v_\varepsilon(x))}{\varepsilon} \longrightarrow v(x) \quad \text{uniformemente}$$

se $v_\varepsilon(x) \to v(x)$ unif.

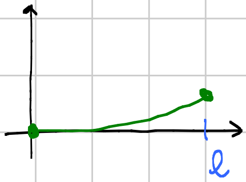
$\boxed{\text{LIMSUP}}$ Per ogni $v \in L^2, C^0, L^1$ devo trovare $v_\varepsilon \to v$ t.c.

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq G_0(v)$$

Basta in realtà farlo quando $G_0(v) < +\infty$, cioè $v \in H^1$.
Ancora meglio, basta farlo per $v \in C^1$ (denso in energia)
Se v e $\dot{v}$ sono continue, posso usare la recovery costante $v_\varepsilon \equiv v$.

Esempio 2

$$F(u) = \int_0^{\ell} [\sinh(\dot{u}^2) + \sin^2(u)]\, dx$$



$$\min \{ F(u) : u(0) = 0,\ u(\ell) = \varepsilon \}$$

Come prima $u = \varepsilon v \rightsquigarrow \underbrace{v(0) = 0, \quad v(\ell) = 1}$ Nuove BC

$$F(u) = \int_0^{\ell} [\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}^2) + \sin^2(\varepsilon v)]\, dx$$

$$= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^{\ell} \left[\frac{\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin^2(\varepsilon v)}{\varepsilon^2} \right] dx}_{G_\varepsilon(v)}$$

Ora $G_\varepsilon(v) \longrightarrow G_0(v) = \int_0^{\ell} [\dot{v}^2 + v^2]\, dx$ con BC $v(0)=0$
$v(\ell)=1$

e quindi

$$\min\{ F(u) : u(0) = 0, u(\ell) = \varepsilon \} \sim \varepsilon^2 \min\{ G_0(v) : \dots \}$$

e se $u_\varepsilon(x)$ è p.to di min. del pbm. iniziale, allora

$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon v_0(x)$, dove $v_0(x)$ è il p.to di minimo di $G_0(v)$.

La Gamma-convergenza si dimostra come prima

—o—o—

Esempio 3

$$F(u) = \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \dot{u}^4} + \varepsilon \cos(u) \qquad u(0) = 0$$
$$u(\ell) = 0$$

Esistenza ad ε fisso banale dal metodo diretto.

La sol. non è quella nulla perché $\sqrt{1+\dot{u}^4} \sim 1 + \frac{1}{2}\dot{u}^4$

$\cos u = 1 - \frac{1}{2}u^2$

quindi per confronto di ordini di infinitesimo ...

Pongo $u(x) = \varepsilon^\alpha v(x)$ e cerco α in modo da avere compensazione

$$F(u) = \int_0^\ell \sqrt{1+\varepsilon^{4\alpha}\dot{v}^4} + \varepsilon\cos(\varepsilon^\alpha v)$$

$$= \int_0^\ell \underbrace{\sqrt{1+\varepsilon^{4\alpha}\dot{v}^4}-1}_{\sim\,\varepsilon^{4\alpha}} + \underbrace{\varepsilon(\cos(\varepsilon^\alpha v)-1)}_{\varepsilon^{1+2\alpha}} \boxed{+\varepsilon+1}$$

non incide su chi è il minimo

quindi $4\alpha = 1+2\alpha$, cioè $\alpha = \frac{1}{2}$

Ora pongo

$$G_\varepsilon(v) = \int_0^\ell \left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\dot{v}^4}-1}{\varepsilon^2}\right) + \left(\frac{\cos(\sqrt{\varepsilon}v)-1}{\varepsilon}\right)dx$$

Dico che

$$G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{2}\int_0^\ell (\dot{v}^4 - v^2) \quad \text{.....}$$

Nella dimostrazione l'unico problema è sulla parte di derivata. Bisogna congelare il coefficiente.

Dico che

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2x^4}-1}{\varepsilon^2} \geq \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2x^4}-1}{\varepsilon_0^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon<\varepsilon_0$$

$$\frac{\cancel{\varepsilon^2}x^4}{\cancel{\varepsilon^2}(\sqrt{1+\varepsilon^2x^4}+1)} \overset{?}{\geq} \frac{\cancel{\varepsilon_0^2}x^4}{\cancel{\varepsilon_0^2}(\sqrt{1+\varepsilon_0^2x^4}+1)}$$

Quando $\dot{v}_\varepsilon \longrightarrow \dot{v}$ (siamo nella parte LIMINF della Gamma-convergenza)

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^\ell \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\dot v_\varepsilon^4}-1}{\varepsilon^2} \geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^\ell \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2\dot v_\varepsilon^4}-1}{\varepsilon_0^2}\,dx$$

$$\underset{\uparrow}{\geq} \int_0^\ell \frac{\sqrt{1+\varepsilon_0^2\dot v^4}-1}{\varepsilon_0^2}\,dx$$

convessità integranda

Ora il sup wrt ε_0 del RHS è proprio $\int_0^\ell \frac{1}{2}\dot v^4\,dx$ (Beppo Levi)

— o — o —

Posso controllare $\int v^2$ conoscendo $\int \dot v^4$ e BC ?

$$|v(x)-v(0)| \leq \int_0^x \underset{L^4}{|\dot v(s)|}\cdot \underset{L^{4/3}}{1}\,ds \leq \|\dot v\|_{L^4}\cdot\|1\|_{L^{4/3}}$$

$$\leq \left[\int \dot v^4\right]^{1/4}\cdot |x|^{3/4}$$

$$\leq \ell^{3/4}\left[\int \dot v^4\right]^{1/4}$$

Quindi $\int |v|^2 \leq \text{cost}\cdot\left(\|\dot v\|_{L^4}\right)^{1/2}$

Quindi $G_0(v)$ ammette minimo.

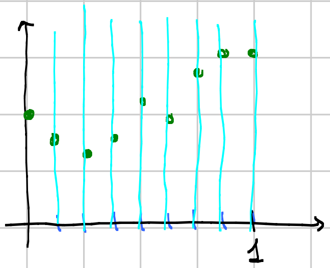
Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 42

Titolo nota 04/12/2015

PASSAGGI DISCRETO → CONTINUO

Esempio Approssimare la derivata con il rapporto incrementale.

Suddivido l'intervallo [0,1] in n parti uguali.
Definisco u solo nei p.ti della suddivisione.



$u_0, u_1, \dots, u_n$ valori negli estremi $(n+1)$ numeri

Se questi valori sono pensati come campionamenti (SAMPLE) di una funzione u, allora

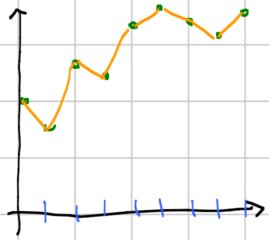
$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}}$$ approssima la derivata

$$\underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2(x)\,dx}_{\text{continuo}} \sim \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{lungh. degli}\\ \text{intervallini}}}{\frac{1}{n}} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

Idea: c'è Γ-convergenza, ma in che senso visto che LHS e RHS sono definiti su insiemi diversi.

Dico che una successione di funzioni "discrete" (cioè definite solo in una suddivisione) converge ad una funzione continua in un senso opportuno se le estese affini o costanti a tratti convergono.

Formalmente



$$F(u) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{u}^2 dx & \text{se} \quad u \in H^1((0,1)) \\ +\infty & \text{se} \quad u \in L^2 \setminus H^1 \end{cases}$$

$$F_n(u) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{u}^2 dx & \text{se} \quad u \text{ è affine su tratti lunghi } \frac{1}{n} \\ +\infty & \text{se} \quad u \in L^2 \setminus \text{quelle affini come sopra} \end{cases}$$

Allora $\underbrace{F_n(u)}_{\text{coincide con la sommatoria della pagina precedente}} \xrightarrow{\Gamma} F(u)$ in L^2 (in C^0 sarebbe uguale)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{LIMINF}}$ Data $u_n \to u_\infty$ in L^2 devo verificare che

$$\liminf F_n(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Se $\liminf = +\infty$, c'è poco da fare. Altrimenti, a meno di s.succ., posso suppore $F_n(u_n) \leq M$, cioè $\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M$.
La convergenza in L^2 aggiunge un controllo su u_n.
Al solito modo

$$u_n(x) \longrightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif.}$$
$$\dot{u}_n(x) \longrightarrow \dot{u}_\infty(x) \quad \text{debole } L^2$$

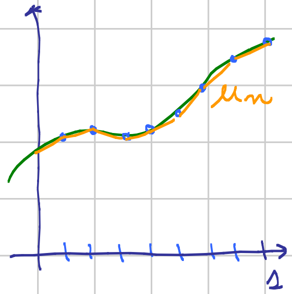
Si chiude come sempre (la norma è SCI)

$\boxed{\text{LIMSUP}}$ Data u qualunque, trovare $u_n \to u$ in L^2 t.c.

$$\limsup F_n(u_n) \leq F(u)$$

Basta farlo quando $F(u) < +\infty$. Basta farlo in un denso in energia per F, ad esempio in C^1. Ora per le $u \in C^1$ basta "unire i tratti", cioè approx in maniera ovvia

$$\int_0^1 \dot{u}_n^2 \longrightarrow \int_0^1 \dot{u}^2$$



Questo è l' uniforme continuità di $\dot{u}^2$.

* * *

Oss. Dopo aver dimostrato questo, abbiamo che H^1 si caratterizza come l' insieme delle funzioni su cui il T-limite delle $F_n(u)$ è finito.

Allo stesso modo si può definire $W^{1,p}$.

* * *

Equazione di Eulero nel discreto $\qquad$ u vettore $(n+1)$-dim.

$$F_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}} \right)^2 + 7 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} u_k$$

$$\int_0^1 \dot{u}^2 + 7u$$

Supponiamo che un certo vettore / funzione minimizzi $F_n(u)$

Che cosa risolve u?

Notazione: $D^\varepsilon u = \dfrac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$ $\qquad$ È una "derivata"

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + 7u$$

Penso u costante a tratti

$$F_\varepsilon(u+tv) = \int_0^1 |D^\varepsilon(u+tv)|^2 + 7(u+tv)$$

$$= \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + 2t D^\varepsilon v \cdot D^\varepsilon u + t^2 (D^\varepsilon v)^2 + 7u + 7tv$$

Derivo rispetto a t e metto $f=0$. Ottengo

$$\int_0^1 2D^{\varepsilon}u\cdot D^{\varepsilon}v+7v \quad =0 \qquad \text{1ª forma di Eulero}$$

Con i rapporti incrementali vale la formula di integrazione per parti:

$$\boxed{\int f\,D^{\varepsilon}g} = \frac{1}{\varepsilon}\int f(x)\left[g(x+\varepsilon)-g(x)\right]dx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int f(x)\,g(x+\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\int f(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int f(x-\varepsilon)\,g(x)-\frac{1}{\varepsilon}\int f(x)g(x)\,dx$$

$$=-\int g(x)\,\frac{f(x-\varepsilon)-f(x)}{-\varepsilon}$$

$$=\boxed{-\int g(x)\,D^{-\varepsilon}f(x)}$$

Tornando alla 1ª forma di Eulero

$$\int 2D^{\varepsilon}u\,D^{\varepsilon}v+7v = \int\left(-2D^{-\varepsilon}D^{\varepsilon}u+7\right)v\,dx$$

quindi essendo v arbitrario $\quad +2D^{-\varepsilon}D^{\varepsilon}u = 7$

$$\shortparallel$$

$$\frac{u(x+\varepsilon)+u(x-\varepsilon)-2u(x)}{\varepsilon^2}$$

—o—o—

Cosa succede in generale per il Gamma-limite di

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\,\psi\left(\frac{u_k-u_{k-1}}{\frac{1}{n}}\right) = F_n(u)$$

→ Se φ è convessa e ha la crescita giusta, il Gamma-limite è

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\dot{u})\,dx$$

→ Se φ ha solo la crescita, ma non la convessità, allora

$$F(u) = \int_0^1 \varphi^{**}(\dot{u})\,dx$$

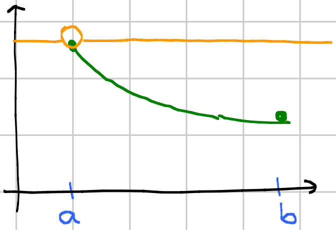
— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 43

Titolo nota 09/12/2015

PROBLEMA CLASSICO: LA BRACHISTOCRONA

Problema: dati due punti in un piano verticale (a, A), (b, B) con $a < b$, $A > B$ determinare il profilo di una "guida" in maniera tale che una pallina ci metta il minor tempo possibile per andare da (a, A) a (b, B) sotto l'effetto della gravità e partendo da ferma.



1 **MODELLO** $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $u(a) = A$, $u(b) = B$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\quad t \in [0, T]$ $\quad y(t) = u(x(t))$

Dalla meccanica: energia cinetica + potenziale = costante

$$\frac{1}{2}\left[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right] + g\, y(t) = g A$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 2g\,(A - y(t))$$

D'altra parte $\dot{y}(t) = \dot{u}(x(t))\, \dot{x}(t)$, quindi

$$\dot{x}^2(t)\left[1 + \dot{u}^2(x(t))\right] = 2g\,(A - u(x(t))) \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

da cui

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2g\,(A - u(x(t))}{1 + \dot{u}^2(x(t))}}$$

il segno + è ragionevole perché la pallina va verso dx

Porto tutto a sx

$$\sqrt{\frac{1+\dot{u}^2(x(t))}{A-u(x(t))}}\;\dot{x}(t) = \sqrt{2g} \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Integro a dx e sx tra 0 e T

$$\sqrt{2g}\;T = \int_0^T \sqrt{\frac{1+\dot{u}^2(x(t))}{A-u(x(t))}}\;\dot{x}(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{1+\dot{u}^2(s)}{A-u(s)}}\;ds$$

Pongo $s = x(t)$

$ds = \dot{x}(t)\,dt$

Quando $t=0 \rightsquigarrow s=a$

$t=T \rightsquigarrow s=b$

Minimizzare T equivale a minimizzare

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}\,dx$$

tra tutte le $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $u(a) = A$, $u(b) = B$.

Seccature:

① $\sqrt{1+p^2}$ è convessa MA a crescita lineare $\rightsquigarrow$ addio metodo diretto.

② L'integrale è improprio, quindi per cominciare ci restringiamo alle

$$u \in C^1(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{qui non}\\ \text{chiedo nulla}}}{(}a,b]) \qquad u(x) < A \qquad \forall\, x \in (a,b]$$

<u>Oss / esercizio</u> Si può dimostrare che la soluzione (posto che esista) sta sotto la retta congiungente

posso sostituire con la retta in questo tratto e miglioro solo

$\boxed{2}$ EQUAZIONE DI EULERO

$$\psi(x,s,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{A-s}}$$

In forma Erdmann è $\dot{u}\,\psi_p(u,\dot{u}) = c + \psi(u,\dot{u})$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1+\dot{u}^2}}\,\frac{1}{\sqrt{A-u}} = c + \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}$$

$$\cancel{\dot{u}^2} = c\sqrt{1+\dot{u}^2}\,\sqrt{A-u} + 1 + \cancel{\dot{u}^2} \rightsquigarrow \sqrt{1+\dot{u}^2}\,\sqrt{A-u} = c$$

In brutal mode ricavo $\dot{u}$:

$$1+\dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} \rightsquigarrow \dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} - 1 \rightsquigarrow \dot{u} = \pm\sqrt{\frac{c^2-(A-u)}{A-u}}$$

Questa si può risolvere

$$\int \frac{\sqrt{A-u}}{\sqrt{c^2-(A-u)}}\,du = \int \pm\, dx = \pm x + k$$

devo fare l'integrale al LHS

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{Cambi di variabile}}$

$$A-u = c^2 y \qquad -du = c^2 dy$$

$$\int \frac{\sqrt{A-u}}{\sqrt{c^2-(A-u)}}\,du = \int \frac{\cancel{c}\sqrt{y}}{\cancel{c}\sqrt{1-y}}\,(-c^2 dy) = \pm x + k$$

$$\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}\,dy = \pm\frac{1}{c^2}x + k$$

Pongo $y = \sin^2 z$

$$\int \frac{\sin z}{\cancel{\cos z}}\, 2\sin z\, \cancel{\cos z}\, dz = \pm\frac{1}{c^2}x + k$$

$$= \int 2\sin^2 z\, dz = \int [1-\cos(2z)]\,dz = z - \frac{1}{2}\sin(2z) = \frac{2z - \sin(2z)}{2}$$

Ultimo cambio $2z = \theta$

$$\boxed{\theta - \sin\theta = \pm\frac{2}{c^2}x + k}$$

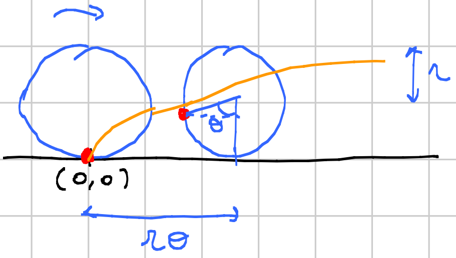
Cosa lega u a θ : $u = A - c^2 y = A - c^2 \sin^2 z$

$$= A - \frac{c^2}{2} \cdot 2\sin^2 z = A - \frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)$$

Conclusione:
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{2}(\theta - \sin\theta) + k \\ u &= A - \frac{c^2}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

Rappresentazione parametrica: se voglio $u(x)$ devo ricavare θ in funzione di x dalla prima (non si può con le funzioni elementari), poi sostituire nella seconda.

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{CICLOIDI}}$



Curva descritta da un punto su una circ. che ruota

Quando la circ. ha percorso un angolo θ, le coord. del punto sono

$$r(\theta - \sin\theta) \qquad r(1-\cos\theta)$$

Alla fine quella al punto ③ è una cicloide rovesciata con $r = \frac{c^2}{2}$ e partente dal punto (a, A) $(k = a)$

<u>Oss.</u> $\theta - \sin\theta$ è strett. crescente.

Volendo si può verificare che la cicloide risolve veramente Eulero.

Domanda: esistenza / unicità della cicloide che passa ANCHE per (b, B).

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{Seconda BC}}$

$$x = a + (\theta - \sin\theta) r$$
$$u = A - r(1 - \cos\theta)$$

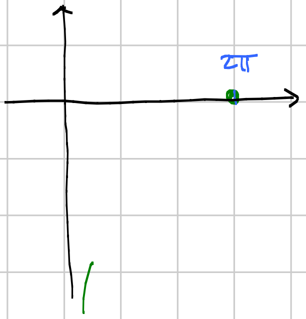
Voglio trovare r in maniera tale che esista θ con

$$b = a + r(\theta - \sin\theta) \qquad b - a = r(\theta - \sin\theta)$$
$$B = A - r(1 - \cos\theta) \qquad B - A = +r(\cos\theta - 1)$$

Dividendo $\underbrace{\boxed{\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta - \sin\theta}}}_{g(\theta)} = \dfrac{\overset{\leq 0}{B - A}}{\underset{\uparrow \, > 0}{b - a}}$

Spero che $g : (0, 2\pi] \to (-\infty, 0]$ sia bigettiva

Studio la funzione :



$\to$ $g(2\pi) = 0$

$\to$ $\lim_{\theta \to 0^+} g(\theta) = -\infty$

$\to$ $g'(\theta) = \dfrac{-\sin\theta(\theta - \sin\theta) + (1 - \cos\theta)^2}{(\ldots)^2}$

Il numeratore è $-\theta \sin\theta + \sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta$

$$= \underbrace{2 - 2\cos\theta - \theta\sin\theta}_{\varphi(\theta)} \overset{?}{\geq} 0$$

$$= 2(1 - \cos\theta) - \theta\sin\theta \overset{?}{\geq} 0$$

Per $\theta \in [\pi, 2\pi]$ è vera. Basta controllare in $[0, \pi]$. In 0 vale 0

$$\varphi'(\theta) = 2\sin\theta - \sin\theta + \theta\cos\theta = \sin\theta - \theta\cos\theta \geq 0$$

Se $\varphi'(\theta) \geq 0$ sempre ho finito. Per $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ è ok
Per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ posso dividere e diventa

$\tan\theta \geq \theta$ che è ok in $(0, \frac{\pi}{2})$. !!!

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 44

Titolo nota 09/12/2015

BRACHISTOCRONA (CONTINUAZIONE)

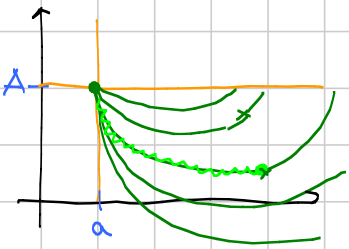
6 **MINIMALITÀ** Dimostrare che l'unica cicloide che passa per le BC è effettivamente un minimo.

Due approcci

① teoria dei campi (calibrazione)

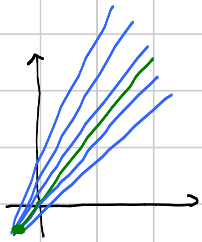
② trucco di convessità

① Si tratta di riempire il quadrante $x > a$, $y < A$ fibrandolo con soluzioni di Eulero, cioè con cicloidi che passano per (a, A).
L'eccesso di Weiestrass è ≥ 0 ovunque perché $\varphi(x,s,p)$ è convessa nel quadrante wrt p.



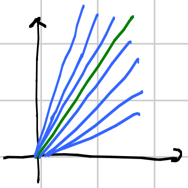
Cautela Finora abbiamo sempre calibrato usando un pto base che non fosse il dato iniziale.
Qui sarebbe come se volessi calibrare i minimi di

$$\int_0^1 \dot{u}^2\,dx$$



usando le soluzioni passanti per $(0,0)$

$$\rightsquigarrow \quad p^2 \geq 2p\frac{s}{x} - \frac{s^2}{x^2}$$



il che produce integrali impropri (che comunque si gestiscono)

② $\psi(x,s,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{A-s}}$ non è convessa in (p,s)

Ma con un cambio di variabili $A-u = \frac{1}{2}v^2$ abbiamo

$u = A - \frac{1}{2}v^2 \rightsquigarrow \dot{u} = v\dot{v}$ e quindi

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}\,dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1+v^2\dot{v}^2}{v^2}}\,\sqrt{2}\,dx = \int_a^b \sqrt{\dot{v}^2+\frac{1}{v^2}}\,dx$$

e con un conto di analisi 2 si vede che

$\psi(x,s,p) := \sqrt{p^2+\frac{1}{s^2}}$ è convessa in (s,p).

— o — o —

— o — o —

$\boxed{\text{LEMMA}}$ (Lemma trivial con molt. Lagrange)

Contesto : $\min\{F(x) : x$ tali che $G(x) = \text{costante}\}$

Metodo moltiplicatori $\rightsquigarrow$ gli eventuali p.ti di min. soddisfano

$$\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$$

Cioè sono p.ti stazionari per $F(x) - \lambda G(x)$ per un ben determinato valore $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Lemma</u> Se per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che x_0 minimizza $F(x) - \lambda G(x)$, allora

$$F(x_0) = \min\{F(x) : G(x) = G(x_0)\}$$

(nel suo livello di G il p.to x_0 minimizza $F(x)$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni x tale che $G(x) = G(x_0)$ vale

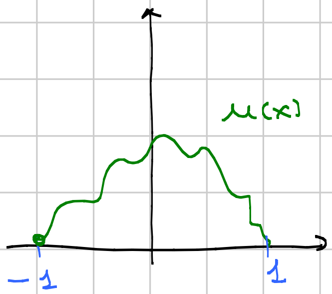
$$F(x) - \lambda G(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ G(x)=G(x_0)}}{=} F(x) - \lambda G(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{\geq} F(x_0) - \lambda G(x_0)$$

Semplifico $\lambda G(x_0)$ e ho la tesi.

—o—o—

$\boxed{\text{Problema classico}}$ Minimizzare il perimetro ad area fissata

$$\min \left\{ \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx}_{\text{lungh grafico}} : \int_{-1}^{1} u(x)\, dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{data} > 0}}{m} \quad u(-1) = u(1) = 0 \right\}$$



Idea: usare i moltiplicatori con

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx \qquad G(u) = \int_{-1}^{1} u\, dx$$

<u>Seccatura</u>: crescita lineare di F wrt $\dot{u}$.

Dai moltiplicatori di Lagrange avremo che

→ $\delta G(u) = 0$

→ esiste λ tale che u è soluzione di Eulero per $F(u) - \lambda G(u)$

Il 1° caso non si pone perché l'eq. di Eulero di $G(u)$ è

$$\underset{\substack{\downarrow \\ (\psi_p)'}}{0} = \underset{\substack{\downarrow \\ \psi_s}}{1} \qquad \psi(x, s, p) = s$$

Nel 2° caso abbiamo $\psi(x, s, p) = \sqrt{1+p^2} - \lambda s$, quindi

$\left(\frac{\dot u}{\sqrt{1+\dot u^2}}\right)' = -\lambda$, da cui $\frac{\dot u}{\sqrt{1+\dot u^2}} = -\lambda x + k$

Provo a risolvere

$$\dot u = (-\lambda x+k)\sqrt{1+\dot u^2} \rightsquigarrow \dot u^2 = (-\lambda x+k)^2(1+\dot u^2)$$

$$\dot u^2\left[1-(-\lambda x+k)^2\right] = (-\lambda x+k)^2$$

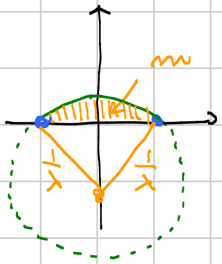
$$\dot u = \pm\frac{(-\lambda x+k)}{\sqrt{1-(-\lambda x+k)^2}}$$ si potrebbe risolvere ...

Se moltiplico per u: $u\dot u = \pm\frac{(-\lambda x+k)}{\sqrt{1-(\ldots)^2}}$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)' = \left(-\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(-\lambda x+k)^2}\right)'$$

... facendo i conti giusti dovrebbe venire

$$\lambda^2 u^2 + (\lambda x+k)^2 = 1$$



$\rightsquigarrow$ u è una circonferenza di raggio $\frac{1}{\lambda}$

$\rightsquigarrow$ restano da trovare le coordinate del centro. Il centro sarà sull'asse y (quindi $k=0$) ed essere tale che l'area sottesa sia m.

Brutta sorpresa Ci riesco solo per valori piccoli di m, cioè per

$$0 \le m \le \frac{\pi}{2}$$ ← caso della semicirconferenza.

Riassumendo

→ per $m > \frac{\pi}{2}$ Eulero non ha soluzioni !!! Quindi il minimo non esiste !!!

→ per $0 \le m \le \frac{\pi}{2}$ esiste un'unica soluzione di Eulero, che è un arco di circonferenza.

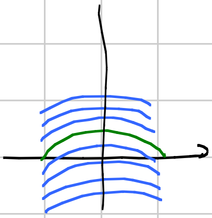
Sarà un minimo?

Per il lemma trivial basta che sia un minimo per

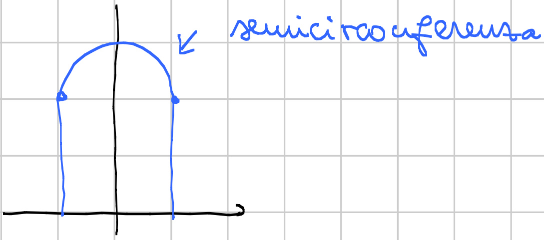
$$F - \lambda G = \int_0^1 \left(\sqrt{1+\dot{u}^2} - \lambda u \right) dx$$

ma questo è convesso in (s, p) $\quad \psi(x,s,p) = \sqrt{1+p^2} - \lambda s$

In alternativa, fissato λ tutte le traslate dell'arco buono risolvono Eulero e riempono tutte, quindi calibrano



Congettura Per $m > \frac{\pi}{2}$ l'inf è raggiunto da

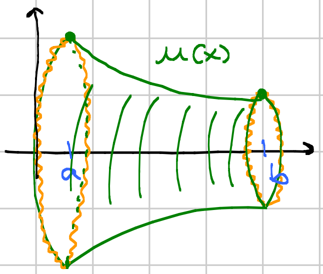


Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 45

Titolo nota 11/12/2015

SUPERFICI DI ROTAZIONE (di area minima)

1 Formulazione del problema



$[a,b]$ intervallo, $A > 0$, $B > 0$
Cerco una curva passante per (a, A) e (b, B) che generi una sup. di area minima.

$$\text{Area sup} = 2\pi \underbrace{\boxed{\int_a^b u \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx}}_{F(u)}$$

Problema: $\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]),\ u(a) = A,\ u(b) = B,\ u(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \}$

Pessima notizia: crescita lineare in $\dot{u}$ ⇝ addio metodo diretto

2 Equazione di Eulero

$$\psi(x,s,p) = s\sqrt{1+p^2}$$

$$\dot{u}\,\psi_p(u,\dot{u}) = c + \psi(u,\dot{u})$$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1+\dot{u}^2}}\, u = c + u\sqrt{1+\dot{u}^2} \;; \quad \cancel{\dot{u}^2 u} = c\sqrt{1+\dot{u}^2} + u(1+\cancel{\dot{u}^2})$$

$$\sqrt{1+\dot{u}^2} = -\frac{u}{c} \quad \rightsquigarrow \quad 1+\dot{u}^2 = \frac{u^2}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{u}^2 = \frac{u^2}{c^2} - 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{u} = \pm\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}$$ questa si risolve

$$\int \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1}} = \int \pm\, dx = \pm x + k$$

Per integrare al LHS pongo $u = cv$, $du = c\,dv$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\cdots}} = \int \frac{c\,dv}{\sqrt{v^2-1}} = \pm x + k \quad ; \quad \operatorname{arccosh} v = \frac{x}{c} + k$$

$$\rightsquigarrow \quad v = \cosh\left(\frac{x}{c}+k\right)$$

Quindi le soluzioni dell' eq. di Eulero sono

$$\boxed{u(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c}+k\right)}$$

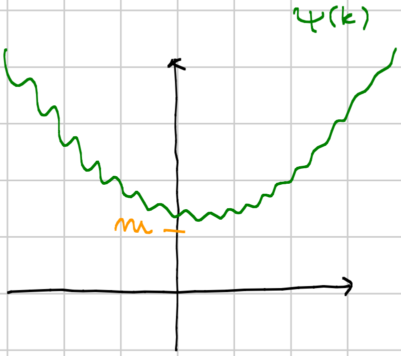
A posteriori si può verificare sostituendo che sono tutte e sole le soluzioni di Eulero

$\boxed{3}$ **Impongo le DBC** Per semplicità, anzi wlog, suppongo $a = 0$

$$c\cosh k = A \qquad\qquad c\cosh\left(\frac{b}{c}+k\right) = B$$

$$\rightsquigarrow \quad c = \frac{A}{\cosh k} \ (>0) \qquad\qquad \frac{A}{\cosh k}\cosh\left(\frac{b}{A}\cosh k + k\right) = B$$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\cosh k}\cdot\cosh\left(\frac{b}{A}\cosh k + k\right)}_{\psi(k)} = \frac{B}{A}$$



Ora $\psi(k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \psi(k) = +\infty \quad , \quad \lim_{k\to-\infty} \psi(k) = +\infty$$

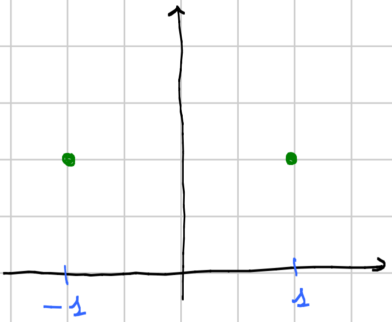
Ne segue che $\psi(k)$ ha un minimo assoluto strett. positivo m.

Quindi

- se $\frac{B}{A} < m$, allora NON ci sono soluzioni
- se $\frac{B}{A} > m$, allora ci sono almeno due soluzioni (e si potrebbe dimostrare che sono esattamente due).

— o — o —

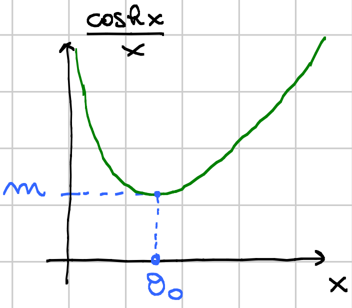
[4] $\boxed{\text{Caso speciale}}$ $A = B$, $a = -1$, $b = 1$



$$\left.\begin{array}{l} c \cosh\left(\frac{1}{c}+k\right) = A \\ c \cosh\left(-\frac{1}{c}+k\right) = A \end{array}\right\} \rightsquigarrow k = 0$$

$$c \cosh \frac{1}{c} = A$$

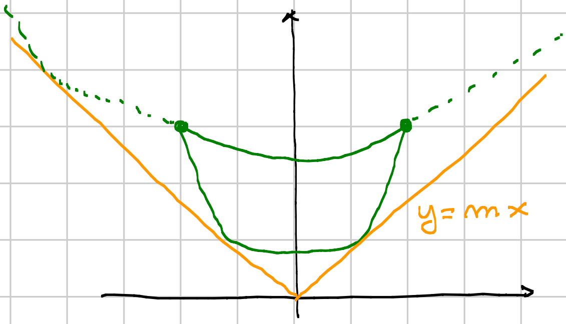
$$\frac{\cosh \frac{1}{c}}{\frac{1}{c}} = A \qquad \frac{\cosh x}{x} = A$$



- $A < m$ ⇝ nessuna soluzione
- $A = m$ ⇝ una soluzione
- $A > m$ ⇝ due soluzioni.

Se le condizioni fossero $u(\pm a) = A$ la cond. sarebbe $A > am$

Si verifica che quando ci sono due soluzioni una tocca $y = m|x|$ in due punti interni, una la tocca in due punti esterni



[5] Famiglia di catenarie

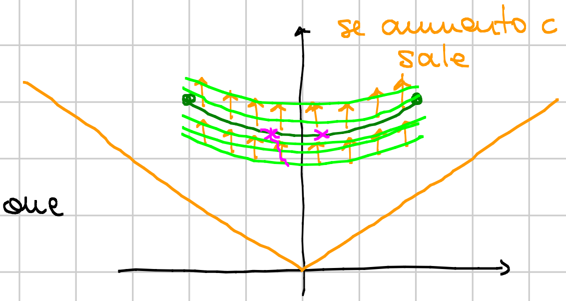
$u_c(x) = c \cosh \frac{x}{c}$. Queste coprono tutta la zona $y \geq m|x|$
$(c > 0)$

Fissato $x>0$, i possibili valori sono

$$c \cosh \frac{x}{c} = x \frac{c}{x} \cosh \frac{x}{c} = x \underbrace{\boxed{\frac{\cosh \frac{x}{c}}{\frac{x}{c}}}}_{\geq m} \geq m x$$

Dato $c>0$ esiste un unico $x_0>0$ per cui $c \cos \frac{x_0}{c} = m x_0$ ed è quello per cui $\frac{x_0}{c} = \theta_0$

6 Famiglia di estremali



Dato $A>0$ consideriamo la soluzione "con contatto esterno". Per valori vicini di c avrò soluzioni vicine.
Quindi la soluzione è contenuta in un campo di estremali, quindi per lo meno risulta SLM.
Se l'intervallo spaziale è abbastanza piccolo, allora è pure GM

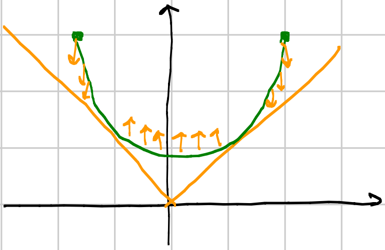
Basta verificare che non ha convenienza ad uscire dal "campo"
Posso stimare il costo di uscita con un facile conto

$$\int_a^b u \sqrt{1+\dot{u}^2}\, dx \geq \int_a^b u \dot{u}\, dx \geq \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}\left[u^2(b) - u^2(a)\right]$$

dipende dall'ampiezza del campo ed è > valore del funzionale se a e b sono abbastanza vicini.

Quindi ogni funzione che esce dal campo ha $F(u) > F(\text{catenaria})$ e quindi non è minimo.

[Ho usato qui che ψ è convessa wrt p.
Occhio: $\psi(s,p) = s\sqrt{1+p^2}$ non è convessa nella coppia (s,p)].

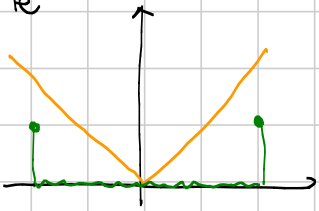


Per la catenaria che tocca non valgono i discorsi appena fatti.
Non riesco a fare un campo come si deve variando solo c
⇝ tira aria di p.ti coniugati.

7 $\boxed{\text{Cosa succede per } A < m}$

Nessuna soluzione di Eulero

Sorpresa (non dimostrata): la soluzione sono le due basi del cilindro!

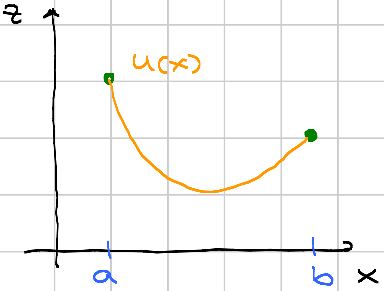


Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 46

Titolo nota 11/12/2015

HEAVY CHAIN (Catenaria)

1 Problema : trovare la posizione di equilibrio di una catena INESTENSIBILE di lunghezza data ℓ sospesa tra due punti dati (a, A) e (b, B)



Tende a stare più il basso possibile, quindi a minimizzare

$$F(u) = \underbrace{\int_a^b u\sqrt{1+\dot u^2}\,dx}_{\text{proporzionale a coord z del baricentro della catena}}$$

Con il vincolo di lunghezza, cioè $G(u) = \int_a^b \sqrt{1+\dot u^2}\,dx = \overset{\text{dato}}{\downarrow}\ \ell$

Notazione

- approccio NON PARAMETRICO: la catena è pensata come grafico
- approccio PARAMETRICO: la catena è pensata come curva $(x(t), z(t))$ con $t \in$ intervallo

$$\boxed{\min\{F(u) : u \in C^1([a,b]),\ u(a) = A,\ u(b) = B,\ G(u) = \ell\}}$$

2 Equazione di Eulero   Uso i moltiplicatori di Lagrange.

→ u è stazionario per $G(u)$ ⟺ risolve Eulero per $G(u)$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\dot u}{\sqrt{1+\dot u^2}}\right)' = 0 \Longleftrightarrow \underset{\uparrow \text{ iniettiva wrt } \dot u}{\boxed{\frac{\dot u}{\sqrt{1+\dot u^2}}}} = \text{cost} \quad \Longleftrightarrow \dot u = \text{cost}$$

⟺ u retta

⟺ $u =$ congiungente

→ u è stazionario per $F(u) - \lambda G(u)$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$.

Scrivo Eulero in forma Erdmann $\quad \varphi(s,p) = s\sqrt{1+p^2} - \lambda\sqrt{1+p^2}$

$$= (s-\lambda)\sqrt{1+p^2}$$

A meno di cambiare $u-\lambda$ con u ottengo la stessa soluz. del problema delle sup. di rotazione. Quindi

$$\boxed{u(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c}+k\right)+\lambda}$$

Devo imporre 3 condizioni

$$\boxed{c\cosh\left(\frac{a}{c}+k\right)+\lambda = A}\;, \qquad \boxed{c\cosh\left(\frac{b}{c}+k\right)+\lambda = B}$$

più la lungh. che si calcola

$$\int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}\,dx = \int_a^b \left\{1+\sinh^2\left(\frac{x}{c}+k\right)\right\}^{1/2} dx = \int_a^b \cosh\left(\frac{x}{c}+k\right)dx$$

$$= \boxed{c\left[\sinh\left(\frac{x}{c}+k\right)\right]_a^b = \ell}$$

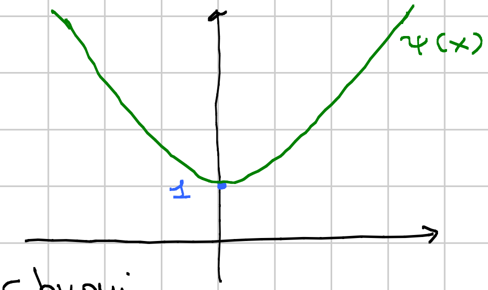
Non è chiaro se il sistema ha esistenza/unicità, neanche restringendosi ai soli $c>0$.

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{Caso speciale}}$ $\;a=-1,\; b=1,\; A=B \;\rightsquigarrow$ forza $k=0$

$$\boxed{c\cosh\frac{1}{c}+\lambda = A} \qquad 2c\sinh\frac{1}{c} = \ell \qquad \boxed{c\sinh\frac{1}{c} = \frac{\ell}{2}}$$

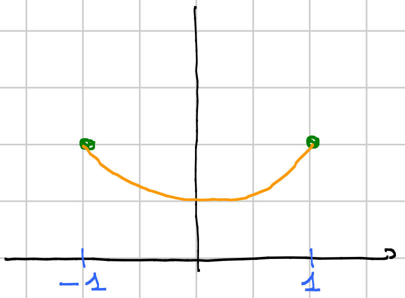
La seconda dice

$$\frac{\sinh\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}} = \frac{\ell}{2} \qquad \varphi(x) = \frac{\sinh x}{x}$$



Se $\frac{\ell}{2} > 1$ (ragionevolissimo) ci sono 2 c buoni, uno positivo, uno negativo.

Si potrebbe verificare che è la sol. che tocca all'esterno l'inviluppo di tutte le catenarie che ora si dirama dal pto $(0,\lambda)$.



Questo dice solo che è SLM per il lemma trivial sui moltiplicatori di Lagrange.

$\boxed{4}$ Se io sapessi che $F(u)$ assume max / min tra tutte le u che verificano BC + vincolo $G(u) = \ell$, saprei che le due catenarie trovate sono pti di min / max globali.
Il problema è come sempre la crescita.
Se avessi crescita diversa

$$\min \left\{ \int_a^b \cosh u (1+\dot{u}^2)\, dx \ : \ \int_a^b \dot{u}^2 = \ell \quad + \text{B.C.} \right\}$$

Su questo è applicabile il metodo diretto, MA ...
... prendiamo una succ. minimizzante u_n, il vincolo + BC mi dà compattezza gratis, quindi a meno di s.succ.

$$u_n \to u_\infty \text{ unif} \qquad \dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty \text{ deb.}$$

quindi il vincolo NON PASSA AL LIMITE.
Si by-passa in modo standard rilassando il vincolo ad una disuguaglianza

$$\int_a^b \dot{u}^2 \leq \ell$$

Con questo vincolo ottengo esistenza del minimo e poi dimostro che il pto di min <u>satura</u> il vincolo, cioè lo usa tutto. Se così non fosse cambio la u in modo da diminuire il funzionale.

⑤ Impostiamo il pbm. in maniera parametrica

$$\min \left\{ \int_\alpha^\beta z(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \ : \ \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt = \ell \ + \text{B.C.} \right\}$$

Dopo aver osservato che gli integrali sono indip. dalla parametrizzazione, posso scegliere di parametrizzare le curve con la lungh. d'arco

$$[0,\ell] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Il problema diventa

$$\min \left\{ \int_0^\ell z(t)\,dt \ : \ \dot{x}^2(t)+\dot{z}^2(t)=1 \quad \forall t\in[0,\ell] \ + \text{B.C.} \right\}$$

Ora con il metodo diretto ottengo l'esistenza sia del min sia del max ma devo rilassare il vincolo a ≤ 1. (bisogna passare al limite come nella lez. sui pbm. con ostacolo).

È banale che i pti di min/max saturano il vincolo.

<u>Oss. 1</u> Il rilassato del funz. con vincolo $=1$ è lo stesso funzionale con vincolo ≤ 1.

<u>Oss. 2</u> Un problema che Γ-converge a questo è

$$\min \left\{ \sum_{k=0}^{n} z_k \ : \ (x_0,z_0)=(a,A),\ (x_n,z_n)=(b,B) \right.$$
$$\left. \text{dist}\left((x_k,z_k),(x_{k-1},z_{k-1})\right) = \frac{\ell}{n} \ \forall k \right\}$$

— o — o —

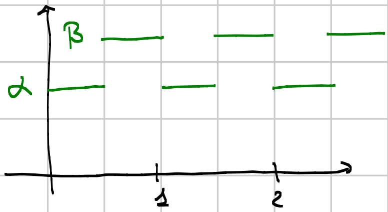
Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 47

Titolo nota 16/12/2015

OMOGENIZZAZIONE

Esempio $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad a(x) = \begin{cases} \alpha & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta & x \in (1/2, 1) \end{cases}$

Estendiamo $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per periodicità.



Poniamo

$$a_n(x) := a(nx)$$

La funzione $a_n(x)$ alterna α e β con periodo $\frac{1}{n}$. (GRECHE)

Per $n \to +\infty$ cosa fa $a_n(x)$? Non converge puntualm., unif., fortemente, ma

$$a_n(x) \longrightarrow a_\infty(x) \quad \text{debole in } L^1((a,b))$$

quindi anche in L^p

per ogni (a,b) intervallo

dove $a_\infty(x) \equiv \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta verificare che su ogni intervallo (c,d) (anche solo ad estremi razionali) si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_c^d a_n(x)\,dx = (d-c)\,\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

— o — o —

Esempio analogo $\quad a_n(x) = \sin(nx)$ oppure $a_n(x) = \sin^2(nx)$

Con facili conti si ottiene converga debole in $L^1((a,b))$ a

$$\sin(nx) \longrightarrow 0 \qquad\qquad \sin^2(nx) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\sin^4(nx) \longrightarrow \frac{3}{8}$$

Achtung! La convergenza debole non commuta con la composizione, quindi

$$a_n(x) \rightharpoonup a_\infty(x) \quad \overset{}{\underset{\text{NO}}{\cancel{\Rightarrow}}} \quad f(a_n(x)) \rightharpoonup f(a_\infty(x))$$

anche se f è continua.

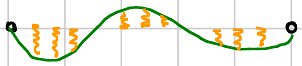
— o — o —

Primo esempio di omog.

$$F_n(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 + a_n(x)\,u^2\,dx$$

$a_n(x)$ = greche dell'esempio 1

$$u(0) = u(1) = 0$$



Ci aspettiamo che

$$F_n(u) \rightharpoonup F_\infty(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 + a_\infty(x)\,u^2\,dx$$

Questo è vero sotto ipotesi molto generali: basta che $a_n \rightharpoonup a_\infty$.

$\boxed{\text{Dim}}$ Tutto standard. L'unico punto è che se

$$u_n(x) \to u_\infty(x) \quad \text{unif.}$$
$$\dot{u}_n(x) \rightharpoonup \dot{u}_\infty(x) \quad \text{debole in } L^\infty$$

allora

$$\liminf F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$

Sul 1o termine sono i soliti discorsi, per il secondo serve che

$$\int_0^1 a_n(x)\,u_n^2(x)\,dx \to \int_0^1 a_\infty(x)\,u_\infty^2(x)\,dx$$

$$\int a_\infty u_\infty^2 - a_n u_n^2 = \int a_\infty u_\infty^2 - a_n u_\infty^2 + \int a_n u_\infty^2 - a_n u_n^2$$

$$= \underbrace{\int u_\infty^2 (a_\infty - a_n)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per conv. debole}}} + \int a_n (u_\infty^2 - u_n^2) \leq \int \underbrace{|a_n|}_{\text{limit.}} \underbrace{|u_\infty^2 - u_n^2|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

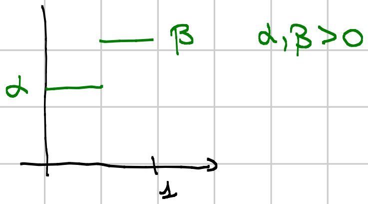
Secondo esempio di omogeneizzazione

$$F_n(u) = \int_0^1 a_n(x)\,\dot u^2 + u^2$$

Basta calcolare il Γ- limite di $F_n(u) = \int_0^1 a_n(x)\,\dot u^2\,dx$

$\boxed{\text{PROBLEMA DI CELLA}}$ = vedere cosa accade in un periodo

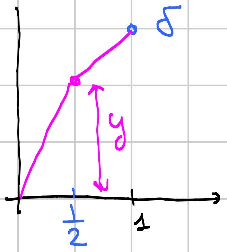
$$\int_0^1 a(x)\,\dot u^2\,dx$$



Risolvo il problema

$$\min\left\{ \int_0^1 a(x)\,\dot u^2\,dx \;:\; u(0)=0,\; u(1)=\delta \right\}$$

$$= \int_0^{\frac12} \alpha\,\dot u^2\,dx + \int_{\frac12}^1 \beta\,\dot u^2\,dx$$



Si tratta di minimizzare

$$\alpha(2y)^2\frac12 + \frac12\left[2(\delta-y)\right]^2\beta$$

$$= 2\alpha y^2 + 2\beta(\delta-y)^2 \rightsquigarrow \cancel{4}\alpha y - \cancel{4}\beta(\delta-y) = 0$$

$$(\alpha+\beta)\,y = \beta\delta \qquad y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\delta$$

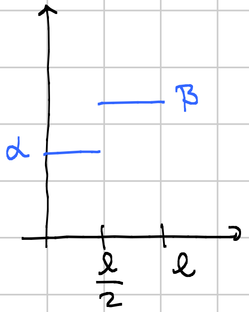
$$\min = \left[2\alpha\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} + 2\beta\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}\right]\delta^2 \qquad \delta - y = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\delta$$

$$= 2\,\frac{\alpha\beta\,\cancel{(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)^{\cancel{2}}}\,\delta^2 = \boxed{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\,\delta^2$$

↑ Media armonica di α e β $= \left(\dfrac{\frac1\alpha + \frac1\beta}{2}\right)^{-1}$

Il minimo sarebbe stato lo stesso per $F(u) = \int_0^1 \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\dot u^2$

In maniera analoga posso fare il problema su un intervallo di lunghezza $l > 0$ con dati al bordo

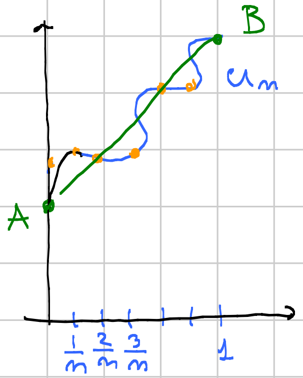


$$u(0) = A \qquad u(l) = B$$

Viene $\quad \min = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot l\left(\frac{B-A}{l}\right)^2 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{(B-A)^2}{l}$

Il problema di cella aiutare a fare il Gamma limite nel caso delle rette, cioè se u è affine (e questo basta per farlo per tutte le u...).

Il punto fondamentale è che se



$$u_n(x) \longrightarrow u_\infty(x)$$

allora

$$\liminf F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$

Considero i valori che $u_n(x)$ assume nei punti del tipo $\frac{k}{n}$

$$F_n(u_n) = \int_0^1 a_n(x)\,\dot{u}_n^2(x)\,dx = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} a_n(x)\,\dot{u}_n^2(x)\,dx}_{\text{Problema di cella con B.C. in } \frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\text{, quindi lo posso stimare dal basso}}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\underbrace{\left(u_n\left(\frac{k}{n}\right) - u_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\cdot n}$$

$$n\sum A_k^2 \geq \left(\sum A_k\right)^2$$

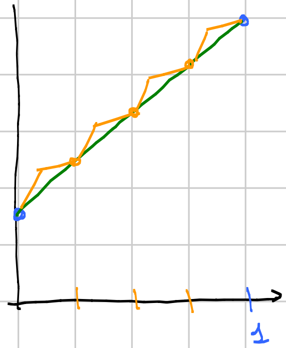
$$\geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(\sum_{k=1}^{n} u_n\left(\frac{k}{n}\right) - u_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2$$

$$= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(u_n(1) - u_n(0)\right)^2$$

Quando $n \to +\infty$ il RHS $\longrightarrow F_\infty(u_\infty)$

Questo dimostra il liminf nel caso u_∞ = funzione affine.

Per ottenere la recovery sequence, devo costruire $u_n(x)$ usando in ogni intervallino di lungh. $\frac{1}{n}$ la soluzione del pbm. di cella



Così ho uguaglianza in ogni intervallino.

— o — o —

Si poteva intuire che entrava la media armonica

$$\int a_n(x)\,\dot{u}^2\,dx \rightsquigarrow \text{Eq. Eulero} \quad \left(2a_n(x)\,\dot{u}\right)' = 0$$

$$\rightsquigarrow 2a_n(x)\,\dot{u} = c \quad \rightsquigarrow \dot{u} = \frac{c}{2a_n(x)}$$

quindi mi ritrovavo ad integrare $\frac{1}{a_n(x)}$ $\rightsquigarrow$ media armonica.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni – LEZIONE 48

Titolo nota 16/12/2015

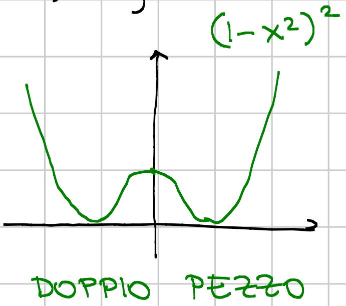
MODICA – MORTOLA **ALLEN – CAHN** **CAHN – HILLARD**

Problema

$$I_\varepsilon = \min\left\{ \varepsilon^2 \int_0^1 \dot u^2 dx + \int_0^1 (1-u^2)^2 dx \ : \ u(0)=0 \right\}$$

$$\min\left\{ \varepsilon^2 \int_0^1 (\dot u^2 + \cos u)\, dx \ : \ u(0)=0 \right\}$$

↑ i "pozzi" sono in ± kπ



$$\min\left\{ \int_0^1 (\dot u^2 + n \cos u)\, dx \ : \ u(0)=0 \right\}$$

Conflitto: u vorrebbe essere ± 1 (o ± π con il cos), ma parte da 0 e deve pagare su $\dot u$.

Sembra ragionevole sospettare che $I_\varepsilon \to 0$

La u a fianco per ε piccolo garantisce I_ε piccolo.

Domanda: come tende a 0 I_ε? Se u_ε minimizza ad ε fisso, come si comporta u_ε?

Oss. L'esistenza del minimo per ε fisso è gratis con il metodo diretto.

Esercizio (facile) $\Gamma\text{-}\lim\ \underset{\substack{\shortparallel \\ \int \varepsilon^2 \dot u^2 + (1-u^2)^2}}{F_\varepsilon(u)} = \int_0^1 (1-u^2)^2 dx$

$$\varepsilon \underbrace{\int_0^1 \left[\varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)^2\right] dx}_{F_\varepsilon}$$

Minimizzare il probl. iniziale equivale a minimizzare il nuovo F_ε e questo ha un Γ-limite non banale, che non potrò calcolare

① $\min\{F_\varepsilon(u) : u(0)=0\} \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indipendente da } \varepsilon}}{c} > 0$

Si usa il trucco della media aritmetica - geometrica

$$\varepsilon A^2 + \frac{1}{\varepsilon} B^2 \geq 2|A|\cdot|B|$$

Ma allora

$$\int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)^2 \geq 2\int_0^1 |\dot{u}|\cdot|1-u^2|\,dx = (\star)$$

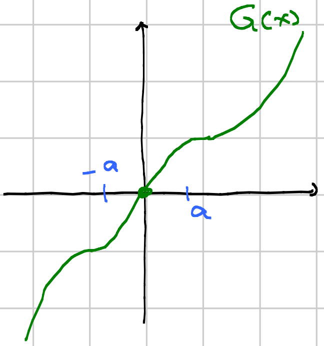
Considero la funzione $G(x)$ tale che $G(0)=0$ e $G'(x)=|1-x^2|$

Osservo che $G(x)$ è strett. monotona

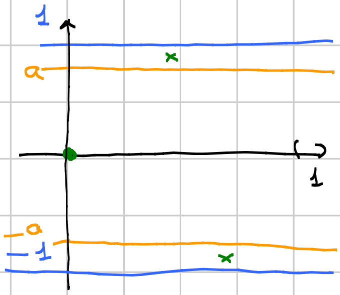
Ora

$$\int_0^1 |\dot{u}|\cdot|1-u^2|\,dx = \int_0^1 \left|\frac{d}{dx}G(u(x))\right|dx$$

$$\geq |G(u(1)) - G(u(0))|$$

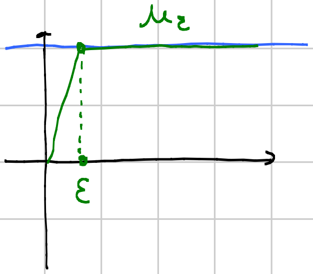


② Fissiamo una costante $a \in (0,1)$.
Allora per ε piccolo ogni minimo $u_\varepsilon(x)$ assume almeno un valore fuori dall'intervallo $(-a,a)$



$\boxed{1.5}$ Esiste una costante M indipendente da ε tale che

$$\min\{F_\varepsilon(u) : u(0)=0\} \le M \qquad \forall \varepsilon$$



$$\int \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)^2 \le M$$

$\dot{u}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ su un tratto lungo ε, quindi paga

$$\int_0^\varepsilon \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \leftarrow \text{limitato}$$

Idem sul secondo pezzo $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)^2 \le 1$

Dim di ② Se per assurdo fosse $|u(x)| \le a < 1$ sempre, allora sarebbe $|1-u^2|^2 \ge b > 0$ sempre, quindi

$$F_\varepsilon(u) \ge \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} b$$ e questo diverge, contro l'ipotesi che $u_\varepsilon(x)$ sia p.to di min.

$\boxed{3}$ Per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo $\exists\, x_\varepsilon \in (0,1)$ t.c. $u_\varepsilon(x_\varepsilon) \notin [-a,a]$

Quindi ragionando come nel p.to ① abbiamo

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \ge |G(u(x_\varepsilon)) - G(u(0))| \ge$$ costante fissa strett. positiva

$\boxed{4}$ $I_\varepsilon \sim \varepsilon\, G(1)$, che è come dire che

$$\min\{F_\varepsilon(u) : u(0)=0\} = G(1)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Abbiamo dimostrato che per ogni $a \in (0,1)$ vale la stima

$$\min\{F_\varepsilon\} \geq G(a) \qquad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo},$$

quindi

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \min\{F_\varepsilon(u)\} \geq G(a) \qquad \forall a \in (0,1)$$

Usando che a è arbitrario $\liminf \geq G(1)$.

Resta da far vedere la disug. opposta. Torniamo a

$$\varepsilon A^2 + \frac{1}{\varepsilon} B^2 \geq 2|A|\cdot|B|$$

Vale il segno di $=$ se $\sqrt{\varepsilon}\, A = \frac{\pm 1}{\sqrt{\varepsilon}} B$, cioè $A = \pm\frac{1}{\varepsilon} B$

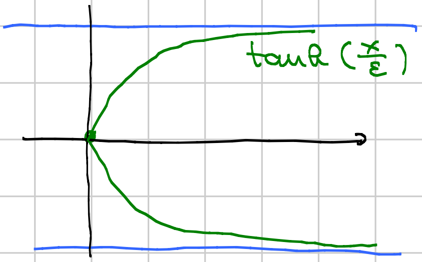
cioè nel nostro caso $\Leftrightarrow$ $\dot{u} = \pm\frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)$

Questa è una equaz. che posso risolvere

$$\frac{du}{1-u^2} = \pm\frac{1}{\varepsilon}\, dx \quad ; \qquad \operatorname{arctanh} u = \pm\frac{1}{\varepsilon} x + k$$

Se voglio $u(0)=0$ prendo $k=0$ e ottengo $\boxed{u(x) = \pm \tanh \frac{x}{\varepsilon}}$

Conseguenza: facendo il conto con $u_\varepsilon(x) = \tanh \frac{x}{\varepsilon}$



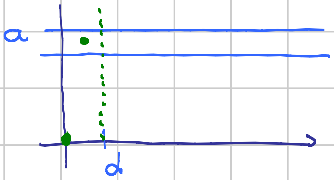
ottengo

$$\limsup F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(1)$$

non sto dicendo che sia il pto di minimo, ma quasi

$\boxed{5}$ Si può dimostrare che, detta $u_\varepsilon(x)$ una famiglia di pti di minimo (che possiamo supporre ≥ 0), si avrà
$u_\varepsilon(x) \longrightarrow 1$ unif in $[\alpha,1]$ per ogni $\alpha > 0$.

$\boxed{\text{Idea}}$ Fissato $a \in (0,1)$ per ε piccolo si avrà che $u_\varepsilon(x) \in (a,1)$ per almeno un valore di $x \in (0,\alpha)$



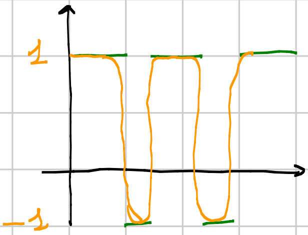
Inoltre è facile vedere che u_ε è monotona...

—o—o—

Vorrei ma non posso... chi è il Γ-limite di F_ε ?

→ È finito solo sulle u che valgono ± 1 in tutti i punti tranne un numero finito

→ Su queste vale



numero salti $\cdot$ $2\,\underset{\uparrow}{G}(1)$

costo di fare una transizione da −1 a +1 e viceversa

$\overline{\text{—o—o—}}$