

A.A. 2023/2024
Complementi di Analisi Matematica
(aka Analisi 2)

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Contents

Lezione 01. Introduzione al corso. Struttura euclidea in n dimensioni (prodotto scalare, norma, distanza, intorni). Funzioni di più variabili e loro grafico. Linee di livello. Restrizioni di funzioni a curve.	8
Lezione 02. Definizioni di limite in un punto per funzioni di più variabili. Primi esempi di calcolo di limiti per funzioni di più variabili.	11
Lezione 03. Esercizi sul calcolo di limiti al finito per funzioni di più variabili.	15
Lezione 04. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili: definizione di derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, differenziale. Relazioni tra differenziale, esistenza di derivate parziali/direzionali, continuità: enunciati e controesempi. Interpretazione geometrica delle derivate direzionali e del gradiente.	19
Lezione 05. Esempi di calcolo di derivate parziali e direzionali. Dimostrazione della formula che lega il gradiente alle derivate direzionali. Teorema del differenziale totale: enunciato e dimostrazione nel caso non risparmiato. Teorema di Lagrange direzionale.	23
Lezione 06. Insiemi limitati, chiusi, compatti. Massimi e minimi per funzioni di più variabili: teorema di Weierstrass. Ricerca euristica dei candidati ad essere punti di massimo/minimo (punti stazionari interni, singolari interni e bordo). Primi esempi di problemi di massimo/minimo: utilizzo di disuguaglianze elementari, metodo delle linee di livello.	27
Lezione 07. Esempio di problema di massimo/minimo con parametrizzazione del bordo. Insiemi descritti come luogo di zeri. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore): enunciato e primo esempio di applicazione.	31
Lezione 08. Moltiplicatori di Lagrange: interpretazione geometrica nel piano della condizione di parallelismo dei gradienti. Esempi di luoghi di zeri con punti singolari. Teorema delle funzioni implicite in due variabili: enunciato e dimostrazione dell'esistenza. Esempio di utilizzo misto di parametrizzazioni e moltiplicatori. Bordi dei bordi (punti di taglio).	35
Lezione 09. Matrice Jacobiana e chain rule per funzioni di più variabili. Calcolo della derivata della funzione costruita dal teorema della funzione implicita nel piano (supponendo che esista). Dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel piano. Norma del gradiente in coordinate polari.	39

Lezione 10. Esercizi sui massimi/minimi per funzioni di due variabili su insiemi compatti. Massimo/minimo di funzioni con valori assoluti.	43
Lezione 11. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di più moltiplicatori): enunciato ed esempi di applicazione.	47
Lezione 12. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili: definizioni e primi esempi. Importanza dell'ottenere stime uniformi in θ quando si utilizzano le coordinate polari.	51
Lezione 13. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass ad insiemi non compatti. Primi esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non limitati.	55
Lezione 14. Ulteriori esempi di limiti all'infinito per funzioni di due variabili. Tecnica di pareggiamento degli esponenti e di distinzione di varie zone. Ulteriori esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non compatti.	59
Lezione 15. Ripasso sulle forme quadratiche: rappresentazione mediante matrici simmetriche, forme (semi)definite positive/negative, segnatura e metodi per calcolarla. Un forma quadratica definita positiva è coerciva: dimostrazione mediante il teorema di Weierstrass e mediante il teorema spettrale. Accenno alla caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori.	63
Lezione 16. Derivate successive per funzioni di più variabili. Enunciato del teorema di inversione dell'ordine di derivazione e conseguenze sul numero di derivate parziali di ordine fissato. Matrice Hessiana. Enunciato dei legami tra la segnatura dell'Hessiana ed il comportamento locale di una funzione vicino ad un punto stazionario. Primi esempi di classificazione di punti stazionari.	67
Lezione 17. Formula di Taylor in più variabili: linguaggio dei multi-indici, resto di Peano e di Lagrange. Scrittura per esteso in due variabili. Primi esempi di calcolo.	71
Lezione 18. Dimostrazione di alcuni legami tra la segnatura della matrice Hessiana ed il comportamento locale di una funzione (utilizzando i polinomi di Taylor di ordine 2). Idea della dimostrazione della formula di Taylor in dimensione 2. Ulteriori esempi legati ai polinomi di Taylor e alla classificazione di punti stazionari.	76
Lezione 19. Esercizi misti su studio locale e globale di funzioni.	81
Lezione 20. Ulteriori esercizi misti su studio locale e globale di funzioni.	85
Lezione 21. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione (alla Darboux, via integrale inferiore e superiore), proprietà base (linearità, monotonia, additività rispetto alla zona di integrazione).	89
Lezione 22. Calcolo di integrali doppi: formule di riduzione sui rettangoli e su insiemi normali. Esempi di calcolo di integrali doppi con queste tecniche.	94
Lezione 23. Calcolo di integrali doppi utilizzando le coordinate polari.	99

Lezione 24. Introduzione agli integrali tripli: notazioni, idea della definizione, interpretazione fisica. Tecniche di calcolo: formule di riduzione sui parallelepipedi, integrazione per colonne (insiemi normali rispetto ad un piano) e per sezioni. Primi esempi.	103
Lezione 25. Esempi di integrali tripli calcolati con varie tecniche. Utilizzo di simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi e tripli.	108
Lezione 26. Formula generale per il cambio di variabili negli integrali multipli. Giustificazione intuitiva del metodo. Esempi classici: traslazioni, dilatazioni lungo gli assi. Esempi di applicazione.	113
Lezione 27. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio, con relativi determinanti Jacobiani. Esempi di integrali tripli calcolati utilizzando i metodi visti finora. . . .	118
Lezione 28. Calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti di inerzia di figure piane e solide mediante integrali doppi e tripli. Solidi di rotazione: equazione in coordinate cartesiane e cilindriche, rotazioni complete e non complete, formula per il volume. Teorema di Guldino per i volumi.	122
Lezione 29. Esercizi finali sugli integrali multipli: integrande con il valore assoluto, descrizione di insiemi strani in coordinate polari, calcolo del determinante Jacobiano attraverso la trasformazione inversa, calcolo del volume dell'intersezione tra due cilindri con assi perpendicolari.	127
Lezione 30. Integrali dipendenti da parametro: definizione, continuità (passaggio al limite sotto il segno di integrale), derivabilità (derivata sotto il segno di integrale). Controesempio il cui l'integrale del limite è diverso dal limite dell'integrale. Derivata di un integrale in dimensione uno con integranda ed estremi dipendenti da parametro.	132
Lezione 31. Introduzione alle curve: sostegno, speed e velocity, vettore e retta tangente, curve chiuse e semplici. Esempi di curve diverse con lo stesso sostegno. Quattro possibili strategie per dimostrare la semplicità di una curva.	137
Lezione 32. Esempio di disegno del sostegno di una curva mediante lo studio delle componenti. Definizione di lunghezza di una curva. Curve rettificabili. Esempi di curve di lunghezza infinita. Formula per il calcolo della lunghezza nel caso regolare. Caso speciale di curve cartesiane e curve descritte in coordinate polari. Accenno all'invarianza della lunghezza per riparametrizzazione regolare.	142
Lezione 33. Stime dall'alto e dal basso per la norma di un integrale vettoriale. Dimostrazione della formula per la lunghezza di una curva nel caso regolare (come integrale della speed).	146
Lezione 34. Integrali curvilinei: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione, formula per il calcolo. Baricentro di una curva. Esempio di disegno del sostegno di una curva. Significato dell'integrazione non orientata. Invarianza rispetto a riparametrizzazioni regolari monotone.	151

- Lezione 35.** Forme differenziali e campi di vettori. Integrale di una forma differenziale lungo una curva: notazione, definizione, significato fisico, formula per il calcolo. Relazione tra integrali di forme e di funzioni. Significato dell'integrazione orientata. 155
- Lezione 36.** Forme differenziali chiuse ed esatte. Primitiva e potenziale. Chiusura implica esattezza. L'integrale di una forma differenziale esatta è la differenza tra i valori assunti da una primitiva agli estremi della curva. Caratterizzazione dell'esattezza in termini di integrali lungo curve. 160
- Lezione 37.** Insiemi convessi, stellati, semplicemente connessi, connessi per archi, connessi. Definizione di omotopia tra curve. Dimostrazione che le forme chiuse su insiemi stellati sono esatte. L'integrale di una forma chiusa su due curve omotope con gli stessi estremi coincide (enunciato). Le forme chiuse su insiemi semplicemente connessi sono esatte. 165
- Lezione 38.** Esempio classico di forma differenziale chiusa ma non esatta. Esattezza della stessa forma su insiemi particolari. Tre strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva. esempi ed esercizi. 169
- Lezione 39.** Superfici nello spazio: presentazione cartesiana, implicita, parametrica. Equazione del piano tangente e vettore normale nelle varie presentazioni. Area di una superficie: controesempio della lanterna di Schwarz e idea della definizione. . . 174
- Lezione 40.** Area di una superficie: formula per il calcolo nel caso regolare. Area di superfici cartesiane. Superfici di rotazione e formula per la loro area. Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione. Integrali superficiali: notazioni e formula per il calcolo. Baricentro di una superficie. 179
- Lezione 41.** Gradiente, Laplaciano, divergenza, rotore. Formule classiche: divergenza del gradiente, rotore del gradiente, divergenza del rotore. Significato di gradiente/rotore/divergenza nulli/uguali. Divergenza del prodotto di una funzione per un campo di vettori. 184
- Lezione 42.** Integrali di flusso in due e tre variabili: interpretazione fisica e formule per il calcolo. Integrali di flusso in due variabili vs integrali di forme differenziali. Versori normali canonici a curve e superfici. Esempio di calcolo del flusso di un vettore attraverso una superficie. Enunciato del teorema della divergenza in due e tre variabili. 188
- Lezione 43.** Formule per l'area di un dominio il cui bordo è costituito da una o più curve assegnate. Calcolo di integrali su domini descritti mediante il loro bordo. Esercizi basati su applicazioni del teorema della divergenza. 192
- Lezione 44.** Enunciato del teorema di Gauss-Green e integrazione per parti in più variabili. Dimostrazione dell'equivalenza tra formula di integrazione per parti e teorema della divergenza. Dimostrazione del teorema della divergenza in insiemi normali del piano. 197
- Lezione 45.** Esercizi basati su applicazioni del teorema della divergenza. 202

Lezione 46. Orientazione del bordo di una superficie: definizione intuitiva ed esempi. Enunciato della formula di Stokes (teorema del rotore). Road map della dimostrazione. Il flusso di un rotore attraverso una superficie senza bordo è nullo.	206
Lezione 47. Problema dell'inversione del rotore (trovare un campo con un rotore assegnato): giustificazione della procedura ed esempio di applicazione. Esempio di campo vettoriale con divergenza nulla che non è un rotore.	210
Lezione 48. Quattro strategie per il calcolo di un integrale di flusso attraverso una superficie.	215
Lezione 49. Integrali impropri in più variabili: definizioni, casi modello, primi esempi.	219
Lezione 50. Calcolo dell'integrale Gaussiano. Utilizzo delle coordinate polari per lo studio della convergenza di integrali impropri in due variabili.	224
Lezione 51. Esempi di studio della convergenza di integrali impropri in dimensione due: pareggiamento degli esponenti, divisione in zone, utilizzo di stime, restrizione a opportuni sottoinsiemi.	229
Lezione 52. Esempi di studio di integrali impropri in dimensione 3, anche con parametri. Ulteriori esempi in dimensione due.	233
Lezione 53. Esempi finali sullo studio della convergenza di integrali impropri.	237
Lezione 54. Discussione di esercizi presi da test d'esame.	240
Lezione 55. Discussione di esercizi misti (calcolo del flusso di un rotore attraverso una superficie, studio di un limite con un parametro).	244
Lezione 56. Discussione di esercizi misti (studio di integrali impropri con parametri, utilizzo del teorema di esistenza degli zeri in più variabili).	248

Analisi 1: Funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

" 2: " $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o anche $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

" 3: Funzioni di "infinita variabili"

Notazione vettoriale: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$

" con le componenti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}$$

Prod. scalare canonico

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

$\uparrow$
angolo compreso fra
i due vettori

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = |x|$$

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, y)$$



Palle

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

$\uparrow$
 $\in \mathbb{R}^n$ $\uparrow$ numero
 > 0

$< r$

CHIUSA

APERTA

Def. Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in D \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \subseteq D$$



Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il complementare è aperto, cioè

$$\forall x \notin D \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \cap D = \emptyset$$

Definizioni di limite Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \nearrow +\infty & \textcircled{1} \\ \searrow -\infty & \textcircled{2} \\ \rightarrow l \in \mathbb{R} & \textcircled{3} \\ \rightarrow \text{Non esistere} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Def. di $\textcircled{4}$: Nessuno dei precedenti

Def. di $\textcircled{1}$ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

$\uparrow$
anche enorme

Def. di $\textcircled{2}$ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Def. di $\textcircled{3}$ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Oss. Queste definizioni hanno senso se x_0 è un p.to di accumulazione per D cioè

$$\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Piccola variante: si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Def. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

METATEOREMA Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari usando operazioni algebriche e/o composizioni sono continue dove non ci sono problemi burocratici (denominatori che si annullano, radici di roba negativa, ...)

ANALISI 2 - LEZIONE 02

Come visualizzare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $f(x,y)$

Grafico $(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}$
 = superficie nello spazio

Due modi per farsi un'idea

→ linee di livello

→ percorsi di omiuo

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$

Linee di livello: risolvere

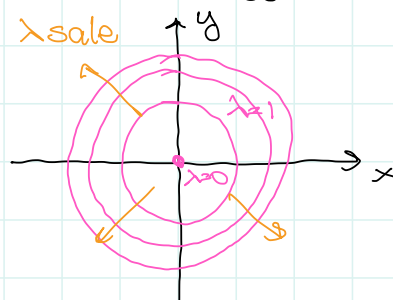
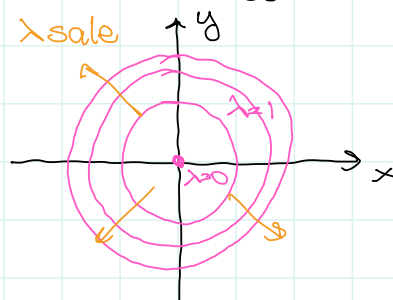
$$f(x,y) = \lambda$$

cioè tagliare il grafico con il piano $z = \lambda$

In questo caso

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

- se $\lambda < 0 \rightsquigarrow \emptyset$
- se $\lambda = 0 \rightsquigarrow (0,0)$
- se $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



Percorsi di omiuo

$f(t,0) = t^2 \leftarrow$ quota a cui si trova un omiuo che dall'alto percorre l'asse x

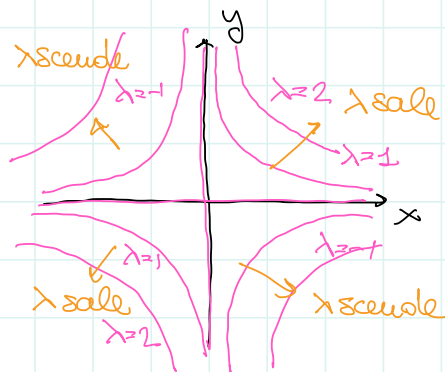
$f(0,t) = t^2 \leftarrow$ asse y

$$f(t, t) = 2t^2$$

Esempio 2 $f(x, y) = xy$

Linee di livello $xy = \lambda$

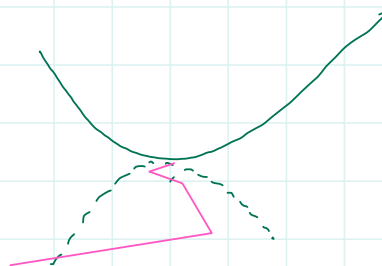
- $\lambda = 0 \rightsquigarrow xy = 0 \rightsquigarrow$ due assi
- $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ 1° e 3° quadrante
- $\lambda < 0 \rightsquigarrow$ 2° e 4°



$$f(t, 0) \equiv 0 \quad f(0, t) \equiv 0$$

$$f(t, t) = t^2$$

$$f(t, -t) = -t^2$$



Limite 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cos(xy) + \log(y+2)}{x + \sqrt{y} + 7} = \frac{\log 2}{7}$

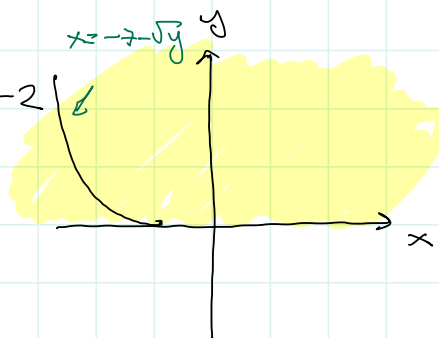
↑
potenzialmente crea
problemi, ma (0,0) è
un p.to di accumulazione

Dove è definita la funzione?

$$\log(y+2) \rightsquigarrow y+2 > 0 \rightsquigarrow y > -2$$

$$\sqrt{y} \rightsquigarrow y \geq 0$$

$$x + \sqrt{y} + 7 \neq 0 \rightsquigarrow x \neq -7 - \sqrt{y}$$



Limite 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

la funzione è definita per $(x, y) \neq (0, 0)$

→ Spero che $\lim_{p \rightarrow 0} f_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} f_2(p)$

SLOGAN Liberarsi di θ !!!

LEZIONE 03

25/09/2023

Con un cambio di variabili, si riporta il limite in $(0,0)$

① Cerco di fare stime con funzioni continue + metateorema.

② Coordinate polari + stima che non dipende da θ

Spesso che $\lim_{p \rightarrow 0^+} g_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} g_2(p)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

se e solo se $f(x_n, y_n) \rightarrow l$ per ogni coppia di succ.
 $x_n \rightarrow 0 \quad y_n \rightarrow 0$

① Trovo due coppie di succ. $x_n \rightarrow 0$ $y_n \rightarrow 0$
 $\wedge$
 $x_n \rightarrow 0$ $y_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_m, y_m) &\rightarrow l_1 \\ \varphi(\hat{x}_m, \hat{y}_m) &\rightarrow l_2 \end{aligned} \quad l_1 \neq l_2$$

- ② Trovo due punti diversi che tendono a $(0,0)$ su cui il limite assume due valori diversi.

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{y^2}{x+y}$ definita per $x > 0$ e $y > 0$

Nell'origine è $\frac{0}{0}$.

Dico che $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x > 0, y > 0}} \frac{y^2}{x+y} = 0$

$$0 \leq \frac{y^2}{x+y} \leq \frac{y^2}{y} = y$$

uso che $x > 0$ e $y > 0$

Conclusione con carabinieri

Strategia 2 Passo in polari

$$0 \leq \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta} = \rho \frac{\overbrace{\sin^2 \theta}^{\leq 1}}{\underbrace{\cos \theta + \sin \theta}_{\geq m > 0}} \leq \rho \frac{1}{m}$$

Solito discorso: considero $\varphi(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$

Si tratta di una funzione continua

Quando $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (1° quadrante) assume un valore minimo (teo. di Weierstrass) per un certo $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Questo valore non può essere negativo perché $\sin \theta_0 \geq 0$ e $\cos \theta_0 \geq 0$.

Non può essere nemmeno nullo perché $\sin \theta_0$ e $\cos \theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

Quel minimo chiamo m .

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^2}{x^6 + y^6}$

Dico che $\lim = 0$. Uso trucco del valore assoluto e passo in polari

$$0 \leq \frac{\rho^+ \boxed{|\cos^5 \theta \cdot \sin^2 \theta|} \leq 1}{\cancel{\rho^+} \boxed{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \geq m > 0} \leq \rho \frac{1}{m}$$

↓
solito discorso con $\theta \in [0, 2\pi]$

Solito finale

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

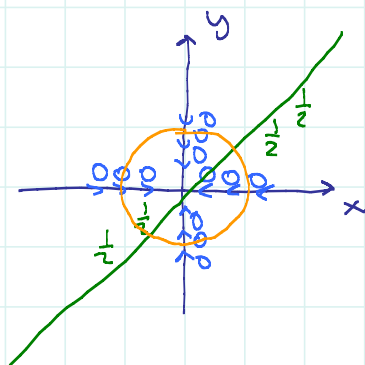
Questo limite NON ESISTE

$$f(t, 0) \equiv 0$$

$$f(0, t) \equiv 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0$$



Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$

$$0 \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y| \rightarrow 0$$

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Provo con le coord. polari:

$$\frac{\rho |\cos \theta| \cdot \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho |\cos \theta| \cdot \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

→ Faccio limite per $\rho \rightarrow 0$. Viene $\frac{0}{\cos^2 \theta} = 0$ se $\cos \theta \neq 0$.

→ se $\cos \theta = 0$, siamo sull'asse y , dove $f(x, y) \equiv 0$.

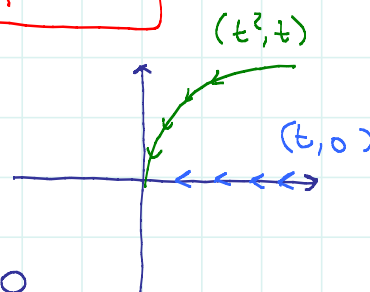
Quindi in ogni caso il limite viene 0.

SPAZZATURA: NON SI RAGIONA A θ fisso!!

Il limite non esiste!

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0 \quad (\text{asse } x)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

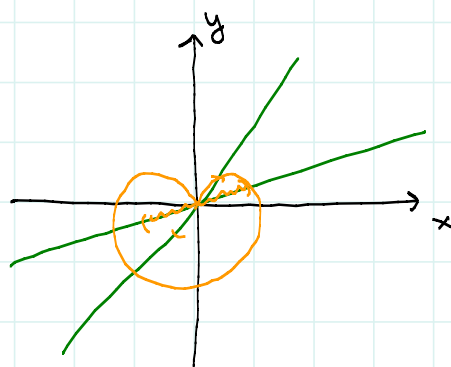


In questo esempio il limite su tutte le rette è 0

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, ut) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot ut}{t^2 + u^4 t^4} = 0 \quad \text{per ogni } u.$$

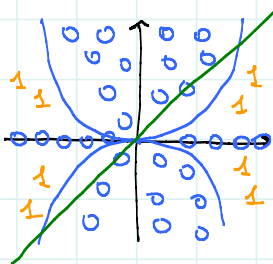
Su ogni retta c'è un intervallo in cui $|f| \leq \varepsilon$

Ma non è detto che esista tutto un cerchio in cui $|f| \leq \varepsilon$



→ su ogni retta il limite nell'origine è 0.

→ globalmente non lo è



ANALISI 2

LEZIONE 04

Note Title

25/09/2023

Derivate in più variabiliAnalisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.→ Si dice che f è derivabile in x_0 se

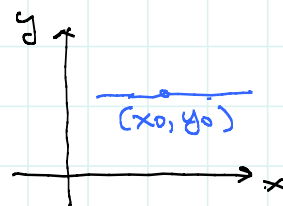
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

esiste ed è reale. Il limite si indica con $f'(x_0)$ → Si dice che f è differentiabile in x_0 seesiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0^+$$

Teo. f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è diff. in x_0 Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Def. Si dice che f è derivabile parzialmente risp. a x nel punto (x_0, y_0) se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



esiste ed è reale. In tal caso il limite si indica con uno di questi simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

In modo analogo si definisce $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Def. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

Chiamiamo $U = (\alpha, \beta)$ (direzione)

Si dice che f è derivabile in (x_0, y_0) lungo la direzione U se

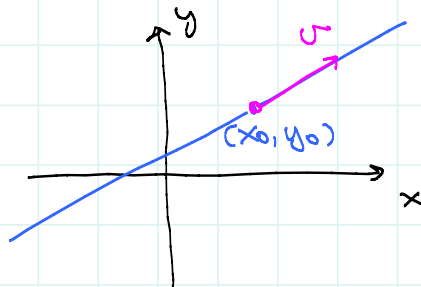
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

esiste ed è reale. Si indica con $\frac{\partial f}{\partial U}(x_0, y_0)$

Oss. → Le derivate parziali corrispondono a $U = (1, 0)$ e $U = (0, 1)$

→ In generale ci si muove sulla retta
 $(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$

Oss. Nel caso generale di
 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$
 le derivate parziali diventano



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

$e_i = i$ -esimo vettore della base canonica

le derivate direzionali diventano

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h U) - f(x_0)}{h}$$

$U \in \mathbb{R}^d$ con $U \neq 0$.

Nel caso in cui $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^d$, assumiamo sempre che x_0 sia interno a D , cioè $B(x_0, r) \subseteq D$ per un certo $r > 0$.

Def. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esistono α, β in $\mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

lungh. dello spostamento

per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

Se fosse $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$ diventa ...
 f è diff. in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \alpha, h \rangle + o(|h|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

↑
vettori

↑
prod. scalare

↑
norma del vettore

↑
limite in più variabili

Notazione Si indica con ∇f il gradiente di f , cioè il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f .

↑
NABLA

Teorema Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Supponiamo che f sia differenziabile in x_0 .

Allora

(1) f è continua in x_0

(2) esistono le derivate parziali di f in x_0 e

$$\alpha = \nabla f(x_0)$$

(3) esistono le derivate direzionali di f in x_0 e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \langle \alpha, v \rangle \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ &= \langle \nabla f(x_0), v \rangle \end{aligned}$$

Invece (1) + (2) + (3) NON IMPLICANO in generale che f è differenziabile in x_0 .

[Vedi esempio della lezione 3 alla fine]

↑ Esistono e sono tutte nulle le derivate parziali e direzionali nell'origine, ma f non è continua.

Idea di parti della dimostrazioni

Mettiamoci in 2 variabili direttamente.

Ipotesi: $f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$

Voglio fare la derivata nella direzione v . Uso $R = t v$
↑ numero ↑ vettore $\neq 0$

$$f(x_0 + t v) = f(x_0) + \langle \alpha, t v \rangle + o(|t v|)$$

$$t \langle \alpha, v \rangle \quad o(|t| \cdot |v|)$$

↑ ↑
norma di vettore
val. assoluto di numero

$$\frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t} = \frac{\cancel{f(x_0)} + t \langle \alpha, v \rangle + o(|t| \cdot |v|) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \langle \alpha, v \rangle + \boxed{\frac{o(|t| \cdot |v|)}{t}}$$

↓
0

Per giustificare l'ultimo limite, "sostituiamo" la def. di o piccolo

$$o(|R|) = |R| \cdot \omega(R) \quad \text{con} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \omega(R) = 0$$

$$\frac{o(|t| \cdot |v|)}{t} = \boxed{\frac{|t| \cdot |v|}{t}} \cdot \omega(t v)$$

$\leq |v|$ ↓
0

[f è $o(g)$ se $f = g \cdot \omega$ con $\omega \rightarrow 0$ nel p.to dato].

Usando $v = e_i$ si hanno le derivate parziali
 — 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 05

Note Title

25/09/2023

- Domande : 1 - come calcolo le derivate parziali ?
 2 - " " " " direzionali ?
 3 - come stabilisco se f è diff. in un certo x_0 ?

- Risposte : 1 - come ad Analisi 1
 2 - Usando la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$
 3 - Usando il teorema del DIFFERENZIALE TOTALE

Teo (Diff. totale) (Enunciato generoso)

Supponiamo che tutte le derivate parziali di f

→ esistano in un intorno di x_0

→ siano continue in x_0

Allora f è differenziabile in x_0 .

Esempi di calcolo

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f(x, y) = x^2 \cdot y^3$$

$$f(x, y) = x \sin y$$

$$f(x, y) = \cos(xy)$$

$$f(x, y) = \sin(x^2 y)$$

$$f(x, y) = y^2 \sin(xy)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$

$$f(x, y) = x^y$$

$e^{y \log x}$

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_x(x, y) = 2x \cdot y^3$$

$$f_x(x, y) = \sin y$$

$$f_x(x, y) = -y \sin(xy)$$

$$f_x = \cos(x^2 y) \cdot 2xy$$

$$f_x = y^3 \cos(xy)$$

$$f_y = 2y \sin(xy) + x y^2 \cos(xy)$$

$$f_x = \frac{1}{y^2}$$

$$f_y = -2 \frac{x}{y^3}$$

$$f_x = y x^{y-1}$$

$$f_y = x^y \cdot \log x$$

Derivate direzionali

$$f(x, y) = x^2 + xy^3$$

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$v = (1, -1)$$

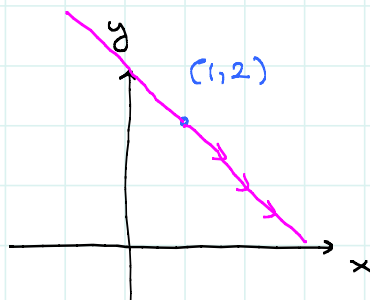
Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

$$f_x(x, y) = 2x + y^3$$

$$f_y(x, y) = 3xy^2$$

$$\nabla f(1, 2) = (10, 12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle (10, 12), (1, -1) \rangle = 10 - 12 = -2$$

Altro esempio

$$f(x, y) = xy$$

$$(x_0, y_0) = (2, -1)$$

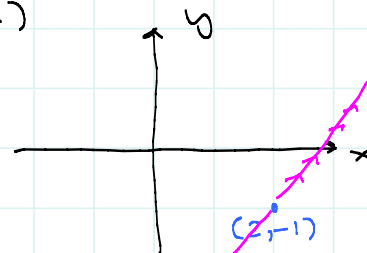
$$v = (1, 1)$$

$$f_x(x, y) = y \quad f_y(x, y) = x$$

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

$$\nabla f(2, -1) = (-1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, -1) = \langle (-1, 2), (1, 1) \rangle = 1$$

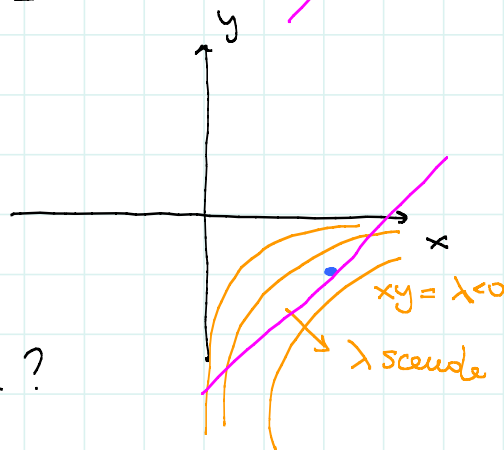


Significato geometrico del
gradiente

limitandoci alle direzioni v

con $|v| = 1$, quando la

derivata direzionale risulta max/min?



$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$= |\nabla f(x_0)| \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{angolo} \\ \text{compreso}}}$$

→ Max quando $\theta = 0$, cioè v parallelo a $\nabla f(x_0)$ con stesso verso

→ min " $\theta = \pi$, " " " con verso opposto

Quindi: il gradiente è la direzione in cui andare (letta nel piano base) se si vuole salire con la massima pendenza.

Esercizio $f(x,y) = 2x^2y^3 - 3y$

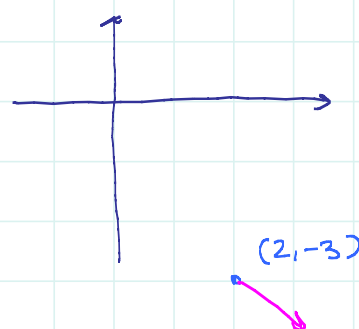
Metto una pallina nel p.to del grafico corrispondente a $(2,-3)$.
Dove va la pallina?

Risposta: in direzione opposta risp. al gradiente

$$f_x = 4xy^3 \quad f_y = 6x^2y^2 - 3$$

$$\nabla f(2,-3) = (-8 \cdot 27, 24 \cdot 9 - 3)$$

$$-\nabla f = (8 \cdot 27, -9 \cdot 24 + 3)$$

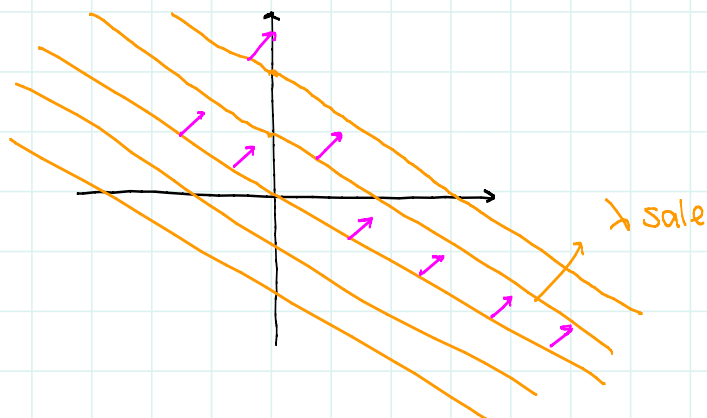
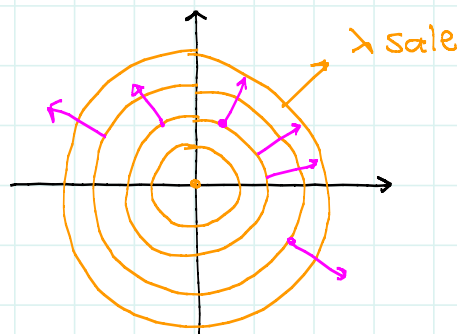


Qss. Le linee di livello sono $\perp$ rispetto al gradiente

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$
 $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

$$\nabla f(x,y) = (2, 3)$$



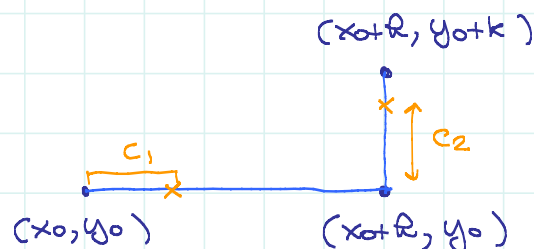
$$2x + 3y = \lambda$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{\lambda}{3}$$

Dim. tes. diff. totale

Tesi

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$



$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}_{k \cdot f_y(x_0 + h, y_0 + c_2)} + \underbrace{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{h f_x(x_0 + c_1, y_0)}$$

Lagrange di Analisi 1

Ora

$$h f_x(x_0 + c_1, y_0) = \underbrace{h f_x(x_0, y_0)}_{\text{quello che volevo}} + h [f_x(x_0 + c_1, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

Basta dimostrare che l'altro è $o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$$h [f_x(\dots) - f_x(\dots)] = \sqrt{h^2 + k^2} \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\leq 1 \text{ in val. assoluto}} \underbrace{[f_x(\dots) - f_x(\dots)]}_0$$

perché abbiamo come ipotesi che f_x è continua in (x_0, y_0)

Stesso discorso per f_y .

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 06

Note Title

29/09/2023

Max e min in più variabili

Caso compatto

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme. A si dice

- **CHIUSO** se $\mathbb{R}^d \setminus A$ è aperto, cioè
 $\forall x \notin A \exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \cap A = \emptyset$
- **LIMITATO** se
 $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$
- **COMPATTO** se è CHIUSO + LIMITATO.



Teorema (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) A è compatto.

Allora esistono

$$\max \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. Max e min sono NUMERI e sono per forza unici (quando esistono).

Non vanno confusi con i p.ti di max/min che sono gli $x \in A$ in cui tali valori sono assunti. Tali p.ti possono non essere unici.

Oss. Se almeno un'ipotesi del teo. di W. fallisce, allora BOTH, cioè max/min possono esistere oppure no.

Come trovo max/min? Indago tra i candidati p.ti di max/min i quali ricadono in 3 categorie.

① P.ti **STAZIONARI INTERNI**: p.ti x interni ad A (cioè $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$) dove $\nabla f(x) = 0$
sistema

② P.ti **SINGOLARI INTERNI**: p.ti x interni ad A dove $\nabla f(x)$ NON ESISTE.

③ P.ti **BORDO DI A**: p.ti $x \in A$ che non sono interni.
↓ ad analisi 2 il bordo di A è + complicato

Dim. Sia $x \in A$ un p.to di min/max. Cosa può succedere?

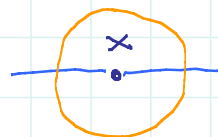
→ x non è interno no sta nella ③

→ x è interno e $\nabla f(x)$ non esiste no sta nella ②

→ x è interno e $\nabla f(x)$ esiste. Se dimostro che $\nabla f(x) = 0$, allora sta nella ①.

Quindi devo dim. che in un p.to di max/min interno le derivate parziali, se esistono, si annullano.

Basta osservare che le derivate parziali sono le derivate di Analisi 1 della restrizione di f ad opportune rette passanti per x , e tali restrizioni hanno max/min in quel p.to.



Oss. Il discorso fatto alla fine vale in particolare per i p.ti di max/min LOCALE di f .

Un p.to x_0 è di max. locale per f se

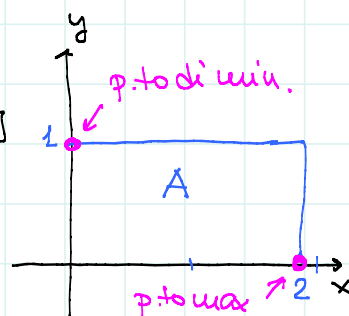
$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

Strumenti per trovare max/min

- Disuguaglianze elementari
- Linee di livello
- Parametrizzazione del bordo
- Moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1 $f(x,y) = x - 3y$ $A = [0,2] \times [0,1]$

Ok le ipotesi di W $\Rightarrow$ max e min esistono



Max = 2 $f(x,y) = \underbrace{x}_{\leq 2} - 3\underbrace{y}_{\geq 0} \leq 2$ sempre e vale l'uguale se e solo se $x=2$ e $y=0$

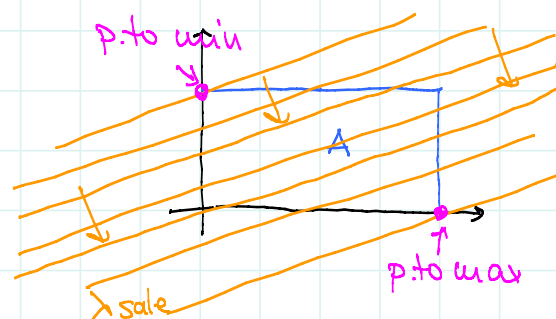
Min = -3 $f(x,y) = \underbrace{x}_{\geq 0} - 3\underbrace{y}_{\leq 1} \geq -3$ sempre e vale l'uguale se e solo se $x=0$ e $y=1$

Stessa cosa con le linee di livello

Disegno le linee di livello di f

$$x - 3y = \lambda$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{\lambda}{3}$$

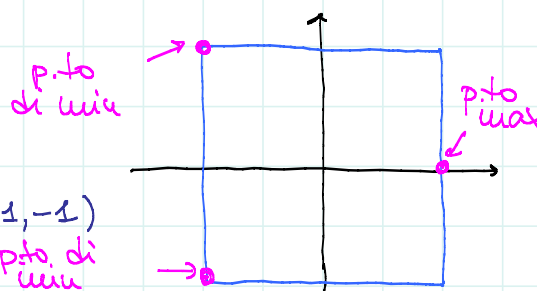


P.to di min: p.to dell'insieme in cui λ è il + piccolo possibile
 " max: " " + grande "

Esempio 2 $f(x,y) = 2x - y^2$ $A = [-1,1] \times [-1,1]$

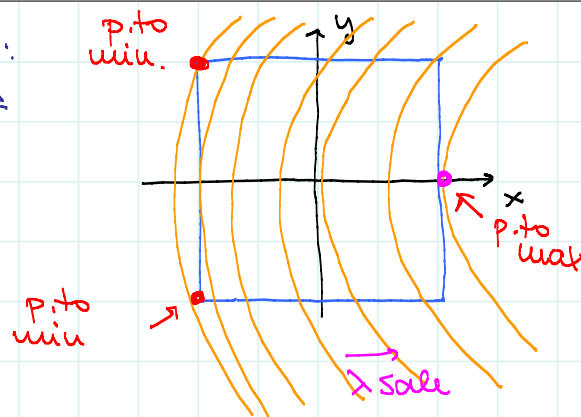
Max = 2 p.ti di max: (1,0)

Min = -3 p.ti di min: (-1,1) e (-1,-1)



Vediamo con le linee di livello:

$$2x - y^2 = \lambda \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\lambda}{2}$$

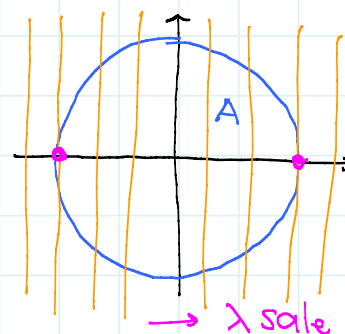


Esempio 3 $f(x,y) = x$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\text{Max} = \sqrt{2} \quad \text{p.to di max} : (\sqrt{2}, 0)$$

$$\text{min} = -\sqrt{2} \quad \text{p.to di min} : (-\sqrt{2}, 0)$$

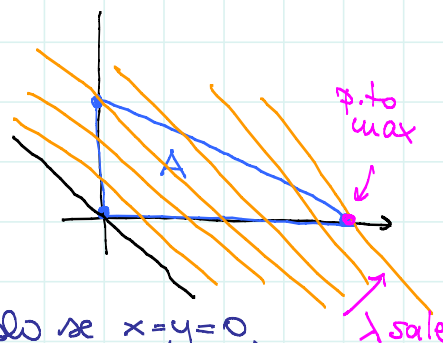
Linee di livello: $x = \lambda$



Esempio 4 $f(x,y) = x+y$
 $A = \text{triangolo con vertici}$
 in $(0,0), (2,0), (0,1)$

$$\text{Min} = 0 \quad \text{p.to di min} : (0,0)$$

$$f(x,y) = \underset{\geq 0}{x} + \underset{\geq 0}{y} \geq 0 \text{ con } = \text{ se e solo se } x=y=0.$$



Linee di livello: $x+y = \lambda \rightsquigarrow y = -x + \lambda$

$$\text{Max} = 2 \quad \text{p.to di max} = (2,0)$$

Oss. Le cose sarebbero cambiate con $f(x,y) = x+4y$
 (provare per esercizio)

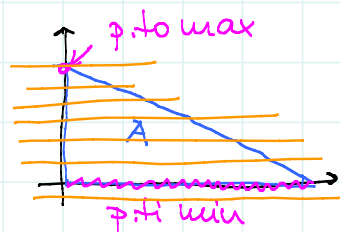
Oss. Nell'esempio non ci sono p.ti stat. interni $\nabla f(x,y) = (1,1)$
 " " " sing. interni

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 07

Note Title

29/09/2023

Esempio 1 $f(x,y) = y$ $A =$ triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (2,0)$ Max = 1 p.to di max: $(0,1)$ Min = 0 p.ti di min: tutto il segmento di estremi $(0,0)$ e $(2,0)$ Esempio 2 $f(x,y) = x+y$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2-x^2\}$

Weierstrass OK

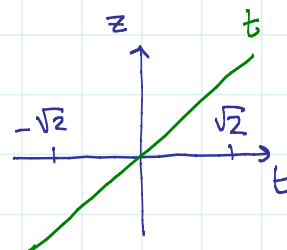
① Stat. interni: $\emptyset$ $\nabla f(x,y) = (1,1)$ ② Sing. interni: $\emptyset$ ☺

③ Bordo: fatto da 2 pezzi

→ SEGMENTO $(t,0)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Studio la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= f(t,0) \text{ con } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ &= t \end{aligned}$$



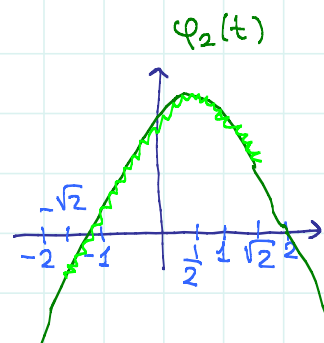
Max e min stanno agli estremi del segmento

I primi 2 candidati sono $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ → PARABOLA $(t, 2-t^2)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Studio la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= f(t, 2-t^2) \text{ con } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ &= t + 2 - t^2 \end{aligned}$$

$$\varphi_2'(t) = 1 - 2t \sim \text{vertice in } t = \frac{1}{2}$$



I pti candidati per $\varphi_2(t)$ sono $t = \frac{1}{2}$ e quello con $t = -\sqrt{2}$ che corrisponde a

$$t = -\sqrt{2} \rightsquigarrow (-\sqrt{2}, 0)$$

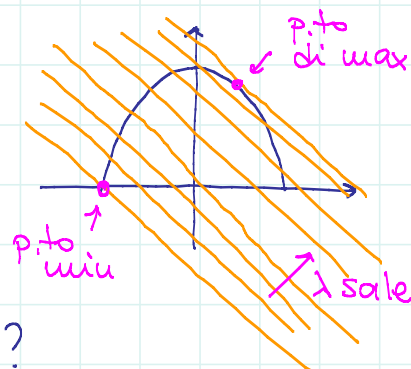
$$t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

In conclusione abbiamo 3 candidati: $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$
Ora sostituisco e vedo che succede

$$\varphi(-\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2} \text{ min}$$

$$\varphi(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \text{ max}$$



Potevamo prevederlo con le linee di livello?

$$x+y = \lambda$$

— o — o —

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (caso speciale di 1 moltiplic.)

Def. Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice LUOGO DI ZERI se esiste $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0\}$$

equazione di V

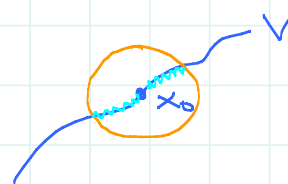
Def. (Pti di Max/min locale vincolato)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme qualunque (anche non luogo di zeri). Sia $x_0 \in V$. Sia $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che x_0 è p.to di min. loc. per φ rispetto a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \varphi(x_0) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r)$$

Idem per il max



Teorema (Un moltiplicatore di Lagrange)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^d$ il luogo di zeri di una funzione $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Sia $x_0 \in V$ un p.to di max / min loc. per f ristretta a V

Supponiamo f e g regolari (derivat. parziali continue ovunque)

Allora in x_0 succede almeno una di queste due cose

(1) $\nabla g(x_0) = 0$

(2) $\nabla g(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$ sono paralleli, cioè

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

— 0 — ↑ moltiplicatore

Operativamente:

→ devo trovare i candidati p.ti di max / min sul bordo di A

→ spero che il bordo sia un insieme V luogo di zeri di una certa g

→ risolvo il 1° sistema $\begin{cases} \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

cioè trovo i p.ti di V (cioè del bordo) in cui ∇g si annulla

→ risolvo il 2° sistema $\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$

cioè trovo i p.ti di V in cui ∇f e ∇g sono paralleli.

Le soluzioni dei 2 sistemi sono i candidati cercati.

Oss. 1° sistema: $d+1$ equazioni
d incognite

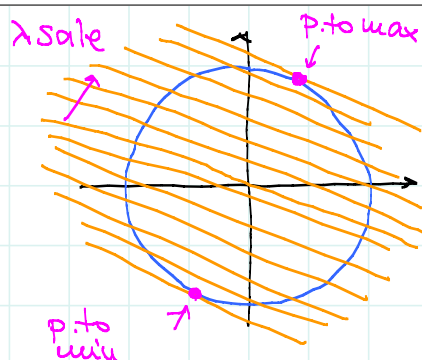
Capita spesso che non ha soluzioni

2° sistema: $d+1$ equazioni

$d+1$ incognite (c'è anche λ)

Capita spesso che ha numero finito di soluzioni

Esempio 1 $f(x,y) = x+3y$
 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$



Weierstrass ok

Stazionari e singolari interni: $\emptyset$

Quindi studiamo il bordo

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2-1}_{g(x,y)} = 0 \} = \text{luogo di zeri di } g$$

1° sistema $\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leadsto x=0 \\ \leadsto y=0 \\ \leadsto \text{NO SOL.} \end{matrix} \} \leadsto \text{incompatibili con la 3ª}$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$

$\frac{2^\text{a equ}}{1^\text{a equ}} \Rightarrow y = 3x$ (posso dividere perché λ, x, y sono $\neq 0$)

$\leadsto$ sostituendo nella 3ª: $x^2 + 9x^2 = 1 \leadsto 10x^2 = 1$

$\leadsto x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \leadsto y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ (stesso segno di x)

Abbiamo 2 candidati: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $f = \sqrt{10}$ $f = -\sqrt{10}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 Max min.

Oss. Potrei usare la parametrizzazione?

Sì, ad esempio con $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Dovrei studiare $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + 3\sin t$
 con $t \in [0, 2\pi]$ $\leadsto$ esercizio.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 08

Note Title

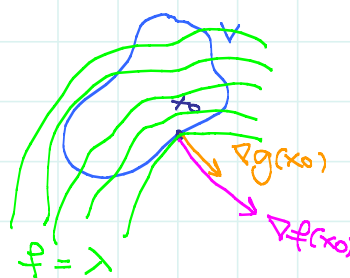
02/10/2023

Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^d$ luogo di zeri di g
 $x_0 \in V$ p.to di max/min per f ristretta a V
 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Allora succede almeno una delle 2: $\nabla g(x_0) = 0$

$$\exists \lambda \text{ t.c. } \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Non dimostrazione V è una linea di livello di g
 $\nabla g(x_0)$ è $\perp$ alla linea di livello di g , cioè a V
 Essendo x_0 p.to di max/min, ci aspettiamo
 che in x_0 la linea di livello di f sia
 tangente a V .



Ma allora $\nabla f(x_0)$ è $\perp$ alla linea di livello di f in x_0

Morale: $\nabla g(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$ sono $\parallel$ in quanto $\perp$ alle rispettive
 linee di livello che sono tangenti

— o — o —

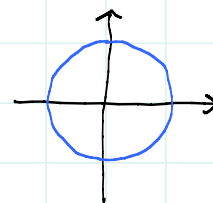
Nei p.ti di V dove $\nabla g \neq 0$, ci aspettiamo che l'insieme V
 sia "fatto bene"

Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq 0$ in ogni p.to
 della curva

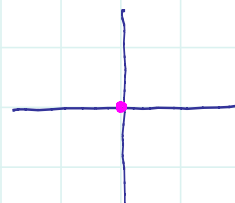
$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$V = \{(0, 0)\} \text{ e qui } \nabla g = 0$$



$g(x, y) = xy$ Il luogo di zeri sono i due assi

$\nabla g(x, y) = (y, x)$ si annulla in $(0, 0)$ dove
 il luogo di zeri è anomalo.



Teorema della funzione implicita (caso in $\mathbb{R}^2$)

(a Pisa, e solo a Pisa, si chiama anche *teo. del Divi*)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (*esistono derivate prime continue*), sia $(x_0, y_0) \in D$ tale che $g(x_0, y_0) = 0$ e $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora esistono $\delta > 0$ ed $\tau > 0$, ed esiste

$$\gamma: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \tau, y_0 + \tau]$$

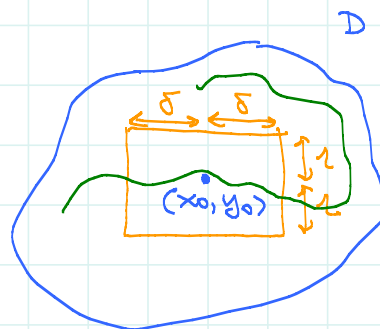
tale che, detto

$$V = \{ (x, y) \in D : g(x, y) = 0 \}$$

il luogo di zeri di g , vale che

$$V \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \tau, y_0 + \tau] = \{ (x, \gamma(x)) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \}$$

Interpretazione geometrica: nella finestra intorno a (x_0, y_0) l'insieme V è il grafico della funzione γ , cioè y ricavato in funzione di x .



Inoltre la funzione γ è di classe C^1 e

$$\gamma'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

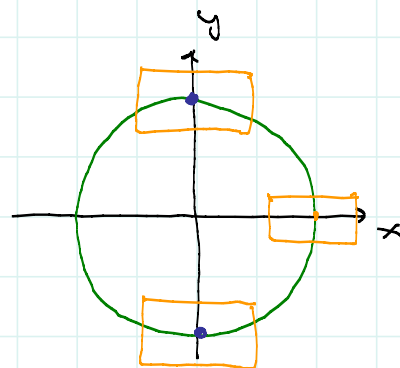
$$(x_0, y_0) = (0, 1) \quad \nabla g(0, 1) = (0, 2)$$

$$g_y(0, 1) \neq 0$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ nella finestra

$$(x_0, y_0) = (0, -1) \rightsquigarrow g_y(0, -1) = -2 \neq 0$$

$$\rightsquigarrow y = -\sqrt{1-x^2}$$

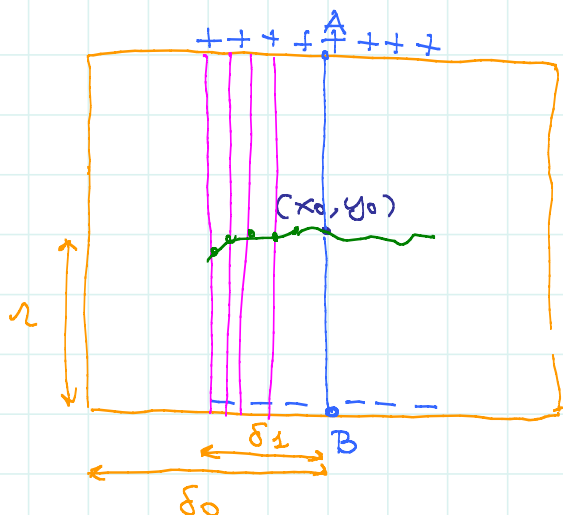


$$(x_0, y_0) = (1, 0) \rightsquigarrow g_y(1, 0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ non si applica il teorema

Dim. Per ipotesi $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Supponiamo $g_y(x_0, y_0) > 0$
 Per continuità $g_y(x, y) > 0$ in
 una finestra del tipo
 $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \tau, y_0 + \tau]$



Essendo $g_y > 0$ avremo che

$$g(A) > 0 \quad \text{e} \quad g(B) < 0$$

Ma allora per continuità

esiste $\delta_1 \leq \delta_0$ t.c.

$$g(x, y_0 + \tau) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$$

$$g(x, y_0 - \tau) < 0 \quad \forall x \in \quad "$$

Su ogni segmento verticale che congiunge $(x, y_0 - \tau)$ a $(x, y_0 + \tau)$ la g è crescente (strett.) e passa da negativo a positivo, quindi si annulla esattamente una volta in un p.to $\gamma(x)$.

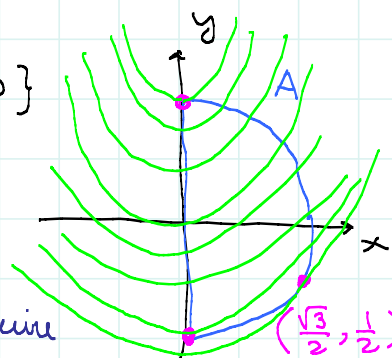
Oss. La dimostrazione si estende alla dimensione d semplice mente supponendo $\frac{\partial g}{\partial x_d}$ sia $\neq 0$ nel p.to in considerazione.

Per la formula per la derivata prima: vedi les. successiva

Esempio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

$$f(x, y) = y - x^2$$

Max/min di f in A



L'insieme è cpt., f è cont. $\Rightarrow$ max e min esistono

Staz. interni: $\nabla f = 0 \quad (-2x, 1) = 0 \rightsquigarrow \emptyset$

Sing. interni: $\emptyset$

Ci si riduce al bordo, fatto da 2 pezzi

→ Segmento: $(0, t)$ con $t \in [-1, 1]$

$f(0, t) = t$ che ha max/min per $t=1$ e $t=-1$

→ $(0, 1)$ e $(0, -1)$

→ Pezzo di circ. Uso i moltip. con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ma

• dovrò buttare via i candidati con $x < 0$

• devo sempre includere d'ufficio i "bordi dei bordi" o "p.ti di taglio"

1° sistema → NO SOLUZIONI

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ sistema } \rightsquigarrow \quad & \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$1^\circ \text{ eq } \rightsquigarrow \quad 2x(\lambda + 1) = 0$$

$$\swarrow$$

$$x = 0$$

$$\downarrow$$

$$y = \pm 1$$

$$\downarrow$$

$$(0, \pm 1)$$

$$\searrow$$

$$\lambda = -1$$

$$\downarrow 2^\circ$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$\downarrow 3^\circ$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\downarrow$$

resta solo

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\underline{\quad 0 \quad - \quad 0 \quad -}$$

ANALISI 2 — LEZIONE 09

Note Title

02/10/2023

MATRICE JACOBIANA Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

La matrice jacobiana $Jf(x)$ è la matrice che ha come righe i gradienti di $f_1, \dots, f_m$. Quindi

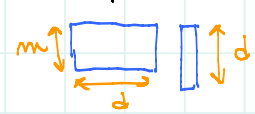
$$[Jf(x)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

↑
riga i
colonna j

Se f è tutto continuo vale la formula del differenziale

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + Jf(x_0)R + o(|R|)$$

vettore di $\mathbb{R}^n$
pensato
come colonna



matrice x vettore

vettoriale

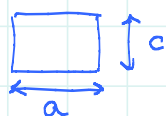
$o(|R|)$ è una funzione g a valori in $\mathbb{R}^m$ t.c.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{|g(R)|}{|R|} = 0$$

↑ m variabili
 ↑ d variabili

CHAIN RULE Analisi 1: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ Analisi 2 Sia $g: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b$ Sia $f: \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^c$ Allora $f \circ g$ ha senso $\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^c$ e sotto ipotesi ragionevoli

$$J[f(g(x))] = Jf(g(x)) \cdot Jg(x)$$



Le dimensioni
sono
compatibili

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + xy$
 $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ per esempio $f(t^5, t^2)$

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t)$$

$$\varphi(t) = f(t^5, t^2) = t^{10} + t^7 \quad \leadsto \quad \varphi'(t) = 10t^9 + 7t^6$$

$$f_x(x, y) = 2x + y \quad f_y(x, y) = x$$

Usando la formula di sopra

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (2t^5 + t^2) \cdot 5t^4 + t^5 \cdot 2t \\ &= 10t^9 + 5t^6 + 2t^6 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esempio 2 $f(x, y)$ e costruiamo

$$g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

Calcolare $g_v(u, v)$

$$g_v(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \psi_v(u, v) \quad f_x \varphi_v + f_y \psi_v$$

Back to funzione implicita ... supponiamo di sapere che

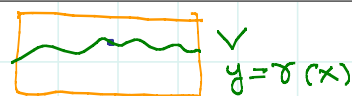
$$g(x, \gamma(x)) = 0$$

e supponiamo di aver dimostrato che γ è derivabile. Allora

$$0 = [g(x, \gamma(x))] = g_x(x, \gamma(x)) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di } x \\ \text{risp. a } x}}{1} + g_y(x, \gamma(x)) \cdot \gamma'(x)$$

$$\leadsto \gamma'(x) = - \frac{g_x(x, \gamma(x))}{g_y(x, \gamma(x))}$$

Dimostrazione del moltiplicatore



Supponiamo che $(x_0, y_0) \in V$ sia p.to di max/min per $f(x, y)$ ristretta a V .

→ Se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, allora amen.

→ Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora mettiamo che sia $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ (l'altro caso è simmetrico).

Allora nella finestrella V è il grafico di $\gamma(x)$, quindi la restrizione di f a V è la funzione

$$\varphi(t) = f(t, \gamma(t)) \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Questa funzione ha in $t = x_0$ un p.to di max/min.

Ma allora $\varphi'(x_0) = 0$. Per la catena delle

$$\varphi'(t) = f_x(t, \gamma(t)) \cdot 1 + f_y(t, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

e quindi per $t = x_0$:

$$0 = \varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \gamma'(x_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0) - \underbrace{\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}}_{\lambda} g_x(x_0, y_0)$$

Abbiamo quindi dimostrato che $f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$
Resta da dimostrare che $f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$
 ma questo è ovvio dalla definizione di λ .

— o — o —

Calcolo del gradiente in coord. polari

Data $f(x, y)$ posso costruire

$$g(p, \theta) = f(p \cos \theta, p \sin \theta)$$

Calcolare $|\nabla g(p, \theta)|^2$ sapendo $|\nabla f(x, y)|^2$

$$\begin{aligned} g_p &= f_x \cdot x_p + f_y \cdot y_p \quad \leadsto \quad g_p(p, \theta) = f_x(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot \cos \theta \\ g_\theta &= f_x \cdot x_\theta + f_y \cdot y_\theta \quad \quad \quad + f_y(p \cos \theta, p \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_p &= f_x \cdot \cos \theta + f_y \sin \theta \\ g_\theta &= f_x (-p \sin \theta) + f_y \cdot p \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_p^2 &= f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \\ g_\theta^2 &= p^2 f_x^2 \sin^2 \theta + p^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2 p^2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$g_p^2 + \frac{1}{p^2} g_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$$

↑ g_θ conta sempre meno
man mano che p cresce

Esercizio (hard) Fare la formula per $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$

→ in coord. polari

→ in coord. sferiche

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 10

Note Title

02/10/2023

Esempio 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y)$
 $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

$$Jf(x, y) = (f_x, f_y) \quad JP(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$J(f \circ P) = Jf(P(x)) \cdot JP(x) = (f_x \ f_y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$f \circ P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} = \underbrace{(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta)}_{\frac{\partial (f \circ P)}{\partial \rho}} , \underbrace{f_x (-\rho \sin \theta) + f_y \rho \cos \theta}_{\frac{\partial (f \circ P)}{\partial \theta}}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

Come è fatto A ? $\rightarrow$ È chiuso (perché c'è $\leq$)
 $\rightarrow$ È limitato ($-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$)
 Quindi è compatto.

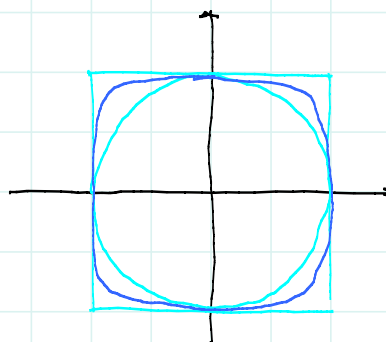
L'insieme A contiene il cerchio

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Perché? Basta osservare che

$$x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2$$

Quindi se $x^2 + y^2 \leq 1$, a maggior ragione
 $x^4 + y^4 \leq 1$



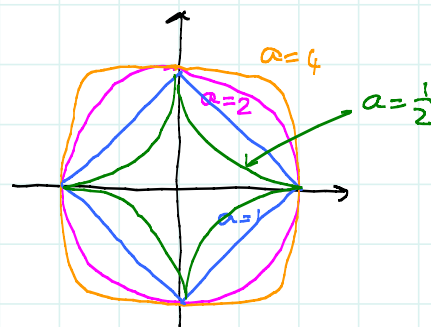
In generale gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^a + |y|^a \leq 1\}$ sono "televisori" tanto più piatti quanto a è grande

W $\leadsto$ max e min. esistono

Sing. interni : $\emptyset$

Stat. interni

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \leadsto (0,0)$$



Bordo : moltiplicatore con $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

1° sistema

$$\begin{aligned} g_x &= 0 & 4x^3 &= 0 \\ g_y &= 0 & 4y^3 &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{incompatibile} \leadsto \emptyset$$

2° sistema

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1° equ. $4\lambda x^3 - 2x = 0 \leadsto 2\lambda x^3 - x = 0 \leadsto x(2\lambda x^2 - 1) = 0$

$x=0 \leadsto y = \pm 1$ dall'ultima $\leadsto (0, \pm 1)$

$x(2\lambda x^2 - 1) = 0 \leadsto 2\lambda x^2 = 1$

2° equ. $y(2\lambda y^2 - 1) = 0 \leadsto y=0 \leadsto x = \pm 1 \leadsto (\pm 1, 0)$

$2\lambda y^2 = 1$

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, allora $x^2 = y^2 \leadsto x^4 = y^4 \leadsto 2x^4 = 1 \leadsto x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

$y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

$\left(\pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)$ 4 possibili p.ti

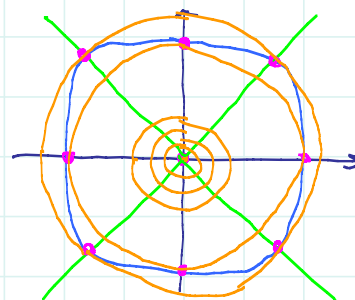
Alla fine abbiamo 3 candidati da confrontare

$$f(0,0) = 0 \leftarrow \text{min}$$

$$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$$

$$f(\text{altri } 4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\uparrow$ p.ti di max $\uparrow$ max



Le linee di livello sono $x^2 + y^2 = \lambda$

Variaute Max / min di $f(x,y) = x^2 + y^2$ su

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$$

$\uparrow \uparrow$
solo il bordo del
televisione

Weierstrass $\leadsto$ ok

NON ESISTONO PUNTI INTERNI AD A , QUINDI NON HA SENSO CERCARE P.TI STAB. O SING. INTERNI

" A è solo bordo" $\leadsto$ con i usuali. trovo gli stessi 8 p.ti di prima e adesso

$$\text{min} = 1 \quad \text{p.ti di min} = (\pm 1, 0) \text{ e } (0, \pm 1)$$

$$\text{max} = \sqrt{2} \quad \text{p.ti di max come prima.}$$

Nuova variaute $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1, y \geq 2|x|\}$

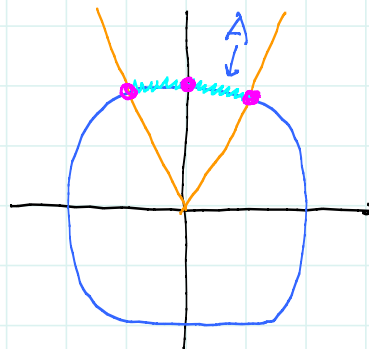
Come prima è solo bordo, che non è tutto il luogo di zeri di $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

L'unico candidato che resta è

$(0,1)$ ma devo aggiungere

d'ufficio i bordi dei bordi, che

si trovano facilmente. So già che saranno p.ti di max.



Esempio?

$$f(x, y) = |x + y|$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}$$

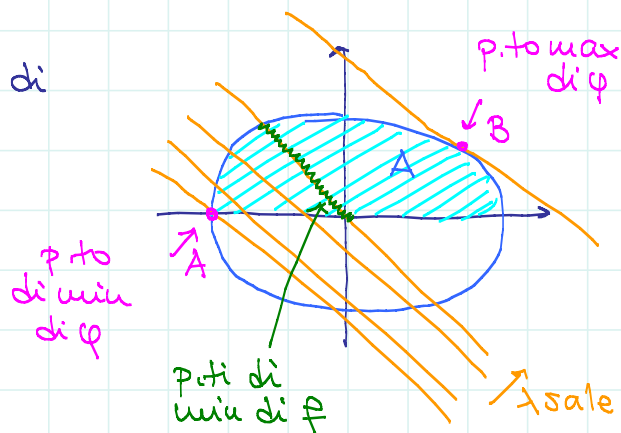
Studiamo prima max e min di

$$\varphi(x, y) = x + y$$

Facendo il conto con i moltiplicatori trovo il p.to di max

$$\min \varphi = -\sqrt{3}$$

$$\max \varphi = \text{numero positivo} > \sqrt{3}$$



Per max f se la giocano $|\varphi(A)|$ e $\varphi(B)$, e vince $\varphi(B)$.

Per min f basta guardare dove $f(x, y) = 0$, quindi abbiamo in A infiniti p.ti di min.

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 11

Note Title

06/10/2023

Più moltiplicatori di LagrangeSetting : $D \subseteq \mathbb{R}^d$

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$V = \{x \in D : g(x) = 0\}$$

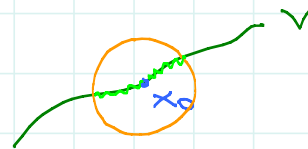
 $\uparrow$ k equazioni $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

 $x_0 \in D$ si dice p.to di max/min locale per f ristretta a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r) \quad (\text{max})$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{"} \quad (\text{min})$$

Teorema Setting come sopra. Supponiamo f e g di classe C^1 in D .

Allora succede almeno una di queste cose

(1) $Jg(x_0)$ ha RANGO $\leq k-1$ (al max può essere k)(2) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ numeri reali t.c.
 molt. di LAGRANGE

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

cioè $\nabla f(x_0)$ è comb. lin. di $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ Operativamente I candidati p.ti di max/min si trovano risolvendo1° sistema

$$g(x) = 0$$

 $\uparrow$
 k equazioni

$$\text{Rango}(Jg(x)) \leq k-1$$

 $\uparrow$ impongo che tutti i minori di ordine k siano 0 $\uparrow$
una marea di equazioni (quante?)2° sistema

$$g(x) = 0$$

 $\rightarrow k$ equazioni

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x) \rightarrow d \text{ equazioni}$$

 $d+k$ incognite (comp. di x più k moltiplicatori)

(tante equ. quante sono le incognite).

Oss. La condizione $\text{Rango } J(x_0) = k$, cioè il max possibile, assicura che V è "fatto bene" in una finestra intorno a x_0
 grafico di una funzione di $d-k$ variabili

Moralmente: ogni equazione che mettiamo fa scendere di uno la dimensione di V .

Esempio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 5, x + y - z = 0\}$
 max/min su V di $f(x, y, z) = x - z$

$V =$ ellissoide $\cap$ piano - curva

V è limitato (contenuto nell'ellissoide) e chiuso (ci sono gli =)

$\Rightarrow V$ è opt. $\Rightarrow$ max e min esistono.

V è "solo bordo" quindi stat. e sing. interni NON HANNO SENSO.

Uso moltiplicatori con $g_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 5$ $k=2$
 $g_2(x, y, z) = x + y - z$

1° sistema $Jg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Jg ha rango ≤ 1 se si annullano i minori di ordine 2

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y - 2z = 0 \rightsquigarrow z = -y \\ -4x - 2z = 0 \rightsquigarrow z = -2x \\ 4x - 2y = 0 \rightsquigarrow y = 2x \end{array} \right\} \text{ sostituisco in } g_2 = 0$$

$$\begin{array}{l} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2x + 2x = 0 \\ \downarrow \\ x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \\ \downarrow \\ \text{incompatibili con } g_1 = 0 \end{array}$$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x + \mu \\ 0 = 2\lambda y + \mu \\ -1 = 2\lambda z - \mu \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

$$1^a + 3^a: 0 = 4\lambda x + 2\lambda z$$

$$\leadsto \lambda(z + 2x) = 0$$

$$z = -2x$$

$$\begin{cases} 2^a + 3^a \end{cases}$$

$$-1 = 2\lambda(y + z)$$

$$\leadsto \lambda = 0$$

↓
incompatibile
con 1° e 2° equ.

Fino a abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} z = -2x \\ y + z = -\frac{1}{2\lambda} \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

↪ ricavare x, y, z
in funzione di λ

↓
sostituisco in $g_1 = 0$
e trovo due possibili
valori di λ che
mi danno due
candidati

Devo trovare anche μ ? Posso farlo, ma non mi serve a nulla
perché alla fine nella f sostituisco solo x, y, z .

— o — o —

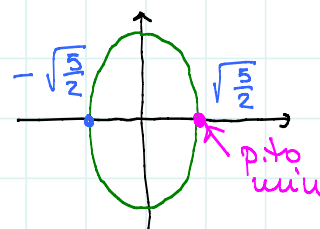
Osservazione (trucco di sostituzione del vincolo)

[Provare con i
multiplic. per
esercizio]

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 5 \}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x$$

Voglio fare max/min di f in V



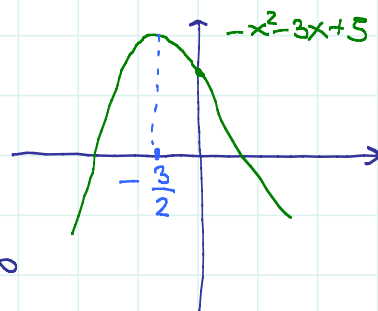
Osservo che $f(x, y) = x^2 + (5 - 2x^2) - 3x = -x^2 - 3x + 5$ in V

Quindi i max/min che sto cercando sono anche max/min
di $\varphi(x, y) = -x^2 - 3x + 5$ in V .

Quando siamo in V , x varia tra $\pm \sqrt{\frac{5}{2}}$,
quindi basta fare

max/min di $-x^2 - 3x + 5$ al variare di

x in $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$. Dalla figura il p.to
di minimo è nell'estremo destro



Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
 max/min di $f(x, y, z) = x - y + z$

$W \Rightarrow$ max e min esistono

staz. e stug. int. : $\emptyset$

Ci si riduce al bordo

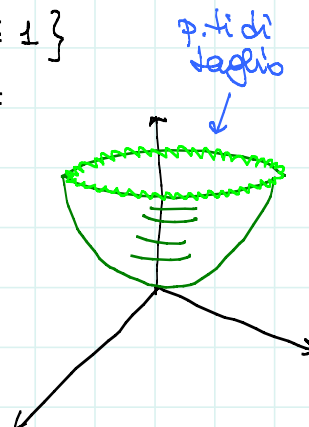
$\rightarrow$ pezzo di paraboloide

($z - x^2 - y^2 = 0 \rightsquigarrow 1$ moltiplicatore)

$\rightarrow$ cerchio superiore ($z = 1, x^2 + y^2 \leq 1 \rightsquigarrow$ parametrizzo)

$\rightarrow$ p.ti di taglio descritti da due equazioni ($z = x^2 + y^2, z = 1$)
 quindi tecnicamente lo posso trattare con 2 moltiplicatori.

— 0 — 0 —



ANALISI 2

LEZIONE 12

Note Title

06/10/2023

Limiti all'infinito in più variabili $D \subseteq \mathbb{R}^d$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Vogliamo definire

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{n.e.} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Def. di $\textcircled{4}$ Nessuno dei precedenti

Def. di $\textcircled{2}$ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$
 $\uparrow$ anche enorme

Def. di $\textcircled{3}$ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$
 $\uparrow$ anche enorme negativo

Def. di $\textcircled{1}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$

Oss. Le definizioni assumono che

$$\forall R > 0 \quad D \setminus B(0, R) \neq \emptyset$$

Come dimostro che un limite all'infinito esiste?

In due variabili, spero di ottenere una disuguaglianza del tipo

$$f(p \cos \theta, p \sin \theta) \geq \underline{g(p)} \quad \uparrow \text{ } g \text{ dipende solo da } p$$

$$\text{con } \lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = +\infty$$

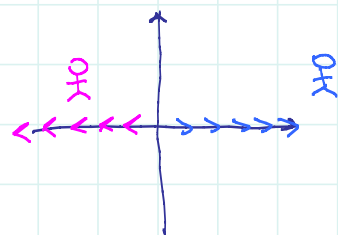
Come dimostro che non esiste? Trovo due sequenze che vanno all'infinito (defin. fuori dalle palle) in cui f ha limiti diversi.

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = x + 3y$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y)$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$$

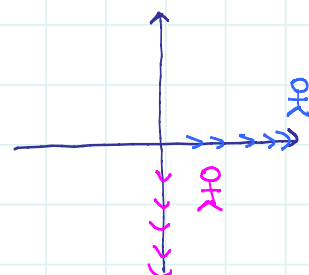
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$$



Esempio 2 $D = \mathbb{R}^2$ $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2 + y^3$ N.E.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, -t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^3 = -\infty$$



Esempio 3 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in D}} (x+y) = +\infty$

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\geq m \rho$$

$$\uparrow \min \{ \cos \theta + \sin \theta : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \} > 0$$

per il solito discorso

Ora basta osservare che $m\rho \rightarrow +\infty$ quando $\rho \rightarrow +\infty$

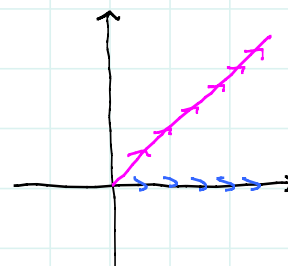


Esempio 4 $D = 1^o$ quadrante

$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in D}} xy$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$



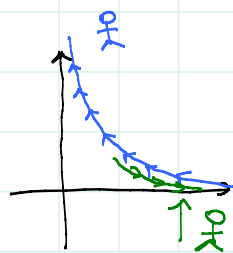
Esempio 4 bis

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x>0 \quad y>0}} xy$$

NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{t}, t\right) = 1$$



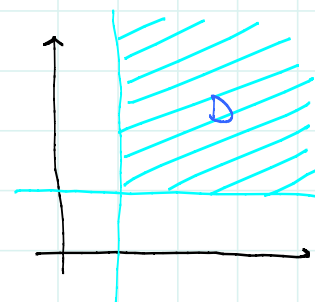
Troviamo un senno che va a 0?

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(t, \frac{1}{t^2}\right) = 0$$

Esempio 5

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 1 \quad y \geq 1}} xy = +\infty$$

D



Provo con le polari

$$\underbrace{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}_{\geq m} \stackrel{?}{\geq} m \rho^2$$

↑ NON È POSSIBILE PERCHÉ IN D
ci sono p.ti con $\theta \sim 0$ o con $\theta \sim \frac{\pi}{2}$

Dico che

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad \forall (x,y) \in D$$

Se la dimostro ho finito. Infatti so già che $x+y \rightarrow +\infty$ su tutto il 1° quadrante, quindi in particolare in D. A quel punto concludo per confronto.

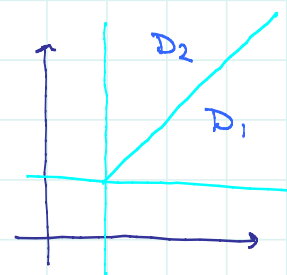
Come dimostro la disug.?

Se $(x,y) \in D_1$, allora

$$xy \underset{y \geq 1}{\geq} x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \underset{x \geq y \text{ in } D_1}{\geq} \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

Se $(x,y) \in D_2$, allora

$$xy \underset{x \geq 1}{\geq} y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \underset{y \geq x \text{ in } D_2}{\geq} \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$



Modo alternativo Faccio un cambio di variabili

$$x = 1+u \quad y = 1+v$$

in modo da ritrovare la condizione $u \geq 0, v \geq 0$

Nelle nuove variabili il limite diventa

$$\lim_{\substack{u^2+v^2 \rightarrow +\infty \\ u \geq 0, v \geq 0}} \underbrace{(1+u)(1+v)}_{1+u+v+uv \geq u+v}$$

Da qui si conclude per confronto.

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x+3xy}{x^2+2y^2}$ N.E.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0 \quad \ddot{}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+3t^2}{3t^2} = 1$$

Esempio 6 bis Stesso limite in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Il limite esiste e fa 0.

[È ovvio da $f(t,0)$ che se esiste, allora è nullo].

$$\boxed{0} \leq f(x,y) \leq \frac{x+3x\sqrt{x}}{x^2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Ora basta osservare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} x = +\infty \quad (\text{ad esempio perché } x \geq \frac{1}{2}(x+y) \text{ in } D)$$



Conclusione con i carabinieri.

— 0 — 0 —

ANALISI

2

-

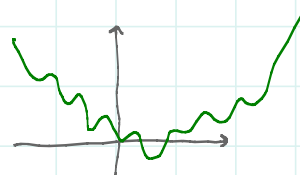
LEZIONE 13

Note Title

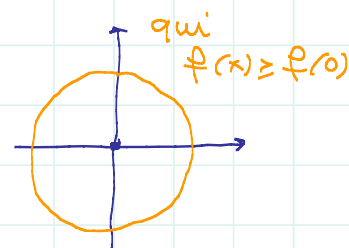
09/10/2023

Teorema di WEIERSTRASS generalizzatoAnalisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ esiste.Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ esiste.Dim Per definizione di limite

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

Considero $m := \min \{f(x) : x \in B(0, R)\}$
 $\uparrow$ esiste per w. classico $\uparrow$ chiusa

Dico che m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^d$. Infatti→ se $\|x\| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ perché $x \in B(0, R)$ → se $\|x\| > R$, allora per la scelta di R

$$f(x) \geq f(0) \geq m$$

$\uparrow$
perché 0 è un competitor
per la scelta di m .

— o — o —

Altra possibile variante Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

(i) $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ [basta in realtà $\limsup \leq 0$]

(ii) esiste $x_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $f(x_0) > 0$. [basta in realtà $f(x_0) \geq 0$]

Allora esiste $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R}^d \}$.

Dim. Come prima

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) < \underbrace{f(x_0)}_{\substack{\text{shetto} \\ \downarrow \\ \text{è nella def. di limite.}}} \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

Come prima poniamo

$$M := \max \{ f(x) : x \in B(0, R) \}$$

e dimostriamo che è max ovunque. Infatti

→ se $\|x\| \leq R$ allora $f(x) \leq M$ per def. di M

→ se $\|x\| > R$, allora

$$f(x) \leq f(x_0) \leq M$$

$\uparrow$ scelta di R $\uparrow$ x_0 è un competitor per la def. di M

Nell'ultimo passaggio serve che $x_0 \in B(0, R)$, perché fuori dalla $f(x) < f(x_0)$

— o — o —

Variante indebolendo (ii) chiedendo solo $f(x_0) \geq 0$.

Bisogna distinguere due casi.

① Se $f(x) > 0$ da qualche parte, allora posso trovare un $f(x_0) > 0$ e procedo come prima.

② Se $f(x) \leq 0$ sempre, ma allora x_0 con $f(x_0) = 0$ è p.to di max gratis.

— o — o —

Esempio 1 Inf / Sup / Max / Min su tutto $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

Osserviamo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$

$$0 \leq |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leq \frac{\rho |\cos \theta|}{\rho^2 + 1} \leq \boxed{\frac{\rho}{\rho^2 + 1}} \underset{\downarrow 0}{\rightarrow}$$

Inoltre $f(2, 3) > 0$, quindi per la variante di prima esiste max.

Allo stesso modo $f(-2, 3) < 0$, e come prima si dimostra che esiste min.

Ora cerchiamo max/min indagando tra i p.ti stazionari.

$$f_x(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + 1}{(\quad)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x(-2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$xy = 0 \begin{cases} \nearrow x = 0 \leadsto \text{guai nella 1}^a \\ \searrow y = 0 \leadsto x = \pm 1 \leadsto (\pm 1, 0) \end{cases}$$

Conclusione: $(1, 0)$ p.to di max, $(-1, 0)$ p.to di min.
— 0 — 0 —

Esercizio (Hard Hard)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ .

Supponiamo che f abbia due p.ti di min. assoluto.

Possiamo concludere che f ha altri p.ti stazionari?

Esempio 2 Inf (sup / max / min) in $\mathbb{R}^2$ di
 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Osserviamo che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq m_0 > 0}) - 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq \boxed{m_0 \rho^4 - \rho^2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Quindi gratis

→ sup = $+\infty$ e max non esiste

→ min esiste per W. generalizzato

Per trovare min cerco i p.ti stazionari

$$f_x = 4x^3 - 4y$$

$$f_y = 4y^3 - 4x$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \rightarrow x^3 - x = 0 \rightsquigarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$x=0 \quad x=1 \quad x=-1$$

$$(0,0)$$

$$(1,1)$$

$$(-1,-1)$$

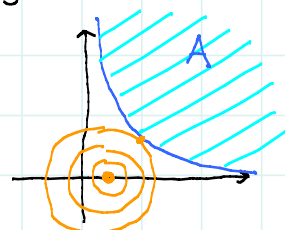
$$f(0,0) = 0$$

$$f(1,1) = f(-1,-1) = -2$$

$\uparrow$
min

Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy \geq 1\}$
 $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$

$$\sup = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = +\infty$$



Min esiste perché $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi

in A a maggior ragione.

A quel p.to lo posso cercare come sempre

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 14

Note Title

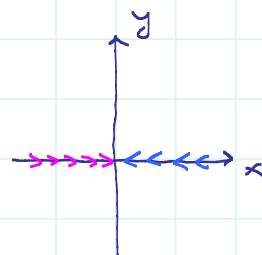
09/10/2023

Esempio 1 Inf / sup / Max / Min di $\frac{x}{x^2+y^2}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Due problemi: origine e non limitatezza.

$$\text{Stick} \quad \text{Sup} = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

$$\text{Stick} \quad \text{Inf} = -\infty \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(-t, 0) = -\infty$$



Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 - 7x^2y$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

Di conseguenza $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho, \theta) = +\infty \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

[Se $\cos \theta \neq 0$, allora vince ρ^4 ; se $\cos \theta = 0$, allora resta solo ρ^2]

In realtà però il limite non esiste, perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = -\infty \quad \circ$$

Questo ci dice anche che inf / sup su tutto $\mathbb{R}^2$ sono $\pm \infty$.

Esempio 3 Inf / sup su $\mathbb{R}^2$ di $f(x, y) = x^4 + y^2 - 7xy^2$

È ovvio che $\text{sup} = +\infty$. È ovvio anche che $\text{inf} = -\infty$ perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = -\infty$$

Esempio 4 Determinare per quali valori di $a > 0$ esiste

$$\lim_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \{x^4 + y^2 - 7|x|^a y : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 - 7t^{a+2} = -\infty \text{ se } a \geq 2$$

Quindi per $a \geq 2$ non c'è speranza.

Per $a < 2$ speriamo in w. generalizzato, quindi speriamo che il limite sia $+\infty$. Questo è vero e si può dimostrare in due modi.

1° modo **PAREGGIARE GLI ESPONENTI**

Pongo $x = u$ $y = v^2$ e mi riduco

$$\lim_{u^2 + v^2 \rightarrow +\infty} u^4 + v^4 - 7|u|^a v^2$$

[Ci sta sotto che $x^2 y^2 \rightarrow +\infty$ se e solo se $x^4 v^2 \rightarrow +\infty$]

In coord. polari

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - 7 \rho^{a+2} |\cos \theta| \sin^2 \theta \geq \boxed{m_0 \rho^4 - 7 \rho^{a+2}} \rightarrow +\infty \text{ se } a < 2$$

Morale: le palle in (u, v) diventano televisori in (x, y) quindi i limiti a $+\infty$ sono equivalenti.

2° modo **DISTINGUO LE ZONE**

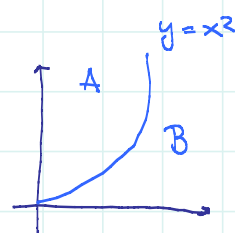
Supponiamo per semplicità che il limite sia solo nel 1° quadrante.

Nella zona A abbiamo che $y \geq x^2$, quindi "comanda y" quindi

$$x^4 + y^2 - 7x^a y \geq y^2 - y^{\frac{a}{2}} y \rightarrow +\infty$$

uso che $x \leq y^{\frac{1}{2}}$

quando $y \rightarrow +\infty$ e in A per forza $y \rightarrow +\infty$



Nella zona B abbiamo che $y \leq x^2$, quindi...

$$x^4 + y^2 - 7x^a y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } y \leq x^2}}{\geq} x^4 - 7x^a x^2 \rightarrow +\infty \quad (\text{se } a < 2)$$

quando $x \rightarrow +\infty$ e in B
per forza $x \rightarrow +\infty$

Esempio 5 $f(x, y) = y^2 + \arctan(xy)$

Inf / Sup / Max / Min in $\mathbb{R}^2$

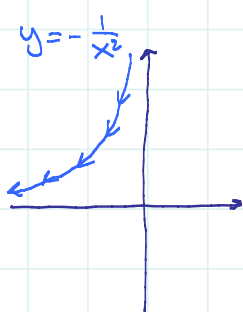
Sup = $+\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = +\infty$

Inf $\geq -\frac{\pi}{2}$ [$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y)$ N.E. perché $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0$]

Dico $\inf = -\frac{\pi}{2}$ e non è min. Non è min, perché non esistono pti in cui $f = -\frac{\pi}{2}$ (arctan dovrebbe essere $-\frac{\pi}{2}$)

Mi serve un curve che va a $-\frac{\pi}{2}$.

Se ne $y \sim 0$ e $xy \sim -\infty$



$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(-\frac{1}{t^2}, t)$

$= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 + \arctan(-\frac{1}{t}) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Esempio 5 bis Come prima, ma in $Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

Sup = $+\infty$ Inf = min = 0 con tutto l'asse x con $x \geq 0$
come pti di min.

Esempio 6 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - x^4 - y^6$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$$\inf = -\infty \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, 0) = -\infty$$

Spero che $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, y) = -\infty$ così ho w. generalizzato.

Facciamo il cambio di variabili

$$x = u^3 \quad y = v^2$$

e diventa

$$\lim_{u^2 + v^2 \rightarrow \infty} 2u^6 + 3v^4 - u^{12} - v^{12} = +\infty$$

$$\dots \text{ passo in polari } \dots \leq 2\rho^6 + 3\rho^4 - u\rho^{12}$$

L'aver posto $y = v^2$ (qui come prima) crea problemi quando $y < 0$ però in questo modo abbiamo fatto il limite nel 1° quadrante. Negli altri quadranti è uguale per simmetria.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 15

Note Title

09/10/2023

Ripasso forme quadratiche

In $\mathbb{R}^2$ $q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ (a, b, c dati)

In $\mathbb{R}^3$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Con una notazione più compatta

$$q(x) = x^t A x$$

dove x è un vettore colonna con d componenti e A è una matrice $d \times d$ simmetrica. Ad esempio

$$q(x,y,z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Guardando il segno, una forma quadratica si dice

→ definita positiva se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ con $x \neq 0$

→ " negativa < 0 "

→ semidefinita positiva se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

→ " negativa $\leq$ "

→ indefinita se non ricade nei precedenti, cioè

$\exists x_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(x_0) > 0$ ed $\exists y_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(y_0) < 0$.

Achtung! Definita positiva $\Rightarrow$ semidefinita positiva

Ci sono almeno 4 modi per scoprire in quale caso si ricade.

- Quando gli autovalori della matrice (che sono reali per forza)
- SOS (Sum of Squares). Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado lin. indep.

$$\begin{array}{ccc} \# \text{ espressioni con il } + & = & \# \text{ autovalori } > 0 \\ \text{"} & - & \text{"} < 0 \end{array}$$
- Sylvester (permanenze / variazioni nel segno dei minori sulla diagonale)
- Cartesio (segno dei coeff. del pol. caratteristico)

Esempi $q(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 6xy \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$\text{Det} = -1 \leadsto \text{Autov.} = + - \leadsto \text{indefinita}$

Analisi 2 $\text{Sup} = +\infty \quad \text{Inf} = -\infty$

Sia (a,b) t.c. $q(a,b) < 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(ta, tb) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 q(a,b) = -\infty \quad \ddot{\smile}$$

$q(x,y) = x^2 + 26y^2 - 10xy \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}$

$\text{Det} = 1 \leadsto \text{Autov.} \quad ++ \text{ oppure } --$

Ma $\text{Tr} = 26 \leadsto \text{sono } ++ \leadsto \text{definita positiva}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$

$\text{Det}_{2 \times 2} = -10$

$\text{Det}_{3 \times 3} = -2 + 3 + 3 + 18 = -11$

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \\ p & v & p \end{array}$$

Autovalori $++-$

Def. Una forma quadratica si dice **coerciva** se

$$\exists m_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad q(x) \geq m_0 \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Oss. Una forma quadratica coerciva è per forza def. pos. e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$$

(per confronto)

Teorema Definita positiva $\Rightarrow$ coerciva.

Dim. di Analisi 2 Osserviamo che una forma quadratica è 2-omogenea, cioè

$$q(t\vec{v}) = t^2 q(\vec{v})$$

Pongo $m_0 := \min \{ q(x) : \|x\| = 1 \}$

bordo della palla = insieme compatto

Dico che $m_0 > 0$ se q è def. positiva. A questo p.to avrei concluso perché

$$q(x) = q(\underbrace{\|x\|}_t \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{sul bordo della palla}}) = \|x\|^2 q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\|^2 \cdot m_0$$

(se $x=0$ non c'è nulla da dimostrare)

Ora $m_0 = q(v_0)$ con $\|v_0\| = 1$ e quindi, essendo la forma definita positiva, per forza $m_0 > 0$.

Dim. di Algebra lineare Supponiamo che la matrice sia diagonale. Allora

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_d x_d^2 \geq \underbrace{\min \{ \lambda_i \}}_{m_0} \cdot \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_d^2)}_{\|x\|^2}$$

Quindi SE la matrice è diagonale e definita positiva, allora la forma è coerciva e $m_0 = \text{minimo degli autovalori}$

In generale, per il teorema spettrale esiste M tale che

$$M^t A M = D \quad \text{e} \quad \underbrace{M^t M = I_d}_{M \text{ ortogonale}}$$

$\uparrow$
diagonale

Ora

$$\begin{aligned} q(x) &= x^t A x \\ &= x^t M D M^t x \\ &= (M^t x)^t D (M^t x) && \text{pongo } M^t x = y \\ &= y^t D y \\ &\geq m_0 \|y\|^2 \\ &= m_0 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Quindi ci serve che $\|y\|^2 = \|x\|^2$, il che è vero perché M è ortogonale:

$$\|y\|^2 = y^t y = \underbrace{(M^t x)^t}_{\text{def. di } y} M^t x = x^t M M^t x = x^t x = \|x\|^2$$

Oss. Se calcoliamo $\min \{q(x) : \|x\| = 1\}$ con i mult. di Lagrange, i candidati sono gli autovettori e i corrispondenti moltiplicatori sono gli autovalori.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 16

Note Title

16/10/2023

Derivate successive in più variabiliEsempi $f(x, y) = x^2y + y^3$

$$f_x(x, y) = 2xy$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0$$

e così via.

$$f_{xy}(x, y) = 2x$$

$$f_{xxy}(x, y) = 2$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

A priori, per una funzione di 2 variabili, le derivate di ordine k sono 2^k (più in generale d^k se siamo in d variabili)

Notazione $f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = D_{xxy} f$

Teorema di inversione dell'ordine di derivazione

Sotto vari set di ipotesi ragionevoli, vale che

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Corollario Se calcolo una qualunque derivata mista, ad esempio f_{xyxxy} , il risultato non dipende dall'ordine in cui ho eseguito le operazioni (sotto ipotesi ragionevoli), quindi è come fare f_{xxxxy} . [Vale con qualunque numero di variabili]

Conseguenza Per una funzione di 2 variabili, le derivate di ordine k sono $k+1$ (dipende solo da quante volte ho derivato risp. a x)

Ordine 4: $f_{xxxx}, f_{xxxxy}, f_{xxxyy}, f_{xyyyy}, f_{yyyyy}$

Due set di ipotesi ragionevoli:

- f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno di (x_0, y_0) e sono continue nel p.to (x_0, y_0)
- f_x e f_y sono differenziabili in (x_0, y_0)

Esistono esempi in cui non vale l'inversione, ad esempio

$$f(x, y) = \frac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2} \cdot xy \quad f(0, 0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = a$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) = b$$

Facendo i conti si verrebbe che le derivate f_{xy} e f_{yx} in $(0, 0)$ sono una a e una b .

Succede sempre se moltiplico per xy una $g(x, y)$ come sopra.

Analisi 1 Sia $x_0 \in (a, b)$, sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 .

Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ (p.to stazionario)

Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$(i) \quad x_0 \text{ p.to di min. loc.} \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

$$(ii) \quad \text{" max " } \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$$

$$(iii) \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ p.to di min. loc.}$$

$$(iv) \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{" max loc.}$$

$$(v) \quad f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{BOM}$$

[Pensare agli esempi x^4 , $-x^4$, x^5 che hanno tutti $f'(0) = f''(0) = 0$]

Ad Analisi 2 entra in gioco la matrice HESSIANA. In due variabili

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x, y) & u_{xy}(x, y) \\ u_{yx}(x, y) & u_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{Matrice simmetrica}$$

Analogamente, in d variabili $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$(Hf)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \leftarrow \text{Matrice simmetrica } d \times d$$

Analisi 2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sia x_0 p.to interno ad Ω , e sia f di classe C^2 in un intorno di x_0 .

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 p.to stazionario).

Allora si hanno le seguenti implicazioni.

(i) x_0 p.to di min. loc. per $f \Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$
(semidefinita positiva)

(ii) $\dots \max \dots \Rightarrow Hf(x_0) \leq 0$

(iii) $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc. per f
(definita positiva)

(iv) $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow \dots \max \dots$

(v) $Hf(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max né min locale

(vi) $Hf(x_0) \geq 0$ oppure $Hf(x_0) \leq 0 \Rightarrow \text{BOH}$

Esempio 1 $f(x, y) = x \sin y$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f_x(x, y) = \sin y$$

$$f_y(x, y) = x \cos y$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \rightsquigarrow \text{stazionario}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autovalori } + -$$

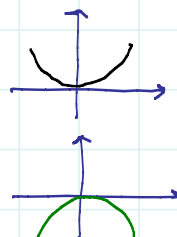
$\Rightarrow Hf(0, 0)$ indefinita $\Rightarrow (0, 0)$ non è né p.to di max loc., né p.to di min. loc.

In questo caso è un p.to di sella

[Geometricamente: c'è un semicircolo che vede un max e un semicircolo che vede un min]

$$f(t, t) = t \sin t = t^2 + o(t^2)$$

$$f(t, -t) = t \sin(-t) = -t^2 + o(t^2)$$



Esempio 2 $f(x, y) = x^4 - \sin^2 y$
 $f_x(x, y) = 4x^3$ $f_y = -2 \sin y \cos y$
 $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ p.to staz.

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2\cos^2 y + 2\sin^2 y \end{pmatrix}$$

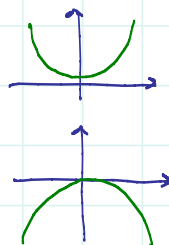
$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (\text{semidef. neg.})$$

$\Rightarrow$ BOH!!! (dalla sola Hessiana non possiamo dedurre quasi nulla)

Dobbiamo inventarci altro!

$$f(t, 0) = t^4$$

$$f(0, t) = -\sin^2 t$$



Anche in questo caso l'origine è né max, né min (una specie di sella)

Esempio 2bis $f(x, y) = -x^4 - \sin^2 y$. Come prima $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$
e

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ora $(0, 0)$ è un p.to di max. loc. globale
Basta osservare che $f(0, 0) = 0 \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Da $Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ possiamo solo escludere il min. loc.
— 0 — 0 —

ANALISI 2 - LEZIONE 17

Note Title

16/10/2023

POLINOMI DI TAYLOR

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia n un intero ≥ 0 .

Allora sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$\uparrow$ resto

Il polinomio è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$\swarrow$ derivata k-esima

ed è l'unico polinomio tale che $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ per ogni $k=0, 1, \dots, n$ (cioè le derivate di f e di P_n in 0 coincidono fino all'ordine k).

Il resto è piccolo nel senso che

$$R_n(x) = o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

(RESTO DI PEANO)

oppure nel senso che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\swarrow$ p.to misterioso compreso tra 0 e x che dipende da x

(RESTO DI LAGRANGE)

Nel caso di p.to base $\neq 0$ la formula è

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

$\swarrow$ alla Peano

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$\swarrow$ tra x_0 e $x_0 + h$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Allora sotto opportune ipotesi

$$f(x) = \underbrace{P_m(x)}_{\substack{\text{polinomio di grado } \leq m \\ \text{in } d \text{ variabili}}} + R_m(x)$$

dove $P_m(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq m$ le cui derivate coincidono in 0 (origine) con quelle di f fino all'ordine m . Il polinomio è dato dalla formula

$$P_m(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

dove abbiamo assunto il linguaggio dei multi-indici

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad \alpha_i \geq 0 \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

Il resto è piccolo

→ nel senso che $R_m(x) = o(\|x\|^m)$ cioè

$$\lim_{\boxed{x \rightarrow 0}} \frac{R_m(x)}{\|x\|^m} = 0$$

↑
limite in d variabili

PEANO

→ nel senso che
$$R_m(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!} x^\alpha$$

dove c è un pto misterioso che sta sul segmento che congiunge l'origine con il pto x .

Esempio 1 $f(x, y)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

$(0, 0)$
 $(1, 0)$ $(0, 1)$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2!0!} f_{xx}(0, 0) x^2}_{(2, 0)} + \underbrace{\frac{1}{1!1!} f_{xy}(0, 0) xy}_{(1, 1)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{0!2!} f_{yy}(0, 0) y^2}_{(0, 2)}$$

$$+ \frac{1}{3!0!} f_{xxx}(\dots) x^3 + \frac{1}{2!1!} f_{xxy}(\dots) x^2 y$$

$$+ \frac{1}{1!2!} f_{xyy}(\dots) xy^2 + \frac{1}{0!3!} f_{yyy}(\dots) y^3$$

+ ...

$$= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] + \frac{1}{6} [f_{xxx}(\dots)x^3 + 3f_{xxy}(\dots)x^2y + 3f_{xyy}(\dots)xy^2 + f_{yyy}(\dots)y^3]$$

ordine 0
ordine 1

[Da "fisici" all'ordine k c'è $\frac{1}{k!} (x\partial_x + y\partial_y)^k$]

Come si calcolano "davvero" i polinomi di Taylor?
 Come ad Analisi 1, usando gli sviluppi elementari.

Esempio $f(x, y) = x \sin y$ $n = 7$

$$f(x, y) = x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 + o(y^6) \right)$$

$$= xy - \frac{1}{6} xy^3 + \frac{1}{120} xy^5 + o((x^2 + y^2)^{7/2})$$

$\swarrow o(p^7)$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad m = 7$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{pongo } t = xy \text{ e ottengo}$$

$$f(x, y) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o(p^8)$$

$$= xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + \underbrace{o(p^8)}_{\uparrow} \leftarrow o((x^2y^2)^{3/2})$$

↑
 che sarebbe il termine successivo
 x^5y^5 quindi di ordine 10, quindi
 posso mettere $o(p^a)$ per ogni
 $a < 10$.

$$g(x, y) = (x + y^2) \cos(xy) \quad m = 5$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots$$

$$g(x, y) = (x + y^2) \left(1 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(p^7) \right)$$

↑ il termine successivo
 sarebbe x^4y^4

$$= \underbrace{x + y^2 - \frac{1}{2}x^3y^2}_{P_5(x, y)} + o(p^5)$$

Quanto vale $g_{xy}(0, 0)$? Vale 0!

$$\text{Basta osservare che } P_5(x, y) = \dots + \underbrace{\frac{g_{xy}(0, 0)}{2! 2!} x^2 y^2}_{\text{multiindice } (2, 2)} + \dots$$

Nel vostro polinomio x^2y^2 "non c'è", quindi la derivata
 deve essere 0 !!!

Quanto vale $g_{xyxy}(0,0)$?

Tanto lo stesso di $g_{xxxy}(0,0)$

$$P_5(x,y) = \dots + \frac{g_{xxxy}(0,0)}{3!2!} x^3 y^2 + \dots$$

$$= \dots - \frac{1}{2} x^3 y^2 + \dots$$

Quindi $g_{xxxy}(0,0) = -\frac{1}{2} 3!2! = -6$ ☺

$$f(x,y) = x \sin y \quad n=2$$

$$f(x,y) = xy + o(p^2) \quad [\text{Volevamo } xy + o(p^3)]$$

Da questo vedo che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono termini di grado 1)

e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 18

Note Title

16/10/2023

Taylor $\Rightarrow$ Studio locale dei p.ti stazionari

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \nabla f(0) = 0 \quad Hf(0) > 0$$

Allora 0 è p.to. di min. rel. per f

Dim. Scrivo Taylor di ordine 2. Osservo che si scrive come

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &\quad + \langle \nabla f(0), x \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{x^t Hf(0) x}_{\text{forma quadratiche associata alla matrice Hessiana}} \\ &\quad + o(\|x\|^2) \end{aligned}$$

$$= f(0) + \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

Possiamo riscriverlo come

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} \underbrace{m}_{>0} \|x\|^2 + o(\|x\|^2)$$

Ho usato che le matrici definite positive sono coercive

$$= \|x\|^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2} \right)$$

Per definizione di limite

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \underbrace{\frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}}_{\rightarrow 0} \geq -\frac{m}{4} \quad \forall x \in B(0, r)$$

Otengo che

$$f(x) - f(0) \geq \|x\|^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right)$$

$$= \frac{m}{4} \|x\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in B(0, r)$$

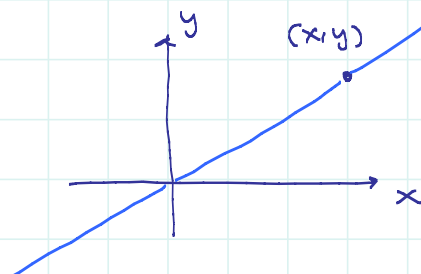
Questo mi dice che $f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in B(0, r)$, cioè
 0 è p.to di min. loc. (la disug. è stretta se $x \neq 0$)

— o — o —

Taylor Lagrange in dim 2, dimostrazione parziale

$f(x, y)$. Fissati (x, y) costruisco

$$\varphi(t) := f(tx, ty)$$



Ora $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quindi posso
 applicare Taylor di Analisi 1:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} \varphi''(0)t^2 + \frac{1}{6} \varphi'''(c)t^3$$

(ci siamo fermati con $m=2$) Ora sostituisco $t=1$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(1) & = & \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(0) + \frac{1}{6} \varphi'''(c) \\ \text{"} & & \text{"} \\ f(x, y) & = & f(0, 0) \end{array} \quad c \in (0, 1)$$

$$\varphi'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{=} f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y$$

$$\text{quindi } \varphi'(0) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(tx, ty)x^2 + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yx}(tx, ty)yx + f_{yy}(tx, ty)y^2$$

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2$$

e così via per induzione.

Quando vado a calcolare il resto, in questo caso

$$\frac{1}{6} \varphi'''(c)$$

la derivata terza di $f(x,y)$ me la ritrovo in $C(x,y)$, che è un p.to del segmento che congiunge $(0,0)$ e (x,y) .

— o — o —

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f(0) = 0$, $Hf(0)$ indefinita.

Allora 0 non è max/min locale

Dim Per ipotesi

$$\exists v \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } v^t Hf(0) v > 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } w^t Hf(0) w < 0$$

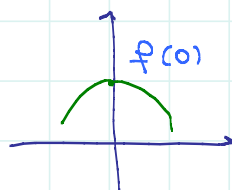
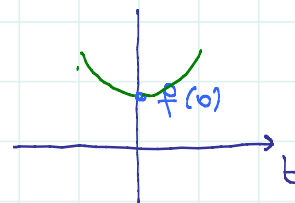
Scrivo Taylor di ordine 2:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

Considero $f(tv) = f(0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{v^t Hf(0) v}_{>0} + o(t^2)$

e considero analogamente

$$f(tw) = f(0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{w^t Hf(0) w}_{<0} + o(t^2)$$



— o — o —

Esercizio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4 - 4xy$

Trovare i p.ti stazionari e classificarli

$$f_x(x,y) = 2x - 4y$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^3 = x \end{cases} \rightsquigarrow y^3 = 2y \rightsquigarrow y(y^2 - 2) = 0$$

$$y = 0 \rightsquigarrow (0,0)$$

$$y = \sqrt{2} \rightsquigarrow (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$y = -\sqrt{2} \rightsquigarrow (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -16 \rightsquigarrow \text{autov.} + -$$

$\rightsquigarrow$ indefinita $\rightsquigarrow$ sella

$$Hf(\pm 2\sqrt{2}, \pm \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = 48 - 16 > 0$$

$\text{Tr} = 26$

$\rightsquigarrow$ Autovalori: ++

$\rightsquigarrow Hf > 0$ (def. pos.)

$\rightsquigarrow$ p.ti di min. loc.

Versione alternativa del discorso: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

① L'origine è un p.to stazionario: f è il P_4 di se stessa e non ha termini di 1° grado $\rightsquigarrow (0,0)$ è stazionario

② $f(t,0) = t^4 \rightsquigarrow$ vede un min in 0

$$f(t^4, t^2) = t^8 + t^8 - 4t^6 \rightsquigarrow \text{vede un max in 0}$$

$$f(t,t) = t^2 + t^4 - 4t^2 = -3t^2 + t^4 \rightsquigarrow \text{vede un max in 0}$$

③ Quanto fa il limite all'infinito

Mi metto nel primo quadrante e pongo gli esponenti

$$x = u^2$$

$$\rightsquigarrow f(u^2, v) = u^4 + v^4 - 4u^2v$$

$$y = v$$

Ora

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^2, v^2) = +\infty$$

$$\text{perché in polari verrebbe } \geq u\rho^4 - 4\rho^3$$

④ Per W. generalizzato ora sappiamo che f ammette minimo. Quindi ci sono altri p.ti stazionari oltre all'origine e non saranno sugli assi perché sugli assi $f \geq 0$ ed il minimo è negativo (in $(0,0)$ vale 0 e si può scendere).

A questo p.to i p.ti stazionari di minimo sono almeno 2

$$f(x, y) = f(-x, -y).$$

Quindi gli altri due sono per forza minimi.

— o — o —

—

19

20/10/2023

Esercizio 1 $f(x, y) = \arctan(xy) - x^2y$

L'origine è star. ? Se sì, di che tipo ?

Taylor di ordine 3:

$$f(x,y) = xy - x^2y + o(p^5)$$

↑ ↑

instant = $t - \frac{1}{3}t^3 + \dots$ $(x^2y^2)^{5/2}$

Ci dia che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono termini lineari)

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det = -1 \leadsto \text{autov. : } + -$$

$\leadsto$ Forma indefinita
 $\leadsto (0,0)$ p.to di sella

Inf/sup di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$? $+\infty$ e $-\infty$!

$f(t, t) = \arctan(t^2) - t^3$ e poi quando $t \rightarrow \pm\infty$

Alternativa $f(1,t) = \arctan t - t$ e ancora $t \rightarrow \pm \infty$

Inf / Sup su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$? $f(x, y) = \arctan(xy) - x^2y$

$\inf = -\infty$ perché è lecito usare $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$

Cosa possiamo dire del $\sup$? Intanto è > 0 , perché

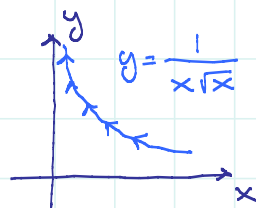
$$f(t, t) = \arctan(t^2) - t^3 = t^2 + o(t^2) \text{ per } t \rightarrow 0$$

quindi $f(t, t) > 0$ per $t > 0$ piccolo $\Rightarrow f$ assume anche valori positivi. Stima banale $f(x, y) < \frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{I}$ quadrante

Per dire che $\sup = \frac{\pi}{2}$, basta un sequo che tenda a $\frac{\pi}{2}$

Cosa serve? xy grande $x^2y \approx 0$

$$f\left(\frac{1}{t^2}, t^3\right) = \arctan(t) - \frac{1}{t} \quad \text{e poi mandando } t \rightarrow +\infty$$



Esempio 2 Inf / sup di $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6$
nell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1\}$$

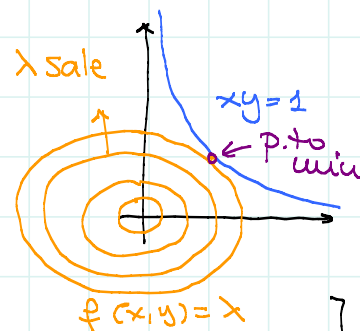
A è compatto? È chiuso perché c'è $\mathcal{L}'$ = nella definizione
Non è limitato perché

$$x = n \quad y = \frac{1}{n} \quad z = 1 \quad n \geq 1 \text{ intero}$$

sta nell'insieme e la sua norma $\sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2} + 1} \rightarrow +\infty$

Sup = $+\infty$ Basta fare $f(n, \frac{1}{n}, 1)$ per $n \rightarrow +\infty$

[Allenamento : se fosse $f(x, y) = x^2 + y^4$
con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\}$



Ci aspettiamo che anche in $\mathbb{R}^3$ il min. esista.

Proviamo con Weierstrass generalizzato. Serve che

$$\lim_{\substack{x^2 + y^4 + z^6 \rightarrow +\infty \\ (x, y, z) \in A}} f(x, y, z) = +\infty$$

Questo è vero pure su tutto $\mathbb{R}^3$ (posso parraggiare gli esponenti,
oppure osservare che

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6 \geq x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$\uparrow y^4 \geq y^2 - 1, \quad z^6 \geq z^2 - 1$

[Fatto generale: $x^2 \leq x^4 + 1$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Idem con altre potenze più grandi di 2 a dx]

W. generalizzato ok $\Rightarrow$ esiste unu

Lo cerchiamo con i moltiplicatori

1° sistema $\nabla g = 0, g = 0$ $g(x, y, z) = xyz - 1$

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xy = 0 \\ xz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \leadsto \text{NO SOL.}$$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\begin{cases} 2x = \lambda yz & \cdot x \\ 4y^3 = \lambda xz & \cdot y \\ 6z^5 = \lambda xy & \cdot z \\ xyz = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x^2 &= \lambda & x &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \\ 4y^4 &= \lambda & y &= \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}} \\ 6z^6 &= \lambda & z &= \sqrt[6]{\frac{\lambda}{6}} \end{aligned}$$

il loro prodotto deve fare 1

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{\lambda}{6}} = 1$$

$\leadsto$ trovo $\lambda \leadsto$ trovo x, y, z ed è l'unico p.to di unu.

Esercizio 3 $\inf / \sup f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$ in

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

① A non è compatto (è limitato, ma non chiuso)

② Indaghiamo $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

Brutal mode: $\frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \sim \frac{1 + xy - 1}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \leadsto \text{N.E.}$

Rigoroso $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$
 ↑ Analisi 1

③ Indaghiamo $\max/\min \{ f(x, y) : x^2 + y^2 = R^2 \}$

Questo esiste se $R > 0$ per W. Nella circ. abbiamo

$$f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{R^2}$$

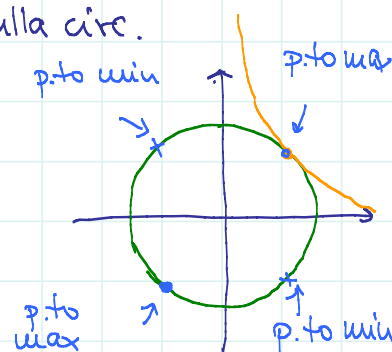
quindi f avrà $\max/\min$ quando xy ha $\max/\min$

Quindi basta trovare $\max/\min$ di xy sulla circ.

Max quando $x = y = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$

Min quando $x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \quad y = \mp \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$\text{Max} = \frac{e^{\frac{R^2}{2}} - 1}{R^2} \quad \text{Min} = \frac{e^{-\frac{R^2}{2}} - 1}{R^2}$$



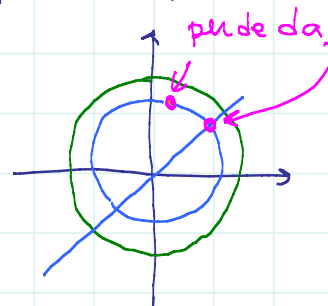
Questo discorso ci dice che per trovare $\inf/\sup$ basta restringersi ai p.ti con $x=y$ (per il $\sup$) e a quelli con $y=-x$ (per l' $\inf$.)

Quindi alla fine basta studiare le due funzioni

$$\varphi_1(t) = f(t, t) = \frac{e^{t^2} - 1}{2t^2} \quad \text{per il sup}$$

$$\varphi_2(t) = f(t, -t) = \frac{e^{-t^2} - 1}{2t^2} \quad \text{per l'inf.}$$

funzioni pari



Dove varia t ? $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

[Corretto dopo video]

— 0 — 0 —

ANALISI

2

-

LEZIONE 20

Note Title

20/10/2023

Esercizio 1 $f(x, y) = x^2 + \sin(y^4) + x \arctan(y^2)$

④ L'origine è stazionario? Di che tipo?

Taylor: $x^2 + y^4 + xy^2 + o((x^2 + y^2)^3)$ il termine successivo sarebbe $-\frac{1}{3}xy^6$

$\sin(y^4) = y^4 + o(y^8)$ $\arctan(y^2) = y^2 + o(y^6)$

Sicuramente $(0, 0)$ è stazionario perché non ci sono termini lineari

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ semidefinita > 0 (autovalori: $0, 2$)

$\rightsquigarrow (0, 0)$ non è p.to di max relativo (Hf dovrebbe essere ≤ 0)

$\rightsquigarrow$ restano aperti min / sella

Provo a perseggiare gli esponenti e vedo cosa succede

$x = u^2$ $y = v$ o ancora meglio, visto che i quadranti problematici sono quelli con x negativo

$x = -u^2$ $y = v$
↑↑

$f(-u^2, v) = u^4 + \sin(v^4) - u^2 \arctan(v^2)$
 $= u^4 + v^4 - u^2 v^2 + o((u^4 + v^2)^2)$

Vediamo che succede in coord. polari

$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + o(\rho^4)$
se fosse $\geq m > 0$ avrei finito

$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq m \rho^4 + o(\rho^4)$
 e questa ha un min. nell'origine
 Per dimostrare che esiste $m > 0$ ci sono 2 modi
 $\rightarrow$ studio della funzione $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta$
 $\rightarrow$ completo i quadrati

$$\begin{aligned}
 & \cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta + \frac{3}{4} \sin^4 \theta \\
 &= \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)^2 + \frac{3}{4} \sin^4 \theta
 \end{aligned}$$

Questo per W ha un minimo raggiunto in un certo θ_0 .
 Può essere < 0 il min? NO perché sono $\square$
 Può essere $= 0$? NO perché dovrebbero essere $= 0$ sia $\sin^4 \theta_0$
 sia $\cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0$,
 cioè $\sin \theta_0 = \cos \theta_0 = 0$.

Conclusione: nelle variabili nuove la funzione f ha un
 min. loc. stretto in $(0,0)$ cioè esiste una palla
 centrata in $(0,0)$ in cui $f > 0$ tranne in $(0,0)$
 dove vale 0.
 La palla in (u,v) diventa un "telescopio" in (x,y) .

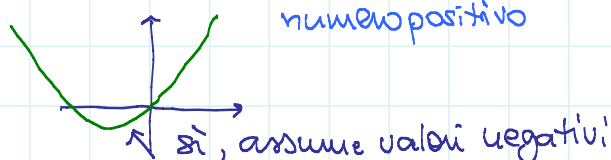
② $\sup f$ in $\mathbb{R}^2 = +\infty$ [Basta fare $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$]

③ $f(x,y) = x^2 + \sin(y^4) + x \arctan(y^2)$
 $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x,y) < 0$?

Basta considerare $f(t, \sqrt[4]{\pi}) = t^2 + t \boxed{\arctan(\pi)}$
 numero positivo

$$= t^2 + ut$$

con $u > 0$



Esempio 3 $f(x, y, z) = x - y + z$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y=3, xy+z=2 \}$$

A è compatto? Sì!

È chiuso per via degli $=$ e $\geq$

È limitato perché $x \in [0, 3], y \in [0, 3], z \in [0, 2]$

A è vuoto? NO [Ad esempio $(1, 2, 0) \in A$ oppure $(0, 3, 2) \in A$]

Idea 1 Sostituisco i vincoli $y = 3 - x$
 $z = 2 - xy = 2 - x(3 - x)$

$\rightarrow$ studio $x - (3 - x) + 2 - x(3 - x) =$ parabola
 per quali valori di x ? Dove succedere

$$y \geq 0 \quad \text{cioè } x \leq 3$$

$$x \geq 0 \quad \text{cioè } x \geq 0$$

$$z \geq 0 \quad \text{cioè } 2 - x(3 - x) \geq 0$$

$$z \leq 2 \quad \text{cioè } x(3 - x) \geq 0$$

Idea 2 Due moltiplicatori + i p.ti di taglio ($x=0, y=0, z=0$)
 — o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 21

Note Title

23/10/2023

INTEGRALI DOPPI (secondo RIEMANN)Integrali **PROPRI** Setting : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo

(i) f è LIMITATA, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(ii) f nulla al di fuori di un limitato, cioè

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x,y) = 0 \text{ se } \|(x,y)\| \geq R$$

Andremo a definire

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

$\uparrow$ Int. doppio $\uparrow$ funzione integranda $\uparrow$ variabili di integrazione

Quello che poi si usa è

$$\iint_A f(x,y) dx dy \quad f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\uparrow$ zona di integrazione

$$\text{Solito trucco : } \iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y) dx dy$$

dove

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

L'integrale è proprio se f è limitata + A limitato.

Interpretazione geometrica

$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{Volume CON SEGNO}$ della parte di spazio compresa tra il piano base xy ed il grafico di f (le parti sopra contano con il segno $+$, quelle sotto con il segno $-$)

Definizione rigorosa (Presentazione alla DARBOUX)

Le tappe successive

- caso banale
- caso semibanale
- caso generale

Caso Banale $f(x,y)$ è uguale ad una costante λ in un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ e 0 altrove.
Il sottografico è un parallelepipedo, per cui si definisce

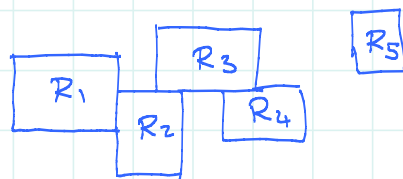
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\text{area base} \\ \uparrow \\ \text{altezza CON SEGNO}}}$$

Caso semi-banale Step-function = funzione a gradini

C'è un insieme A costituito da una unione finita di rettangoli $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, a due a due senza parti comuni in comune.

In R_i si ha che $f(x,y) = \lambda_i$ costante.

Al di fuori vale 0.



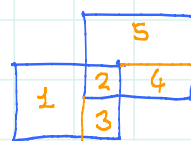
Intuitivamente il grafico è una "unione di grattacieli"

Si definisce

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^m \underbrace{\lambda_i \text{Area}(R_i)}_{\text{volume con segno del parallelepipedo } i\text{-esimo}}$$

Oss. Le step function sono comb. lineari di funzioni del caso banale.

Questo è vero anche se i rettangoli si sovrappongono



Prop L'integrale di una step function dipende solo dalla funzione, e non da come è scritta a partire da una unione di rettangoli.

Caso generale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un insieme limitato.

Integrale superiore di f

$$I^+(f) := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ è step funct.} \\ \text{e } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Integrale inferiore di f

$$I^-(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi \dots \text{ step function} \\ \text{e } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \dots \end{array} \right\}$$

Intuitivamente: approssimiamo f dall'alto e dal basso con delle step functions.

Prop. Per ogni f come sopra vale che

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

[Basta osservare che se due step funct. φ e ψ verificano
 $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) dx dy$$

cosa che risulta quasi ovvia se si osserva che φ e ψ possono essere definite usando gli stessi rettangoli.]

Def. Se succede che $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo Riemann) e il valore comune si dice integrale doppio di f in $\mathbb{R}^2$.

Oss. Avere f limitata e nulla fuori da un limitato garantisce che esiste almeno una step funct $\geq f$ e almeno una step funct. $\leq f$ su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi facciamo inf e sup di insiemi non vuoti.

Domanda: esistono funzioni integrabili?

[Non è nemmeno ovvio che siano integrabili quelle del caso banale]

Oss. La funzione f è integr. se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono step. funct. $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ t.c. $\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$

Interpretazione geometrica di Analisi 1



Metateorema Funzioni decenti su insiemi decenti sono integrabili

↑
ad esempio
continua

↑
poligoni o comunque
regioni limitate da
curve "regolari"

[ufficialmente sarebbero insiemi
misurabili secondo Riemann,
cioè tali che la funzione che
vale 1 nell'insieme e 0
fuori è integrabile]

Proprietà delle funzioni integrabili

L'insieme delle funz. int. secondo Riemann è uno sp. vett. e
l'integrale è un'applic. lineare, cioè

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (f+g) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} g dx dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

Inoltre valgono due proprietà

$$\text{MONOTONIA : } f \leq g \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) dx dy$$

$$\text{e in particolare } \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$$

$$\text{ADDITIVITÀ risp. zona integr. } \iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A \dots + \iint_B \dots$$

se $A \cap B = \emptyset$ [conseguenza dell'additività
rispetto alla somma]

ANALISI 2

LEZIONE 22

Note Title

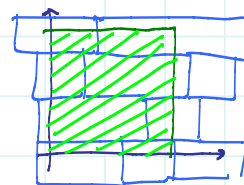
23/10/2023

Esempio di funzione NON integrabile (DIRICHLET 2D)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ con } x \neq y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica che $I^-(f) = 0$ e $I^+(f) = 1$

[Basta osservare che se prendo una step funct. $\geq f$, allora i rettangoli su cui vale ≥ 1 devono ricoprire il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ e analogo per ogni step funct. $\leq f$]

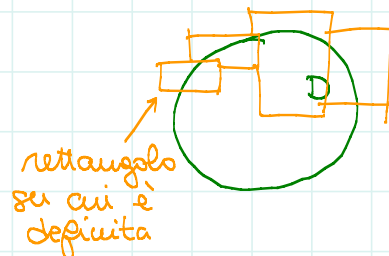


Oss. (Geometrica) Prendiamo $f(x,y)$ nulla fuori da un disco D e continua e positiva dentro.

Come è fatta una step function $\geq f$ su $\mathbb{R}^2$?

Ora i parallelepipedi devo "sforare in altezza" una anche al bordo, a meno che sia rettilineo e parallelo agli assi

Analogamente per una step function $\leq f$ su tutto $\mathbb{R}^2$, i rettangoli in cui è > 0 devono essere ben contenuti nel disco D .



— o — o —

TECNICHE DI CALCOLO

Caso dei rettangoli

$$A = [a, b] \times [c, d]$$

Formula di riduzione

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) \\ &= \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) \end{aligned}$$

Esempio $A = [0, 1] \times [2, 3]$ $f(x, y) = x + y^2 x^3$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 (x + y^2 x^3) dy$$

integro risp. a y, facendo finta che x sia costante

$$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{1}{3} y^3 x^3 \right]_{y=2}^{y=3}$$

primitiva rispetto a y

$$= \int_0^1 dx \left\{ 3x + 9x^3 - 2x - \frac{8}{3} x^3 \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{19}{3} x^3 + x \right\} \quad \text{da qui è analisi 1}$$

$$= \left[\frac{19}{12} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{19}{12} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12}$$

In alternativa

$$\iint_A (x + y^2 x^3) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 (x + y^2 x^3) dx$$

integro in x facendo finta che y sia costante

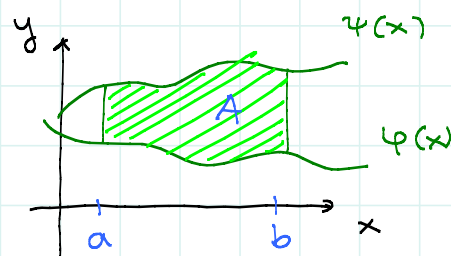
$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 dy \left[\underbrace{\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} y^2 x^4}_{\text{primitiva in } x} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dy \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} y^2 \right\} \\
&= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{12} y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{27}{12} - 1 - \frac{8}{12} = \frac{18 + 27 - 12 - 8}{12} = \frac{25}{12} \quad \ddot{\smile}
\end{aligned}$$

Calcolo degli insiemi NORMALI

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice NORMALE rispetto all'asse x se si presenta (o si può scrivere) nella forma

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

Analogamente, normale risp. asse y vuol dire che si scrive nella forma



$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

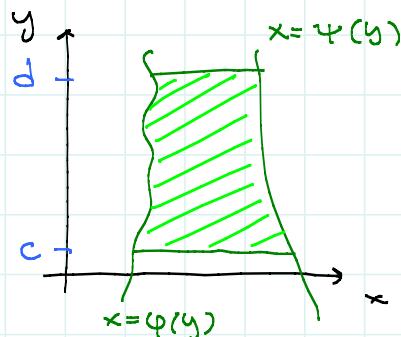
Formula di riduzione:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

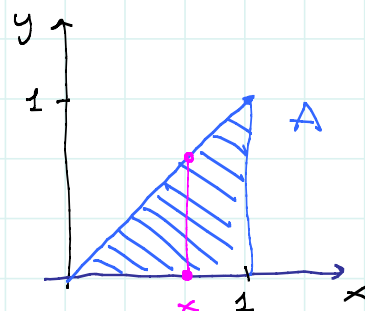
↑
normale
asse x

$$= \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

↑
normale
asse y



Esempio $A = \text{triangolo in figura}$
 $f(x, y) = xy^2$



1° modo Scrivo A come insieme normale risp. asse x

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x \}$$

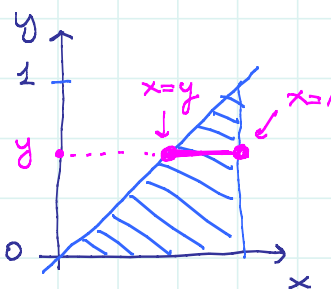
$$\begin{aligned} \iint_A xy^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x dy xy^2 = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{3} x^4 - 0 \right\} = \left[\frac{1}{15} x^5 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Più rapidamente:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy xy^2 = \int_0^1 x dx \underbrace{\int_0^x y^2 dy}_{\frac{1}{3} x^3} = \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{15}$$

2° modo Scrivo A come insieme normale rispetto asse y

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1 \}$$



$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx xy^2$$

$$= \int_0^1 y^2 dy \int_y^1 x dx = \int_0^1 y^2 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=y}^{x=1}$$

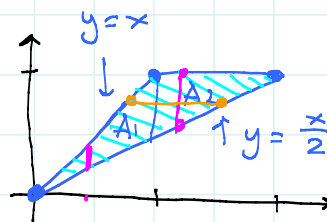
↑
primitiva in x

$$= \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^4 \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15} \quad \checkmark$$

Esempio $A =$ triangolo con vertici in
 $(0,0), (1,1), (2,1)$

$$\iint_A y^2 dx dy$$



1° modo Normale asse x

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= \iint_{A_1} \dots + \iint_{A_2} \dots \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy y^2 + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy y^2 \\ &= \text{da qui si fa il conto} \end{aligned}$$

2° modo Normale asse y

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], y \leq x \leq 2y \}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y^2 dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \underbrace{(y^2)}_{\text{constant}} = \int_0^1 y^2 dy \underbrace{\int_y^{2y} 1 \cdot dx}_y \\ &= \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4} \quad \ddot{\smile} \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

ANALISI 2

- LEZIONE 23

Note Title

23/10/2023

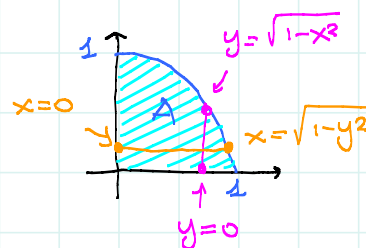
INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

insieme A
descritto in coord. polari

raggiamento

Esempio 1 $\iint_A y dx dy$



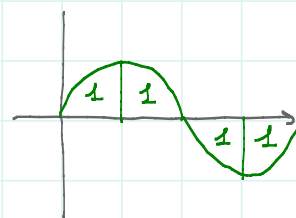
Osservo che A si scrive bene in
coord. polari

$$A = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

← nelle variabili ρ e θ è un rettangolo

$$\begin{aligned} \iint_A y dx dy &= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \quad \underbrace{\rho \sin \theta}_{y \text{ in coord. pol.}} \quad \underbrace{\rho}_{\text{ragg.}} \\ &\quad \underbrace{\text{A descritto in coord. polari}} \\ &= \int_0^1 \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta}_1 = \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Analisi 1 : le "semicirconferenze" di sin e cos
hanno area 1



2° modo A è normale risp. asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \\
 &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

3° modo A è normale risp. asse y

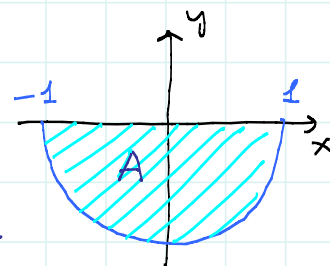
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \, \textcircled{y} = \int_0^1 y \, dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx \\
 &= \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} \, dy = \left[-\frac{1}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Verifica della primitiva: $\left[-\frac{1}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (1-y^2)^{\frac{1}{2}} (-2y) = y \sqrt{1-y^2} \quad \checkmark$

— o — o —

Esempio 2 $\iint_A x^2 \, dx \, dy$



Osservo che A in coord. polari si descrive come
 $\rho \in [0, 1], \theta \in [\pi, 2\pi]$ (volendo $\theta \in [-\pi, 0]$)

1° modo normale asse x

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \}$$

$$\iint_A x^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 x^2 \, dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 1 \, dy = \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \text{uhm...}$$

Analisi 1 $\int_a^b 1 dx = (b-a) = \text{lungh. intervallo}$

2° modo coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 dx dy &= \underbrace{\int_0^1 dp \int_{\pi}^{2\pi} d\theta}_{\substack{A \text{ in coord.} \\ \text{polari}}} \underbrace{p^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \underbrace{p}_{\text{rag.}} \\ &= \int_0^1 p^3 dp \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 p^3 dp = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Analisi 1 Se a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$, allora

$$\int_a^b \cos^2 \theta d\theta = \int_a^b \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} (b-a) = \text{metà lungh. intervallo}$$

Infatti $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$ perché è la stessa figura simmetrizzata

La somma dei due è l'integrale di $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, cioè la lungh. dell'intervallo.

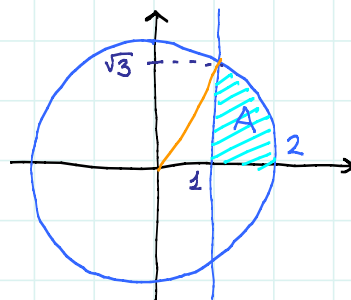
Poi i grafici si ripetono per simmetria.

Torniamo a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 t}_{x=\sin t} \cdot \underbrace{\cos t}_{dx=\cos t dt} \cdot \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt = \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 z dz \quad \begin{matrix} \uparrow \\ z=2t \\ dz=2dt \end{matrix} \\ &= \frac{\pi}{8} \quad \because \end{aligned}$$

Esempio 3 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1, y \geq 0 \}$

$$\iint_A x \, dx \, dy$$



1° modo Normale asse x

$$\begin{aligned} \iint_A x \, dx \, dy &= \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \cdot x \\ &= \int_1^2 x \sqrt{4-x^2} \, dx = \text{si fa} \end{aligned}$$

2° modo Normale asse y

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (4-y^2) \, dy = \text{si fa}$$

3° modo scomporre

$$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_S x \, dx \, dy - \iint_T x \, dx \, dy \quad \text{dove}$$

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [0, \frac{\pi}{3}] \}$$

$$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq \sqrt{3}x \}$$

Quindi entrambi si fanno molto comodamente

4° modo Polari dirette su A

Bisogna descrivere A in coord. polari

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\downarrow$$

$$\rho \in [0, 2]$$

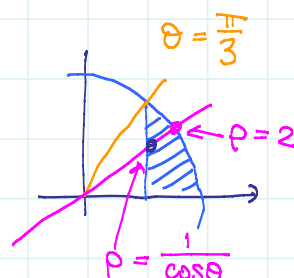
$$\downarrow$$

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$$

$$\downarrow$$

$$\rho \cos \theta \geq 1$$

[versi conetti dopo video]



$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho = \text{si fa.}$$

ANALISI 2

LEZIONE 24

Note Title

27/10/2023

INTEGRALI TRIPLI

Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ zona di integrazione LIMITATA } integrale
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funzione LIMITATA } proprio

Significato fisico Pensiamo

$A = \text{solido}$

$f(x, y, z) = \text{densità del materiale di cui è fatto } A$

In questo caso l'integrale è la massa totale di A .

Definizione

→ Caso banale: $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$f(x, y, z) = \text{costante} = \lambda$



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \cdot \text{Vol}(A) = \lambda (b-a)(d-c)(f-e)$$

↑
ha un segno

→ Caso semibanal: $f(x, y, z) = \text{step function}$

= comb. lineare delle funzioni
del caso banale

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Vol}(A_i)$$

↑ ↑
valore di f in A_i i -esimo pezzo

Caso generale : definiamo $I^+(f)$ e $I^-(f)$ come in due variabili
(pensiamo sempre di estendere f a 0 fuori di A)

In generale $I^+(f, \mathbb{R}^3) \geq I^-(f, \mathbb{R}^3)$ e se coincidono si dice che f è integrabile secondo Riemann...

Le proprietà dell'integrale sono le stesse di sempre.
— o — o —

Come si calcola Formule di riduzione

- $3 = 1+1+1 \rightarrow$ int. sui parallelepipedi
- $3 = 2+1 \rightarrow$ integr. per COLONNE
- $3 = 1+2 \rightarrow$ " " SEZIONI

$3 = 1+1+1$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

sono 6 possibili formule a seconda dell'ordine
in cui prendo le variabili

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$ $f(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{aligned} \iiint_A (x+yz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz (x+yz) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \underbrace{\left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=1}^{z=3}}_{\text{primitiva in } z} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left\{ 3x + \frac{9}{2} y - x - \frac{1}{2} y \right\} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \{ 2x + 4y \} = \int_0^1 dx \left[2xy + 2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= \int_0^1 dx \{ 4x + 8 \} = 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

Possibile alternativa

$$\iiint_A (x+yz) dx dy dz = \iiint_A x dx dy dz + \iiint_A yz dx dy dz$$

$$\iiint_A x \dots = \int_0^1 x dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz + \int_1^3 dz \int_0^2 dy \int_0^1 yz dx$$

$$= \int_0^1 4x dx + \int_1^3 z dz \int_0^2 y dy \int_0^1 1 dx$$

$$= \int_0^1 4x dx + 2 \int_1^3 z dz = 2 + [z^2]_1^3 = 2+8 = 10 \quad \ddot{\circ}$$

3 = 2+1 INTEGRALI PER COLONNE

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se si scrive nella forma

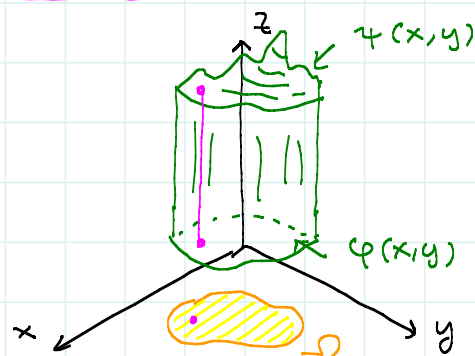
$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

In queste ipotesi

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

Idea: fissati (x,y) nella base Ω ,
i p.ti che stanno in A sopra (x,y) sono
quelli con $\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)$ e
questa è la "colonna" su (x,y)



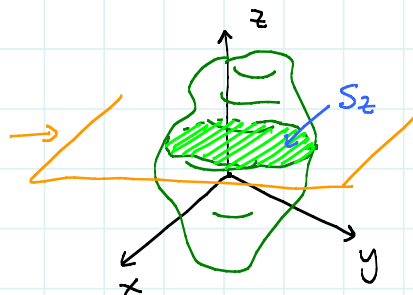
3 = 1 + 2 INTEGRALI PER SEZIONI

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

- $z_{\min}$ e $z_{\max}$ sono la min / max quota dei p.ti di A
- fissato $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$, S_z è la sezione di A ad altezza z

piano ad
altezza z



Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ $\iiint_A z dx dy dz$

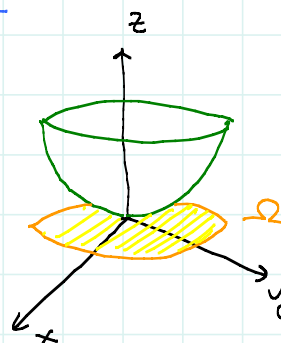
sopra
paraboloid
sotto
1

La solita ciotola

Per colonne Sensuoso:

→ base Ω

→ tappi sopra e sotto



$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ = proiezione di A
sul piano base xy

Dalla def. di A : $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
tappo sotto tappo sopra

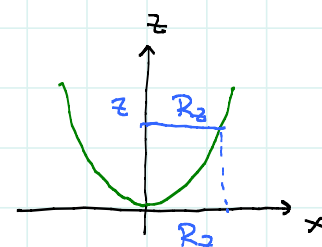
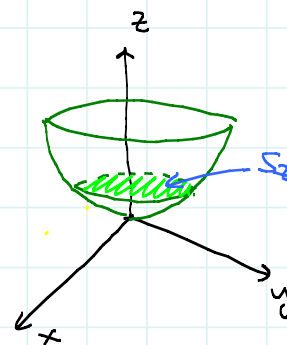
$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^1 dz z = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} dx dy (1 - (x^2 + y^2)^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^4) \rho \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^5) d\rho = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Per sezioni $z_{\min} = 0$ $z_{\max} = 1$

Fissato z , la sezione S_z è un cerchio di raggio $R_z = \sqrt{z}$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (z) \\
 &= \int_0^1 z \, dz \underbrace{\iint_{S_z} dx \, dy}_{\text{Area}(S_z) = \pi R_z^2 = \pi z} \\
 &= \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} \quad \ddot{} \\
 &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}
 \end{aligned}$$



ANALISI 2

LEZIONE 25

Note Title

27/10/2023

Integrali di 1

1 variabile

$$\int_a^b 1 dx = (b-a) = \text{lunghezza intervallo}$$

2 variabili

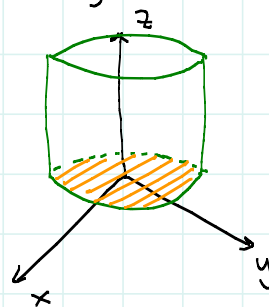
$$\iint_A 1 dx dy = \text{Area}(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

3 variabili

$$\iiint_A 1 dx dy dz = \text{Volume}(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^3$$

Esercizio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 3]\}$

$$\iiint_A x^2 z dx dy dz$$



Per colonne Base $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\iiint_A x^2 z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 dz x^2 z$$

↑ colonna

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx dy \underbrace{\int_0^3 z dz}_{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} x^2 dx dy$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{p^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \cdot p \uparrow \text{pag}$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^2 p^3 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{9}{2} \pi \cdot 4 = 18\pi$$

Per sezioni $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 3$

$$\begin{aligned} \iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} x^2 z \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 z \, dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

$S_z \leftarrow$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

= stesso conto di prima in senso inverso.

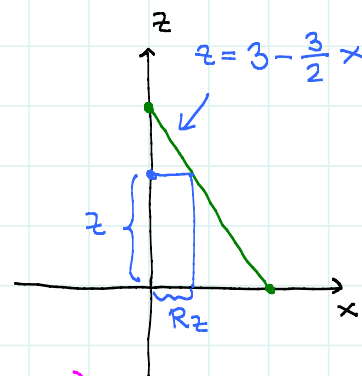
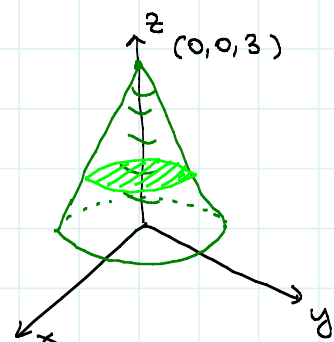
Esercizio 2 $A =$ cono in figura

$R = 2$ altezza = 3

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

Per sezioni $z_{\min} = 0$ $z_{\max} = 3$
 $S_z =$ cerchio di raggio R_z

$$\begin{aligned} z = 3 - \frac{3}{2} R_z &\leadsto \frac{3}{2} R_z = 3 - z \\ &\leadsto R_z = 2 - \frac{2}{3} z \end{aligned}$$



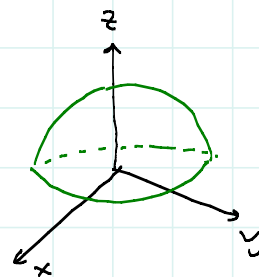
(controllo: $z = 3 \leadsto R = 0$, $z = 0 \leadsto R = 2$:)

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (z^2) \\ &= \int_0^3 z^2 \, dz \underbrace{\iint_{S_z} dx \, dy}_{\text{Area}(S_z) = \pi R_z^2 = \pi \left(2 - \frac{2}{3} z\right)^2} \\ &= \pi \int_0^3 z^2 \left(2 - \frac{2}{3} z\right)^2 \, dz \\ &= \text{si fa ...} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Volume semisfera

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$$

Per colonne



$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ \text{base } \Omega}} dx \, dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$$

Fissato $(x, y) \in \text{base}$, z varia tra 0 e $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx \, dy \sqrt{R^2-x^2-y^2} = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2-\rho^2} \cdot \rho$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho \sqrt{R^2-\rho^2} \, d\rho = 2\pi \left[\frac{2}{3} (R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{\rho=0}^{\rho=R}$$

$$= 2\pi \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad \checkmark$$

Per sezioni $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R dz \iint_{S_z} dx \, dy$

$$= \int_0^R \text{Area}(S_z) \, dz$$

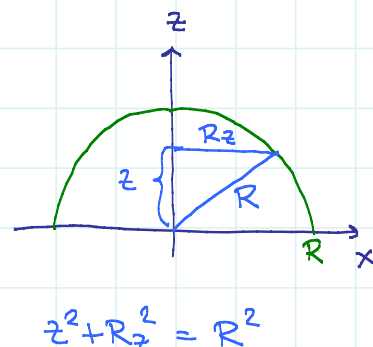
$$= \pi \int_0^R R_z^2 \, dz$$

$$= \pi \int_0^R (R^2 - z^2) \, dz$$

$$= \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^R$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad \checkmark$$

— 0 — 0 —

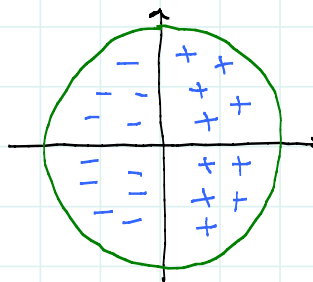


USO DELLE SIMMETRIE

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\iint_D x \, dx \, dy = 0$$

↑
per simmetria



Geometricamente: le parti positive nei quadranti 1 e 4 compensano esattamente le parti negative nei quadranti 2 e 3

$$\iint_D y \, dx \, dy = 0 \quad (\text{stessa cosa con sopra e sotto})$$

Analisi 1 $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ funzione dispari, allora

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

Se f fosse pari, allora $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$

[Formalmente si giustifica con dei cambi di variabile].

Il risultato di Analisi 2 si giustifica, allo stesso modo integrando prima (all'interno) nella variabile rispetto alla quale la funzione è dispari.

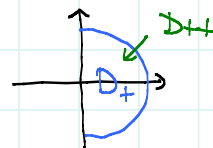
$$\iint_D x \, dx \, dy$$

Se cambio $(x, y) \rightsquigarrow (-x, y)$
 $\rightarrow$ la funzione cambia segno
 $\rightarrow$ l'insieme resta lo stesso

$$\iint_D y^2 \arctan(xy) \, dx \, dy = 0$$

Questa $f(x, y)$ è dispari sia rispetto alla x che rispetto alla y

$$\begin{aligned}
 \iint_D |x| \, dx \, dy &= 2 \iint_{D_+} x \, dx \, dy \\
 &= 4 \iint_{D_{++}} x \, dx \, dy \\
 &= 4 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta \cdot p \, d\theta \\
 &= 4 \underbrace{\int_0^1 p^2 dp}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta}_1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



$$\iint_D |y| \, dx \, dy = \frac{4}{3} \quad \text{(stessa figura di prima ruotata di } 90^\circ)$$

[La trasformazione $(x, y) \rightarrow (y, x)$ lascia l'insieme invariato e manda una funzione nell'altra]

$$\iint_{D_{++}} x \, dx \, dy = \iint_{D_{++}} y \, dx \, dy = \frac{1}{3}$$

$$\iint_D (x^3 + y^5) \, dx \, dy = 0 \quad \text{[Somma di due integrali che fanno 0 per simmetria, per rispetto ad assi diversi]}$$

Stessi discorsi valgono per gli integrali tripli.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 26

Note Title

30/10/2023

Formula di cambio di variabili negli integrali multipliIn 2 variabili (poi in 3 è uguale)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B g(u,v) J(u,v) du dv$$

insieme A
descritto nelle
variabili (u,v)funzione f
scritta nelle
variabili (u,v)

pagamento

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 6 \leq x-y \leq 7\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

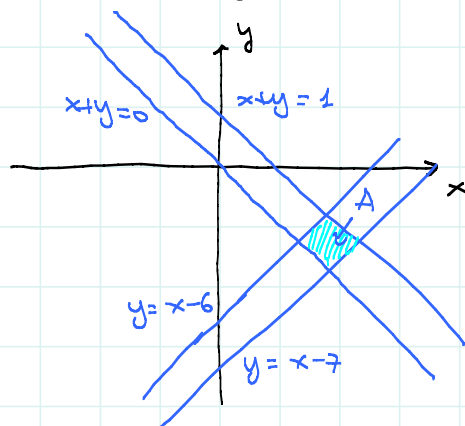
Vonei pone

$$u = x+y$$

$$v = x-y$$

perché così l'insieme diventa

$$0 \leq u \leq 1, 6 \leq v \leq 7 \quad \text{Descrizione insieme B}$$



$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv \quad \text{Nuova funzione da integrare}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 du \int_6^7 dv \quad uv \quad J(u,v)$$

Come calcolo $J(u,v)$? ① Ricavare (x e y in funzione di u e v)

② Matrice Jacobiana

③ Det

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x = u+v \\ 2y = u-v \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ Matrice jacobiana } = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u,v) := |\text{Det}(\text{matrice})| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Conclusione: basta calcolare $\int_0^1 du \int_0^7 dv \, uv \cdot \frac{1}{2} = \text{si fa banale}$

Esempio 2 Back to coordinate polari

$$\textcircled{1} x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} |\text{Det}| = | \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta | = \rho \quad \textcircled{\smile}$$

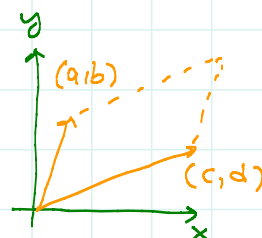
Idea del perché funziona la formula

→ Supponiamo che il cambio variabili sia lineare

$$\begin{array}{lll} (1,0) \rightarrow (a,b) & (u,v) \rightarrow (au+cv, bu+dv) & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ (0,1) \rightarrow (c,d) & \begin{matrix} \text{"x"} \\ \text{"y"} \end{matrix} & \end{array}$$

In questo modo il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ viene trasformato nel parallelogramma spuntato da (a,b) e (c,d)

L'area è $|ad-bc|$



→ Se il cambio non è lineare, tuttavia per Taylor in piccolo è come se lo fosse.

Esempi classici di cambio di variabili

① Traslazioni $u = x+a$ $v = y+b$ La matrice è l'identità e $J=1$

② Dilatazioni lungo gli assi $u = ax$ $v = by$ La matrice è diagonale $\Rightarrow J$ facile

Esempio 3 $C =$ cerchio con centro $(2,3)$ e raggio 2
Calcolare

$$\iint_C x^2 dx dy$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-2)}_u^2 + \underbrace{(y-3)}_v^2 \leq 4\}$$

$$\iint_C x^2 dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 4 \\ \text{C nelle nuove} \\ \text{variabili}}} \underbrace{(u+2)^2}_{x^2} \cdot \underbrace{1}_J du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u^2 + \underbrace{2u}_{\substack{\text{0 per} \\ \text{simmetria}}} + 4) du dv \quad \begin{matrix} \nearrow \\ 4 \cdot \text{Area (cerchio)} \\ \text{"} \\ 16\pi \end{matrix}$$

$$= 16 + \iint_{u^2+v^2 \leq 4} u^2 du dv = 16 + \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \cdot p$$

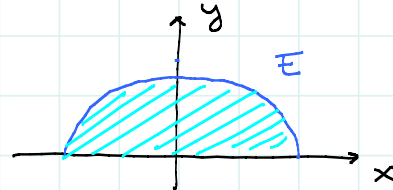
$$= 16 + \pi \left[\frac{1}{4} p^4 \right]_{p=0}^{p=2} = 16 + 4\pi$$

[Provare cosa verrebbe ad usare gli insiemi normali].

Esempio 4 $\iint_E |x| dx dy$ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, y \geq 0\}$

Così come pone

$$\begin{aligned} u &= x & \rightsquigarrow & x = u \\ v &= \sqrt{2} y & \rightsquigarrow & y = \frac{1}{\sqrt{2}} v & \rightsquigarrow & J = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



$$\iint_E |x| dx dy = \iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 5 \\ v \geq 0}} |u| \frac{1}{\sqrt{2}} du dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 5 \\ v \geq 0, u \geq 0}} u du dv = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta \cdot p d\theta = \text{si fa.}$$

Esempio 5 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^4 + 4z^2 \leq 9\}$

Calcolare $\text{Vol}(V)$.

Integriamo per sezioni lungo asse y .

Osserviamo che $y_{\min} = -\sqrt[4]{3}$ $y_{\max} = \sqrt[4]{3}$ e quindi

$$\text{Vol}(V) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \iint_{S_y} 1 dx dz = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Area}(S_y) dy$$

Adesso $S_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4z^2 \leq 9 - 3y^4\}$
= ellisse

Esempio 5-bis Calcolare l'area dell'ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq c^2\}$
con a, b, c positivi.

$$ax^2 + by^2 \leq c^2 \quad \sqrt{a}x = u \quad \sqrt{b}y = v \quad J = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{Area} = \iint_{u^2 + v^2 \leq c^2} \frac{1}{\sqrt{ab}} du dv = \frac{1}{\sqrt{ab}} \pi c^2 \quad \left[= \pi \cdot \text{prodotto dei due semi-assi} \frac{c}{\sqrt{a}} \text{ e } \frac{c}{\sqrt{b}} \right]$$

Tornando al 5 verso: $\text{Area}(S_y) = \pi \frac{9-3y^4}{2\sqrt{2}}$

$\leadsto \text{Volume} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} (9-3y^4) dy = \text{si fa banale.}$

Osservazione

$$2x^2 + 3y^4 + 4z^2 \leq 9$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{\tilde{u}} + \underbrace{(\sqrt{3}y^2)^2}_{\tilde{v}} + \underbrace{(2z)^2}_{\tilde{w}} \leq 9$$

Provo a calcolare J:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} u$$

$$y = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$z = \frac{w}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Due problemi: c'è un $\sqrt{v}$ al denominatore

c'è un problema di segni ($v \geq 0$)

(per evitare questo basta spezzare la parte

$y \geq 0$ e quella ≤ 0)

— 0 — 0 —

ANALISI 2 - LEZIONE 27

Note Title

30/10/2023

Coordinate cilindriche nello spazio (ρ, θ, z)

$x = \rho \cos \theta$

$y = \rho \sin \theta$

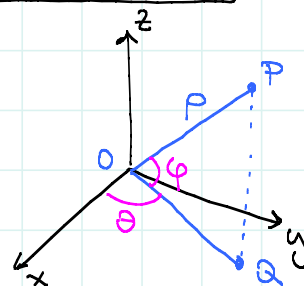
$z = z$

$J = \rho$

È come fare le polari nel piano xy , lasciando la quota z inalterata come nelle cartesiane

Coordinate sferiche nello spazioVERSIONE DEI GEOGRAFICI

$\rho = \text{distanza } OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

 $\varphi = \text{latitudine}$ $\theta = \text{coord. polare di } Q \text{ nel piano}$ 

$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$

$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$

$z = \rho \sin \varphi$

$J = \rho^2 \cos \varphi$

↑ quello che è ≥ 0 nel range opportuno

$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

↑ latitudine

$\theta \in [0, 2\pi]$

↑ longitudine

Esempio 1 $S = \text{sfera unitaria con centro nell'origine}$

$$\iiint_S x^2 dx dy dz$$

1° modo Per colonne

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \cdot 2 \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

2° modo Per sezioni

$$\int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} x^2 dx dy = \int_{-1}^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \cdot p = \text{si fa}$$

↑
Disco di raggio $\sqrt{1-z^2}$

[Così facendo abbiamo usato coord. cilindriche]

3° modo Coord. sferiche

$$\int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \underbrace{p^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}_{x^2} \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^1 p^4 dp}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$\int \cos^3 \varphi d\varphi = \int \cos^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \int (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\xrightarrow{t = \sin \varphi} \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 = \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi$$

$dt = \cos \varphi d\varphi$

$$= \frac{\pi}{5} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi = -\frac{\pi}{2}}^{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{15}$$

4° modo Sferiche antute!

Osservo che $\int_S x^2 dx dy dz = \int_S y^2 \dots = \int_S z^2 \dots$ e quindi

$$\iiint_S x^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, p^2 \cdot p^2 \cos \varphi = \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^1 p^4 dp}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi}_2$$

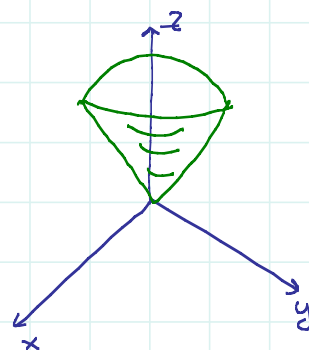
$$= \frac{4\pi}{15} \quad \because$$

Esempio 2 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2}_{\text{dentro la sfera}}, z \geq 0, \underbrace{z^2 \geq x^2 + y^2}_{\text{dentro il cono } z=p} \}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

Come è fatto A?

È un cono con sopra la pallina del gelato!

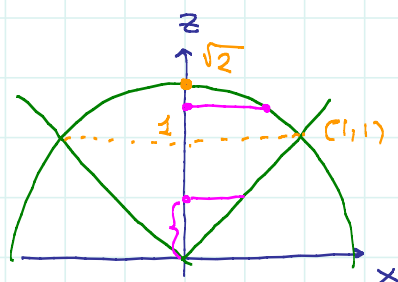


1° modo Per colonne [Provare per esercizio]

2° modo Per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \cdot z \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}} dz \cdot z \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 z \cdot \pi z^2 \, dz + \int_1^{\sqrt{2}} z \cdot \pi (2 - z^2) \, dz = \text{si fa} \end{aligned}$$

cerchio di raggio z
cerchio di raggio $\sqrt{2-z^2}$



3° modo Coordinate sferiche

Osservo che A sono tutti i p.ti della sfera con latitudine $\in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

A questo p.to

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dp \, p \sin \varphi \, p^2 \cos \varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 p^3 dp \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

Esempio 3 Volume calotta sferica

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq a\} \quad a \in [-R, R]$$

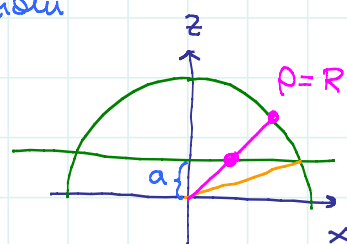
Per sezioni

$$\int_a^R dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \pi \int_a^R (R^2 - z^2) \, dz = \text{si fa.}$$

$\uparrow$ cerchio di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$

In sferiche $\theta \in [0, 2\pi]$ (invariante per rotazioni intorno all'asse z)

$$\varphi \in [\arcsin(\frac{a}{R}), \frac{\pi}{2}] \quad R \sin \varphi_{\min} = a$$



Dove varia ρ ? Sicuramente $\rho \leq R$

$$z \geq a \quad \text{cioè} \quad \rho \sin \varphi \geq a \rightsquigarrow \rho \geq \frac{a}{\sin \varphi}$$

$$\rho \in \left[\frac{a}{\sin \varphi}, R \right]$$

Volendo usare le sferiche, mi ritrovo

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sin \varphi}}^R \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \\ &= 2\pi \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \left[\frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{3} \frac{a^3}{\sin^3 \varphi} \right] \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \left(R^3 - \frac{a^3}{\sin^3 \varphi} \right) \cos \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

= si fa. [Controllare che venga lo stesso]
— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 28

Note Title

30/10/2023

BARICENTRI

Per figure piane: Sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ una figura. Il baricentro di F è il pto G di coordinate (x_G, y_G) date da

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy \quad y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

↑
media della coordinata
x in F

Questo assumendo che F sia fatta di un materiale uniforme. Altrimenti, se la densità è una $f(x, y)$ variabile, allora

$$x_G = \frac{1}{\iint_F f(x, y) \, dx \, dy} \iint_F x \cdot f(x, y) \, dx \, dy = \text{media pesata delle coord. } x$$

Stessa cosa in 3 variabili con $\frac{1}{\text{Vol}}$ è $\iiint$ di x, y, z .

Esempio 1 Semicerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$

$$x_G = 0 \text{ (per simmetria)} \quad \text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2$$

$$\iint y \, dx \, dy = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^\pi \sin \theta \cdot \rho \, d\theta = \int_0^R \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2 = \frac{2}{3} R^3$$

$\frac{1}{3} R^3$

da cui

$$y_G = \frac{1}{\frac{\pi}{2} R^2} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3\pi} R$$

↑ è ragionevole che
sia sotto $\frac{R}{2}$

↑ è ragionevole che
risalti come R

Esempio 2 Semisfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$

Per simmetria $x_G = y_G = 0$. Volume $= \frac{2}{3} \pi R^3$

$$\begin{aligned} \iiint z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi \\ &= \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

$$\leadsto z_G = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \cdot \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{3}{8} R$$

Nota bene : $\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 3\pi \stackrel{?}{<} 32$
 $27, \dots$

Il baricentro della semisfera è + basso di quello del semicerchio.
 — o — o —

MOMENTO D'INERZIA di una figura / solido rispetto ad una retta

$$I_{F, l} = \frac{1}{\text{Area/Vol}} \iint_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eventuale densità}}}{\text{dist}((x, y), l)^2} \, dx \, dy \quad (\text{e analogo in 3 variabili})$$

Esempio 3 Sfera rispetto a retta che passa per il centro

Posso fare finta (per simmetria) che la retta sia l'asse z .

$$\iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3} \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \frac{8\pi}{15} R^3$$

La distanza di un p.to dall'asse z è ρ
 delle coord. cilindriche $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

↑
 quando divido
 per il volume
 resta $\frac{2}{5} R^2$

Esempio 4 Se la retta è a distanza d dall'origine

Posso fare finta che sia la retta verticale passante per $(d, 0, 0)$

Ora devo fare

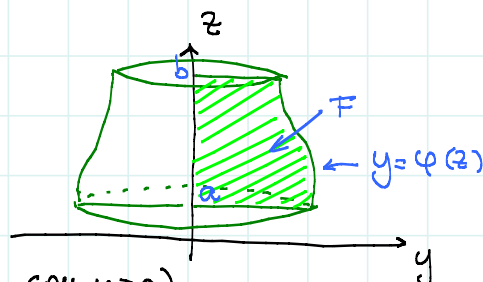
$$\iiint_S \{(x-d)^2 + y^2\} dx dy dz = \iiint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{come prima}}} - \underbrace{2xd}_{\substack{\uparrow \\ 0}} + \underbrace{d^2}_{\substack{\uparrow \\ d^2 \cdot \text{Vol}(S)}} dS$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

Setting: è data una figura piana

F è piano yz (anzi nella zona con $y \geq 0$)

Ruotiamo F intorno all'asse z (di 360° o anche di un angolo $\alpha \neq 360^\circ$)



Caso speciale: F è il sottografico di una funzione $y = \varphi(z)$

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

Come si descrive il solido S ottenuto dalla rotazione?

$$S = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], (p, z) \in F\}$$

Nel caso speciale diventa

$$S = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], z \in [a, b], 0 \leq p \leq \varphi(z)\}$$

Sempre nel caso speciale, la sup. laterale del solido ha eq.

$$p = \varphi(z), \quad \text{cioè}$$

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)^2$$

Volume di un solido di rotazione

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

Dim Usiamo le coord. cilindriche

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(p,z) \in F} p \, dp \, dz \quad \begin{matrix} p \\ \uparrow \\ J \end{matrix} \\ &= 2\pi \iint_{(p,z) \in F} p \, dp \, dz = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz \end{aligned}$$

Nel caso speciale

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

$$2\pi \iint_F y \, dy \, dz = 2\pi \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \, y = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

Oss. Nel caso speciale, posso ragionare per sezioni

$$\text{Vol}(S) = \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

$\uparrow$ Disco di raggio $\varphi(z)$

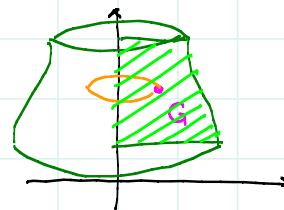
— o — o —

Tornando al caso generale, osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= 2\pi \iint_F y \, dy \, dz = \text{Area}(F) \cdot 2\pi \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz \\ &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \end{aligned}$$

TEOREMA (GULDINO 1)

Vol. solido rotazione = Area Figura che ruota
 · lung. del cammino
 percorso dal baricentro della
 figura durante la rotazione



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 29

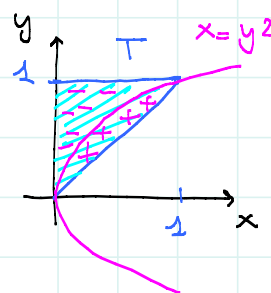
Note Title

03/11/2023

Esercizio 1 $\iint_T |x - y^2| dx dy$

Osserviamo che

$$|x - y^2| = \begin{cases} x - y^2 & \text{se } x \geq y^2 \rightsquigarrow T^+ \\ -x + y^2 & \text{se } x \leq y^2 \rightsquigarrow T^- \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iint_T |x - y^2| dx dy &= \iint_{T^+} (x - y^2) dx dy + \iint_{T^-} (-x + y^2) dx dy \\ &= \iint_{T^+} (x - y^2) dx dy - \iint_{T^-} (x - y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy (x - y^2) - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy (x - y^2) \\ &= \text{si fanno} \end{aligned}$$

Se non vi piacciono le radici, considero insieme normali asse y

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx (x - y^2) - \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx (x - y^2) \\ &= \text{si fanno ancora meglio.} \\ &\quad _ \circ _ \circ _ \end{aligned}$$

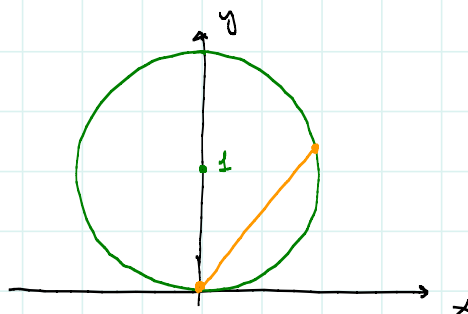
Esercizio 2 Descrizioni di insiemi "strani" in coord. polari

Cardio con centro in $(0, 1)$ e raggio 1

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$0 \leq \rho \leq \text{qualcosa che dipende da } \theta$$



$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 2y + 1 &\leq 1, \text{ cioè } x^2 + y^2 - 2y \leq 0, \text{ cioè} \\
 \rho^2 - 2\rho \sin \theta &\leq 0 \quad (\text{uso che } \rho > 0) \\
 \rho - 2 \sin \theta &\leq 0 \\
 \rho &\leq 2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

Quindi in coord. polari l'insieme diventa

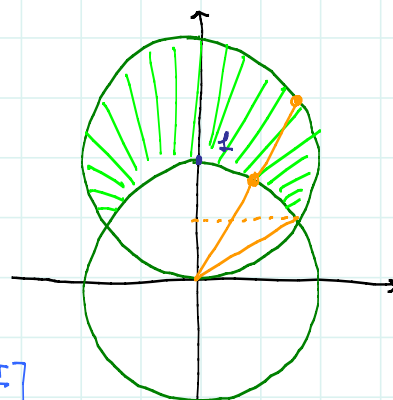
$$0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta$$

Descrivere la "lunetta" tra i due cerchi

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \quad 1 \leq \rho \leq 2 \sin \theta$$

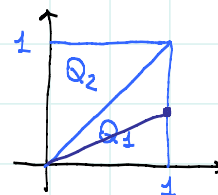
La seconda relazione suppone

$$2 \sin \theta \geq 1, \text{ cioè } \sin \theta \geq \frac{1}{2}, \text{ cioè } \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



Descrivere un quadrato in coord. polari

$$Q_1: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$$



In cartesiane sarebbe $x \leq 1$, cioè $\rho \cos \theta \leq 1$

$$Q_2: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

$$y \leq 1 \leadsto \rho \sin \theta \leq 1 \leadsto \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

Esercizio classico Calcolare la distanza media dei p.ti di un quadrato da un vertice fissato.

$$\text{Ci si riduce a calcolare} \quad \iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \sqrt{x^2 + y^2}$$

[Si fa con cambio di variabili $y = x \sin \theta$]

In alternativa si può fare in polari

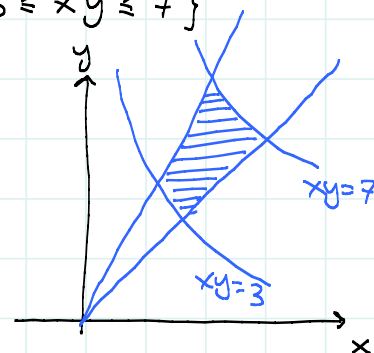
$$\begin{aligned}
 \iint_Q \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy &= 2 \iint_{Q_1} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho \, \rho \, d\rho \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\cos^3\theta} \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta} \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} \quad \text{ora basta porre} \\
 &\quad \quad \quad t = \sin\theta \\
 &= \text{diventa razionale e si fa.}
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \ 3 \leq xy \leq 7\}$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy$$

1° modo Cartesiano ... ñ

2° modo Cambio di variabili standard



$$1 \leq \underbrace{\frac{y}{x}}_u \leq 2, \quad 3 \leq \underbrace{xy}_v \leq 7$$

Mi serve J e uso la procedura standard

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = uv \\ x^2 = \frac{v}{u} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Calcolo la matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

Da cui $J = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} \right| = \frac{1}{2u}$

Quindi $\text{Area}(A) = \int_1^2 du \int_3^7 dv \frac{1}{2u} = \text{si fa.}$

3° modo Cambio artuto

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$|\text{Det}| = \left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = 2 \frac{y}{x} = \textcircled{2u} \leftarrow \text{reciproco del } J \text{ che serviva !!!}$$

Volendolo dire rigorosamente

$$\int_1^2 du \int_3^7 dv \frac{1}{2u} = \int_A dx dy \frac{1}{2u} \cdot 2u = \text{Area}(A)$$

$\uparrow$ applico il cambio di variabili
 $u = \frac{y}{x}$
 $v = xy$

$\uparrow$ J calcolato come abbiamo appena fatto

— o — o —

Esercizio 4 (LA FOGNA)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Intersezione di due cilindri con assi perpendicolari

Calcolare il volume.

1° modo Per sezioni !!!

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 dz \cdot \text{Area}(S_z)$$

è l'intersezione di
due strisce $\perp$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz \quad !!!$$

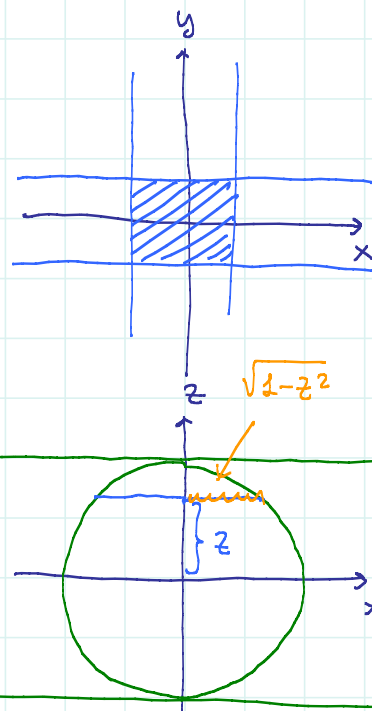
S_z è un quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$

2° modo Si può fare anche per
colonne

"Il soffitto è dato, a seconda delle zone,
da $z = \sqrt{1-x^2}$ oppure $z = \sqrt{1-y^2}$ ".

Variaute : aggiungere il terzo cilindro lungo asse z ☺

— o — o —



ANALISI 2

LEZIONE 30

Note Title

03/11/2023

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Setting $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$
 $f: [a, b] \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$\underbrace{\quad}_x \quad \underbrace{\quad}_y$

Costruisco

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x, t) dx \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

$\uparrow$
parametro

Domande: φ è continua? φ è derivabile?

Più in generale possiamo considerare integrali doppi o tripli, tipo

$$\varphi(t) := \iint_A f(x, y, t) dx dy \quad A \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f: A \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$
parametro

e idem con integrali tripli.

Uno vorrebbe tanto dire che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) dx$$

Il limite dell'integrale è l'integrale del limite

$$\varphi'(t_0) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t_0) dx$$

La derivata dell'integrale è l'integrale della derivata

In generale i teoremi di scambio sono **FALSI**

Diventano veri sotto ipotesi di **UNIFORMITÀ**

Teorema di scambio del limite (Ipotesi minimaliste)

Mettiamoci come nel setting e prendiamo $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Supponiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (a, b) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) = \int_a^b f(x, t_0) dx$$

quindi vale
lo scambio

Dim. Consideriamo ε e δ come sopra. Allora

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_a^b f(x, t) dx - \int_a^b f(x, t_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \{f(x, t) - f(x, t_0)\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

↑
vale se $|t - t_0| \leq \delta$ ← Qui serve che δ non dipenda da x

Questo ci dice che $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon(b-a)$ se $|t - t_0| \leq \delta$.

Oss. L'ipotesi non è Questo δ dipende
da x e da ε

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

UNIFORME

MA è Questo δ dipende solo da ε , e va bene $\forall x$, cioè è

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

Quale delle due dice che $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$?

LA PRIMA !!!

Oss. Se $f(x, t)$ è continua in $[a, b] \times [t_1, t_2]$, allora è uniformemente continua, quindi le ipotesi sono verificate gratis.

Teorema di scambio della derivata

Stesso setting. Supponiamo che $f_t(x, t_0)$ esista in maniera uniforme, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall h \in [-\delta, \delta]$$

NON DIPENDE
DA x

$$\left| \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} - f_t(x, t_0) \right| \leq \varepsilon$$

Allora

$$f'(t_0) \text{ esiste e vale } \int_a^b f_t(x, t_0) dx$$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ e prendo il δ dato dall'ipotesi.

Allora per ogni h tale che $h \in [-\delta, \delta]$ vale che

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} - \int_a^b f_t(x, t_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h} dx - \int_a^b f_t(x, t_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\left| \frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h} - f_t(x, t_0) \right|}_{\leq \varepsilon \text{ per ipotesi}} dx \\ &\leq \varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

— o — o —

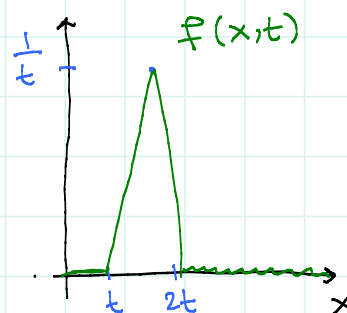
Oss. Le ipotesi sono verificate GRATIS se $f_t(x, t)$ esiste ed è continua in tutto $[a, b] \times [t_1, t_2]$

— o — o —

L'ESEMPIO $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$

Definiamo $f(x, t)$ come in figura

Cosa succede ?



① Per ogni $t > 0$ si ha che

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \text{Area triangolo} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$$

② Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha che $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 0$

il triangolo
"passa"

Quindi il teorema di scambio NON VALE.

— o — o —

Oss. Le dim. fatte finora valgono anche per integrali doppi o tripli.

— o — o —

Caso con anche estremi variabili

$$\varphi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli vale la formula

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx - f(a(t), t) a'(t) + f(b(t), t) b'(t)$$

Dim. Basta considerare

$$F(a, b, t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

e osservare che $\varphi(t) = F(a(t), b(t), t)$ e

$$F_t(a, b, t) = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad (\text{se vale teo. scambio})$$

$$\left. \begin{aligned} F_a(a, b, t) &= -f(a, t) \\ F_b(a, b, t) &= +f(b, t) \end{aligned} \right\} \text{Analisi 1}$$

e quindi applicare la chain rule.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 31

Note Title

06/11/2023

- 3.1 Curve e integrali curvilinei
- 3.2 Campi di vettori e forme differenziali
- 3.3 Superfici e integrali superficiali
- 3.4 Teorema della divergenza e formula di Gauss-Green
- 3.5 Teorema del rotore e formula di Stokes.

CURVE Una curva è una funzione

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{1 \text{ variabile} \\ (\text{tempo})}}$
 $\uparrow$ $d \text{ variabili (o anche un insieme generico)}$

d=2 Curve nel piano $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

d=3 " nello spazio $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Intuitivamente: descrizione del percorso di un punto

Def. Il **SOSTEGNO** di una curva è la sua immagine cioè

$$\{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^d : t \in [a, b] \}$$

Achtung! Non bisogna confondere una curva con il suo sostegno

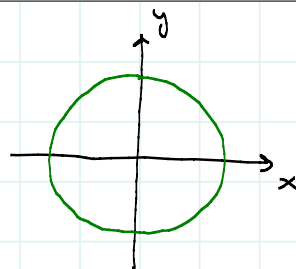
Intuitivamente:

→ la curva è il video

→ il sostegno è una foto di tutti i punti percorsi.

Esempi

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t) & t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t) & t \in [0, 6\pi] \\ \gamma_3(t) &= (\sin t, \cos t) & t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$



Tutte hanno come sostegno la circ. $x^2 + y^2 = 1$,
ma lo percorrono un numero diverso di volte e in verso diverso.

Esempi Il sostegno a lato è percorso da

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

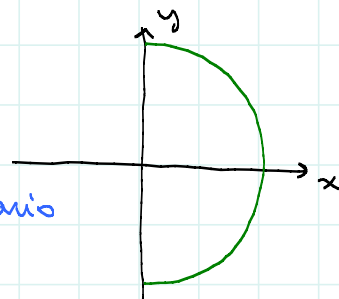
$$\gamma_2(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) : t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (\sqrt{1-t^2}, -t) : t \in [-1, 1]$$

↖ antiorario

↙

← orario



Def. Una curva si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (torna in partenza)
- **SEMPLICE** se è iniettivo, tranne al più agli estremi (non ripassa due volte dallo stesso p.to, tranne al più partenza ed arrivo)

Def. Supponiamo che γ sia derivabile (cioè lo sono le componenti).

Allora definiamo

→ **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t)$

→ **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t)\|$

→ **RETTA TANGENTE** la retta di equazione parametrica

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0)$$

ben definita
se $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ come vettore

Esempio $\gamma(t) = (t^2 - t, t + e^t)$ $t \in [0, 12]$

Calcolare la retta tangente nel p.to con $t=1$

$$\gamma(1) = (0, e+1) \quad \dot{\gamma}(t) = (2t-1, 1+e^t)$$

$$\dot{\gamma}(1) = (1, e+1)$$

In parametrica la retta è

$$(0, e+1) + t(1, e+1) = \left(\underset{\text{"x"}}{t}, \underset{\text{"y"}}{e+1 + (e+1)t} \right)$$

Se la voglio in cartesiana è

$$y = (e+1)x + (e+1)$$

Operazioni da fare $\rightarrow$ Stabilire se γ è chiusa (banale: sostituire a e b)

$\rightarrow$ " " " semplice

$\rightarrow$ Calcolare rette tangenti (si usa la formula)

$\rightarrow$ Disegnare il sostegno

Quattro strategie per studiare la semplicità

① Sperare che ci sia una componente strett. monotona

$$\gamma(t) = (t - t^2, t + e^t) \quad t \in [0, 12] \quad \text{no è semplice}$$

$\uparrow$
no
monot.

$\uparrow$
monotona
cresc. su $\mathbb{R}$

$$y'(t) = 1 + e^t \geq 1$$

sempre

$$\gamma(t) = (t^2, \sin t, t - t^6 + \arctan t) \quad t \in [-1, 1] \quad \text{no è semplice}$$

$\uparrow$
monotona in $[-1, 1]$

$$\gamma(t) = (t^2, \cos t) \quad \text{con } t \in [-1, 1] \quad \text{no non è semplice perché}$$

$\uparrow$
Fa avanti / indietro
sullo stesso percorso

$x(t)$ e $y(t)$ sono PARI, quindi

$$\gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma\left(-\frac{1}{3}\right)$$

② Sperare di trovare una quantità monotona

$$\gamma(t) = (t - 6t^2, 2t - 7t^2) \quad t \in [0, 5] \quad \text{no semplice}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 non sono monotone
 in $[0, 5]$

Però $7x(t) - 6y(t) = -5t$ $\leadsto$ monotona

[Se non fosse semplice, esisterebbero $t_1 \neq t_2$ tali che
 $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$, ma allora $-5t_1 = -5t_2$]

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad \text{con } t \in [0, 3]$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 \quad \text{che è monotona in } [0, 3].$$

Oss. Sia ① sia ② falliscono se γ è chiusa

③ Monotonia a zone

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Considero due zone

- per $t \in [0, \pi]$ si ha che $x(t)$ è monotona e $y(t) \geq 0$
- per $t \in [\pi, 2\pi]$ si ha che $x(t)$ è monotona e $y(t) \leq 0$

Questo basta per concludere che è semplice. Perché?

Siano t_1 e t_2 che violano l'injectività. Allora

$\rightarrow t_1$ e t_2 non possono essere entrambi in $[0, \pi]$

$\rightarrow$ " " " " $[\pi, 2\pi]$

$\rightarrow$ quindi sono uno in $[0, \pi]$ e uno in $[\pi, 2\pi]$

$\uparrow$ $\qquad \qquad \uparrow$
 qui $y(t) \geq 0$ qui $y(t) \leq 0$

Ma allora ci si riduce ai casi con $y(t) = 0$, che sono pochissimi $t = 0, \pi, 2\pi$.

④ Risolvere esplicitamente il sistema

$$\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0, 1].$$

Si vede subito che $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0)$, quindi la curva è chiusa, quindi viene ① e ②.

Prendiamo t ed s tali che $\gamma(t) = \gamma(s)$ e vogliamo dedurre che t ed s sono 0 oppure 1

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ t-s = t^3-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t = s$, allora sono contento, altrimenti semplifico:

$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 1-t \\ 1 = t^2+t(1-t)+(1-t)^2 \end{cases}$$

$$\leadsto \cancel{1} = \cancel{t^2} + t - \cancel{t^2} + \cancel{1} - 2t + t^2 \leadsto t^2 - t = 0 \leadsto t(t-1) = 0$$

Quindi restano $\begin{array}{l} t=0 \leadsto s=1 \\ t=1 \leadsto s=0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{sono gli} \\ \text{estremi.} \end{array}$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 32

Note Title

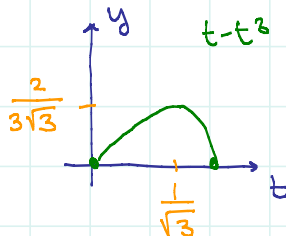
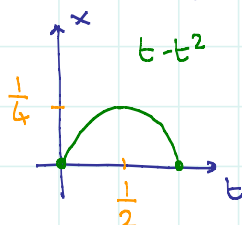
06/11/2023

Esempio di disegno del sostegno

$$\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Sappiamo dallo studio precedente che γ è chiusa e semplice.

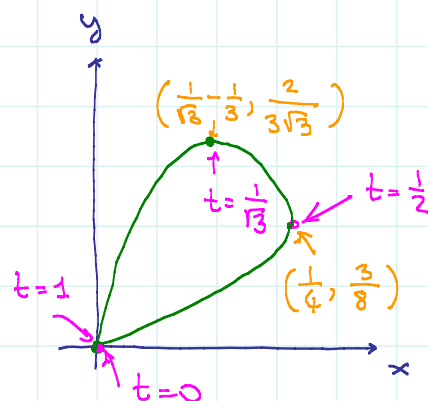
Studiamo separatamente le componenti



$$y'(t) = 1 - 3t^2$$

si annulla per $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$



Dal disegno delle singole componenti si deduce quello generale.

- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ abbiamo $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ abbiamo $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$

Supponiamo $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [0, 2]$.

$\rightarrow x(t)$ e $y(t)$ crescono in $[0, 1]$

$\rightarrow$ " " decrescono in $[1, 2]$

Possiamo concludere che è semplice? **NO**



LUNGHEZZA DI UNA CURVA

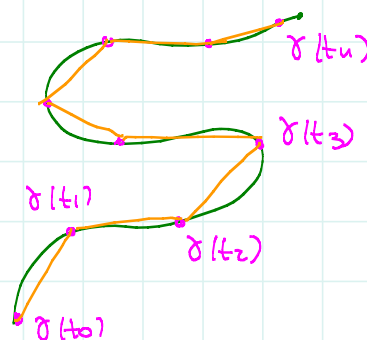
Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva. Si definisce

$$\text{Lunghe}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b \right\}$$

↑
Il sup è fatto al variare della partizione

Intuitivamente

- scelgo istanti $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq b$
- fotografo dove si trova l'ovvio in quegli istanti
- unisco i puntini e ottengo una spezzata
- la lunghe. della spezzata è la sommatoria nella formula
- l'idea è che la spezzata è sempre più "corta" della curva, ma se i t_i sono abbastanza "fitti" l'approssimazione è molto buona.



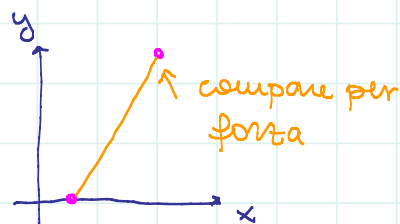
Def. Se il sup è un numero reale (per forza ≥ 0) la curva si dice rettificabile (cioè ha lunghe. finita).

Oss. Eventuali tratti ripetuti del sostegno contano più volte.

Esempio Consideriamo la curva teletrasporto

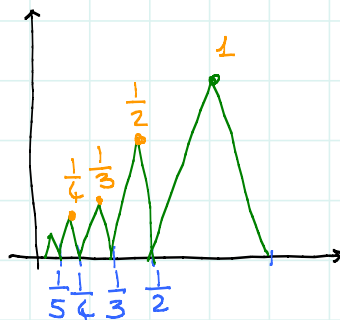
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (4, 5) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$$

Che lunghezza ha? $\sqrt{34} !!$



Esempi di curve di lungh. infinita

Fatto apposta



Lunghezza curva = somma lunghezze dei lati (faccio le fotografie quando l'orologio è nei vertici)

$$\geq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

ogni lato $\uparrow$
obliquo è più
lungo dell'altezza

Fatto un po' meno apposta $\gamma(t) = (t, t \sin^2 \frac{1}{t}) \quad t \in [0, 1]$

Questa curva percorre un tratto del grafico di $y = x \sin^2 \frac{1}{x}$

Si annulla quando $\frac{1}{x} = k\pi$ e vale
x quando $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ancora una volta posso stimare la
lunghezza con una poligonale



$$\text{lunghezza poligonale} \geq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = +\infty$$

valori della funzione
quando $\sin^2 = 1$

— o — o —

Teorema Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

lunghe = integrale della speed

Oss. In due variabili diventa

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Variazione (Caso di una curva data in coord. polari) $\rho(t), \theta(t)$

Allora $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$

$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= [\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta]^2 + [\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta]^2 \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

Curve cartesiane Se $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in [a, b]$

(curva che percorre un pezzo di grafico)

allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Oss. Se due curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta e senza saltare, allora la lunghezza è la stessa.

ANALISI 2

-

LEZIONE 33

Note Title

06/11/2023

STIME PER INTEGRALI DI FUNZIONI VETTORIALI

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}^m$ (con $m=1,2,3$) insieme limitato

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Consideriamo

$$\int_A f(x) dx = \left(\int_A f_1(x) dx, \dots, \int_A f_d(x) dx \right)$$

$\uparrow$ integrale semplice, doppio, triplo
 $\uparrow$ vettore che ha come componenti gli integrali delle componenti di f

Teorema (Stima dall'alto per un integrale vettoriale)

Setting come sopra.

Allora

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

Dim Si fa per DUALITÀ. Considero un qualunque vettore $u \in \mathbb{R}^d$ e osservo che

$$\begin{aligned} \langle u, \int_A f(x) dx \rangle &= \int_A \langle u, f(x) \rangle dx \\ &= \sum_{k=1}^d u_k \int_A f_k(x) dx = \int_A \left\{ \sum_{k=1}^d u_k f_k(x) \right\} dx \end{aligned}$$

$\uparrow$ linearità dell'integrale

Ora metto i moduli, quelli di Analisi 1:

$$\left| \langle v, \int_A f(x) dx \rangle \right| = \left| \int_A \langle v, f(x) \rangle dx \right|$$

Analisi 1 $\rightarrow \leq \int_A |\langle v, f(x) \rangle| dx$

Cauchy-Schwarz $\rightarrow \leq \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$

$$= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$$

Ora ci sono due casi:

$\rightarrow$ se $\int_A f(x) dx = 0$, allora non c'è molto da dire.

$\rightarrow$ se è $\neq 0$, allora posso $v := \int_A f(x) dx$, ed ho che

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

e ora semplificando ho la tesi.

— o — o —

Esercizio Il risultato vale anche con norme diverse dalla euclidea. Provare a dimostrarlo con un'altra.

— o — o —

Teorema (Stima dal basso per un integrale vettoriale)

Setting come sopra.

Allora per ogni $x_0 \in A$ vale la disuguaglianza

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim Aggiungo e tolgo $f(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$$

→ Disug. triangolare $\leq$ e integro

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\int_A \|f(x)\| dx \leq \underbrace{\int_A \|f(x_0)\| dx}_{\|f(x_0)\| \cdot \text{meas}(A)} + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

(lunghezza, area o volume)

→ Integro e Disug. triang. $\geq$ $\|v+w\| \geq \|v\| - \|w\|$

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \underbrace{\left\| \int_A f(x_0) dx \right\|}_{\|f(x_0)\| \cdot \text{meas}(A) \sim \text{me lo procuro dallo step precedente}} - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

$$\geq \int_A \|f(x)\| dx - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

$$- \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

$$\geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

↑
ho usato la stima dall'alto

$$\left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\| \leq \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

— o — o —

Dim che

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

se γ è di classe C^1 .

Devo dimostrare due cose

① Tutte le poligoni hanno $\text{lungh} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

② $\forall \varepsilon > 0$ esiste una poligonale la cui lungh è $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon$

Dim ① Osserviamo che

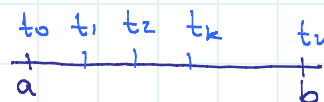
$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \quad \text{questi sono vettori}$$

$\uparrow$
 è vera comp. per comp.

quindi per la stima dall'alto

$$\begin{aligned} \text{lungh. poligonale} &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \end{aligned}$$

stima
dall'alto



Dim ② Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare la poligonale

Moralmente devo prendere i t_i molto "fitti".

Essendo $\dot{\gamma}(t)$ continua, sarà pure uniformemente continua, quindi...

... per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{se} \quad |t-s| \leq \delta$$

Ora faccio le foto in tempi $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tali che
 $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Dico che la poligonale ottenuta va bene.

Infatti

$$\begin{aligned} \text{lunghezza (poligonale)} &= \sum_{i=1}^n \|\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ddot{\gamma}(t) dt \right\| \\ \text{uso stima dal} &\geq \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\| dt \right\} \\ \text{basso} & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad \text{ho scelto } x_0 = t_i, \\ & \quad \quad \quad \text{ma qualunque} \\ & \quad \quad \quad \text{p.to in } [t_{i-1}, t_i] \\ & \quad \quad \quad \text{andava bene} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt}_{\int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt} - 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\| dt \end{aligned}$$

Quindi per concludere mi basta che l'altro termine sia $\leq \varepsilon$.
 D'altra parte

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} dt &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}_{b-a} \\ &= \varepsilon \quad \ddot{\smile} \\ &\text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

ANALISI 2

LEZIONE 34

Note Title

10/11/2023

INTEGRALI CURVILINEI

Integrali di FUNZIONI lungo CURVE
INTEGRAZIONE NON ORIENTATA

- ① Notazioni
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Formule per il calcolo

① Notazioni

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

$\uparrow$ curva $\uparrow$ "elemento di lunghezza a "
 $\uparrow$ sta ad indicare che si tratta di int. curvilineo

dove

$$\rightarrow \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\rightarrow f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ che contiene almeno il supporto di } \gamma$$

② Significato geometrico

Possiamo considerare la funzione

$$[a, b] \ni t \rightarrow f(\gamma(t)) \in \mathbb{R} \quad \text{"quota dell'ovino al tempo } t"$$

L'integrale curvilineo NON è l'integrale di questa funzione, ma è l'integrale della funzione

$$s \rightarrow f(s)$$

$\uparrow$ distanza percorsa $\uparrow$ altezza a cui si trova l'ovino dopo aver percorso un tratto lungo s

[Discorsi GPS
nel video]

③ Idea della definizione Consideriamo una partizione di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

e costruiamo due somme del tipo

$$\sum_{k=1}^m \underbrace{\text{lunghezza}(t_{i-1}, t_i)}_{\substack{\text{lunghezza della curva} \\ \text{tra } t_{i-1} \text{ e } t_i}} \cdot M_i$$

↑ costante t.c.
 $M_i \geq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\sum_{k=1}^m \text{lunghezza}(t_{i-1}, t_i) \cdot m_i$$

↑ $m_i \leq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

Se l'inf delle somme superiori è uguale al sup di quelle inferiori, quello è l'integrale curvilineo.

Oss. Nel caso particolare in cui $f(x) \equiv 1$, viene la lunghezza della curva.

④ Formula per il calcolo Se è tutto abbastanza regolare, diciamo $f \in C^0$ e $\gamma \in C^1$, allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{ds} dt$$

In due variabili, con $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ diventa

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

e analogo in 3 variabili

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 dt^2 + \dot{y}(t)^2 dt^2} \end{aligned}$$

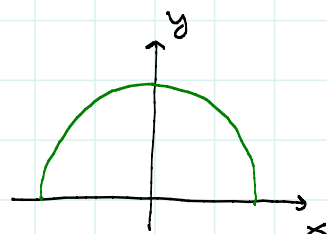
Baricentro di una curva In $\mathbb{R}^2$ è il punto $G = (x_G, y_G)$ con

$$x_G = \frac{1}{\text{lung}(r)} \int x ds$$

$$y_G = \frac{1}{\text{lung}(r)} \int y ds$$

Esempio Baricentro di una semicirc. di raggio r

Ovviamente $x_G = 0$ per simmetria



$$\int y ds$$

$$r(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$= \int_0^\pi \underbrace{r \sin t}_y \cdot \underbrace{r}_{\|r'(t)\|} dt = r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2r^2$$

e quindi

$$y_G = \frac{1}{\underbrace{\pi r}_{\text{lung}}} \cdot 2r^2 = \frac{2}{\pi} r$$

più alto di quello della
semicirconferenza piena

$$\frac{2}{\pi} > \frac{1}{2} > \frac{4}{3\pi}$$

Osservazione Se cambio la parametrizzazione, ottengo lo stesso risultato.

Nell'esempio potevo usare $r(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ con $t \in [-r, r]$

Con questa parametrizzazione $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}$

$$\|\dot{r}(t)\| = \left\{ 1 + \frac{t^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{r^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

Allora

$$\int y ds = \int_{-r}^r \underbrace{y}_{\sqrt{r^2 - t^2}} \cdot \underbrace{\frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}}}_{\|\dot{r}(t)\|} dt = r \cdot 2r = 2r^2 \quad \therefore$$

Integrazione NON orientata

- L'integrale non dipende dal verso di percorrenza e dalla parametrizzazione della curva
- Eventuali tratti ripetuti contano secondo molteplicità.

Esempio di teorema

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\gamma_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1

$\psi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ di classe C^1 monotona e surgettiva

Allora possiamo considerare $\gamma_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\psi(t)) \quad \forall t \in [c,d]$$

[γ_2 è una riparametrizz. di γ_1 mediante ψ]

Allora

$$\int_{\gamma_1} f(x) ds = \int_{\gamma_2} f(x) ds$$

Dim.:
$$\int_{\gamma_2} f(x,y) ds = \int_c^d f(x(\psi(t)), y(\psi(t))) \|\dot{\gamma}_2(t)\|^2 dt = \star$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_2(t)\| &= \{ \dot{x}(\psi(t))^2 \dot{\psi}(t)^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \dot{\psi}(t)^2 \}^{1/2} \\ &= \{ \dot{x}(\psi(t))^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \}^{1/2} |\dot{\psi}(t)| \end{aligned}$$

$$\star = \int_c^d f(x(\psi(t)), y(\psi(t))) \{ \dot{x}(\psi(t))^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \}^{1/2} |\dot{\psi}(t)| dt$$

Faccio il cambio variabili $z = \psi(t)$, da cui $dz = \dot{\psi}(t) dt$ e quindi

$$\int_a^b f(x(z), y(z)) \{ \dot{x}(z)^2 + \dot{y}(z)^2 \} dz = \int_{\gamma_1} f(x) ds$$

Questo se ψ è crescente. Se è decrescente devo mettere segno - ma invertire gli estremi.

ANALISI 2

LEZIONE 35

Note Title

10/11/2023

FORME DIFFERENZIALI E CAMPI DI VETTORI

(Presentazione da corso di servizio)

Nuova definizione

In $\mathbb{R}^2$ una forma differenziale si presenta nella forma

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

↑
omega piccolo

dove $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono due funzioni $A: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $B: D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ diciamo aperto.

In $\mathbb{R}^3$ è la stessa cosa

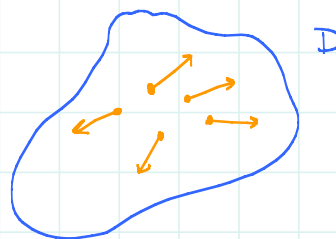
$$\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

↑ ↑ ↑
coeff. che dipendono da 3 variabili
definiti in $D \subseteq \mathbb{R}^3$

La stessa cosa si generalizza in n variabili.

Campo di vettori

In due variabili possiamo associare alla forma scritta sopra il campo di vettori $(A(x, y), B(x, y))$



INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA

INTEGRAZIONE ORIENTATA

Vediamo in due variabili (tanto è uguale anche in D)

① Notazioni $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} A(x,y) dx + B(x,y) dy$

Sto integrando una forma ω lungo una curva γ .

Si intende che

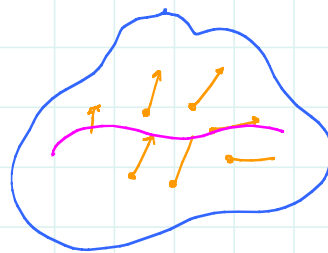
$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ curva di classe } C^1$$

A e B sono definiti almeno sul supporto di γ .

② Significato fisico

In ogni p.to raggiunto dalla curva faccio il prodotto scalare tra il campo (A,B) e la velocity $(\dot{x}, \dot{y})$

↑
vettore



Quello che ottengo è l'integro lungo la curva.

Si tratta del lavoro compiuto dalla forza $\vec{F} = (A,B)$ su un p.to materiale che percorre la curva

③ Idea della definizione Si prende la solita partizione

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

e si considera una somma del tipo

$$\sum_{i=1}^n A(x(t_i), y(t_i)) (x(t_i) - x(t_{i-1})) + B(x(t_i), y(t_i)) (y(t_i) - y(t_{i-1}))$$

↑
sto facendo finta che il campo sia costante in tutto l'intervallo

Due tipi di approx: $\rightarrow$ suppongo il campo costante tra t_{i-1} e t_i
 $\rightarrow$ suppongo che il punto vada da $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ lungo il segmento
 (solita poligonale)

Poi raffittiamo la partizione e speriamo che converga a qualcosa.

④ Formula per il calcolo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

Brutalmente: al posto di x e y in A e B sostituisco $x(t)$ e $y(t)$
 al posto di dx metto $\dot{x}(t)dt$
 " dy " $\dot{y}(t)dt$

Sto integrando il prodotto scalare tra campo e velocity
 $\quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad}$

Relazione tra integrali di forme e di funzioni

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (A \dot{x} + B \dot{y}) dt$$

$$= \int_a^b \left\{ A \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}_{ds}$$

prodotto scalare tra il campo
ed il vettore tangente alla
curva

$$= \int_{\gamma} \langle (A, B), \vec{\tau} \rangle ds$$

Integrazione orientata

- se cambio il verso di percorrenza, l'integrale cambia segno
- eventuali tratti ripetuti avanti/indietro danno contributo nullo.

Resta vero che, se riparametrizzo la curva conservando il verso di percorrenza, allora l'integrale è lo stesso.

Matematicamente, ripetendo la dimostrazione con la φ , questa volta mi trovo a raccogliere $\dot{\varphi}(t)$, senza il valore assoluto.

Nella formula che lega $\int_{\gamma} \omega$ a quello di una funzione, il τ cambia segno quando vado al contrario.

Esempio $\omega = (x^2 + y)dx + xy dy$

γ = semicirconfenza $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ percorsa in verso orario

$$\int_{\gamma} \omega$$

Applico la formula con $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$

Occhio! L'orientazione è quella opposta, quindi devo mettere il segno -

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= - \int_0^{\pi} \left\{ \underbrace{\cos^2 t}_{x^2} + \underbrace{\sin t}_y \right\} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\cos t}_{x} \cdot \underbrace{\sin t}_{\dot{y}} \cdot \underbrace{\cos t}_{\dot{y}} dt \\ &= - \int_0^{\pi} \{ -\cancel{\cos^2 t \sin t} - \sin^2 t + \cancel{\cos^2 t \sin t} \} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Con tanta pazienza posso usare $(t, \sqrt{1-t^2})$ con $t \in [-1, 1]$ che ha il verso giusto!

$$\int_0 \omega = \int_{-1}^1 \left\{ \underbrace{(t^2)}_{x^2} + \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \right) \cdot \underbrace{1}_{x'} + \underbrace{t}_x \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \cdot \underbrace{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}_{y'} \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ \cancel{t^2} + \sqrt{1-t^2} - \cancel{t^2} \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (\text{area semicirconfenza}) \quad \text{☺}$$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 36

Note Title

13/11/2023

FORME DIFF $\omega = \sum_{i=1}^d A_i(x) dx_i$ $A_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Data $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, si definisce

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

Supponiamo sempre γ continua + C^1 a tratti (cioè $[a, b]$ è unione finita di intervalli chiusi in cui γ è C^1).

d=2 $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$

d=3 $\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$

Def 1 Una forma diff. ω si dice **CHIUSA** se

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad \text{per ogni } i \neq j \quad \left(\text{supponiamo che le derivate esistano} \right)$$

d=2 $A_y = B_x$

d=3 $A_z = B_x = C_y$ $A_z = C_x = B_y$ $B_z = C_y$

In generale la chiusura sono $\frac{d(d-1)}{2} = \binom{d}{2}$

Def. 2 Una forma diff. ω si dice **ESATTA** in Ω se esiste $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x) \quad \forall x \in \Omega$$

[V si dice "primitiva" o "potenziale"]

Oss. importante Bisogna sempre precisare esatta DOVE, cioè
 $\rightarrow \omega$ può essere esatta in $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^d$, ma non in $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$
 $\rightarrow \omega$ può essere esatta in Ω_1 e in Ω_2 , ma NON esatta in $\Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\begin{array}{lll} \boxed{d=2} & V_x = A & V_y = B \\ \boxed{d=3} & V_x = A & V_y = B \quad V_z = C \end{array}$$

IMPLICAZIONE FACILE Ammesso che i coeff. siano abbastanza regolari, allora

$$\omega \text{ esatta in } \Omega \Rightarrow \omega \text{ chiusa in } \Omega$$

Leggendo l'implicazione al contrario

$$\omega \text{ non chiusa in } \Omega \Rightarrow \omega \text{ non esatta in } \Omega \Rightarrow \text{ niente prim.}$$

Dim È il teorema di scambio dell'ordine di derivazione.
 Se

$$A_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad A_j = \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

Allora

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

[Vedere in $d=2$ e $d=3$ che succede]

CONSEGUENZA DELL'ESATTEZZA Se ω è esatta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
 e $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ C^1 a tratti,
 allora

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

integrale della forma =
 differenza di potenziale
 tra gli estremi

Dim. per $d=2$ Per ipotesi $V_x(x,y) = A(x,y)$ e $V_y(x,y) = B(x,y)$
 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$\stackrel{\omega \text{ esatta}}{=} \int_a^b \{ V_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + V_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \right\} dt$$

$$\stackrel{\text{Analisi 1}}{=} V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))$$

[Riscrivere per esercizio in 3 o d variabili]
 — o — o —

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia ω forma diff. in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, abbastanza regolare.

Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) ω è esatta, cioè esiste V

(ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi si ha che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

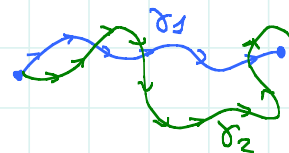
(iii) per ogni curva chiusa γ si ha che $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Dim. L'idea è che (i) e (iii) si parlano attraverso il (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Prendo una curva chiusa, e considero una seconda curva chiusa che sta sempre ferma nel p.to di partenza/arrivo della prima.

L'integrale è lo stesso, ma nel secondo caso è 0.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Prendo σ_1 e σ_2 con gli stessi estremi e costruisco una terza curva γ che segue σ_1 all'andata e poi torna indietro lungo σ_2 . Allora γ è chiusa, quindi



$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\sigma_1} \omega - \int_{\sigma_2} \omega \rightsquigarrow \int_{\sigma_1} \omega = \int_{\sigma_2} \omega$$

$\uparrow$ (iii) vera $\uparrow$ σ_2 è percorsa al contrario

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dal risultato precedente sappiamo che $\int_{\sigma_1} \omega = \int_{\sigma_2} \omega =$ diff. potenziale tra gli estremi.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Non banale e lo facciamo nel caso $d=2$

Devo costruire il potenziale.

Fisso $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per ogni altro $(x, y) \in \Omega$ definisco

$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega \quad (\text{sappiamo che non dipende da } \gamma)$$

$\uparrow$ qualunque curva che unisce (x_0, y_0) a (x, y)

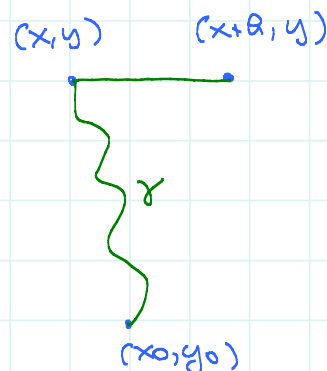


Verifico che $V_x(x, y) = A(x, y)$ (l'altra verifica è uguale)

$V(x+R, y)$ = per definirlo uso la curva che andava bene prima + segmento

$$= \int_{\gamma} \omega + \int_{\text{segmento}} \omega$$

$\underbrace{\int_{\gamma} \omega}_{V(x, y)}$



$$\begin{aligned}
 V(x+h, y) - V(x, y) &= \int_{\text{segmento}} \omega_{(x+th, y)} \quad t \in [0, 1] \\
 &= \int_0^1 \{ \underbrace{A(x+th, y)}_{\dot{x}(t)} \cdot h + \underbrace{B(x+th, y)}_{\dot{y}(t)} \cdot 0 \} dt \\
 &= h \int_0^1 A(x+th, y) dt
 \end{aligned}$$

Quindi dividendo per h

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \int_0^1 A(x+th, y) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(x, y)$$

Ora possiamo passare al limite nell'integrale dipendente da parametro e ottenere

$$\int_0^1 A(x, y) dt = A(x, y)$$

— 0 — 1 —

Domanda: ma siamo sicuri che esista γ che congiunge (x_0, y_0) con (x, y) ?

ANALISI 2

—

LEZIONE 37

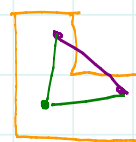
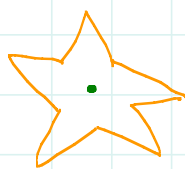
Note Title

13/11/2023

Insieme $\rightarrow$ connessi
 $\rightarrow$ connessi per archi
 $\rightarrow$ semplicemente connessi
 $\rightarrow$ convessi
 $\rightarrow$ stellati

Non Def. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice

- **CONVESSO** se per ogni P e Q in Ω , tutto il segmento di estremi P e Q è contenuto in Ω
- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che per ogni $Q \in \Omega$, tutto il segmento PQ è contenuto in Ω



[Stellato: posso piazzare un guardiano in P che vede tutto Ω]

- **CONNESSO** se è fatto da un "pezzo solo"

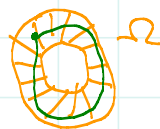


- **CONNESSO PER ARCHI** se per ogni P e Q in Ω esiste $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ **continua** t.c. $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$.

- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ vuol dire che non ha buchi



sempl. connesso



NON sempl. connesso

In generale, se ogni curva chiusa la posso "ritirare" sul p.to di partenza / arrivo senza spezzarla.

Esempio In $\mathbb{R}^3$

- il complementare di una sfera è sempl. connesso
- il complementare di una retta NO
- il complementare di un disco sì
- il complementare di una circ. NO

Def. Siano $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [a,b] \rightarrow \Omega$ due curve continue tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$

Si dice che γ_1 e γ_2 sono **OMOTOPE** [se è possibile trasformare l'una nell'altra lasciando fissi gli estremi]

se esiste $\phi: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ continua t.c.

$$\phi(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

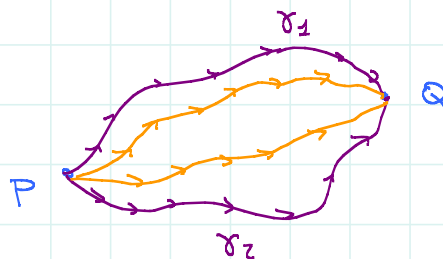
$$\phi(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\phi(a, s) = P \quad \forall s \in [0,1]$$

$$\phi(b, s) = Q \quad \forall s \in [0,1]$$

Per ogni $s \in [0,1]$ la curva

$$[a,b] \ni t \rightarrow \phi(t, s) \in \Omega$$



è una curva intermedia tra γ_1 e γ_2 .

Relazioni ovvie

i viceversa sono tutti falsi

$$\text{Convesso} \Rightarrow \text{Stellato} \Rightarrow \text{Sempl. convesso} \Rightarrow \text{convesso}$$

Teorema Se ω è una forma diff. abbastanza regolare e Ω è sempl. convesso, allora

$$\omega \text{ chiusa} \Rightarrow \omega \text{ esatta}$$

Teorema Se ω è una forma diff. **chiusa** (senza ipotesi su Ω) e γ_1 e γ_2 sono due curve omeotopiche con gli stessi estremi, allora

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Secondo lemma primo

Sia γ una qualunque curva chiusa.

Se Ω è sempl. convesso, allora γ è omeotopica alla curva costante

Se la forma è chiusa, allora per il secondo teorema

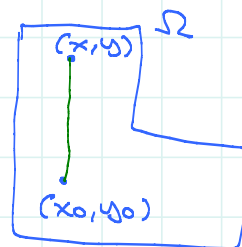
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\text{curva cost}} \omega = 0$$

Ma allora ω è esatta per la caratterizzazione.

Dim primo nel caso $d=2$ e Ω stellato

Supponiamo $A_y(x,y) = B_x(x,y)$, cioè la chiusura e troviamo la primitiva.

Scegliamo (x_0, y_0) una posizione del guardiano e per ogni $(x,y) \in \Omega$ definiamo la primitiva come



ANALISI 2 - LEZIONE 38

Note Title

13/11/2023

LA SOLITA

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

ω è una forma diff. definita per $(x,y) \neq (0,0)$

Si verifica che ω è chiusa in tutto l'insieme di definizione
[Simpatico conto $A_y = B_x$]

Tuttavia ω non è esatta.

Dici Basta trovare una curva chiusa γ t.c. $\int_{\gamma} \omega \neq 0$
Prendiamo

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\sin t} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}}}{(-\sin t)} - \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{\cos t} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}}}{\cos t} \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos^2 t}_{=0} + \underbrace{\sin^2 t}_{=0}) dt = -2\pi$$

Interpretazione ciclistica Penso al vento come un campo di vettori.

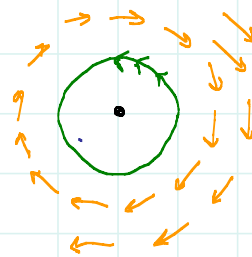
Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario,
posso concludere che il campo non è gradiente di un potenziale

Infatti: vento contrario vuol dire $\langle \vec{E}, \dot{\gamma} \rangle < 0$ per ogni γ ,
ma allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \dot{\gamma} \rangle ds < 0 \leadsto \text{NO esatta}$$

Come è fatta la solita?

$$\omega = \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{A(x,y)} dx - \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{B(x,y)} dy$$



È un vento vorticoso intorno all'origine

Fatto importante Se prendo l'insieme $x > 0$, questo è convesso, dunque sempl. connesso, dunque lì la forma è esatta, quindi esiste una primitiva

Basta prendere

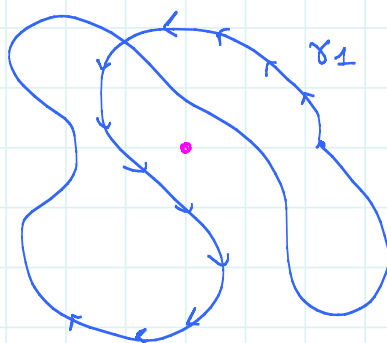
$$V(x, y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$V_x = -\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{e idem l'altra}$$

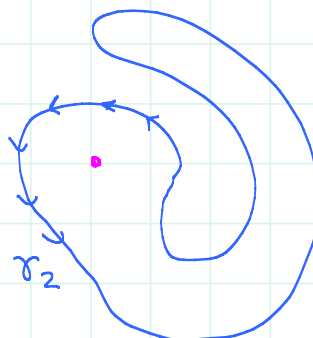
Stessa cosa in $x < 0, y > 0, y < 0$

Dirò di più: esiste una primitiva definita ovunque meno che sul semiasse negativo dell' x (l'insieme è stellato, quindi sempl. connesso)

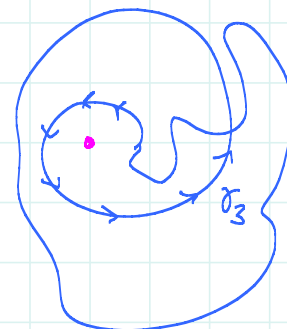
Esercizio: scrivere questa primitiva



$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$



$$\int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$$



$$\int_{\gamma_3} \omega = -4\pi$$

Moralmente: conta solo quante volte gira intorno al buco.

Fatto Sia ω una qualunque forma diff. chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Allora

$$\omega = \underbrace{\omega_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{forma esatta}}} + c \cdot \text{solita}$$

Tre strategie per calcolare $\int_{\gamma} \omega$

- ① Definizione bovina (uso la formula)
- ①bis) Uso la formula, me magari parametrizzo la curva in modo più comodo.
- ② Spero che ω sia esatta, calcolo UNA primitiva, e faccio la diff. tra il valore agli estremi
- ③ Spero che ω sia chiusa, e sostituisco γ con una curva più comoda che sia omotopa alla γ data (questo funziona anche se ω è esatta e non chiede di calcolare la primitiva)

Esempi $\omega = x dx + y^2 dy$

Esatta! $V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3$ (e anche chiusa)

$$\omega = xy dx + y^2 x dy$$

$A_y = x$ $B_x = y^2$ ☹️ no chiusa, no esatta

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \rightsquigarrow$ esatta e chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$

Esempio Sia $\omega = (y+z)dx + xdy + (z^3+x)dz$
 $\gamma(t) = (t + \sin t, t \cos^2 t, t^3 + t) \quad t \in [0, \pi]$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \omega$$

Verifichiamo la chiusura

$$A_y = B_x$$

$$1 = 1 \quad \text{☺}$$

$$A_z = C_x$$

$$1 = 1 \quad \text{☺}$$

$$B_z = C_y$$

$$0 = 0 \quad \text{☺}$$

Quindi ω è chiusa. Essendo definita su $\mathbb{R}^3$, allora è esatta.

$$V(x, y, z) = xy + xz + \frac{1}{4} z^4$$

Ora basta calcolare gli estremi della curva e sostituire

In alternativa: uso strategia ③ sostituendo la curva con il segmento che ha gli stessi estremi, e poi uso la definizione senza calcolare la primitiva.

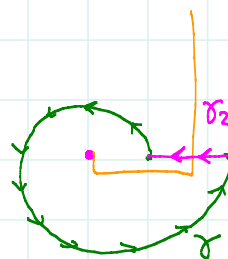
Esempio ω = la solita

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t) \quad t \in [2\pi, 4\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

Potei usare la definizione (auguri!)

In $\mathbb{R}^2$ \ curva arancione esiste una primitiva (auguri!)



Alternativa praticabile: toro al p.to di partenza con un segmento

Sappiamo che $\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$
 $\uparrow$
 l'unione fa
 un giro

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= -2\pi - \int_{\gamma_2} \omega \\ &= -2\pi + \int_{2\pi}^{4\pi} (0+0) = -2\pi \end{aligned}$$

vengono 0 per merito di y e dy :)

segmento $\rightarrow\rightarrow\rightarrow \gamma(t) = (t, 0)$ con $t \in [2\pi, 4\pi]$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 39

Note Title

17/11/2023

SUPERFICI Una superficie può presentarsi in almeno 3 modi

Cartesiana "Pezzo di grafico"

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y) \}$$

$\uparrow$ bene

Implicita "Luogo di zeri"

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0 \}$$

Parametrica

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$\uparrow$ insieme dei parametri

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^d)$$

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \leftarrow \text{parametrizz. della superficie}$$

$$S = \{ \phi(u, v) : (u, v) \in \Omega \} \leftarrow \text{sostegno della superficie}$$

Oss. 1 Le superfici cartesiane sono casi speciali di parametriche

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

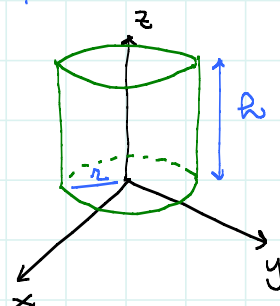
Oss. 2 Quando vale il teo. delle funzioni implicite, anche le superfici date in forma implicita si possono localmente parametrizzare.

Oss. 3 Sulla ϕ di solito si assume che sia continua, iniettiva nell'interno di Ω , di classe C^1 con matrice jacobiana abbia rango 2 in ogni p.to.

Esempio 1

$$C = \{ \underbrace{(r \cos u, r \sin u, v)}_{\phi(u,v)} : \underbrace{u \in [0, 2\pi], v \in [0, R]}_{\text{dove variano i parametri}} \}$$

Oss. La parametrizzazione è iniettiva all'interno del rettangolo, ma i due lati con $u=0$ e $u=2\pi$ vanno a coincidere.

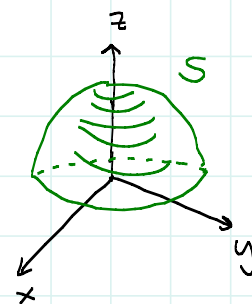
**Esempio 2** Semisfera di raggio r e centro nell'origine

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0 \}$$

↑ descrizione implicita

$$= \{ (x, y, \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}_{\phi(x,y)}) : \underbrace{x^2 + y^2 \leq r^2}_{\text{descrizione della base } \Omega} \}$$

↑
presentazione
cartesiana



Sono possibili almeno due parametrizzazioni

$$\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \quad (u, v) \in \Omega = \text{cerchio di raggio } r \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$$\phi(u, v) = (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, r \sin v)$$

long. ↑ latitud. ↑

$$u \in [0, 2\pi], v \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Oss. Lo stesso insieme è parametrizzato in vari modi.

PIANO TANGENTE E VETTORE/VERSORE NORMALE

Caso esplicito $(x, y, f(x, y))$

Il piano tangente ha equazione, nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

↑
Tangente di ordine 1 di $f(x, y)$ nel p.to (x_0, y_0)

Dal piano tangente segue il vettore/versore normale.

Caso implicito $g(x, y, z) = 0$

In questo caso $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ è $\perp$ al luogo di zeri

↑
vettore normale
alla superficie

Se è diverso dal vettore nullo (proprio quando vale il teo. della funzione implicita) il piano tangente diventa

$$g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

↑ piano $\perp$ a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ che passa per (x_0, y_0, z_0)

Caso parametrico $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

Il piano tangente ha equazione parametrica

$$\Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Descrizione parametrica del piano tangente, che ha senso se $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$ sono due vettori lin. indip., il che accade se e solo se $J\Phi(u_0, v_0)$ ha rango = 2 ("full rank")

$$J\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\Phi_u(u,v)$ $\Phi_v(u,v)$

Se voglio passare in forma cartesiana mi serve un vettore $\perp$ a Φ_u e Φ_v , che sar  normale alla superficie.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, z_v x_u - x_v z_u, x_u y_v - y_u x_v)$$

$$=: (M_1, M_2, M_3)$$

$$= \underbrace{\Phi_u \wedge \Phi_v}_{\text{--- o --- o ---}}$$

AREA DELLA SUP L'analogo del discorso

fatto per le curve sarebbe

- triangolare la superficie
- sommare le aree dei triangoli
- fare il sup infittendo la triangolazione



NON FUNZIONA! IL SUP VIENE QUASI SEMPRE $+\infty$

Il classico controesempio   la **LANTERNA DI SCHWARZ**

$\uparrow$ google

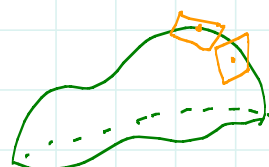
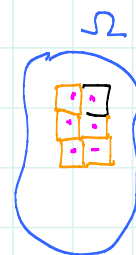
L'idea geometrica   che per effetto fisarmonica i triangoli non   detto che risultino "quasi tangenti" alla superficie, anche quando sono molto piccoli.

Con le curve non succedeva.

Cosa funziona

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Approssimo Ω con dei quadrati / rettangoli
- In ogni quadrato scelgo un pto e approssimo Φ con il suo Taylor di ordine 1
- Faccio l'immagine del quadrato mediante la Φ approssimata
- Ogni quadrato finisce in un parallelogrammo di cui so calcolare l'area
- Infittisco la quadrattatura e faccio il limite



Moralmente: approssimo la sup. con dei parallelogrammi contenuti nei piani tangenti
 La sto "piastellando" con dei parallelogrammi tangenti

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 40

Note Title

17/11/2023

Formula per l'area di una superficie

Se $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è di classe C^1 , allora

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \|\phi_u \wedge \phi_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

Caso speciale: superfici cartesiane

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \, dx \, dy$$

La parametrizzazione è $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$$\begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-f_u, -f_v, 1)$$

↑ vettore normale alla sup

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{\underset{M_1^2}{f_u^2} + \underset{M_2^2}{f_v^2} + \underset{M_3^2}{1}} \, du \, dv$$

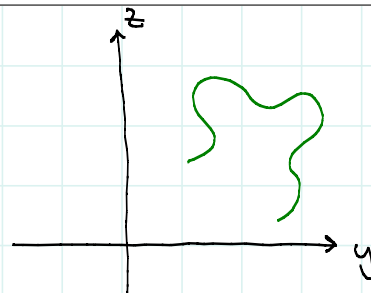
Oss. (Algebra lineare) Se w_1 e w_2 sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, allora il parallelogramma che generano ha area $\|w_1 \wedge w_2\|$

Oss. Nell'idea di definizione stavamo costruendo una somma di Riemann dell'integrale

Superfici di rotazione

Consideriamo una curva nel piano yz ,
ancora meglio nel semipiano $y \geq 0$
la scriviamo come

$$(y(t), z(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$



Ruotando il sostegno intorno all'asse z otteniamo una sup.
parametrizzata da

$$\Phi(\theta, t) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad t \in [a, b]$$

↑
tutti i punti a quota $z(t)$ che
distano $y(t)$ dall'asse z

L'area di questa superficie è data dalla formula

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Questa si può anche interpretare come

GOLDINO 2

$$\text{Area} = \text{Lung}(curva) \cdot 2\pi y_G$$

↑
lunghezza cammino del G della
curva durante la
rotazione

↑
coord. y del baricentro della
CURVA che ruota

Dim. formula 1 $\Phi(\theta, t) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \\ \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \Phi_\theta \\ \leftarrow \Phi_t \end{matrix}$$

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_t = (y(t) \dot{z}(t) \cos \theta, y(t) \dot{z}(t) \sin \theta, -y(t) \dot{y}(t))$$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| = \left\{ y(t)^2 \dot{z}(t)^2 \cos^2 \theta + y(t)^2 \dot{z}(t)^2 \sin^2 \theta + y(t)^2 \dot{y}(t)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ y(t)^2 \dot{z}(t)^2 + y(t)^2 \dot{y}(t)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \underbrace{y(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{con il segno + perché} \\ \text{siamo nel semipiano} \\ y \geq 0}} \left\{ \dot{z}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \right\}^{1/2}$$

con il segno + perché
siamo nel semipiano
 $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dt \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_a^b dt y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \\ &= 2\pi \int_a^b \underbrace{y(t)}_{\text{— o — o —}} \underbrace{\sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}_{\text{— o — o —}} dt \end{aligned}$$

Dim. Guldino 2 Moltiplico e divido per $\text{Lung}(curva)$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{Lung} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{\text{Lung}} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt}_{\substack{\int_\gamma y ds \\ \text{— o — o —} \\ y_\gamma \text{ per definizione}}} \end{aligned}$$

Integrali superficiali

Notazioni Ingredienti

→ superficie $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

→ funzione $f(x, y, z)$ definita almeno sul supporto di ϕ

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

$\uparrow$ sup
 $\uparrow$ integrale
 superficiale

$$\int_S f(x, y, z) dS$$

$$\int_S f(x) d\mathcal{H}^2$$

$\uparrow$ misura di HAUSDORFF
 2-dimensionale

Significato fisico se f è la densità del materiale, allora è la massa totale della sup.

Idea della definizione Sempre la solita...

- approssimo la sup. con i parallelogrammi
- faccio finta che f sia costante su ogni parallelogrammo
- rifinitisco e passo al limite.

Formula per il calcolo Se tutto è abbastanza regolare

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \|\phi_u \wedge \phi_v\| du dv$$

Baricentro di una sup $G = (x_G, y_G, z_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_S x d\sigma \quad y_G = \dots \quad z_G = \dots$$

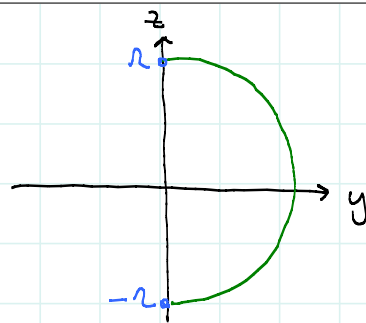
Esempio 1 Area della sfera

$$\text{Area} = 2\pi y_G \cdot \text{lunghezza} = 4\pi r^2$$

$$\uparrow \frac{2r}{\pi}$$

$$\uparrow \pi r$$

↑
baricentro semicirc.
calcolato a suo
tempo



[Alternativa : $(y(t), z(t)) = r(\cos t, \sin t)$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$]

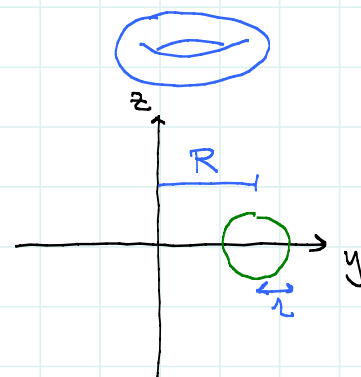
$$\text{Area} = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos t}_y \cdot \underbrace{r}_{\sqrt{y^2+z^2}} dt = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 4\pi r^2$$

Esempio 2 Volume e Area sup. del toro

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 2\pi y_G \cdot \text{Area cerchio} \\ &= 2\pi R \cdot \pi r^2 \\ &= 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sup} &= 2\pi y_G \cdot \text{lunghezza curva} \\ &= 2\pi R \cdot 2\pi r \\ &= 4\pi^2 R r \end{aligned}$$

— o — o —



ANALISI

2

-

LEZIONE 4)

Note Title

20/11/2023

- Gradiente
- Laplaciano
- Divergenza
- Rotore

Gradiente INPUT: funzione SCALARE $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 OUTPUT: funzione VETTORIALE $\nabla f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_d}(x))$$

Laplaciano INPUT: funz. scalare $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 OUTPUT: " " $\Delta f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f(x) = f_{x_1 x_1}(x) + \dots + f_{x_d x_d}(x)$$

traccia di $Hf(x)$

Divergenza INPUT: funzione VETTORIALE $E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
 OUTPUT: funzione SCALARE $\operatorname{div} E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} E = (E_1)_{x_1} + \dots + (E_d)_{x_d}$$

$$d=2 \quad E = (A, B) \quad \operatorname{div} E = A_x + B_y$$

$$d=3 \quad E = (A, B, C) \quad \operatorname{div} E = A_x + B_y + C_z$$

Rotore Specifico di $\mathbb{R}^3$

INPUT: funzione VETTORIALE $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

OUTPUT: " VETTORIALE $\operatorname{rot} E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = \text{rot}(A, B, C)$$

In fisica si definisce anche il rotore di campi in dim 2

$$\text{rot}(A, B) = \text{rot}(A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

↑ ↑
dipendono
da x e y

Simboli dei fisici

Gradiente	$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
Laplaciano	$\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$
Divergenza	$\nabla \cdot E = (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C)$
Rotore	$\nabla \wedge E$
— o — o —	

Formule classiche

① $\text{div}(\nabla f) = \text{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$

$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$ qualunque sia il numero di variabili

② $\text{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$ (inversione dell'ordine di derivazione)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0)$$

③ $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$ (anche qui inversione ordine di derivazione)

$$\text{rot } E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\text{div}(\text{rot } E) = \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0$$

Oss. Occhio che molte operazioni NON hanno senso, ad esempio

$$\nabla E \quad \text{rot}(\text{div} E) \quad \text{div}(A f) \quad \text{div}(\text{div} E)$$

— 0 — 0 —

Gradiente nullo / uguale

vettore nullo

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f = \vec{0}$

Allora se Ω è **CONNESSO** si può concludere che f è costante. (Altrimenti è costante su tutte le componenti connesse di Ω)

→ Se $f_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono t.c. $\nabla f_1 = \nabla f_2$, allora $f_1 = f_2 + \text{costante}$ se Ω è CONNESSO.

ROTORE nullo / uguale

vettore nullo

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo con $\text{rot} E = \vec{0}$

$$\text{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (0, 0, 0)$$

vuol dire che

$$C_y = B_z$$

$$A_z = C_x$$

$$A_y = B_x$$

$$\Rightarrow \omega = A dx + B dy + C dz \text{ è chiusa}$$

Allora se Ω è **SEMPLICEMENTE CONNESSO** possiamo concludere che $E = \nabla f$ per una opportuna f scalare

La stessa cosa vale in $\mathbb{R}^2$ usando il "rotore dei fisici"

Oss. Un'estensione del rotore in $\mathbb{R}^d$ avrebbe $\frac{d(d-1)}{2}$ componenti.

→ Se $\text{rot } E_1 = \text{rot } E_2$, e Ω è semplicemente connesso, allora $E_2 = E_1 + \nabla f$ per una opportuna f .

Divergenza nulla / uguale

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori t.c.
 $\text{div } E = 0$

Allora, se Ω ha una opportuna proprietà possiamo dedurre che E è un rotore, cioè esiste $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $E = \text{rot } F$

→ Se $\text{div } E_1 = \text{div } E_2$, e $\Omega \dots$, allora $E_2 = E_1 + \text{rot } F$

Opportuna proprietà: → gratis nel caso stellato

→ possibilità di trasportare ovunque un palloncino a forma di sfera

(ok in $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$, non ok in $\mathbb{R}^3 \setminus \text{sfera piena}$)
 — o — o —

Tutti gli operatori ∇ , Δ , div , rot sono lineari

Valgono formule simili a quelle della derivata del prodotto, opportunamente interpretate

Esempio $\text{div}(fE) = f \text{div } E + \langle \nabla f, E \rangle$

$$\begin{aligned} \text{div}(fA, fB, fC) &= (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z \\ &= \underbrace{f_x A}_x + \underbrace{f A_x}_x + \underbrace{f_y B}_y + \underbrace{f B_y}_y + \underbrace{f_z C}_z + \underbrace{f C_z}_z \\ &= \langle \nabla f, E \rangle + f \text{div } E \end{aligned}$$

— o — o —

Maxwell (wiki in inglese CURL) (mettere a posto i segni)

$$\text{rot}(\text{rot } E) = \pm \nabla(\text{div } E) \pm (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

ANALISI 2

LEZIONE 42

Note Title

20/11/2023

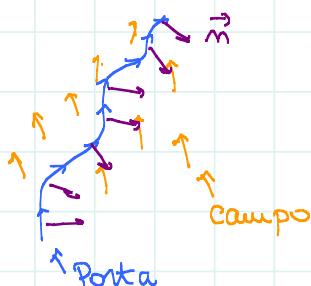
INTEGRALI DI FLUSSO

Dim $d=2$ Ingredienti

- ① Campo $E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ $(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- ② Curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ suff. regolare
- ③ Orientazione: scelta di un vettore $\vec{n}$ normale a γ ($\perp$ a $\dot{\gamma}$)

Flusso di E attraverso γ in direzione $\vec{n}$

$$= \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$



Sostegno curva = porta oppure vela
 Campo = mov. di persone oppure vento

Integrale di flusso: bilancio entrate
 uscite, o forza
 esercitata dal vento su una faccia
 della vela

Vettore normale canonico (standard) = tangente alla curva
 ruotato di 90° orario

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

vettore tangente $\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

Andando a sostituire

$$\begin{aligned}\text{Flusso} &= \int_{\gamma} \langle E, \vec{n} \rangle ds = \int_a^b \left\{ A \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= \int_a^b \{ A \dot{y} - B \dot{x} \} dt \\ &= \int_{\gamma} -B dx + A dy\end{aligned}$$

In conclusione: se $E = (A, B)$ e $\vec{n}$ è il versore normale canonico, allora

$$\text{Flusso} = \int_{\gamma} \langle E, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} (-B dx + A dy)$$

↑
integrale di
funzione

↑
integrale di
forma differenziale

dim $d=3$ Ingredienti

→ Campo $\vec{E} = (A, B, C)$

→ Superficie $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$

→ Orientazione, cioè scelta di un versore normale

$$\text{Flusso} = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Versore normale canonico: quello associato a $\Phi_u \wedge \Phi_v$,
che a suo tempo era (M_1, M_2, M_3)

$$\text{Flusso} = \int_S \left(A \cdot \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} + B \cdot \frac{M_2}{\sqrt{\dots}} + C \cdot \frac{M_3}{\sqrt{\dots}} \right) \sqrt{\dots} du dv$$

Conclusione: se $\vec{n}$ è il vettore normale canonico, allora

$$\text{Flusso} = \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

superf.
 $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

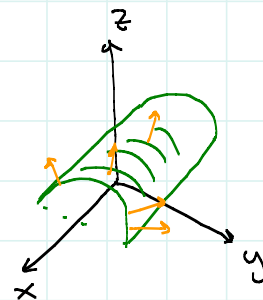
$A(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) M_1(u,v)$

Esempio

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, x \in [-1, 1] \}$$

$$E = (xy, y, z^2)$$

$\vec{n}$ = verso l'alto



Primo passo: parametrizzo la superficie

$$(u, \underset{1}{\rho \cos \theta}, \underset{1}{\rho \sin \theta}) = (u, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$u \in [-1, 1], \theta \in [0, \pi]$$

Secondo passo: calcolo $\vec{n}$ canonico

	*	*	*	
Φ_u	1	0	0	$\rightsquigarrow (0, -\cos \theta, -\sin \theta)$
Φ_θ	0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ viene $(0, 0, -1)$
 $\uparrow$
 verso il basso, quindi
 è l'opposto di quello
 che mi serve

Terzo passo: uso formula

$$\text{Flusso} = - \int_{-1}^1 du \int_0^\pi d\theta \left\{ \underset{\substack{\uparrow x \\ M_1}}{u \cos \theta} \cdot \underset{\substack{\uparrow y \\ M_2}}{0} + \underset{\substack{\uparrow y \\ M_2}}{\cos \theta} (-\cos \theta) + \underset{\substack{\uparrow z \\ M_3}}{\sin^2 \theta} \cdot \underset{\substack{\uparrow M_3}}{(-\sin \theta)} \right\}$$

= si fa

— 0 — 0 —

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Stiamo in dimensione $d=2$ oppure $d=3$ (ma vale per ogni d)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d \quad \text{e} \quad E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

normale ESTERNA

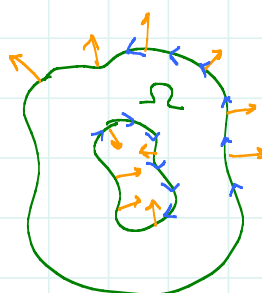
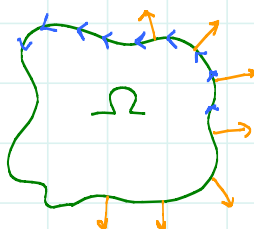
$d=2$

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

↑
integrale doppio

↑
integrale
curvilineo

↑
 γ è una curva che
percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a
sinistra

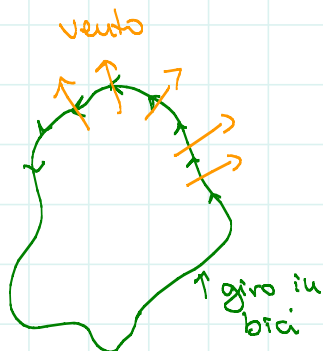


$d=3$

$$\iiint_{\Omega} (Ax + By + Cz) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
integrale superficiale

Interpretazione ciclistica



Faccio un giro in bici, in verso antiorario, e ho sempre il vento da sinistra. Quando torno a casa dico che la divergenza del vento è positiva da qualche, e il vento non è un rotore e il suo rotato di 90° non è un gradiente

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

↑
sempre
deve essere positiva da qualche parte.

ANALISI 2

-

LEZIONE 43

Note Title

20/11/2023

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

Utilità: trasformare integrali nell'interno in integrali sul bordo e viceversa

Esempio 1 Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Si tratta di una curva chiusa che limita un insieme Ω .

Calcolare

Area(Ω)

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

Disegno del sostegno fatto in una les. precedente



1° modo

Provare a scrivere Ω come insieme normale risp. asse x o y .

$x = t - t^2 \leadsto$ ricavo t in funzione di $x \leadsto$ sostituisco sotto
 $y = t - t^3$

2° modo

Cerco di spostare gli integrali sul bordo

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy = \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx$$

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{div}(x,0) \\ \uparrow \\ A}}{1} \, dx \, dy = \int_{\gamma} \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{x} \, dy = \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{(t - t^2)(1 - 3t^2)} \, dt$$

= si fa

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} -y \, dx = \int_0^1 - \underbrace{(t-t^3)}_{\substack{\uparrow \\ y(t)}} \underbrace{(1-2t)}_{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}} dt$$

- si fa

Oss. I due integrali si ottengono l'uno dall'altro integrando per parti

Fatto generale Se γ percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra, allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = - \int_{\gamma} y \, dx$$

Posso anche fare dei vix del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} (c \, x \, dy - (1-c) \, dx)$$

Ho usato

$$E = (\underbrace{c}_{\substack{\uparrow \\ A}} x, \underbrace{(1-c)}_{\substack{\uparrow \\ B}} y)$$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \int_{\gamma} \underbrace{A}_{\substack{\uparrow \\ E = (\frac{1}{2}x^2, 0)}} dy$$

oppure
 $E = (0, xy)$

$$\int_{\gamma} A \, dy = \int_{\gamma} \frac{1}{2} \underbrace{(t-t^2)^2}_{\substack{\uparrow \\ x(t)^2}} \underbrace{(1-3t^2)}_{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}} dt$$

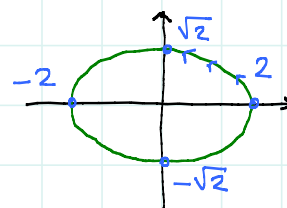
= si fa

Esempio 2 $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$

$$\vec{E} = (x + \arctan(e^y), \sin R(x^3 + y^2))$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ **entrante** in Ω .

$\uparrow$
orientazione opposta
rispetto a quella canonica



1° modo Cerco la γ che percorre come si deve $\partial\Omega$

$$\gamma(t) = (2 \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Uso formula

$$\text{Flusso} = - \int_{\gamma} A dy - B dx = \int_{\gamma} B dx - A dy$$

↑
orientazione

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ (\underbrace{2 \sin \theta}_{B} (8 \cos^3 \theta) + 2 \sin^2 \theta) (-2 \underbrace{\sin \theta}_{\dot{x}(t)}) + \dots \right\} d\theta$$

- auguri!

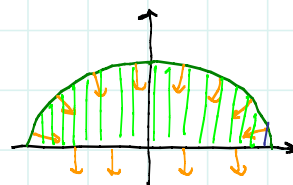
2° modo Sposto l'integrale dal bordo all'interno.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \iint_{\Omega} \text{div } E \, dx \, dy = \iint_{\Omega} (1 + 2y) \, dx \, dy \\ &= \text{area (ellisse)} = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Quindi flusso richiesto = $-2\sqrt{2}\pi$

↑
orientazione

Esempio 3 Calcolare il flusso entrante dalla parte superiore dell'ellisse precedente



Definisco $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4, y \geq 0\}$
e osservo che

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (1 + 2y) \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \\ &= \int_{\text{arco}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds + \int_{\text{segmento}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \end{aligned}$$

↑
si fa facile

Il primo è quello che voglio cambiato di segno.

Il secondo lo calcolo parametrizzando il segmento come

$$\gamma(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [-2, 2],$$

e viene

$$\int_{\text{segmento}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{-2}^2 \sin(t^3) dt = 0$$

$\uparrow$
 $(0, -1)$

$\underbrace{\int_{-2}^2 \sin(t^3) dt}_{\text{Volendo è } \int_{\gamma} -B dx}$

funzione
dispari
 $\swarrow$

Conclusione:

$$\text{Flusso richiesto} = - \iint_{\Omega} (1 + zy) dx dy \quad \text{che si fa.}$$

Esempio 4 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$

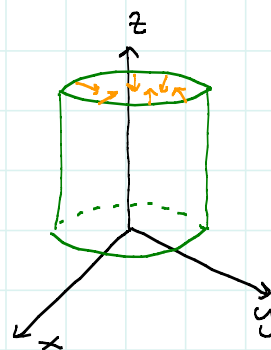
$$\vec{E} = (x + yz^3, y - \sin(z), x^2y^3 - 2z)$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ attraverso S con orientazione entrante

Parametizziamo S per esercizio

$$(\cos\theta, \sin\theta, u) : \theta \in [0, 2\pi] \quad u \in [0, 1]$$

Ora bisognerebbe calcolare (M_1, M_2, M_3) e vedere se è quello giusto.



Osservo che $\text{div } E = 0$ 😊, quindi quello che entra dalla superficie laterale coincide con quello che esce dai tappi, cioè dalle due basi

$$\text{Flusso richiesto} = \int_{\text{Base giù}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{\text{Base su}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$ $(0, 0, -1)$ $\uparrow$ $(0, 0, 1)$

$$\iint_{\text{Base giù}} \langle E, (0, 0, -1) \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-x^2y^3 + 2\overset{=0}{\underset{\uparrow}{z}}) dx dy$$

= 0 perché è dispari in y

$$\iint_{\text{Base su}} \langle E, (0, 0, 1) \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2y^3 - 2\overset{\uparrow}{z} \text{ nella base su}) dx dy$$

$$= -4 \text{ Area (Base su)} = -4\pi \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 44

Note Title

24/11/2023

Teorema divergenza

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \quad E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle E, m \rangle d\sigma$$

↑
normale
esterna a Ω

← integrale superf.

Versione in dim 2 $E = (A, B)$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle E, m \rangle ds = \int_{\partial\Omega} A dy - B dx$$

↑
curv. curvilinear

← curva, o unione di curve, che percorrono $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

Analisi 1

$$E(b) - E(a) = \int_a^b E'(x) dx \quad E: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

AKA

GAUSS-GREEN

Ingredienti :

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$
- $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} E \, dx = \int_{\partial\Omega} f \langle E, m \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle dx$$

Nel caso particolare in cui $E = \nabla g$ con $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diventa

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \nabla g, m \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

↑
Derivata direzionale
di g in direzione normale a $\partial\Omega$

Analisi 1

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Banale Gauss - Green $\Rightarrow$ teo. divergenzaBasta prendere $f \equiv 1$ e osservare che $\nabla f \equiv 0$ **Facile** Teo. divergenza $\Rightarrow$ Gauss - GreenScrivo il teo. della divergenza con fE al posto di E

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(fE) dx = \int_{\partial\Omega} \langle fE, n \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 $\langle \nabla f, E \rangle + f \operatorname{div} E$

$\int_{\partial\Omega} f \langle E, n \rangle d\sigma$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle dx + \int_{\Omega} f \operatorname{div} E dx$$

Ora basta portare il primo integrale a destra

$$\begin{aligned} \text{Analisi 1} \quad [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b [f(x)g(x)]' dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

Ora basta ri-organizzare i termini.

— 0 — 0 —

Ragionevole Dim. teo. della divergenza con $d=2$ e Ω insieme normale risp. asse x

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Devo dimostrare che

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega} A dy - B dx$$

Dimostriamolo per la parte con B, cioè

$$\iint_{\Omega} By dx dy = \int_{\partial\Omega} -B dx$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} B_y(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy B_y(x,y) \\ &= \int_a^b dx \{ B(x, \psi(x)) - B(x, \varphi(x)) \} \end{aligned}$$

$$\int_{\partial\Omega} -B dx = \int_{\sigma_1} -B dx + \int_{\sigma_2} -B dx + \int_{\sigma_3} B dx + \int_{\sigma_4} B dx$$

$\partial\Omega$ è fatto da 4 curve

- $\sigma_1(t) = (t, \varphi(t))$ con $t \in [a, b]$
- $\sigma_2(t) = (b, t)$ con $t \in [\varphi(b), \psi(b)]$
- $\sigma_3(t) = (b, \psi(t))$ con $t \in [a, b]$
- $\sigma_4(t) = (a, t)$ con $t \in [\varphi(a), \psi(a)]$

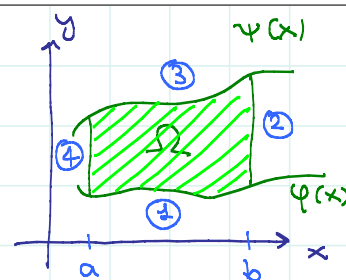
} orientate al contrario

Osservo che $\int_{\sigma_2} B dx = \int_{\sigma_4} B dx = 0$ perché $\dot{x}(t) = 0$ in questi casi

$$\int_{\sigma_1} -B dx = - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{B(t, \varphi(t))} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{dt} dt$$

$$\int_{\sigma_3} B dx = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{B(t, \psi(t))} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{dt} dt$$

Mettendo insieme l'uguaglianza è verificata.



Dimostriamo ora la parte su A , cioè

$$\iint_{\Omega} A_x \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} A \, dy$$

L'idea non ovvia è di introdurre la funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, t) \, dt$$

Per questa scriviamo il teo. fondamentale del calcolo integrale

$$\underbrace{H(b)}_{(1)} - \underbrace{H(a)}_{(2)} = \int_a^b H'(x) \, dx \quad (\text{calcolo } H'(x) \text{ con le formule per gli integrali dip. da parametro})$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, t) \, dt + A(x, \psi(x)) \psi'(x) - A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \right\} dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, t) \, dt + \underbrace{\int_a^b A(x, \psi(x)) \psi'(x) \, dx}_{(4)} - \underbrace{\int_a^b A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \, dx}_{(5)}$$

Vediamo chi sono (1), (2), (3), (4), (5)

$$(3) = \iint_{\Omega} A_x(x, y) \, dx \, dy = \text{termine di sx nel teo. della div.}$$

$$\int_{\gamma_1} A \, dy = \int_a^b A(t, \varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = - (5)$$

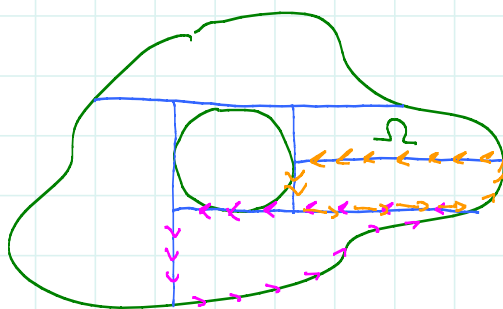
$$\int_{\gamma_2} A \, dy = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(b)} A(\underbrace{b}_{x(t)}, \underbrace{t}_{y(t)}) \underbrace{1}_{\dot{y}(t)} \, dt = H(b) = (1)$$

$$\int_{\gamma_3} A \, dy = \int_a^b A(t, \psi(t)) \psi'(t) \, dt = (4)$$

$$\int_{\gamma_4} A \, dy = \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} A(a, t) \cdot 1 \, dt = H(a) = \textcircled{2}$$

Metendo insieme otteniamo quello che doveva venire.

Per nulla ovvio: passare dagli insiemi normali ad insiemi Ω qualunque.



Idea molto intuitiva (che non si riesce a formalizzare)

- dividere Ω in tanti pezzi creando "bordi aggiuntivi"
- applicare tes per insiemi normali in ogni pezzo
- osservare che i contributi dei bordi aggiuntivi si cancellano.

ANALISI

2

-

LEZIONE 45

Note Title

24/11/2023

Esempio 1 Consideriamo la curva

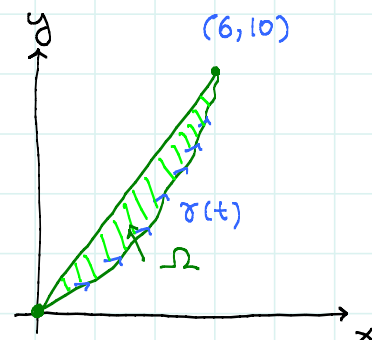
$$\gamma(t) = (t+t^2, t+t^3) \quad t \in [0, 2]$$

e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme limitato dal sostegno di γ e dal segmento che unisce gli estremi.

Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

Primo passo La curva è semplice e non chiusa (entrambe le componenti sono crescenti per $t \in [0, 2]$)



Secondo passo Cerco di capire se γ sta sopra/sotto la retta $y = \frac{5}{3}x$

Mi chiedo se sta sotto, cioè $y(t) \stackrel{?}{\leq} \frac{5}{3}x(t)$, cioè $3y(t) \stackrel{?}{\leq} 5x(t)$
 $3(t+t^3) \leq 5(t+t^2) \leadsto 3t+3t^3 \leq 5t+5t^2$

$$3t^3 - 5t^2 - 2t \stackrel{?}{\leq} 0 \quad t(3t^2 - 5t - 2) \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\begin{array}{ccccc} t & (t-2) & (3t+1) & & \\ + & - & + & \leftarrow & \text{quando } t \in [0, 2] \end{array}$$

La curva interseca la retta per $t=0$, $t=2$ e $t=-\frac{1}{3}$

Fortunatamente $t=-\frac{1}{3}$ sta fuori dalla zona di definizione della curva

Calcolo l'integrale richiesto

Potei scrivere Ω come insieme normale rispetto all'asse x , ma non è per nulla facile.

Meglio : usare teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx \, dy$$

$\uparrow$
 $E = (\frac{1}{2}x^2y, 0)$

$$= \int_{\gamma} \underbrace{A \, dy - B \, dx}_{=0}$$

$\uparrow$
curve che
percorrono $\partial\Omega$
lasciandolo a sx

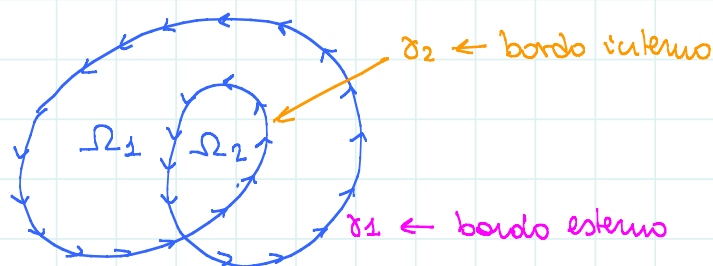
$$= \int_{\gamma_{data}} A \, dy + \int_{\text{segmento}} A \, dy$$

$$\int_{\gamma_{data}} A \, dy = \int_0^2 \frac{1}{2} \underbrace{(t+t^2)^2}_{x(t)^2} \underbrace{(t+t^3)}_{y(t)} \underbrace{(1+3t^2)}_{\dot{y}(t)} dt = \text{si fa}$$

segmento : $(3t, 5t)$ con $t \in [0, 2]$ ← orientazione al contrario

$$\int_{\text{segmento}} A \, dy = \overset{\text{orientazione}}{-} \int_0^2 \frac{1}{2} \underbrace{(3t)^2}_{x(t)^2} \underbrace{(5t)}_{y(t)} \underbrace{5}_{\dot{y}(t)} dt = \text{si fa.}$$

Esercizio 2



Quanto vale $\int_{\gamma} x \, dy$?

Osservo che $\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy$ se $\gamma \dots$

Nel nostro caso viene $2 \text{Area}(\Omega_2) + \text{Area}(\Omega_1)$

Esercizio 3 Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

Primo fatto La curva è chiusa (banale) e semplice

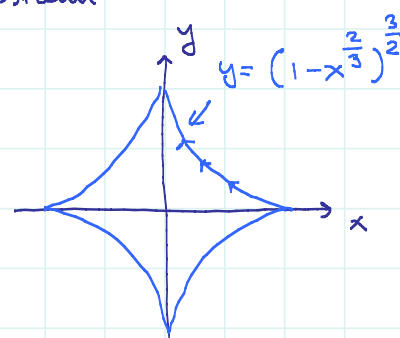
$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ \sin^3 t = \sin^3 s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases} \rightsquigarrow t - s = 2k\pi$$

$\rightsquigarrow$ l'unica possibilità, se non sono uguali, è che siano gli estremi

Secondo fatto Disegno il sostegno

Sono i pti di

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1$$



Terzo fatto Calcolare area stella

1° modo Area = $4 \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$ = forse si fa

2° modo Area = $\int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t dt$
 $= 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \cdot \sin^2 t dt$ si fa

3° modo Area = $-\int_{\gamma} y dx = + \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \cdot \sin t dt$
 $= 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt$

Sommando le 2 relazioni

$$\begin{aligned} 2 \text{ Area} &= 3 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \text{si fa davvero} \end{aligned}$$

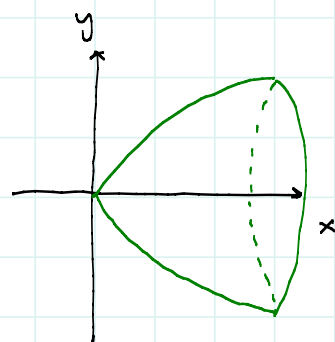
Esercizio 4 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \sin x\}$

$V =$ ruoto F di 360° attorno all'asse x

$S =$ sup. laterale di V

Calcolare il flusso ^{USCENTE} attraverso S del campo

$$\vec{E} = (x, y^2, zx)$$



1° modo Parametrizzo S come sostegno di una superficie

$$\phi(u, \theta) = (u, \underbrace{\sin u \cos \theta, \sin u \sin \theta}_{\substack{\text{fissato } u=x, \text{ nelle} \\ \text{variabili } y \text{ e } z \text{ ho una} \\ \text{circonf. di raggio } \sin u}})$$

$u \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

vedo se $\phi_u \wedge \phi_\theta$ ha il verso giusto, poi uso la formula

2° modo Uso teo. della divergenza

$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_S \langle E, n \rangle \, d\sigma + \int_{\text{cerchio}} \langle E, (1, 0, 0) \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$
orient. ok

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V (1 + \underbrace{2y + x}_0) \, dx \, dy \, dz = \text{si fa per sezioni} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x) \pi \sin^2 x \, dx = \text{si fa} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{si scrive usando } \cos(2x) \text{ e poi} \\ &\quad \text{si fa per parti} \end{aligned}$$

$$\int_{\text{cerchio}} \langle E, (1, 0, 0) \rangle \, d\sigma = \int_{\text{cerchio}} x \, d\sigma = \frac{\pi}{2} \cdot \text{Area(cerchio)} = \frac{\pi^2}{2}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 46

Note Title

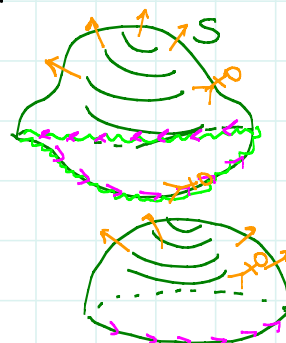
27/11/2023

Orientazione del bordo di una superficie

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata (cioè ho scelto tra le 2 possibili una versione coerente del versore normale).

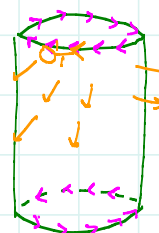
Sia ∂S il bordo della superficie.

Il verso di percorrenza su ∂S indotto dall'orientazione di S è quello di un orologio, in piedi nel verso dato dall'orientazione di S , che percorre ∂S lasciando S a sinistra.



Esempio Cilindro con orientazione verso l'esterno

Come è orientato il bordo?



Fatto generale Sia $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametr. della superficie

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

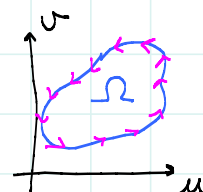
Supponiamo che l'orient. di S sia data da

$$\phi_u \wedge \phi_v$$

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra.

Allora $\phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

percorre ∂S con l'orientazione corretta.



Esempio Torniamo al cilindro che parametrizziamo come
 $(\cos\theta, \sin\theta, v) \quad (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] = \Omega$

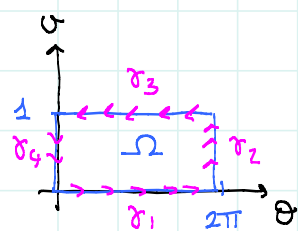
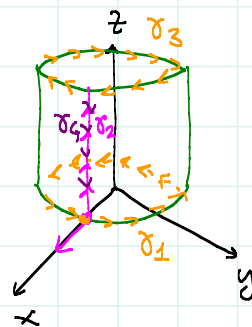
Orientazione del cilindro "canonica"

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

Se prendo $\theta = v = 0$ viene $(1, 0, 0)$

e il pto corrispondente è $(1, 0, 0)$

Questa è la normale esterna al cilindro.



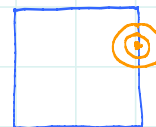
Oss. Occhio al diverso significato della parola "bordo" e del simbolo ∂ .

Quando si dice $\partial\Omega$ si intende il

"bordo topologico", cioè l'insieme dei p.ti

$x \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall r > 0 \quad B(x, r)$ interseca sia Ω sia il suo complementare

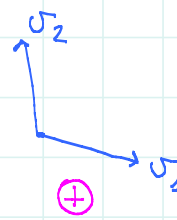
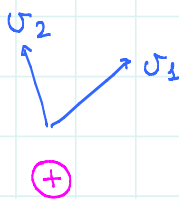
In questo se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie, questa è tutta bordo nel senso topologico della parola



Quindi quando parliamo di ∂S va inteso (almeno qui) in maniera intuitiva.

Oss. Rigorosamente si definisce l'orientazione di una base di $\mathbb{R}^3$ o in generale di $\mathbb{R}^n$.

Le basi positive sono quelle che si ottengono dalla base canonica con una matrice di cambio base che ha $\det > 0$.



FORMULA DI STOKES

AKA

TEOREMA DEL ROTORE

Ingredienti : $\rightarrow$ campo di vettori $E = (A, B, C)$ } abbastanza
 $\rightarrow$ superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ } regolari
 $\rightarrow$ orientazione di S

Flusso di $\text{rot } E$ attraverso S

integrale curvilineo

$$\int_S \langle \text{rot } E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle E, \tau \rangle ds = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

int.
superficialevettore tangente
a ∂S orientato
come descritto
precedentementecurva o un insieme di
curve che percorre ∂S
nel verso giusto

Enunciato da fisici Il flusso di $\text{rot } E$ attraverso S è uguale alla
 circuitazione di E lungo ∂S .

La seconda uguaglianza è sostanzialmente la relazione usuale
 tra integrali di forme diff. e integrali curvilinei di funzioni.
 Ci si riduce quindi a dimostrare l'integrale tra il primo ed il terzo.
 La road map per dimostrarlo è la seguente

- $\rightarrow$ Calcolo $\text{rot } E$
- $\rightarrow$ Parametrizzo S in modo che n sia coerente con $\phi_u \wedge \phi_v$
- $\rightarrow$ Scrivo il primo integrale usando la definizione, riducendolo
ad un integrale doppio su Ω .
- $\rightarrow$ Parametrizzo $\partial\Omega$ lasciandolo a sinistra e mi ritrovo gratis
una parametrizzazione di ∂S
- $\rightarrow$ Riduco $\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$ ad un integrale su $\partial\Omega$.
- $\rightarrow$ Guardo cosa dovrei dimostrare in (u, v) e vedo che è
il teorema della divergenza.

Oss. In particolare, se S non ha bordo, allora

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0$$

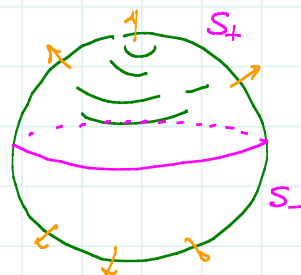
Questo volendo si vede "spezzando in due"

$$\int_{S_+} \langle \operatorname{rot} E, n \rangle dS = \int_{\partial S_+} \langle E, \tau \rangle dS$$

$$\int_{S_-} \langle \operatorname{rot} E, n \rangle dS = \int_{\partial S_-} \langle E, \tau \rangle dS$$

Ma le due orientazioni su ∂S_+ e ∂S_- sono opposte!

— o — o —



ANALISI

2

-

LEZIONE 47

Note Title

27/11/2023

INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo $E = (A, B, C)$, trovare un campo F tale che $\text{rot } F = E$

Esiste? La cond. necessaria è che $\text{div } E = 0$
 La cond. è pure sufficiente se l'insieme di definizione è fatto bene, ad esempio se è stellato

Esempio $E = (xz + y^2, yz + x, xy^3 - z^2)$

$\text{div} = z + z - 2z = 0 \quad \therefore$ Siamo su tutto $\mathbb{R}^3$, quindi esiste A, B, C t.c. $\text{rot}(A, B, C) = E$.

$$\text{rot}(A, B, C) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = xz + y^2 \\ A_z - C_x = yz + x \\ B_x - A_y = xy^3 - z^2 \end{cases}$$

1° passo Decido arbitrariamente una delle 3 componenti, ad esempio $C \equiv 0$ (ma potrei fare $B \equiv 0$ oppure $A = zy^2x^3$)

Resta

$$\begin{cases} -B_z = xz + y^2 & \rightsquigarrow B = -\frac{1}{2}xz^2 - y^2z + \varphi(x, y) \\ A_z = yz + x & \rightsquigarrow A = \frac{1}{2}yz^2 + xz + \psi(x, y) \\ B_x - A_y = xy^3 - z^2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{primitive} \\ \text{rispetto a } z \end{array} \right\}$$

2° passo Decido arbitrariamente una tra $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, ad esempio $\varphi(x, y) \equiv 0$ (ma potrei fare $\psi(x, y) = y^2 + x \arctan y$)

Adesso sostituisco nella 3^a equazione

$$B_x - A_y = -\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^2 - 4y(x,y) = xy^3 - z^2$$

Se ne vanno miracolosamente le z : questo DEVE succedere.

3° passo Trovo ψ risolvendo $\psi_y = -xy^3 \leadsto \psi(x,y) = -\frac{1}{4}xy^4$

Conclusione: un campo che va bene è

$$\left(\frac{1}{2}yz^2 + xz - \frac{1}{4}xy^4, -\frac{1}{2}xz^2 - y^2z, 0\right)$$

[Per conferma meglio fare la verifica calcolando il rotore]

Variante Trovare un campo con lo stesso rotore e seconda componente uguale a xy

1° modo Rifaccio la procedura partendo con $B = xy$

2° modo Sfrutto il lavoro già fatto ed il fatto che se aggiungo ∇g al campo precedente non altero il suo rotore.

Quindi basta che

$$g_y = xy + \frac{1}{2}xz^2 + y^2z$$

ad esempio

$$g(x,y,z) = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xyz^2 + \frac{1}{3}y^3z$$

Quindi il nuovo campo sarà

$$\left(\frac{1}{2}yz^2 + xz - \frac{1}{4}xy^4 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}yz^2, xy, xyz + \frac{1}{3}y^3\right)$$



Perché la procedura descritta funziona sempre?

$$E = (A, B, C) \quad F = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$$

Vogliamo risolvere

$$\hat{C}_y - \hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z - \hat{C}_x = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

Mettiamo $\hat{C} \equiv 0$

$$-\hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

primitiva di A risp. a z

↓

$$\hat{B} = -\bar{A} + \boxed{\varphi(x, y)} = 0$$

$$\hat{A} = \bar{B} + \psi(x, y)$$

↑
primitiva di B
rispetto a z

Sostituendo nella terza equazione viene

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \psi_y = C \quad \leadsto \quad \psi_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$$

Da qui vorrei trovare $\psi(x, y)$. Posso? Se e solo se $-\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$ non dipende da z . Quindi basta controllare che la sua derivata rispetto a z faccia 0.

$$(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z = \bar{A}_{zx} + \bar{B}_{zy} + C_z = \bar{A}_z + \bar{B}_z + C_z = 0$$

$\uparrow$
 $\bar{A}_z = A$
 $\bar{B}_z = B$

$\uparrow$
 perché $\text{div} E = 0$

Domanda È chiaro dove abbiamo usato che $\text{div} E = 0$
 Dove abbiamo usato che la zona di definizione
 è fatta bene?

LA SOLITA IN $\mathbb{R}^3$

Esiste un campo E definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che $\text{div } E = 0$,
ma E non è il rotore di nulla su tutto $\mathbb{R}^3$ insieme

Il campo E è del tipo $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} (x, y, z)$

Cerco α in modo che $\text{div } E = 0$

$$A_x = \left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} \right]_x = \frac{(x^2+y^2+z^2)^\alpha - (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1} \alpha \cdot 2x \cdot x}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}}$$

B_y e C_z sono analoghi

$$\text{div } E = \frac{3(x^2+y^2+z^2)^\alpha - 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}(x^2+y^2+z^2)}{(\dots)^{2\alpha}}$$

Quindi se prendo $\alpha = \frac{3}{2}$ mi viene $\text{div } E = 0$

$$E = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

[se ci fosse un segno $-$, che tanto non cambia la divergenza,
sarebbe una specie di campo gravitazionale che decade come
 $\frac{1}{\text{distanza}}$]

Perché E non è un rotore?

SE fosse un rotore, il suo flusso attraverso una superficie chiusa, cioè senza bordo, verrebbe 0.

Ma se prendo una qualunque sfera centrata nell'origine,
orientata verso $\mathbb{R}^3$ esterno, il suo flusso diventa

$$\begin{aligned}
 \int_{S(0,R)} \langle E, n \rangle d\sigma &= \int_{S(0,R)} \left\langle \frac{(x,y,z)}{\| \cdot \|^3}, \frac{(x,y,z)}{\| \cdot \|} \right\rangle d\sigma \\
 &= \int_{S(0,R)} \frac{\| (x,y,z) \|^2}{\| \cdot \|^4} d\sigma = \frac{1}{R^2} \text{area}(S(0,R)) \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

Oss. Non dipende dal raggio e ovviamente c'è un motivo.

— o — o —

ANALISI 2

— LEZIONE 48

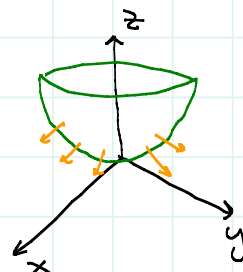
Note Title

27/11/2023

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE
IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1 \}$$

orientazione verso il basso



$$E = (x + y^2, y + xz, -2z + x) \quad \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

1° modo Uso la definizione

Parametrizzo S

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\text{con } (u, v) \in \Omega = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

Vedo se $\Phi_u \wedge \Phi_v$ è quello giusto

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -2v, 1) = (M_1, M_2, M_3)$$

è nel verso sbagliato, quindi dovrò cambiare tutti i segni

Per definizione

conversione del segno

$$\begin{aligned} \int_S \langle E, n \rangle d\sigma &= - \iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv \\ &= - \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \left\{ \overset{x+y^2}{(u+v^2)} \overset{M_1}{(-2u)} + \overset{y+xz}{(v+u(u^2+v^2))} \overset{M_2}{(-2v)} \right. \\ &\quad \left. + \overset{-2z+x}{(-2(u^2+v^2)+u)} \cdot 1 \right\} du dv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \{ 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 + 2v^2 \} du dv = \text{banale} = 2\pi \\ &\quad (\text{gli altri termini se ne vanno per simmetria}) \end{aligned}$$

Commenti : $\rightarrow$ funziona sempre
 $\rightarrow$ talvolta conduce a calcoli complicati

2° modo Aggiungo il tappo e uso il teorema della divergenza

Sia V tutta la ciotola. Allora

$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle E, n \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$ normale esterna a V
 $\uparrow$ tutto il bordo di V

$$= \underbrace{\int_S \langle E, n \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che voglio}} + \int_{\text{Base sopra}} \langle E, n \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$ verso l'alto

Quindi $\int_S \langle E, n \rangle \, d\sigma = - \int_{\text{Base sopra}} \langle E, (0, 0, 1) \rangle \, d\sigma$

$$= - \int_{\text{Base sopra}} (-2z + x) \, d\sigma = + \int_{\text{Base sopra}} (2 - x) \, d\sigma$$

$\downarrow$ 0 per simmetria

$$= 2 \text{ Area} = 2\pi \quad \ddot{\smile}$$

Commenti : $\rightarrow$ funziona sempre
 $\rightarrow$ si tratta solo di capire i tappi e aggiustare le orientazioni

3° modo Stokes con inversione del rotore.

Osservo che $\operatorname{div} E = 0$, quindi $E = \operatorname{rot} F$ per un certo F .

Ora trovo F al solito modo. $F = (A, B, C)$

$$C_y - B_z = x + y^2$$

$$A_z - C_x = y + xz$$

$$B_x - A_y = -2z + x$$

Mettiamo $A \equiv 0$

$$-C_x = y + xz \quad C = -xy - \frac{1}{2}x^2z$$

$$B_x = -2z + x \quad B = -2xz + \frac{1}{2}x^2 + \psi(y, z)$$

Sostituisco nella prima equazione e trovo

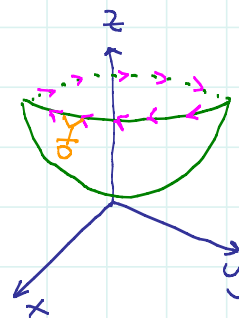
$$C_y - B_z = -x + 2x - \psi_z(x, z) = x + y^2 \leadsto \psi(x, z) = -zy^2$$

Conclusione $(A, B, C) = (0, -2xz + \frac{1}{2}x^2 - zy^2, -xy - \frac{1}{2}x^2z)$

[Qui farsi una verifica calcolando il rotore]

Ora applico Stokes, ma prima devo orientare ∂S

L'orientazione è come in figura.



$$\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

Parametrizzo ∂ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ *con verso da cambiare*
 $\uparrow$
 $z=1$

$$\underbrace{\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma}_{\text{quello che voglio}} = - \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{0} + \left(\underset{\substack{\uparrow \\ -2xz}}{-2\cos t} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}x^2}}{\frac{1}{2}\cos^2 t} - \underset{\substack{\uparrow \\ -zy}}{\sin^2 t} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos t} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{0} \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^3 t - \sin^2 t \cos t \right) dt = +2\pi$$

per invertire il verso

Commenti : $\rightarrow$ funziona solo se $\text{div } E = 0$

$\rightarrow$ richiede di invertire il rotore (pensare bene quale componente mettere = 0)

4° modo Stokes con cambio di superficie

Osservo che $\operatorname{div} E = 0$, quindi essendo su $\mathbb{R}^3$, $E = \operatorname{rot} F$

Quindi

$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle ds$$

Ora cerco una nuova superficie S_1 tale $\partial S = \partial S_1$, orientazione compresa. Ma allora in tal caso

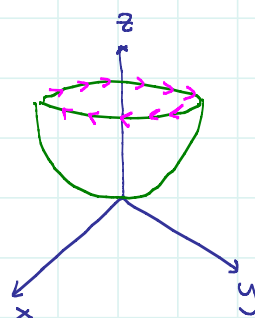
$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle ds \underset{\substack{\uparrow \partial S_1 \\ \partial S = \partial S_1}}{=} \int_{\partial S_1} \langle F, \tau \rangle ds = \int_{S_1} \langle E, n \rangle d\sigma$$

Morale: invece di calcolare quello che era richiesto, calcolo

$$\int_{S_1} \langle E, n \rangle d\sigma \quad \text{poich  } \partial S_1 = \partial S$$

Come S_1 uso il tappo con normale $(0, 0, -1)$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \langle E, (0, 0, -1) \rangle d\sigma &= \int_{S_1} (+2z'' - x) d\sigma \\ &\quad \uparrow \text{se ne va per simmetria} \\ &= 2 \text{Area} = 2\pi \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$



Commenti :

- funziona solo se E   un rotore, cio  $\operatorname{div} E = 0$
- non richiede di invertire il rotore
- c'  libert  nel trovare S_1 , ma occhio all'orientazione.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 49

Note Title

01/12/2023

INTEGRALI IMPROPRI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

L'int. si dice improprio se succede ALMENO una di queste cose

→ l'insieme A è NON limitato

→ la funzione f è NON limitata in A .

Possuno succedere entrambe.

Un integrale improprio si dice MONOPROBLEMA se ha un problema solo, cioè

→ f è limitata in A , ma A non è limitato (diciamo che ha un problema all'infinito)

→ A è limitato, ma f è non limitata nell'intorno di un singolo punto di A (diciamo che c'è un problema in quel p.to).

Analisi 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

↑
problema in 0

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

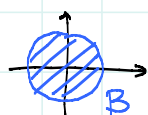
↑
problema all' ∞

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_0^{57} \dots + \int_{57}^{+\infty} \dots$$

↑
problema sia in 0
sia all'infinito

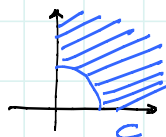
Analisi 2

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$$



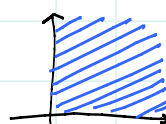
↑
problema
nell'origine

$$\iint_C \frac{1}{x^3+y^6} dx dy$$



↑
problema
all'infinito

$$\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy$$

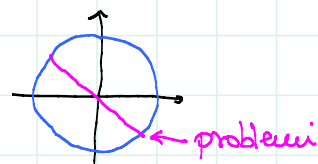


↑
doppio problema
si spacca

Idea: gli integrali con più problemi si cercano di spezzare in integrali con un problema solo.

Oss. Se facciamo $\iint_B \frac{1}{x+y} dx dy$ con B come sopra,

il problema è in tutto un segmento



Problema unico all'infinito

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ NON limitato

$A \subseteq \mathbb{R}^3$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA sui limitati

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{A \cap B(0,R)} f(x,y) dx dy$$

↑
palla di raggio R

A R fisso l'integrale è PROPRIO perché f è limitata

Problema unico nell'origine

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ è LIMITATO

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ NON limitata

negli intorni di $(0,0)$, ma
limitata altrove

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A \setminus B(0,\varepsilon)} f(x,y) dx dy$$

Queste due definizioni valgono solo se f ha un segno, diciamo $f(x,y) \geq 0$ in A (o per lo meno vicino al problema).

Se f non ha un segno si pone

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \underbrace{\iint_{A^+} f(x,y) dx dy}_{\text{zona dove } f \geq 0} + \iint_{A^-} f(x,y) dx dy$$

↑
zona dove $f \leq 0$

Il primo pezzo può convergere oppure divergere a $+\infty$

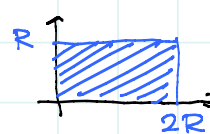
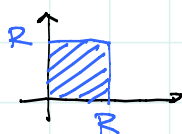
" secondo " " " " " " $-\infty$

Se i due pezzi fanno $+\infty$ e $-\infty$, allora l'integrale globale si dichiara **INDETERMINATO**.

Ragione euristica Supponiamo di voler integrare sul primo quadrante. Ci sono tante possibilità

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} f(x,y) dx dy$$

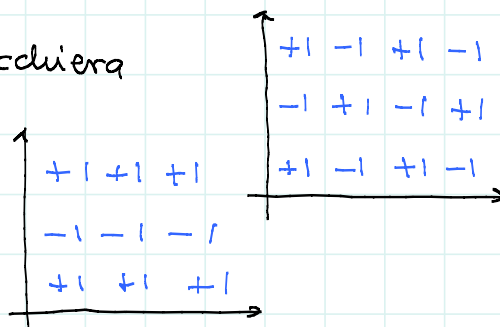


Il risultato finale user dipende da come "ho invaso" il primo quadrante nel caso in cui f ha un segno.

Nel caso in cui i due pezzi su A_+ e A_- fanno $\pm\infty$, il risultato dipende dal tipo di invasione.

Esempio classico Prendiamo f a scacchiera o anche a bande orizzontali

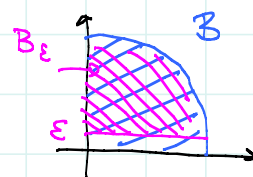
In questi casi a seconda di come invado ottengo risultati diversi.



Oss. Se il problema è su un intero segmento, basta "scavare un buco" intorno al problema

$$\iint_B \frac{e^y}{y(x+3)} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots dx dy$$

↑
problemi su
asse x



CASI MODELLO**Analisi 1**

$$\int_0^R \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_R^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$

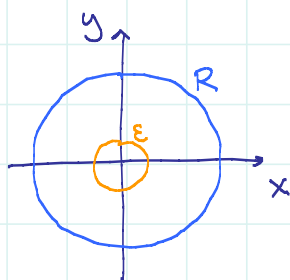
Analisi 2

$$\iint_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \text{converge se } a < 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 2 \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \text{converge se } a > 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 2 \end{cases}$$

Discorso analogo vale in $\mathbb{R}^3$ con soglia 3.

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \iint_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{(\dots)^a} dx dy$$



$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot p$$

def. di Analisi 2

↑

coord. polari

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

def. Analisi 1

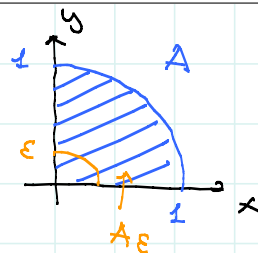
e questo converge se
e solo se $a-1 < 1$
cioè $a < 2$

La dimostrazione del caso $a = +\infty$ è del tutto analoga.

Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$ dove si paga $p^2 \cos \varphi$ *Definitive*

Esempio $\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$

Problema unico nell'origine



$$\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{x+y} dx dy$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\rho(\cos\theta + \sin\theta)} \quad \text{J}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1-\epsilon) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

= valore si fa (int. proprio)

Si poteva dire da subito che converge perché è del tipo $\frac{1}{p}$
quindi con esponente minore di 2
— 0 — 0 —

ANALISI 2

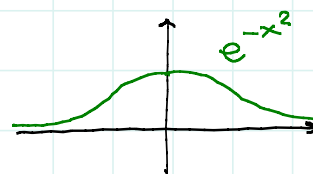
LEZIONE 50

Note Title

01/12/2023

INTEGRALE GAUSSIANO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Problema: non sappiamo scrivere la primitiva usando le funzioni elementari.

Brutal mode Passo in $\mathbb{R}^2$ e provo a calcolare

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Lo calcolo in due modi

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cartesiano}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} dx dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_I$$

$$= I^2$$

$\uparrow$
integrale di Analisi 1
che vorremmo fare

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{polari}}}{=} \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pag. 5}}}{p} = 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp$$

$$= \pi \left[-e^{-p^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

Dovendo essere uguali ... $I^2 = \pi$, da cui $I = \sqrt{\pi}$

— o — o —

OLTRE LA LINEA DI CONFINE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \quad \text{con } a > 0$$

Si può ripetere il procedimento, oppure pone $\sqrt{a}x = z$ quindi
 $\sqrt{a}dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dz$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$$

Mettendo $a = i$ ☺

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}}$$

Calcolando $\sqrt{i}$ e uguagliando parte reale e immaginaria si ottengono i valori dei due integrali
— 0 — 0 —

Integrale Gaussiano più rigorosamente

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{invarianza} \\ \text{con quadrati}}} \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy e^{-x^2-y^2}$$

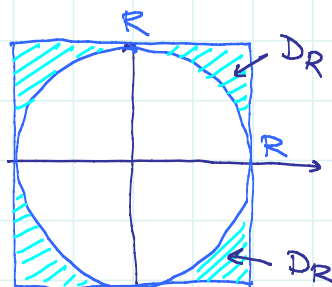
$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = I^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{invarianza} \\ \text{con i cerchi}}} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot p$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R p e^{-p^2} = \pi \text{ perché si calcola}$$

Perché l'invasione con cerchi o quadrati produce lo stesso risultato?

A R fisso la differenza tra i due è l'integrale nella zona D_R e

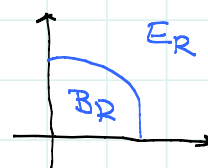


$$0 \leq \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \underbrace{e^{-R^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{max della} \\ \text{funzione in} \\ D_R}} \cdot \underbrace{(4R^2 - \pi R^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Area } D_R}} \rightarrow 0$$

Quindi per i carabini la differenza tende a 0.

Esempio 1 $\iint_{B_R} \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$ $\iint_{E_R} \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{p^3}{p^6} = \frac{1}{p^3}$



Quindi il 1° diverge e il 2° converge

Rigorous: in polari $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}$

Integro direttamente

$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{1}{\rho^3} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} \right] \boxed{P}$$

$$= \int_0^R \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} d\theta$$

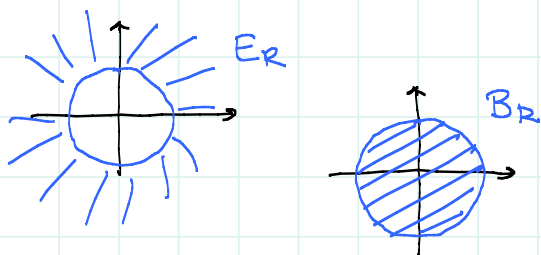
= Numero $\int_0^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = +\infty$
posit.

Numero
(integrale PROPRIO di Analisi 1)
 $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta \geq m > 0$ per il solito
discorso

Discorso analogo per $\int_R^{+\infty}$, che questa volta converge.

Esempio 1 bis Stessa funzione di sopra

$$\iint_{E_R} f(x,y) dx dy = 0 \quad \text{perché } f \text{ è dispari nella variabile } x \text{ e } Q' \text{ insieme è simmetrico risp. all'asse } y$$



$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy$ è indeterminato perché $a dx$ diverge a $+\infty$ e $a dx$ diverge a $-\infty$ e non si può compensare anche se la funzione è dispari.

Potrei mettere un buco leggermente asimmetrico in modo che il limite venga 2023.

Esempio 2 $\iint_{B_R} \frac{xy}{x^3+y^3+x^6+y^6} dx dy$ $\iint_{E_R}$ stessa cosa

Con B_R ed E_R come nell'esempio 1.

Brutal mode: per il problema in 0 si ha $f \sim \frac{p^2}{p^3} = \frac{1}{p^1} \xrightarrow{1 < 2}$ converge

per il problema a $+\infty$ $f \sim \frac{p^2}{p^6} = \frac{1}{p^4} \xrightarrow{4 > 2}$ converge

Rigoroso Non ci sono problemi di segno.

$$\text{Su } B_R \quad 0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy}{x^3+y^3} = \frac{1}{p} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\underbrace{\cos^3\theta + \sin^3\theta}_{\geq m > 0 \text{ solito discorso}}} \leq \frac{1}{p} \frac{1}{m}$$

ora posso integrare

Sei E_R

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy}{x^6+y^6} = \frac{1}{\rho^4} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} \leq \frac{1}{\rho^4} \frac{1}{m}$$

e si conclude integrando.

Esempio 3 $\iint_Q \frac{\sin(xy)}{x^3+y^3} dx dy$

↑
1° quadrante

Due problemi: origine e $+\infty$

Inoltre il segno è variabile.

Brutal mode: $\rightarrow$ per il problema a $+\infty$

$$0 \leq |f(x,y)| \sim \frac{1}{\rho^3} \overset{3>2}{\rightsquigarrow} \text{converge} \quad \left[\leq \frac{1}{m\rho^3} \right]$$

$\rightarrow$ per il problema in 0 (N.B.: vicino a 0 il segno è +)

$$0 \leq f(x,y) \sim \frac{xy}{x^3+y^3} \sim \frac{1}{\rho} \overset{1<2}{\rightsquigarrow} \text{converge} \quad \left[\leq \frac{1}{m\rho} \right]$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

- LEZIONE 51

Note Title

04/12/2023

Esercizio 1 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\iint_B \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} dx dy$$

Studio della conv. al variare di $a > 0$

Brutale: $f(x, y) \sim \frac{\rho}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-1}}$ conv. $\Leftrightarrow 2a-1 < 2 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$

Rigoroso: ci sono 2 casi da fare

$$\boxed{a < \frac{3}{2}} \quad 0 \leq \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} \leq \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} = \frac{\rho \cos \theta}{\rho^{2a}} \leq \frac{1}{\rho^{2a-1}}$$

$\uparrow$
 Den
 + piccolo

L'ultimo converge, quindi per confronto abbiamo convergenza

$$\boxed{a \geq \frac{3}{2}} \quad \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} \geq \frac{1}{2^a} \frac{x}{(x^2 + y^2)^a}$$

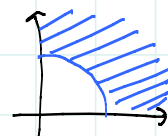
$$\begin{aligned} \iint_B \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} dx dy &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\cos \theta}{\rho^{2a-1}} \rho \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta}_1 = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho \end{aligned}$$

Diverge se $2a-2 \geq 1$
 cioè $2a \geq 3$

In alternativa (più flessibile)

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \geq \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta}_{\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (tra } 0 \text{ e } \frac{\pi}{4})}}^{\geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \geq \text{Numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-2}} d\rho$$

Esercizio 2 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$



$$\iint_C \frac{x^a}{x^2 + y^6} dx dy$$

Studiare al variare di $a > 0$. [Non è chiaro come si comporta il denominatore.]

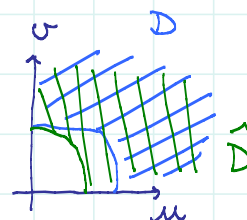
1° modo Ponaggio gli esponenti. Faccio un cambio di variabili

$$x = u^3 \quad y = v$$

$$\iint_C \frac{x^a}{x^2 + y^6} dx dy = \iint_D \frac{u^{3a}}{u^6 + v^6} 3u^2 du dv$$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = |\text{Det}| = 3u^2$$

$$\text{Chi è } D? \quad \begin{array}{lll} x \geq 0 & y \geq 0 & x^2 + y^2 \geq 1 \\ u \geq 0 & v \geq 0 & u^6 + v^6 \geq 1 \end{array}$$



Posso sostituire D con $\hat{D}$ dove la condizione è $u^2 + v^2 \geq 1$ perché dal punto di vista della convergenza non cambia nulla. Quindi non ci resta che studiare

$$\iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0}} \frac{u^{3a+2}}{u^6 + v^6} du dv$$

$$\text{Brutale: } \frac{\rho^{3a+2}}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^{4-3a}}$$

$$\text{e quindi converge} \Leftrightarrow 4 - 3a > 2 \\ \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$$

Rigorosamente passo in polari e trovo

$$\int_1^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\rho^{3a+2}}{\rho^6} \frac{(\cos\theta)^{3a+2}}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} \cdot \rho$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-3a}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) d\theta$$

= Numero positivo perché è un integrale proprio per il solito discorso

2º modo

Dividre la zone

$$\frac{x^9}{x^2+y^6}$$

Oss. La divisione in zone è utile quando al denominatore ci sono più termini con comportamento diverso

Esercizio 3 Studiare il limite all'infinito su $\mathbb{C}$ di

$$\frac{x^a}{x^2 + y^6}$$

Paragghiamo gli esponenti: $x = u^3$ $y = v$

$$\frac{u^{3a}}{u^6 + v^6}$$

Brutale: $\frac{\rho^{3a}}{\rho^6}$ quindi

→ per $a < 2$ il limite esiste e fa 0

→ per $a \geq 2$ il limite non esiste

Rigoroso: per $a < 2$ passo in polari e faccio le stime indipendenti da θ

Per $a \geq 2$ uso due omini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^3, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{3a}}{t^6}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } a = 2 \\ +\infty & \text{se } a > 2 \end{cases}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2 - LEZIONE 52

Note Title

04/12/2023

Esercizio 1 $B =$ palla in $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio 5

$$\iiint_B \frac{x y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz$$

Per quali a converge?

Se converge, il suo valore è 0 (è dispari rispetto a x)

Brutal mode: $\sim \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 2a-3 < 3$
 $\Leftrightarrow a < 3$

dim=3

Rigoroso: passo in sfere dei geografi $\swarrow$ Dovrei spezzare a seconda del segno di x

$$\int_0^5 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi |\cos \theta| \sin^2 \theta}{\rho^{2a}} \rho^2 \cos^2 \varphi$$

$$= \int_0^5 \rho d\rho \frac{1}{\rho^{2a-5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \text{ roba trigonometrica}}_{\text{Numero positivo e ci si riduce all'integrale solo in } \rho}$$

Numero positivo e ci si riduce all'integrale solo in ρ

$$2a-5 < 6 \leadsto a < 3$$

Esercizio 2 $\iiint_C \frac{x y^3}{x^2 + y^4 + |z|} dx dy dz$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$

Ci aspettiamo convergenza per a grandi

$$x = u^{2a} \quad y = v^a \quad z = w^4$$

$$\begin{pmatrix} 2a u^{2a-1} & 0 & 0 \\ 0 & a v^{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4w^3 \end{pmatrix} \quad J = 8a^2 u^{2a-1} v^{a-1} w^3$$

$$\iiint_C \frac{xy^3}{x^2+y^4+z^a} dx dy dz = \iiint_D \frac{u^{2a} v^{3a}}{u^{4a} + v^{4a} + z^{4a}} 8a^2 u^{2a-1} v^{a-1} w^3 du dv dw$$

↑
estremo di un
telescopio strano

Ai fini della convergenza posso sostituire D che non contenga una palla centrata nell'origine

Brutale: $\frac{\rho^{2a+3a+2a-1+a-1+3}}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{-1-4a}}$

Servirebbe $-1-4a > 3$, il che è impossibile per a positivo.

Esercizio 3 $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy$$

NO! Questo ha senso
SOLO lontano dagli
assi

Unico problema è all'infinito

Brutale: $\sim \frac{1}{p^5} \leadsto$ converge

Su Q_2 non ci sono problemi (è proprio)

$$\begin{aligned} \iint_{Q_1} \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy &\leq \iint_{Q_1} \frac{1}{x^2y^3} dx dy \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{convergenza per analisi 1}} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^3}}_{\text{convergenza per analisi 1}} = \text{Numero} \end{aligned}$$

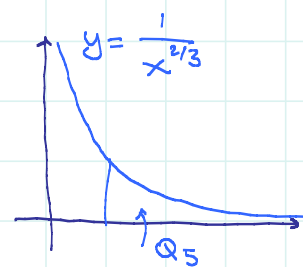


$$\begin{aligned}
 \iint_{Q_3} \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{1+x^2y^3} \\
 &= \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{1+x^2y^3} \\
 &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{y^{3/2}} \arctan(y^{3/2}x) \right]_{x=1}^{x=+\infty} \\
 &= \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{y^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y^{3/2}) \right) \right\} = +\infty \\
 &\sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1, \text{ quindi diverge}
 \end{aligned}$$

2° modo $x^2y^3 \leq 1 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x^{2/3}}$

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy \geq \iint_{Q_5} \frac{1}{2} dx dy$$

↑
zona + piccola $x^2y^3 \leq 1$ in Q_5



$$= \frac{1}{2} \text{Area}(Q_5) = +\infty \text{ perché } \frac{2}{3} < 1$$

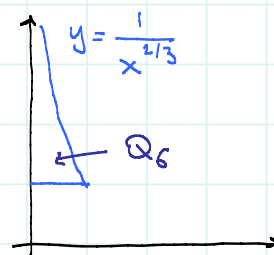
Per esercizio lo studiamo su Q_4

Con lo stesso discorso di prima avremmo

$$\iint_{Q_4} \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy \geq \iint_{Q_6} \frac{1}{2} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area}(Q_6) \text{ e questa converge } \ddot{\smile}$$

e per ora non posso concludere nulla



Proviamo usando la primitiva:

$$\iint_{Q_4} \dots = \int_1^{+\infty} dy \int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2y^3} = \int_1^{+\infty} dy \left[\frac{1}{y^{3/2}} \arctan(y^{3/2}x) \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_1^{+\infty} dy \frac{\arctan(y^{3/2})}{y^{3/2}} \quad \text{e questo converge perché è del tipo } \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^{3/2}} \text{ quando } y \rightarrow +\infty$$

Volendo non fare la primitiva, bisognerebbe trovare un modo diverso di dividere in + zone

Quali esponenti al posto del 3 garantiscono convergenza in $\mathbb{Q}_4$?
Tutti quelli > 2 .

Stesso discorso con la primitiva
— 0 — 0 —

ANALISI

2

-

LEZIONE 53

Note Title

04/12/2023

Esercizio 1 $\iint_Q \frac{\arctan(xy^2)}{x^4+y^4} dx dy$ $Q = \mathbb{R}^2$ quadrante

Doppio problema: nell'origine e all'infinito

All'infinito: $f(x,y) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^4}$ quindi converge perché $4 > 2$

Nell'origine: $f(x,y) \sim \frac{xy^2}{x^4+y^4} \sim \frac{\rho^3}{\rho^4} = \frac{1}{\rho}$ quindi converge perché $1 < 2$

Rigorosamente: $0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy^2}{x^4+y^4}$
 $\uparrow$
 qui uso $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$

Esercizio 1bis $\iint_Q \frac{\arctan(xy^a)}{x^4+y^4} dx dy$

All'infinito non cambia nulla

Nell'origine $\sim \frac{\rho^{1+a}}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{3-a}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 3-a < 2$
 $\Leftrightarrow a > 1$

Rigoroso:

$$f(x,y) \leq \frac{xy^a}{x^4+y^4} = \dots \text{ passo in polari e questo converge } \Leftrightarrow a > 1$$

Non ho finito: $\rightarrow$ per $a > 1$ quello sopra conv., quindi converge quello sotto che è $\leq$

$\rightarrow$ per $a \geq 1$ quello sopra diverge, quindi BOH

$$\boxed{a \leq 1} \quad \iint_Q \frac{\arctan(xy^a)}{x^4+y^4} dx dy \geq \int_0^1 \rho d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(\rho^{a+1} \cos\theta \sin^a\theta)}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \quad \rho \uparrow$$

$\uparrow$
voglio restare lontano dagli assi

$$\geq \int_0^1 dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(m_a p^{a+1})}{2p^4} p$$

dove $m_a := \min \{ \cos \theta \sin^a \theta : \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \} > 0$ per i soliti discorsi

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \int_0^1 \frac{\arctan(m_a p^{a+1})}{p^3} dp$$

$\sim \frac{m_a p^{a+1}}{p^3}$ e si conclude

Esercizio 1 ter

$$\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4} dx dy$$



Idea: la zona A si schiaccia sugli assi dove xy è "piccolo"

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy \leq \iint_A \frac{x^3}{x^4+y^4} dx dy \leq \iint_B \frac{x^3}{x^4+y^4} dx dy$$

$\uparrow$
uso defn. di A

e questo converge perché è $\sim \frac{1}{p}$ con $1 < 2$

Esercizio 2 $\iint_{A_a} \frac{1}{x^4+y^4} dx dy$

Per quali valori di a converge



$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \dots &= \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^4+y^4} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^4} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^4} \cdot x^a dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{4-a}} dx \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow 4-a < 1$, cioè $a > 3$.

Così ho dimostrato che per $a > 3$ l'integrale iniziale converge.

Resta da dim. che per $a \leq 3$ diverge.

$$\iint_{A_a} \dots \geq \iint_{A_3} \frac{1}{x^4+y^4} dx dy \geq \iint_{A_3} \frac{1}{x^4+x^{12}} dx dy$$

$\uparrow$ per $a \leq 3$ si ha $A_a \supseteq A_3$ $\uparrow$ uso che $y \leq x^3$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^3} dy \frac{1}{x^4+x^{12}} = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+x^{12}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+x^8} dx$$

$\sim \frac{1}{x}$

e quindi diverge.

Esercizio 3 $\iint_Q \frac{\log(x^2+y^2)}{x^8} dx dy$

$$\iint_{Q_1} \dots \geq \iint_{Q_1} \frac{\log(x^2)}{x^{10}} dx dy$$

$$\geq \int_{10}^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{\log(x^2)}{x^{10}}$$

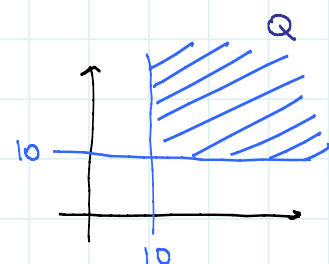
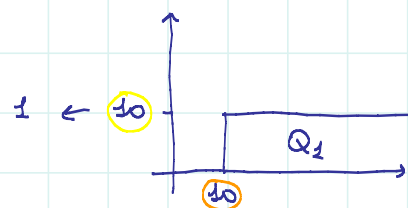
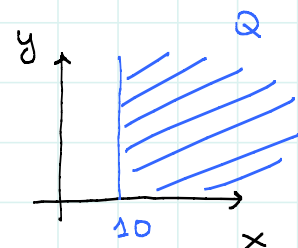
e questo converge $\ddot{\circ}$

$$\iint_{Q_1 \text{ new}} \dots \geq \int_{10}^{+\infty} dx \int_0^1 \frac{\log(x^2)}{x} dy \text{ e questo diverge } \ddot{\circ}$$

$$\iint_Q \dots \leq \iint_Q \frac{\log(x^2+y^2)}{10^8}$$

Nessuna di queste scelte va bene

[Pensiamoci per la prossima volta]



ANALISI 2

—

LEZIONE 54

Note Title

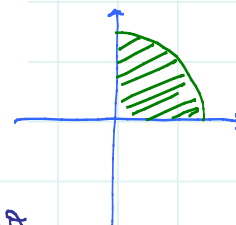
11/12/2023

[VF1] L'origine è un punto di minimo locale per la funzione $f(x, y) = \sin(xy)$ F $\sin(xy) \sim xy$
sella[VF2] Il vettore $(x + y, x + z, y + z)$ è un rotore F $\text{div} = 2 !!$ [VF3] $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che il vettore $(2\lambda, \lambda, 3) \in \mathbb{R}^3$ ha norma 4 $\checkmark$ $4\lambda^2 + \lambda^2 + 9 = 16 \Rightarrow \lambda^2 = 7$ [VF4] $(x^2 - y^4)^2 = o((x^2 + y^2)^{3/2})$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ $\checkmark$ [VF5] L'estremo superiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione $f(x, y) = e^{-(x-y)^2}$ è $+\infty$ F $e^{\text{nona neg}} \leq 1$ [VF6] La curva $(\cos t, \sin t)$ con $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ è semplice $\checkmark$ [VF7] La forma differenziale $x^3 dx + y \sin^2 y dy + e^{3z} dz$ è esatta $\checkmark$

$$\begin{aligned} A_y &= B_x \\ A_z &= C_x \\ B_z &= C_y \end{aligned} \quad 0=0$$

[VF8] L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$ è un solido di rotazione $\checkmark$ alindro[MC1] Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Allora $\int_B 7x^2 dx dy = \dots$

~~(A)~~ $\frac{7\pi}{16}$ (B) 0 (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{7\pi}{12}$ (E) $\frac{7}{16}$



$$7 \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \quad p^2 \cos^2 \theta \cdot p = 7 \underbrace{\int_0^1 p^3 dp}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{16}$$

[MC2] Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{\cos^\alpha(xy)}{x^2 + y^2} dx dy < +\infty$$

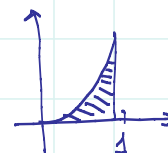
(A) Se e solo se $\alpha > 0$ (B) Se e solo se $\alpha > 1$ (C) Se e solo se $0 < \alpha < 1$ (D) Se e solo se $\alpha \neq 1$ ~~(E)~~ Mai

$$f(x, y) \sim \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \text{diverge sempre}$$

MC3 Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Allora $\max_D 6x - y^2 = \dots$

- (A) 6 (B) 5 (C) Non esiste (D) 0 (E) 7

$\uparrow$ $x + \text{grande}$
 $y + \text{piccolo}$



MC4 Sia $f(x, y, z) = 5xy + y^4 + e^z$. Allora $\nabla f(1, 1, 0) = \dots$

- (A) 9 (B) (5, 9, 1) (C) 15 (D) (5, 4, 1) (E) (5, 4, 0)

$$\nabla f(x, y, z) = (5y, 5x + 4y^3, e^z)$$

MC5 Stabilire per QUALI valori del parametro $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{|x| \cdot |y|^{6\alpha}}{1 + x^2 + y^2}$$

ammette limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

- (A) Se e solo se $\alpha > 1$ (B) Se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{6}$ (C) Se e solo se $\alpha \neq \frac{1}{6}$
(D) Se e solo se $0 < \alpha < 1$ (E) Se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$

$$f(x, y) = \frac{e^{1+6\alpha}}{e^2} = \frac{e^{6\alpha}}{e} \quad 6\alpha < 1 \leadsto \alpha < \frac{1}{6}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, 0) = 0 \leadsto$ Se il limite esiste, allora è 0.

$\rightarrow$ Se $\alpha < \frac{1}{6}$, passo in polari e faccio il conto

$$\rightarrow \text{Se } \alpha \geq \frac{1}{6} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1+6\alpha}}{1+t^2} \neq 0$$

int. curv. di funzione

MC6 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (3t^2, t)$ definita per $0 \leq t \leq 1$. Allora $\int_{\gamma} 5y \, ds = \dots$

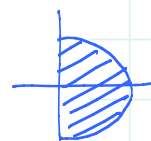
- (A) 5 (B) $5 \int_0^1 t \sqrt{9t^4 + t^2} \, dt$ (C) 15 (D) $5 \int_0^1 t \sqrt{36t^2 + 1} \, dt$ (E) 10

$$\int_{\gamma} 5y \, ds = \int_0^1 5 \cdot t \cdot \sqrt{36t^2 + 1} \, dt$$

MC7 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B (x + y) \, dx \, dy, \quad \int_B (x - y) \, dx \, dy, \quad \int_B x^2 y^2 \, dx \, dy, \quad \int_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

- (A) 4 (B) 0 (C) 3 (D) 1 (E) 2



MC8 Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$. Allora $\int_D 5z \, dx \, dy \, dz = \dots$

- (A) 1 (B) 0 ~~(C) $\frac{10}{3}$~~ (D) $\frac{20}{3}$ (E) $\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} 5 \int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \, z &= \frac{5}{2} \int_0^2 dx \int_0^x \underbrace{y^2}_{\frac{1}{3}x^3} dy \\ &= \frac{5}{6} \int_0^2 x^3 dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \cancel{16}^4 = \frac{10}{3} \\ &\quad \text{--- 0 --- 0 ---} \end{aligned}$$

VF1 $\forall M \in \mathbb{R} \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2 + y^2 \geq M$ e $x^2 + |y|^3 = 2$ F se M è grande

VF2 L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^6 \leq 4\}$ è limitato V Televisione

VF3 Il vettore $(3z + y, x, y^2 + 2x)$ è un rotore V $\text{div} = 0$ e siamo su $\mathbb{R}^3$

VF4 La forma quadratica $4x^2 + 2y^2 - 4xy$ è definita positiva V $\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ Det > 0 Tr > 0 ++
 $\rightarrow (2x - y)^2 + y^2$

VF5 La curva $(-\sin t, \cos t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ è percorsa in senso orario F

VF6 La funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ è una primitiva della forma differenziale $e^{xy}(dx + dy)$ F $f_x = e^{x+y}$

VF7 L'estremo superiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è $+\infty$ V x e y enormi

VF8 Se $f(x, y) = o(x^2 + y^2)$ e $g(x, y) = o(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ allora di sicuro

$$(f(x, y))^2 - (g(x, y))^2 = o((x^2 + y^2)^{5/2}) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad F$$

$$\begin{aligned} f &= o(p^2) & f^2 &= o(p^4) & o(p^5) \\ g &= o(p^2) & g^2 &= o(p^4) \end{aligned}$$

MC1 Sia $f(x, y, z) = x^3 + x \log(y) + \sqrt{z}$. Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = \dots$

- (A) $1 - \frac{1}{8\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) (3, 1) (D) 3 ~~(E) 1~~

$$f_y = \frac{x}{y}$$

$$f_{xy} = \frac{1}{y}$$

MC2 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{1}{(|x| + |y|)^\alpha} dx dy < +\infty$$

(A) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

(B) Se e solo se $\alpha > 1$

(C) Mai

~~(D)~~ Se e solo se $0 < \alpha < 2$

(E) Se e solo se $\alpha > 2$

$\frac{1}{2}\alpha$

MC3 Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Allora $\min_D 7x = \dots$

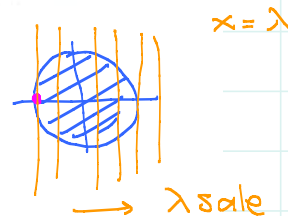
(A) 7

(B) -28

(C) -7

~~(D)~~ -14

(E) 0



MC4 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

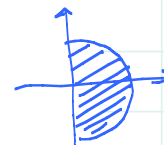
$$\int_B (x+y)^2 dx dy, \quad \int_B \cos^2(xy) dx dy, \quad \int_B x^3 y^3 dx dy, \quad \int_B e^y dx dy$$

> 0

> 0

$= 0$

> 0



(A) 2

~~(B)~~ 1

(C) 4

(D) 3

(E) 0

MC5 Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Allora $\int_B 7x^2 dx dy = \dots$

(A) $\frac{7}{12}$

~~(B)~~ $\frac{7\pi}{16}$

(C) $\frac{7}{16}$

(D) 0

(E) $\frac{7\pi}{12}$

MC6 Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$. Allora $\int_D 5y dx dy = \dots$

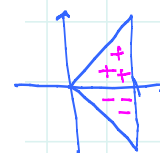
(A) $\frac{5}{3}$

(B) 2

(C) $\frac{10}{3}$

(D) 5

~~(E)~~ 0



MC7 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (2t, 3t)$ definita per $0 \leq t \leq 1$. Allora $\text{Lunghezza}(\gamma) = \dots$

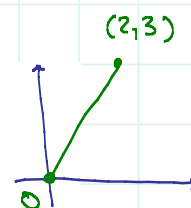
(A) $\sqrt{5}$

(B) 13

(C) 6

~~(D)~~ $\sqrt{13}$

(E) 5



MC8 Stabilire per QUALI valori del parametro $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{|x| \cdot |y|^{8\alpha}}{1 + x^2 + y^2}$$

ammette limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

(A) Se e solo se $\alpha \neq \frac{1}{8}$

(B) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

(C) Se e solo se $\alpha > \frac{1}{8}$

~~(D)~~ Se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{8}$

(E) Se e solo se $\alpha > 1$

ANALISI 2

—

LEZIONE 55

Note Title

11/12/2023

$$g(x, y, z) = 0$$

Esercizio 1

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 - z = 4, x \geq 0, z \leq 0\}$$

Nel p.to $(0, 2, 0)$ normale $(1, 4, -1)$

$$F = (x - y, y^2, x y z)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 2y, -1)$$

Calcolare $\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma$

Come è fatta S ? È un insieme limitato?

$$\begin{array}{ccc} x + y^2 - z = 4 \\ \geq 0 \geq 0 \geq 0 \end{array}$$

somma di 3 quantità ≥ 0

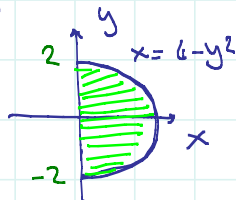
$$x \in [0, 4], y^2 \in [0, 4], y \in [-2, 2]$$

$$z \in [-4, 0]$$

Intersezioni di S con i piani

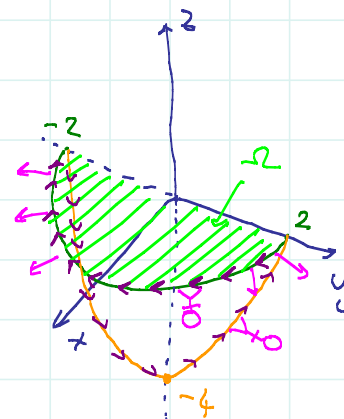
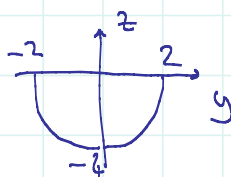
piano xy

$$\begin{array}{l} x + y^2 = 4 \\ x = 4 - y^2 \end{array}$$



Piano yz

$$\begin{array}{l} y^2 - z = 4 \\ z = y^2 - 4 \end{array}$$



1° modo

Parametrizzo S , calcolo $\text{rot } F$, e uso la definizione

S = grafico di $x + y^2 - 4$ sulla base

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y^2 - 4, \underbrace{y \in [-2, 2], 0 \leq x \leq 4 - y^2}_{\text{base } \Omega}\}$$

Sarebbe utile per fare il volume del solido limitato da S e dai 2 piani

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-y & y^2 & xyz \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } F = (xz, -yz, -1)$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, x+y^2-4)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \Phi_x \\ \leftarrow \Phi_y \end{matrix} \quad \Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ (-1, -2y, 1) \end{matrix}$$

↑
opposta rispetto a quella richiesta

$$\int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_S \{ \underset{\substack{\uparrow x \\ \text{cambio verso}}}{x} (x+y^2-4) \underset{\substack{\uparrow z \\ \mu_1}}{(-1)} - y (x+y^2-4) \underset{\substack{\uparrow y \\ \mu_2}}{(-2y)} - 1 \cdot 1 \underset{\substack{\uparrow z \\ \mu_3}}{1} \} dx dy$$

= si fa (un po' di pezzi se ne vanno per simm.)

2° modo Stokes $\int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$

↑
comp. di F

curve che percorrono ∂S nel modo giusto

Scrivere una parametrizzazione coerente dei due pezzi di bordo

→ pezzo verde $\gamma_1(t) = (4-t^2, t, 0) \quad t \in [-2, 2]$ al contrario

$\gamma_2(t) = (4-t^2, -t, 0) \quad t \in [-2, 2]$ senza invertire

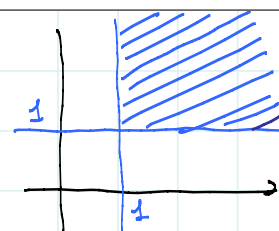
→ pezzo arancione $\gamma_3(t) = (0, t, t^2-4) \quad t \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz &= - \int_{-2}^2 \{ \overset{x-y}{(4-t^2-t)} \overset{\dot{x}}{(-2t)} + \overset{y^2}{t^2} \overset{\dot{y}}{1} \} dt \\ &\quad + \int_{-2}^2 \{ \overset{x-y}{(0-t)} \overset{\dot{x}}{0} + \overset{y^2}{t^2} \overset{\dot{y}}{1} + \overset{xyz}{0} \overset{\dot{z}}{2t} \} dt \end{aligned}$$

= si fa e forse viene lo stesso.

— 0 — 0 —

Esercizio 2 $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in \mathbb{R}}} \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2}$



Fatto 1 Se esiste, allora è 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

Fatto 2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(1, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}$

Quindi per $\alpha \geq 2$ il limite di sicuro non esiste

Fatto 3 $x^2y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ se $(x,y) \in D$ [Fatta quando abbiamo fatto il limite di xy nella stessa zona]

• Se $x \geq y$, allora $x^2y^2 \geq x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

• Se $y \geq x$, allora stessa cosa simmetrica

1 2
SI NO

Ma allora $\frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy^\alpha}{1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

Quindi il limite esiste se $\alpha < 1$ (coord. polari)

Fatto 4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^\alpha, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^{2\alpha+2}}$ e questo è sempre 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(t, 1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)^\alpha}{1+t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2} = 0 \quad \ddot{\sim}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(1+\frac{1}{t}, t\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)t^\alpha}{1+\left(1+\frac{1}{t}\right)^2t^2} = 0 \quad \text{se } \alpha < 2 \quad \ddot{\sim}$$

— 0 — 0 —

[Aggiunto dopo video]

Fatto 4 Se $\alpha \geq 1$ e $x \geq 1$, allora $x \leq x^\alpha$ e quindi

$$0 \leq \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{(xy)^\alpha}{1+(xy)^2}$$

↓
 0 se $\alpha < 2$ poiché $xy \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}$
 (per la stima del fatto 3)

lo stesso ragionamento funziona anche per $\alpha \leq 1$, ma la stima diventa

$$0 \leq \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy}{1+(xy)^2}$$

e si conclude come sopra

Alternativa leggermente più brutale

$$\frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy^\alpha}{x^2y^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{y^{2-\alpha}}$$

quando $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}$, allora
 almeno una tra x e y tende a $+\infty$,
 e l'altra è ≥ 0 .

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 56

Note Title

11/12/2023

Esempio 1 $\iint_{D_\alpha} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$

dove $D_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^\alpha\}$

Moralmente: $f(x,y) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2}$

$\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy &\geq \int_{42}^{+\infty} dp \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(p^2 \cos \theta \sin \theta)}{p^2} \quad \geq m > 0 \text{ per il solito discorso} \\ &= \frac{\pi}{8} \int_{42}^{+\infty} \frac{\arctan(wp^2)}{p} dp = +\infty \text{ per comp. asint. con } \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$\alpha > 1$ Basta osservare che $D_\alpha \supseteq D_1$ e quindi diverge a maggior ragione

(Discorso analogo valeva anche se $x \geq 1$ era $x \geq \frac{1}{10}$. Non era vero che $D_\alpha \supseteq D_1$, ma il discorso del 42 funzionava)

$\alpha < 1$ $\iint_{D_\alpha} \dots \leq \frac{\pi}{2} \iint_{D_\alpha} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$

$\leq \frac{\pi}{2} \iint_{D_\alpha} \frac{1}{x^2} dx dy$
 frazione + grande

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

Converge se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$
 ☺

Esempio 2 $\iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^8+y^8} dx dy$ Da come prima

Per quali valori di α converge

meno intorno di (0,0)

Questo converge su tutto il quadrante perché $f(x,y) = \frac{\rho^6}{\rho^8} = \frac{1}{\rho^2}$

Proviamo con $\iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^4+y^4} dx dy$

$$\boxed{\alpha=1} \quad \iint_{D_1} \dots \geq \int_2^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \underbrace{\frac{\cos\theta \sin^3\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}_{\text{questo è un numero positivo}} \quad \rho = +\infty$$

Quindi per $\alpha \geq 1$ diverge

Discorso cartesiano

$$\begin{aligned} \iint_{D_\alpha} \dots &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{xy^3}{x^4+y^4} \\ &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} \frac{xy^3}{x^4} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^3} \int_0^{x^\alpha} y^3 dy = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} dx \frac{x^{4\alpha}}{x^3} \quad \text{e questo converge} \\ &\Leftrightarrow 3-4\alpha > 1 \\ &\quad 4\alpha < 2 \quad \alpha < \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\boxed{\alpha < 1} \quad \iint_{D_\alpha} \dots \geq \iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{y^3}{x^3}$$

al denominatore ho messo y al posto di x. Posso perché $y \leq x$ in D_α se $\alpha \leq 1$

e questo diverge se $\alpha \geq \frac{1}{2}$

Variante : se volevo l'esistenza del limite all'infinito in D_α la condizione era $\alpha < 1$ (stessi ragionamenti di sopra)

Esercizio 3 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + x^5 \arctan(xy) - y = 2023 \}$

È limitato?

Oss. Se $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$, allora (basta $\lim > 2023$)

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2023 \}$ è limitato

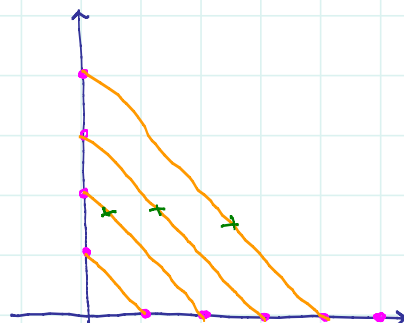
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = -\infty$$

Ne segue che

$f(m,0) > 2023$ per m grande

$f(0,n) < 2023$ per n grande



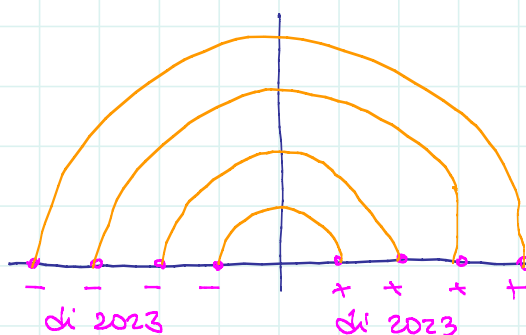
Quindi su ogni segmento che va da $(m,0)$ a $(0,n)$ con n grande, f deve valere 2023 da qualche parte.

Per n grande questi p ti tendono all'infinito.

Varianti usando i cerchi se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = -\infty$$



— o — o —