

A.A. 2022/2023
Complementi di Analisi Matematica
(aka Analisi 2)

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Contents

Lezione 01. Introduzione al corso. Struttura euclidea in n dimensioni (prodotto scalare, norma, distanza, intorni). Funzioni di più variabili e loro grafico. Linee di livello. Restrizioni di funzioni a curve.	8
Lezione 02. Definizioni di limite in un punto per funzioni di più variabili. Primi esempi di calcolo di limiti per funzioni di più variabili.	11
Lezione 03. Esercizi sul calcolo di limiti al finito per funzioni di più variabili.	15
Lezione 04. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili: definizione di derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, differenziale. Relazioni tra differenziale, esistenza di derivate parziali/direzionali, continuità: enunciati e controesempi. Interpretazione geometrica delle derivate direzionali e del gradiente.	19
Lezione 05. Esempi di calcolo di derivate parziali e direzionali. Dimostrazione della formula che lega il gradiente alle derivate direzionali. Teorema del differenziale totale: enunciato e dimostrazione nel caso non risparmiato. Teorema di Lagrange direzionale.	23
Lezione 06. Insiemi limitati, chiusi, compatti. Massimi e minimi per funzioni di più variabili: teorema di Weierstrass. Ricerca euristica dei candidati ad essere punti di massimo/minimo (punti stazionari interni, singolari interni e bordo). Primi esempi di problemi di massimo/minimo: utilizzo di disuguaglianze elementari, metodo delle linee di livello, parametrizzazioni del bordo.	27
Lezione 07. Insiemi descritti come luogo di zeri. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore): enunciato ed interpretazione geometrica della condizione di parallelismo dei gradienti. Primo esempio di applicazione. . . .	31
Lezione 08. Esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi compatti. Utilizzo misto di parametrizzazioni e moltiplicatori. Bordi dei bordi (punti di taglio). Massimi/minimi di funzioni con valori assoluti.	35
Lezione 09. Matrice Jacobiana e chain rule per funzioni di più variabili. Esempi di applicazione della chain rule. Norma del gradiente in coordinate polari. Derivate parziali successive. Enunciato del teorema di inversione dell'ordine di derivazione. . . .	39
Lezione 10. Teorema delle funzioni implicite: enunciato, dimostrazione dell'esistenza, e calcolo della derivata (supponendo che esista) nel piano. Dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel piano.	43

Lezione 11. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di più moltiplicatori): enunciato ed esempi di applicazione.	47
Lezione 12. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili: definizioni e primi esempi. Importanza dell'ottenere stime uniformi in θ quando si utilizzano le coordinate polari. Teorema di Weierstrass generalizzato.	51
Lezione 13. Varianti del teorema di esistenza degli zeri in più variabili. Primi esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non limitati.	55
Lezione 14. Esempi di limiti all'infinito per funzioni di due variabili. Utilizzo delle coordinate polari e di opportune stime. Tecnica di pareggiamento degli esponenti.	59
Lezione 15. Ripasso sulle forme quadratiche: rappresentazione mediante matrici simmetriche, forme (semi)definite positive/negative, segnatura e metodi per calcolarla. Un forma quadratica definita positiva è coerciva: dimostrazione mediante il teorema di Weierstrass e mediante il teorema spettrale. Accenno alla caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori.	63
Lezione 16. Matrice Hessiana. Legami tra la segnatura dell'Hessiana ed il comportamento locale di una funzione vicino ad un punto stazionario. Esercizi sul calcolo e la classificazione di punti stazionari.	67
Lezione 17. Formula di Taylor in più variabili: linguaggio dei multi-indici, resto di Peano e di Lagrange. Scrittura per esteso in due variabili. Primi esempi di calcolo.	71
Lezione 18. Dimostrazione di alcuni legami tra la segnatura della matrice Hessiana ed il comportamento locale di una funzione (utilizzando i polinomi di Taylor di ordine 2). Idea della dimostrazione della formula di Taylor in dimensione 2. Ulteriori esempi legati ai polinomi di Taylor.	75
Lezione 19. Esercizi misti su studio locale e globale di funzioni e forme quadratiche.	79
Lezione 20. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione (alla Darboux, via integrale inferiore e superiore), proprietà base (linearità, monotonia, additività rispetto alla zona di integrazione).	83
Lezione 21. Calcolo di integrali doppi: formule di riduzione sui rettangoli e su insiemi normali. Analogia con il double counting in combinatoria. Esempi di calcolo di integrali doppi con queste tecniche.	87
Lezione 22. Calcolo di integrali doppi utilizzando le coordinate polari.	92
Lezione 23. Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi. Esempi classici: affinità, isometrie, traslazioni. Primi esempi di utilizzo di simmetrie per semplificare il calcolo di integrali.	96
Lezione 24. Introduzione agli integrali tripli: notazioni, idea della definizione, interpretazione fisica. Tecniche di calcolo: formule di riduzione sui parallelepipedi, integrazione per colonne (insiemi normali rispetto ad un piano) e per sezioni.	100

Lezione 25. Esempi di integrali tripli calcolati con varie tecniche. Volume del segmento sferico.	105
Lezione 26. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio, con relativi determinanti Jacobiani. Ulteriori esempi di integrali tripli.	110
Lezione 27. Calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti di inerzia di figure piane e solide mediante integrali doppi e tripli. Distanza media di un punto di un quadrato da un vertice.	115
Lezione 28. Solidi di rotazione: equazione in coordinate cartesiane e cilindriche, rotazioni complete e non complete, formula per il volume. Teorema di Guldino per i volumi.	120
Lezione 29. Integrali dipendenti da parametro: definizione, continuità (passaggio al limite sotto il segno di integrale), derivabilità (derivata sotto il segno di integrale). Derivata di un integrale in dimensione uno con integranda ed estremi dipendenti da parametro.	125
Lezione 30. Controesempio il cui l'integrale del limite è diverso dal limite dell'integrale. Esercizi classici sugli integrali multipli: integrande con valore assoluto, cambi di variabile, volume dell'intersezione di due cilindri con asse perpendicolare.	130
Lezione 31. Introduzione alle curve: sostegno, speed e velocity, vettore e retta tangente, curve chiuse e semplici. Esempi di curve diverse con lo stesso sostegno. Quattro possibili strategie per dimostrare la semplicità di una curva.	134
Lezione 32. Definizione di lunghezza di una curva. Curve rettificabili. Esempi di curve di lunghezza infinita. Formula per il calcolo della lunghezza nel caso regolare. Caso speciale di curve cartesiane e curve descritte in coordinate polari. La lunghezza è invariante per riparametrizzazione regolare.	138
Lezione 33. Stime dall'alto e dal basso per la norma di un integrale vettoriale. Dimostrazione della formula per la lunghezza di una curva nel caso regolare (come integrale della speed).	143
Lezione 34. Integrali curvilinei: notazioni, interpretazione geometrica, idea della definizione, formula per il calcolo. Baricentro di una curva. Esempio di disegno del sostegno di una curva.	148
Lezione 35. Forme differenziali e campi di vettori. Integrale di una forma differenziale lungo una curva: notazione, definizione, significato fisico, formula per il calcolo. Discussione di come variano l'integrale di una funzione e di una forma differenziale quando si riparametrizza una curva.	153
Lezione 36. Forme differenziali chiuse ed esatte. Primitiva e potenziale. Chiusura implica esattezza. L'integrale di una forma differenziale esatta è la differenza tra i valori assunti da una primitiva agli estremi della curva. Caratterizzazione dell'esattezza in termini di integrali lungo curve.	158

Lezione 37. Insiemi convessi, stellati, semplicemente connessi, connessi per archi, connessi. Definizione di omotopia tra curve. Dimostrazione che le forme chiuse su insiemi stellati sono esatte. L'integrale di una forma chiusa su due curve omotope con gli stessi estremi coincide (enunciato). Le forme chiuse su insiemi semplicemente connessi sono esatte.	163
Lezione 38. Esempio classico di forma differenziale chiusa ma non esatta. Esattezza della stessa forma su insiemi particolari. Tre strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva.	167
Lezione 39. Superfici nello spazio: presentazione cartesiana, implicita, parametrica. Equazione del piano tangente nelle varie presentazioni. Area di una superficie: controesempio della lanterna di Schwarz, idea della definizione, formula per il calcolo nel caso regolare.	172
Lezione 40. Area di superfici cartesiane. Superfici di rotazione e formula per la loro area. Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione. Integrali superficiali: notazioni e formula per il calcolo.	177
Lezione 41. Gradiente, Laplaciano, divergenza, rotore. Formule classiche: divergenza del gradiente, rotore del gradiente, divergenza del rotore. Significato di gradiente/rotore/divergenza nulli/uguali.	182
Lezione 42. Integrali di flusso in due e tre variabili: interpretazione fisica e formule per il calcolo. Integrali di flusso in due variabili vs integrali di forme differenziali. Enunciato del teorema della divergenza in due e tre variabili. Enunciato del teorema di Gauss-Green e integrazione per parti in più variabili.	187
Lezione 43. Dimostrazione dell'equivalenza tra formula di integrazione per parti e teorema della divergenza. Dimostrazione del teorema della divergenza in insiemi normali del piano.	191
Lezione 44. Formule per l'area di un dominio il cui bordo è costituito da una o più curve assegnate. Calcolo di integrali su domini descritti mediante il loro bordo. . .	195
Lezione 45. Esercizi basati su applicazioni del teorema della divergenza.	200
Lezione 46. Orientazione del bordo di una superficie: definizione intuitiva ed esempi. Enunciato della formula di Stokes (teorema del rotore).	205
Lezione 47. Il flusso di un rotore attraverso una superficie senza bordo è nullo. Problema dell'inversione del rotore (trovare un campo con un rotore assegnato). Esempio di campo vettoriale con divergenza nulla che non è un rotore.	209
Lezione 48. Quattro strategie per il calcolo di un integrale di flusso attraverso una superficie.	213
Lezione 49. Esercizi riassuntivi su superfici, flussi, applicazioni del teorema della divergenza e del rotore, parametrizzazioni di bordi.	218

Lezione 50. Ulteriori esercizi di parametrizzazione di bordi di solidi e superfici. Approssimazione regolare di un campo radiale singolare nell'origine.	222
Lezione 51. Integrali impropri in più variabili: definizioni e primi esempi.	226
Lezione 52. Calcolo dell'integrale Gaussiano. Utilizzo delle coordinate polari per lo studio della convergenza di integrali impropri in due variabili.	231
Lezione 53. Esempi di studio della convergenza di integrali impropri in dimensione due: pareggiamento degli esponenti, utilizzo di stime, restrizione a opportune zone. . .	236
Lezione 54. Esempi di studio di integrali impropri in dimensione 3, anche con parametri.	240
Lezione 55. Esempi finali sullo studio della convergenza di integrali impropri.	245
Lezione 56. Discussione di esercizi presi da test d'esame.	250
Lezione 57. Discussione di esercizi misti presi da scritti d'esame.	254
Lezione 58. Discussione di esercizi misti su max/min, flussi, domini racchiusi da curve.	258

ANALISI 2

-

LEZIONE 01

Note Title

19/09/2022

Bimocrazia $\rightarrow$ Forum Studenti + TeamMateriale Didattico $\rightarrow$ Archivio Didattico

<u>Analisi 2</u>	$\rightarrow$ Precorso	15 %
	$\rightarrow$ Analisi 1	40 %
	$\rightarrow$ Algebra Lineare	10 %
	$\rightarrow$ Analisi 2	35 %

Analisi 1 : funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (1 variabile)Analisi 2 : funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (numero finito di variabili) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è il VERO SALTO

Analisi 3 : funzioni di infinite variabili

Notazioni $\mathbb{R}^n$ come sp. vettoriale $x \in \mathbb{R}^n$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(x_1, x_2, \dots, x_{22}) \in \mathbb{R}^{22}$ Prod. scalare (canonico)

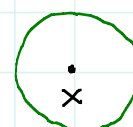
$$\langle x, y \rangle = x \cdot y$$

$$= \sum x_i y_i$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

angolo compreso

$$\|x\| = \{x_1^2 + \dots + x_n^2\}^{1/2} = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

 $\uparrow$ anche $|x|$ Def Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0$ definiamo

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

 $\uparrow$ palla (aperta) con centro in x e raggio r

Funzioni $f(x,y) = x + 3x^2y$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(x,y) = (x^2, x+y, y^2-x)$ $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Allora grafico f è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

= montagna in cui $f(x,y)$ è la quota del punto che sta sopra (x,y) .

Più in generale, data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, il grafico è

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : y = f(x)\}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^m$

Come visualizzare / esplorare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

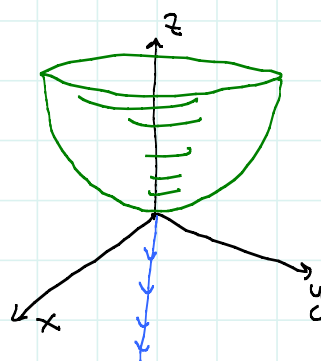
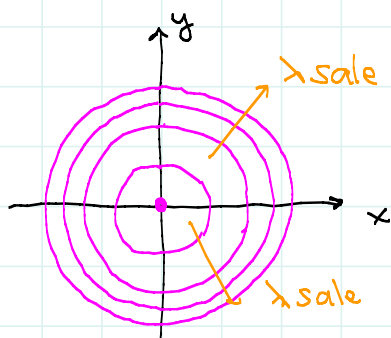
→ Linee di livello : disegno in $\mathbb{R}^2$ le linee di equazione

$$f(x,y) = \lambda$$

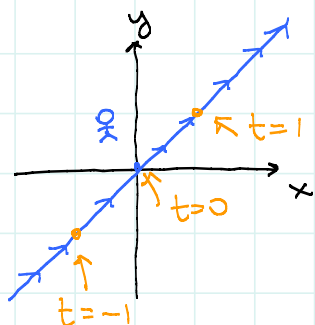
parametro reale

Esempi $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 = \lambda \rightsquigarrow \begin{cases} \text{Nulla se } \lambda < 0 \\ (0,0) \text{ se } \lambda = 0 \\ \text{circonf. con centro in } (0,0) \text{ e raggio } \sqrt{\lambda} \text{ se } \lambda > 0. \end{cases}$$



→ Percorsi di onino



(t, t) al variare di $t \in \mathbb{R}$

↑ descrizione parametrica di un
pto che si muove sulla retta $y=x$

$$f(t, t) = t^2 + t^2 = 2t^2$$

↑
quota a cui si trova
l'onino al tempo t

$$f(x, y) = xy$$

linee di livello: $xy = \lambda$

onino (t, t)

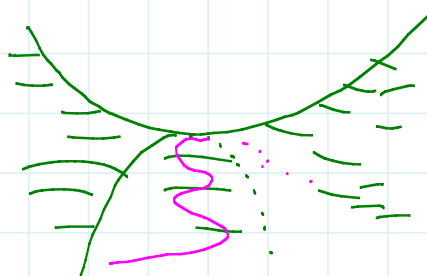
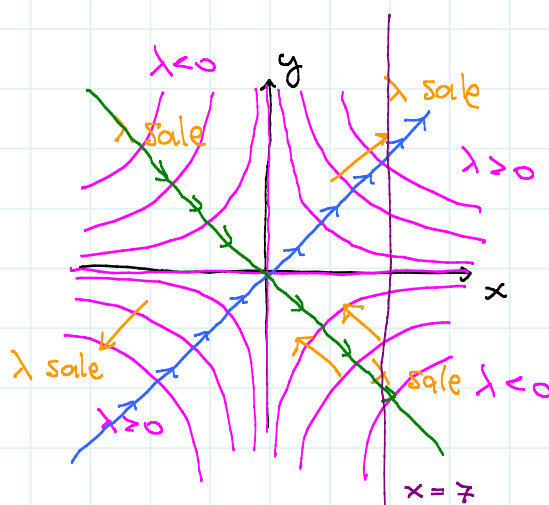
$$f(t, t) = t^2$$

onino $(t, -t)$

$$f(t, -t) = -t^2$$

onino $(7, t)$

$$f(7, t) = 7t$$



ANALISI 2

-

LEZIONE 02

Note Title

19/09/2022

Definizioni di limite Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$
Voglio definire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{Non esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$$

$\uparrow$
vettore x che sta
tendendo al vettore x_0

Def. ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche enorme $\forall x \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < r$
 $\uparrow \quad \uparrow$
norma

Def. ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche enorme
negativo

Def. ④ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

anche molto
vicino a 0

Def. ④ Si dice $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste se non vale nessuno
dei precedenti

Variaute 1 Se in arrivo ho $\mathbb{R}^m$ non ha senso dire che il limite è $\pm \infty$. Il caso in cui $l \in \mathbb{R}^m$ si definisce analogamente interpretando $|f(x) - l|$ come norma

Variaute 2 Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^m$, allora basta mettere

$$\forall x \in (D \cap B(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$$

Si intende che x_0 deve essere un p.to di accumulazione per D cioè

$$\forall r > 0 \quad D \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$, sia $x_0 \in D$ (veramente), sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Meta-teorema misterioso

Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non ci sono problemi burocratici (denom. che si annullano o simili).

Esempio 0 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \quad x_0}} \frac{\log(\cos(xy) + 3)}{\arctan(x+y^2) + e^{xy}} = \log 4$

I criteri classici di Analisi 1, ed in particolare

→ confronto

→ carabinieri

continuo a funzionare allo stesso modo con la stessa dimostrazione

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

Il limite fa 0.

1° modo Ricordo il trucco del valore assoluto

$$\begin{array}{ccc} |f(x)| \rightarrow 0 & \Leftrightarrow & f(x) \rightarrow 0 \\ \uparrow \quad \uparrow & & \\ \text{valore assoluto} & & \end{array}$$

Basta quindi dimostrare che $|f(x,y)| \rightarrow 0$

$$0 \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = |x| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Ora LHS $\rightarrow 0$ (ovvio) e RHS $\rightarrow 0$ per meta-teorema
 $\uparrow$
 Left hand side

Quindi il centrale tende a 0.

2° modo Passo in coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{\rho^2} = \rho \cos^3 \theta$$

Fare il limite per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ equivale a fare il limite per $\rho \rightarrow 0^+$, e a questo punto è evidente.

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

1° modo come prima

$$0 \leq \frac{|x^2 y|}{x^2 + y^4} = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y|$$

Conclusione come prima!

Esempio 3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Coord. polari

$$\frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

Quando $\rho \rightarrow 0$ otteniamo $\frac{0}{\cos^2 \theta}$

→ Se $\cos \theta \neq 0$ sono a posto

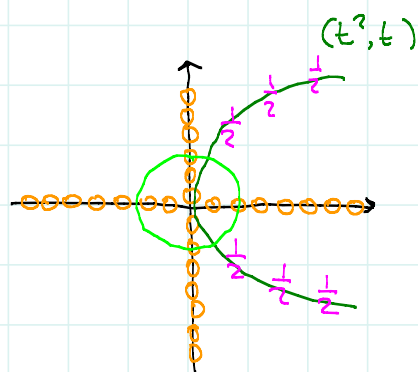
→ Se $\cos \theta = 0$, allora sono sull'asse y , e sull'asse y la funzione vale 0 a tappeto, dunque pure lì tende a 0.

SPAZZATURA !!! NON FUNZIONA !

Questo limite NON ESISTE !!

Sugli assi abbiamo $f(x,y) = 0$

$$f(t^2, t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$



Questo impedisce al limite di esistere !!

ANALISI 2 — LEZIONE 03

Note Title

20/09/2022

LIMITI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Oss. Posso sempre supporre il limite in $(0,0)$, altrimenti si fa un cambio variabili

Come dim. che un limite esiste?

- 1: provo a fare stime riducendomi a funzioni continue
- 2: passo in coord. polari e cerco stime indep. di θ

$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho)$$

e spero che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_2(\rho) = l$ (stesso l)

- 3: uso l'equivalenza con le successioni. Vale il seguente fatto

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

x e 0 vettori

se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \quad \text{per ogni successione } x_n \rightarrow 0$$

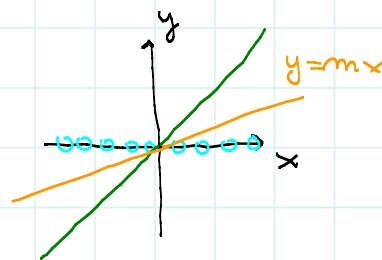
cioè $\|x_n\| \rightarrow 0$

Come dimostro che un limite NON esiste?

- ① Basta trovare due successioni $x_n \rightarrow 0$ e $y_n \rightarrow 0$ t.c.
 $f(x_n) \rightarrow l_1$ $f(y_n) \rightarrow l_2$ con $l_2 \neq l_1$

- ① bis Basta trovare due punti che tendono a 0 per i quali il limite della funzione è diverso.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$



$$f(t,0) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$$

$$f(0,t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = 0$$

$$f(t,t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$$

Per curiosità proviamo $f(t,mt) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \frac{m}{m^2+1}$

Ma ne sarei accorto in coord. polari?

$$\text{Sì: } f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta$$

Quindi il lim per $\rho \rightarrow 0^+$ dipende da θ !!

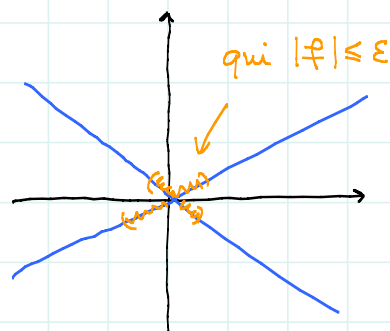
Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Provo con l'arrivo sulla retta $y=mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2 t^3}{t^2 + m^4 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2 t}{1 + m^4 t^2} = 0$$

qualunque sia m ! Ma il fatto che il lim sia 0 su tutte le rette NON BASTA

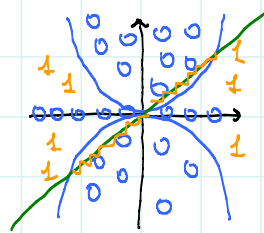
Fisso $\varepsilon > 0$. Il fatto che su ogni retta ci sia un intervallo in cui $|f| < \varepsilon$ NON implica che c'è un cerchio in cui $|f| < \varepsilon$



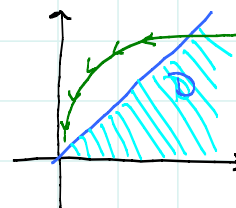
Esempio burocraticoPrendiamo f che vale→ 0 dentro le parabole e sull'asse x

→ 1 altrove

In questo caso il limite è 0 se tutte le retti, una di suo non esiste



Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$
 $(x,y) \in D$

Ora è vietato usare curve del tipo (t^2, t) perché non stanno in D vicino a $(0,0)$

Ora il limite esiste e fa 0!!

1° modo Osservo che in D vale che

$$0 \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{x \cdot \overbrace{x^2}^{\substack{\text{uso che} \\ y \leq x \text{ in } D}}}{x^2+y^4} \leq x \quad \text{e concludo al solito modo}$$

2° modo In coord. polari

$$0 \leq \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} \leq \frac{\rho}{\cos^2 \theta} \leq \frac{\rho}{\frac{1}{2}} = 2\rho$$

$\uparrow$ Num + grande Den + piccolo $\uparrow$ $\cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in D

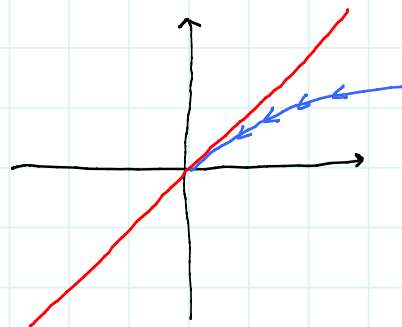
Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{30} y^2}{x-y}$
 $(x,y) \in D$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

Se uso i soliti criteri sulle rette:

$$f(t, ut) = \frac{u^2 t^{32}}{(1-u)t} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 $u \neq 1$
 perché siamo
 in D



Quindi: SE il lim esiste, per forza è 0.

$$f(t+t^{80}, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t+t^{80})^{30} \cdot t^2}{t^{80}} = +\infty \quad \text{perché è come fosse } \frac{t^{32}}{t^{80}}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 04

Note Title

23/09/2022

Analisi 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ Def 1 Si dice f è derivabile in x_0 se esiste

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

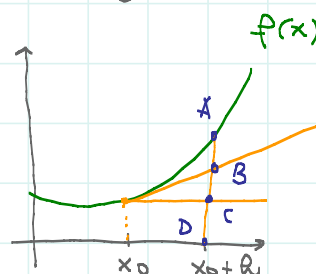
Def 2 Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Stesso disegno:

$$AD = AB + BC + CD$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x_0+h)$ $f'(x_0)h$ $f(x_0)$
 $\uparrow$
 $o(h)$

Teorema f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è differenziabile in x_0 Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

— o — o —

Def. (Derivate parziali) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$\uparrow$
 se esiste, si dice deriv. part. di f risp. a x in (x_0, y_0)

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Più in generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) := \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \text{numeri}}} \frac{f(x_0 + \lambda e_k) - f(x_0)}{\lambda}$$

$\swarrow$ k -esimo vettore base canonica di $\mathbb{R}^n$

Notazioni: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f_{x_k}(x_0) = D_{x_k}(x_0)$ sono sinonimi.

Def. (Derivata direzionale) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda}$$

si dice derivata in x_0 nella direzione v .

Oss. La def. talvolta si trova ristretta ai vettori ($\|v\| = 1$)

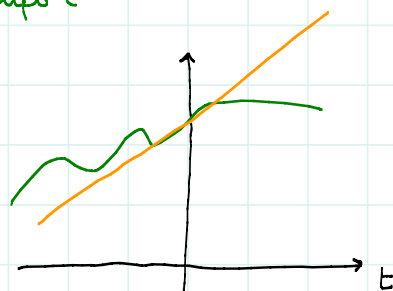
Oss. Le derivate parziali sono speciali derivate direzionali ($v = e_k$)

Interpretazione geometrica. Consideriamo l'unico che percorre la
retta $t \rightarrow x_0 + tv$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(x_0 + tv) & t \in \mathbb{R} \\ &= \text{"quota a cui si trova l'unico che} \\ &\quad \text{percorre la retta al tempo } t" \end{aligned}$$

Allora $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ proprio
per definizione.



Def. Si dice GRADIENTE di f in x_0
il vettore

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

$\uparrow$
NABLA

Def. (Differenziale). $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(\|R\|)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 vettori prod. scalare

dove $o(\|R\|)$ è una funzione $r(R)$ tale che

$\uparrow$
resto

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{\|R\|} = 0$$

$\uparrow$
 limite in n variabili

Riscrittura in 2 variabili $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Si dice che f è diff. in (x_0, y_0) se esiste $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(x_0 + R, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + \alpha R + \beta K + o(\sqrt{R^2 + K^2})$$

Teorema Supponiamo che f sia diff. in x_0 .

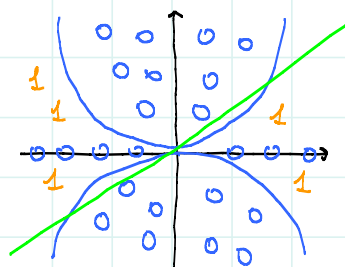
Allora valgono i seguenti fatti

- (i) f è continua in x_0
- (ii) esistono tutte le deriv. parziali in x_0 e $\alpha = \nabla f(x_0)$
- (iii) " " " direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Cattive notizie Può succedere che esistano tutte le derivate direzionali in x_0 , ma f NON è nemmeno continua in x_0 .

Basta l'esempio con le due parabole della lezione precedente (tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ sono nulle



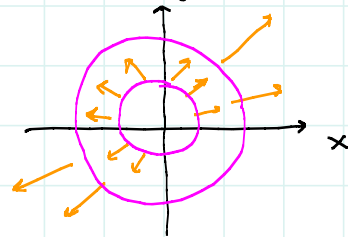
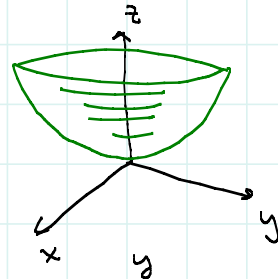
Significato geometrico del gradiente

$\nabla f(x_0)$ indica la direzione nella quale andare se vogliamo "salire in fretta" lungo il grafico.

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

Il gradiente è in ogni punto ortogonale alle linee di livello e punta in direzione "↑ sale"



— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 05

Note Title

23/09/2022

Esempi

$$f(x, y) = x + 7y$$

$$f_x = 1$$

$$f_y = 7$$

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

$$f_x = 2xy^3$$

$$f_y = 3x^2 y^2$$

$$f(x, y) = \sin(xy^2)$$

$$f_x = y^2 \cos(xy^2)$$

$$f_y = 2xy \cos(xy^2)$$

$$f(x, y) = y \sin(xy)$$

$$f_x = y^2 \cos(xy)$$

$$f_y = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$

$$f_x = \frac{1}{y^2}$$

$$f_y = -\frac{2x}{y^3}$$

$$f(x, y) = x^y$$

$$f_x = y x^{y-1}$$

$$f_y = x^y \log x$$

$$a^y = e^{y \log a}$$

Esempio 2

$$f(x, y) = x^2 + xy^3$$

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$v = (1, -3)$$

Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2)$$

Uso che

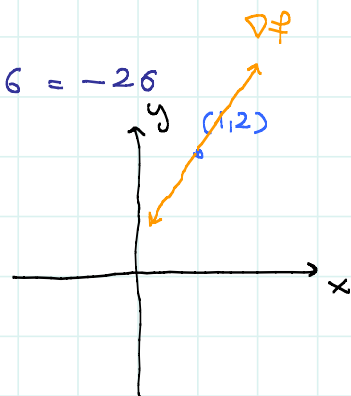
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$$

$$\nabla f(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2)$$

$$\nabla f(1, 2) = (10, 12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle (10, 12), (1, -3) \rangle = 10 - 36 = -26$$

Se metto una pallina nel p.to del grafico che corrisponde a (1, 2), dove va?



Formula per le derivate direzionali

Ipotesi: f è diff. in x_0 , cioè

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(\|R\|)$$

tesi $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \alpha, v \rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \overbrace{tv}^R) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + \langle \alpha, tv \rangle + o(\|tv\|) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t} \langle \alpha, v \rangle}{\cancel{t}} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|tv\|)}{t \|v\|} \cdot \|v\|$$

$$= \langle \alpha, v \rangle$$

↓ per definizione di o piccolo

Domanda: come dimostro che f è diff. in x_0 ??

Teorema del diff. totale Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Supponiamo che

(i) tutte le derivate parziali esistono in una certa $B(x_0, r)$

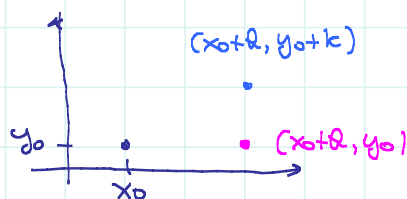
(ii) " " " " sono continue in x_0

Allora f è diff. in x_0 .

Dim in 2 variabili $f(x, y)$ (x_0, y_0)

Devo dimostrare che

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Lagrange rispetto a y $\rightarrow$ $= k f_y(x_0+h, y_0+c) + h f_x(x_0+d, y_0)$

$$= \boxed{k f_y(x_0, y_0)} + k (f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0)) + h f_x(x_0, y_0) + h (f_x(x_0+d, y_0) - f_x(x_0, y_0))$$

sono i termini che volevamo

Quello che ci serve è che i due termini restanti siano $o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè (fatto per il primo)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k (f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0))}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Lo facciamo con il valore assoluto

$$0 \leq \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} |f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0, y_0)| \leq \boxed{|f_y(\dots) - f_y(\dots)|}$$

$\uparrow$ compreso tra 0 e k $\downarrow$ 0

Basta osservare che, quando $(h,k) \rightarrow (0,0)$, il p.to (x_0+h, y_0+c) tende a (x_0, y_0)

e usare la continuità di f_y .

Lagrange direzionale

Cosa resta ad Analisi del Teorema di Rolle - Cauchy - Lagrange?

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$f(y_0) - f(x_0) = \langle y_0 - x_0, \nabla f(c) \rangle$$

$\uparrow$ da qualche parte sul segmento di estremi x_0 e y_0

Dim Considero

x_0

y_0

$$\varphi(t) := f(x_0 + t(y_0 - x_0))$$

$$f(y_0) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

$$= \varphi'(c)$$

con $c \in (0,1)$

Analisi 1

Def. di
deriv. direzionale

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x_0 + c(y_0 - x_0))$$

↑
direzione $y_0 - x_0$

$$= \langle \underbrace{y_0 - x_0}_v, \nabla f(\underbrace{x_0 + c(y_0 - x_0)}_{\text{p.to del segmento}}) \rangle$$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 06

Note Title

27/09/2022

Max e min in più variabili

Contesto generale: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, vogliamo calcolare

$$\max / \min \{ f(x) : x \in A \}$$

Def. Si dice che A è

- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$

- CHIUSO se il complementare è aperto, cioè

$$\forall x \notin A \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$$

(Brutalmente: A è chiuso se contiene tutto il suo "bordo")

- COMPATTO se è LIMITATO + CHIUSO.

Teorema (WEIERSTRASS) Se

(i) A è compatto e $\neq \emptyset$

(ii) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua

allora $\max / \min$ esistono per forza.

Oss. Se A non è compatto, possono esistere ugualmente.

Come li determino? Cercando i p.ti di $\max / \min$.

Dove li cerco? Tra 3 categorie di candidati:

① P.ti stazionari interni: punti x INTERNI ad A t.c. $\nabla f(x) = 0$

$$\uparrow \exists r > 0 \text{ t.c. } B(x, r) \subseteq A$$

② P.ti singolari interni: p.ti x interni ad A t.c. ∇f NON ESISTE

③ P.ti del bordo di A .

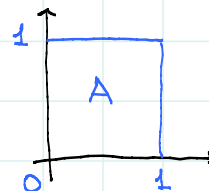
$\uparrow$ ad Analisi 2 è più complicato

Tecniche disponibili: supponendo ok l'esistenza, poi

- casi del tutto elementari
- linee di livello
- parametrizzazione del bordo
- moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = 2x - 5y$$



Max = 2 (x vale al max 1, y vale al min 0)

Min = -5 (x vale al min 0, y " " max 1)

p.to di Max: (1, 0) p.to di min: (0, 1)

$$f(x, y) = 2x - 5y \leq 2 - 5 \cdot 0 = 2$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \quad \uparrow \\ x \leq 1 \quad y \geq 0 \\ \quad \quad -y \leq 0 \end{array}$$

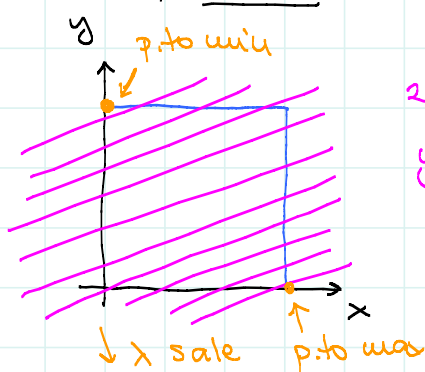
Esempio 2 $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

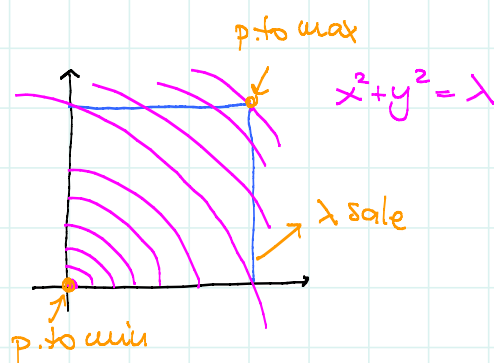
Max = 2 p.to di max: (1, 1)

Min = 0 p.to di min: (0, 0)

Esempio 1-2bis Come prima, ma uso le linee di livello



$$\begin{aligned} 2x - 5y &= \lambda \\ y &= \frac{2}{5}x - \frac{\lambda}{5} \end{aligned}$$



Esempio 3 $A =$ triangolo con vertici in $(0,0), (1,0), (0,1)$

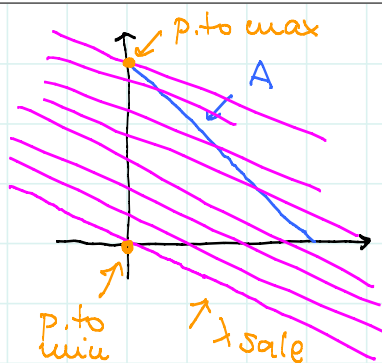
$$f(x,y) = x+2y$$

Weierstrass OK. Linee di livello

$$x+2y = \lambda \rightsquigarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

Max = 2 P.to max: $(0,1)$

Min = 0 P.to min: $(0,0)$



Esempio 4 $A =$ come prima

$$f(x,y) = x+y$$

Min = 0 P.to min: $(0,0)$

Max = 1 P.to max: tutta l'ipotenusa



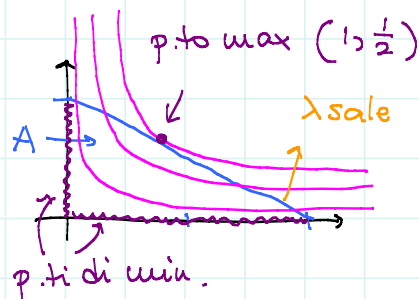
Esempio 5 $A =$ triangolo con vertici $(0,0), (0,1), (2,0)$

$$f(x,y) = xy$$

Weierstrass OK

Min = 0 : p.to di min: i 2 cateti

$$xy = \lambda \rightsquigarrow \text{solite iperboli } y = \frac{\lambda}{x}$$



Il p.to di max lo aspettiamo in corrisp. dell'iperbole tangente all'ipotenusa. Diamo per buono che il p.to di max sia sull'ipotenusa. Come lo trovo? $y = 1 - \frac{x}{2}$

Parametrizzando:

$$(t, 1 - \frac{1}{2}t)$$

con $t \in [0, 2]$

$$(2t, 1 - t)$$

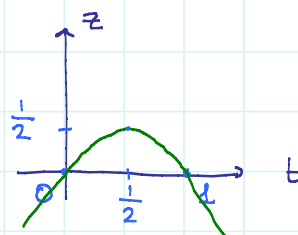
con $t \in [0, 1]$

$$\varphi(t) = \underset{x}{2t} (\underset{y}{1-t}) = \text{"quota a cui si trova un senuio che percorre l'ipotenusa"}$$

$$= 2t - 2t^2$$

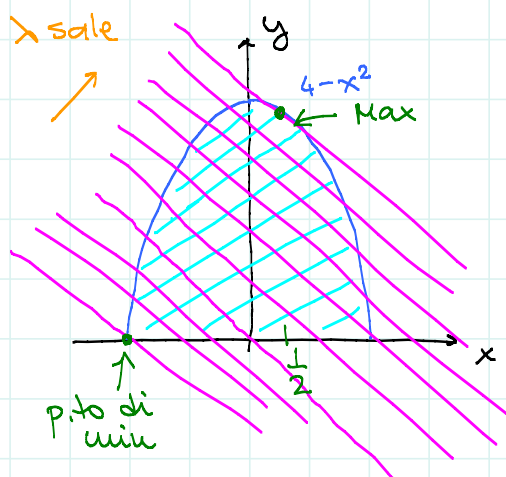
La studio per $t \in [0, 1]$

Max = $\frac{1}{2}$, P.to di max =
p.to dell'ipotenusa
corrispondente a $t = \frac{1}{2}$, cioè $(1, \frac{1}{2})$



Esempio 6 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$

$$f(x, y) = x + y$$



Weierstrass OK

Staz. interni e sing. int. NON ESISTONO
($\nabla f = (1, 1) \neq (0, 0)$)

Parametrizzo la parabola
 $(t, 4 - t^2)$ con $t \in [-2, 2]$

Devo quindi studiare

$$\varphi(t) = t + 4 - t^2 \quad \text{con } t \in [-2, 2]$$

È una parabola verso il basso che ha max dove $\varphi'(t) = 0$

$$\varphi'(t) = 1 - 2t \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{P.to di max: } \left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

$$\text{Max: } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$$

$$\uparrow$$

$$4 - t^2$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 07

Note Title

30/09/2022

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

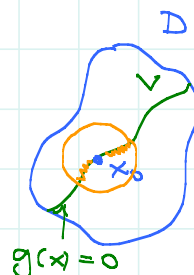
Def. (luogo di zeri) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Il luogo di zeri di g è Z insieme

$$V = \{x \in D : \underbrace{g(x) = 0}_{\text{equazione di } V}\}$$

Def. Siano D e g come sopra. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in V$. Si dice che x_0 è p.to di min. relativo per f ristretto a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap V$$

Ideem per i p.ti di max di f ristretto a V

**Teorema** (Singolo moltiplicatore di Lagrange)

Siano D, g, f come sopra. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in D (derivabili con derivate parziali continue)

Supponiamo che x_0 sia p.to di max/min locale per f ristretto a V .

Allora succede almeno una di queste cose.

(1) $\nabla g(x_0) = 0$

(2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

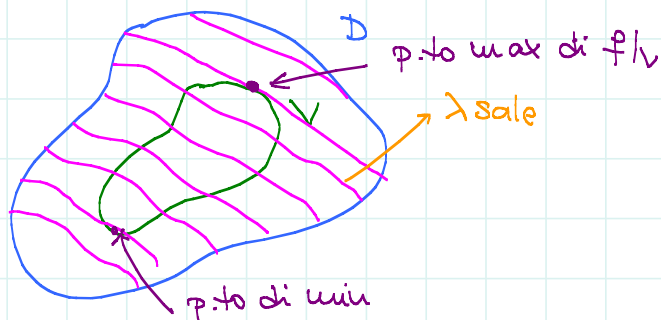
↑
corretto dopo video

↑
moltiplicatore di Lagrange

(in altre parole: $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla g(x_0)$)

NON DIMOSTRAZIONE

Come posso trovare i p.ti di max/min, diciamo globali, di f ristretta a V ?



Penso alle linee di livello di $f(x)$

In quei p.ti le linee di livello di $f(x)$ sono tangenti a V , che a sua volta è una linea di livello di $g(x)$.

In quei p.ti

Linea livello $f(x)$ tangente a Linea livello $g(x)$

Ma allora ∇f e ∇g , che sono $\perp$ alle linee di livello, devono essere multipli tra di loro!!

Questo spiega la condizione (2).

La condizione (1), quando NON si verifica, dice che V "è fatto bene vicino a x_0 ".

Esempio in $\mathbb{R}^2$ consideriamo $g(x,y) = xy$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$
 $\nabla g(0,0) = (0,0)$

In questo caso V sono i due assi, e quindi "è fatto male vicino a $(0,0)$ "

(esempio analogo : $g(x,y) = y^2 - x^3$



Operativamente Se voglio trovare max/min $f(x)$ su ∂A , posso pensare A come luogo di zeri e cercare i p.ti delle due categorie
 ↓
 di una certa $g(x)$

① Primo sistema $\begin{cases} \nabla g(x) = 0 & \leftarrow \text{avere } \nabla \text{ nullo} \\ g(x) = 0 & \leftarrow \text{stare in } V \end{cases}$
 ($m+1$ equazioni in n incognite)

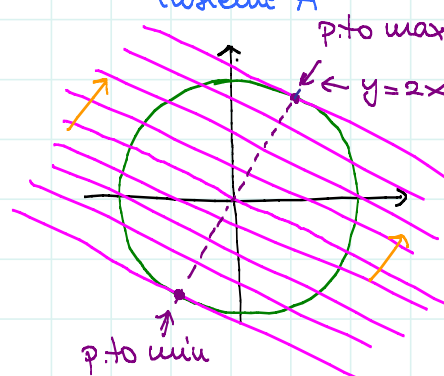
② Secondo sistema $\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$
 (sempre $m+1$ equazioni, ma con $m+1$ incognite perché c'è anche λ)

Esempio 1 Max/min di $f(x,y) = x+2y$ su $\boxed{x^2+y^2 \leq 1}$
 insieme A

f continua, insieme compatto
 $\Rightarrow$ max e min esistono

- Sing. interni $\leadsto \emptyset$
- Staz. interni: $\nabla f(x,y) = (0,0)$
 $(1,2) = (0,0)$ MAI

• Bordo: ha equazione
 $\boxed{x^2+y^2-1=0}$
 $g(x,y)$



1° sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla g = 0 \\ \leftarrow g=0 \end{cases} \Rightarrow \text{NO SOLUZIONI}$

Oss: per ora non ho candidati, dunque me ne aspetto almeno due dal secondo sistema

2° sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1,2) = \lambda(2x,2y) \\ \nabla f \quad \quad \nabla g \end{matrix}$

Dalle prime 2 equ. deduco che $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Dividendo $\frac{2^a}{1^a}$ trovo

$$\frac{y}{x} = 2 \quad \text{cioè} \quad y = 2x$$

Vado nella 3^a: $x^2 + 4x^2 = 1 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

I candidati sono $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
 $\uparrow$ p.to max $\uparrow$ p.to min

(Il valore di λ se voglio posso trovarlo, ma non serve)

Sostituendo in f si chiude

$$\text{Max} = \sqrt{5} \quad \text{min} = -\sqrt{5}$$

Oss. Potevamo in alternativa parametrizzare il bordo come $(\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

Ci ritrovavamo a studiare

$$\varphi(t) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = -\sin\theta + 2\cos\theta = 0 \quad \text{divido per } \cos\theta \text{ (posso perché...)}$$

$$\leadsto \tan\theta = 2 \quad \leadsto \text{a quel punto trovo } \sin\theta \text{ e } \cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$y = 2x \quad x^2 + y^2 = 1$$

Oss. Il metodo si applica anche se l'insieme è SOLO BORDO

(max/min di $f(x,y) = x+2y$ su $x^2+y^2=1$)

In questo caso NON HA SENSO cercare stazionari o singolari interni, perché l'insieme NON HA PUNTI INTERNI.

— o — o —

ANALISI 2

—

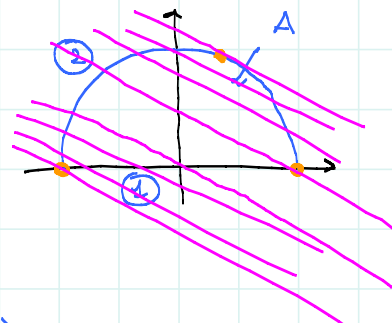
LEZIONE 08

Note Title

30/09/2022

Esempio 1 $f(x,y) = x + 2y$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$



Weierstrass no pbm

Sing e staz. interni: $\emptyset$ Bordo $\rightarrow$ pezzo rettilineo (parametrizz.) $\rightarrow$ pezzo curvilineo (moltiplicatori)① $(t,0)$ con $t \in [-1,1]$ $\varphi(t) := f(t,0) = t$ Max/min per $t = \pm 1 \leadsto$ candidati $(-1,0), (1,0)$ ② Equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ che però sarebbe tutta la circ.

In questo caso posso comunque fare i moltiplicatori, MA

 $\rightarrow$ devo escludere i candidati con $y < 0$ $\rightarrow$ devo includere d'ufficio i "bordi dei bordi" o

"p.ti di taglio". In questo caso i due estremi che abbiamo già considerato.

Facendo il conto, come alla les. precedente troviamo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

↓
NO BUONO

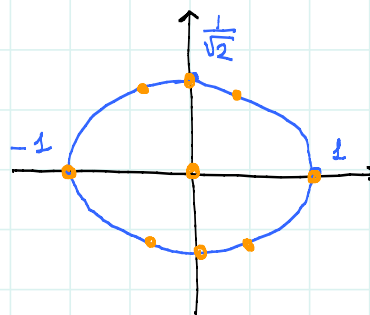
Facendo il conto

$$f(-1,0) = -1 \quad \leftarrow \text{min}$$

$$f(1,0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{5} \quad \leftarrow \text{max}$$

Esempio 2 $f(x,y) = x^4 + y^4$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$



Weierstrass OK

Sing. interni : $\emptyset$

Stab. interni : $\nabla f = 0 \quad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(0,0)}$

Bordo che ha equ $\frac{x^2 + 2y^2 - 1}{g(x,y)} = 0$

1° sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{NO SOLUZIONI}$

2° sistema $\begin{cases} 4x^3 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 = \lambda x \\ y^3 = \lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

RESISTERE ALLA TENTAZIONE DI DIVIDERE O SEMPLIFICARE x e y nella 1° e 2°

$\rightarrow$ se $x=0$, allora dalla terza $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})}$

$\rightarrow$ se $y=0$, allora " " $x = \pm 1 \rightsquigarrow \boxed{(\pm 1, 0)}$

$\rightarrow$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, allora divido e ottengo $\begin{matrix} 2x^2 = \lambda \\ y^2 = \lambda \end{matrix}$

quindi $y^2 = 2x^2$, e nella 3° equ.

$5x^2 = 1 \rightsquigarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\rightsquigarrow$ candidati $\boxed{(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})}$ $\leftarrow$ 4 p.ti

Sostituisco tutto :

$$f(0,0) = 0 \quad \leftarrow \text{min}$$

$$f(\pm 1, 0) = 1 \quad \leftarrow \text{max}$$

$$f(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4}$$

$$f(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$$

Oss. Potero parametrizzare l'ellisse come

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

$$x^2 + (\sqrt{2}y)^2 = 1$$

$$x = \cos \theta \quad \sqrt{2}y = \sin \theta$$

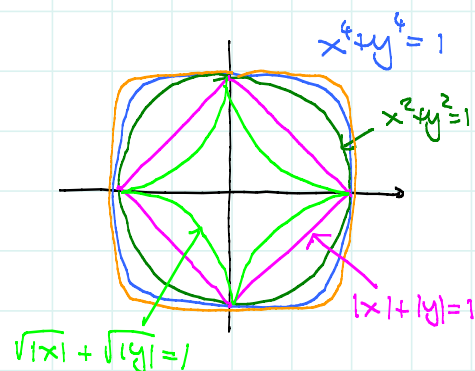
La param. è

$$(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

Interpretazione con le linee di livello

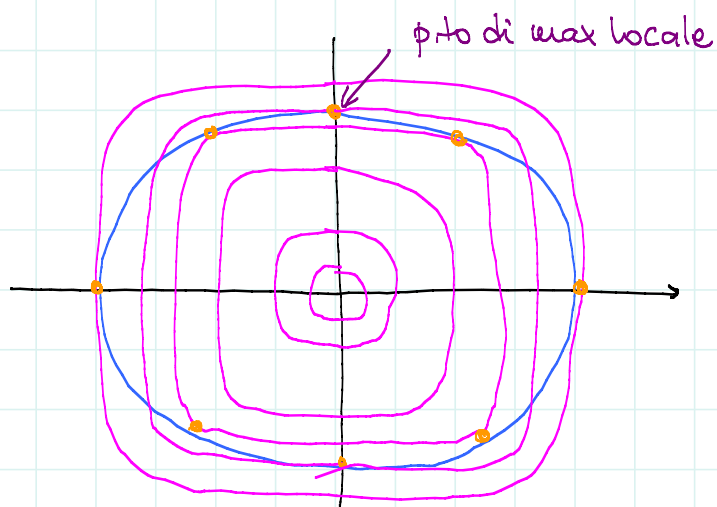
Come sono le curve $x^4 + y^4 = \lambda$

Per $\lambda > 0$ sono "vecchi televisori"

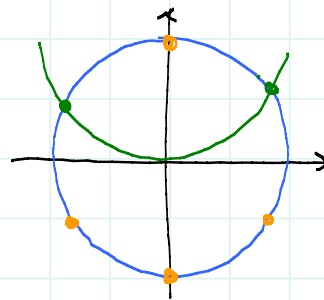


Idea 1: se $x^2 + y^2 = 1$, allora $x^4 + y^4 \leq 1$

Idea 2: studio $y = \pm \sqrt[4]{1-x^4}$



Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
 $f(x,y) = |y - x^2|$



Weierstrass OK e inoltre è SOLO BORDO

Idea: studiare $\underbrace{y - x^2}_{f_1(x,y)}$ e poi trarne le conclusioni

... secondo sistema

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \nabla f_1 = \lambda \nabla g$$

→ Se $x=0$, allora $y = \pm 1 \leadsto (0, \pm 1)$

→ Se $x \neq 0$, allora dalla prima $\lambda = -1$ e dalla 2^a $y = -\frac{1}{2}$
 e quindi dalla 3^a $x^2 = \frac{3}{4} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\leadsto \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sostituzione:

$$f_1(0, +1) = 1$$

← Max f_1

$$f_1(0, -1) = -1$$

$$f_1\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \quad \leftarrow \text{min } f_1$$

Da questo deduco che $\text{Max } f = \frac{5}{4}$ e $\text{min } f = 0$

vecchio $\uparrow$ min
 con segno cambiato

con p.ti di min
 le soluz. di

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Interpretare con linee di livello ...

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 09

Note Title

03/10/2022

MATRICE JACOBIANA $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ $x_0 \in D$

Si dice che f è diff. in x_0 se esiste J matrice $m \times n$

↑ JACOBIANA

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Jh + o(\|h\|)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$
 $m \times n \quad n$

dove $o(\|h\|)$ è una funzione $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.c.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$\uparrow$ norma in $\mathbb{R}^m$
 $\uparrow$ norma in $\mathbb{R}^n$

Fatto generale Le righe di J sono i gradienti delle componenti di f .
 Nel caso particolare $m=1$, la J è un vettore riga.

CHAIN RULE Ad analisi 1 avevamo

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Analisi 2 : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora

$$J(g \circ f)(x) = (Jg)(f(x)) Jf(x)$$

$\begin{matrix} m \\ \square \\ k \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ \square \\ k \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ \square \\ m \end{matrix}$

Esempio classico

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

Costruisco

$$\varphi(t) := f(\alpha(t), \beta(t))$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi'(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) + f_y(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)$$

Rigorosamente:

$$J\varphi(t) = \begin{pmatrix} f_x(\gamma(t)) & f_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} J\gamma(t) = \begin{pmatrix} f_x(\gamma(t)) & f_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora

$$g(u, v) = f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \quad \text{e calcoliamo le deriv. part.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= f_x(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) + \\ &+ f_y(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

$$g_u = f_x \alpha_u + f_y \beta_u$$

$$g_v = f_x \alpha_v + f_y \beta_v$$

Rigorosamente:

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla \alpha \\ \leftarrow \nabla \beta \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ J(f \circ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}) & Jf \end{matrix}$$

Esempio Norma del gradiente in coord. polari

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y)$$

Considero

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Calcolo $\|\nabla f(x, y)\|^2 = f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2$

Che cosa diventa in coord. polari?

$$f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^2 + f_y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^2 \quad \text{?}$$

Quale operazione su g produce lo stesso effetto?

$$g_\rho = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$g_\theta = f_x(-\rho \sin \theta) + f_y \rho \cos \theta$$

$$f_x(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot \cos \theta + \dots$$

↑
derivata di $\rho \cos \theta$
rispetto a ρ

Moltiplico la prima per ρ e faccio i $\square$, oppure divido la seconda per ρ e faccio i $\square$

$$g_\rho^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$\frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = f_x^2 \sin^2 \theta + f_y^2 \cos^2 \theta - 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$g_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} g_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$$

Esercizio Calcolare il Laplaciano in coord. polari

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

DERIVATE PARZIALI SUCCESSIVE

$$f(x, y) = x^2 y + \cos(xy)$$

$$f_x = 2xy - y \sin(xy)$$

$$f_y = x^2 - x \sin(xy)$$

$$f_{xx} = 2y - y^2 \cos(xy)$$

$$f_{yy} = -x^2 \cos(xy)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y =$$

$$f_{yx} = (f_y)_x =$$

$$= 2x - \sin(xy) - yx \cos(xy)$$

$$= 2x - \sin(xy) - xy \cos(xy)$$

Oss. Le due derivate parziali miste sono uguali !!

Teorema Sotto ipotesi decenti le derivate miste non dipendono dall'ordine di esecuzione.

(esempio di ipotesi: se sono tutte continue)

Oss. Le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili a priori sono 2^k , ma di queste solo $k+1$ sono essenzialmente distinte (conta quante volte derivo rispetto ad ogni variabile).

Costruttore di controesempi

Sia $g(x, y)$ tale che $\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = \alpha$ $\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) = \beta$

Allora $f(x, y) = xy g(x, y)$ ha f_{xy} e f_{yx} uguali ad α e β in qualche ordine.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 10

Note Title

03/10/2022

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (Detto anche, ma solo a PISA, Teorema del D/N1)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Sia $(x_0, y_0) \in D$ tale che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$

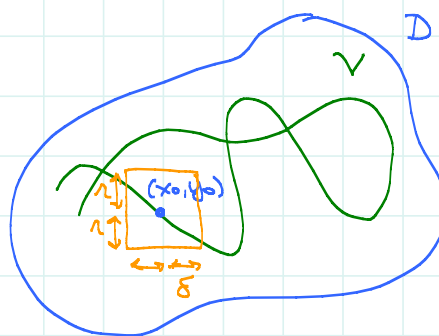
Sia V il luogo di zeri di g , cioè

$$V = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\} \ni (x_0, y_0)$$

Allora $\exists \delta > 0 \exists \eta > 0 \exists \delta: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ t. c.

$$V \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], y = \delta(x)\}$$

Brutalmente: esiste una finestra centrata in (x_0, y_0) in cui V è il grafico di una funzione $\delta(x)$



Esempio $g(x, y) = x^2 - y^2$ $g(0, 0) = 0$ $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$

$V = \times$ $\leftarrow$ non esiste la finestra

Inoltre δ è di classe C^1 e $\delta'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

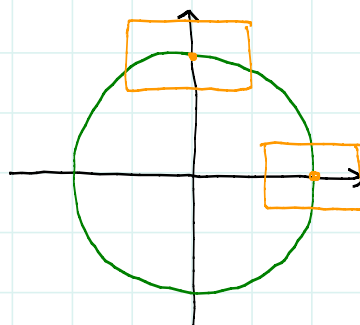
Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$$(x_0, y_0) = (0, 1) \quad \nabla g = (2x, 2y)$$

$$g_y(0, 1) \neq 0$$

Le ipotesi di IFT sono verificate

$$\delta(x) = \sqrt{1-x^2}$$



$$(x_0, y_0) = (0, -1) \quad \text{Anche qui ipotesi OK e } \delta(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$g_y(1, 0) = 0 \quad \therefore$$

$g_x(1, 0) = 2 \neq 0 \rightarrow$ nella finestrella V
è grafico di $x = \delta(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

DIM SE sappiamo che δ è derivabile, allora

$$\delta'(x) = - \frac{g_x(x, \delta(x))}{g_y(x, \delta(x))}$$

Perché? Sappiamo $g(x, \delta(x)) = 0$ per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Ma allora la sua derivata rispetto a x è nulla

$$\varphi(t) = g(t, \delta(t))$$

$$0 = \varphi'(t) = g_x(t, \delta(t)) \cdot 1 + g_y(t, \delta(t)) \delta'(t)$$

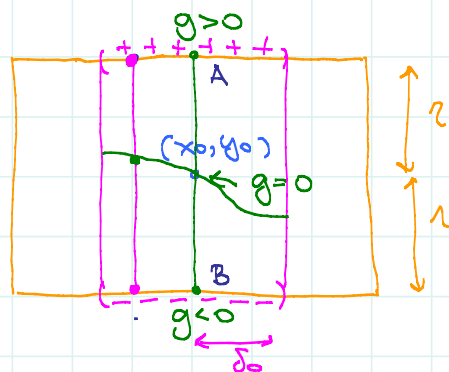
Non resta che ricavare $\delta'(t)$.

NON DIMOSTRIAMO derivabilità e continuità

Dimostriamo l'esistenza di δ

Sappiamo che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$,
facciamo finta $g_y(x_0, y_0) > 0$

Allora $g_y(x, y) > 0$ in un rettangolo
centrato in (x_0, y_0) per continuità



Poiché $g_y(x_0, y) > 0$ per forza $g(A) > 0$ e $g(B) < 0$
Per continuità esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\begin{aligned} g(x, y_0 - \epsilon) &< 0 & \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ g(x, y_0 + \epsilon) &> 0 \end{aligned}$$

Su ogni segmento verticale di estremi $(x, y_0 + \epsilon)$, $(x, y_0 - \epsilon)$
con $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ per forza g si annulla almeno una
volta, anzi esattamente una volta (passa da valori + a valori -
ed è strettamente monotona)

— 0 — 0 —

Variante in 3 variabili con disc. analoga

Se $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora posso scrivere
l'insieme $g(x, y, z) = 0$ come $z = \delta(x, y)$ in un
parallelepipedo centrato in (x_0, y_0, z_0)

Back to moltiplicatori ← singolare

Setting: max/min di $f(x, y)$ sull'insieme $g(x, y) = 0$

Supponiamo che $\rightarrow$ tutto C^1

$\rightarrow g_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\rightarrow (x_0, y_0)$ p.to di max/min locale

Localmente γ è il grafico di
una funzione $y = \gamma(x)$
Pongo

$$\varphi(t) = f(t, \gamma(t))$$

Poiché $t = x_0$ è un p.to di max per φ ,
dovrà essere $\varphi'(x_0) = 0$.

$$\varphi'(t) = f_x(t, \gamma(t)) \cdot 1 + f_y(t, \gamma(t)) \gamma'(t)$$

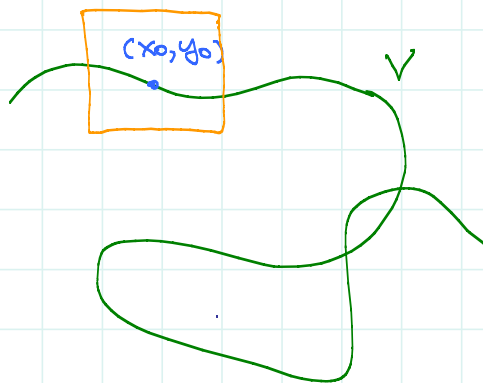
$$0 = f_x(x_0, \gamma(x_0)) + f_y(x_0, \gamma(x_0)) \gamma'(x_0)$$

$\uparrow$
 $-\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

$$= f_x(x_0, y_0) - \underbrace{\frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}}_{\lambda} g_x(x_0, y_0) \leadsto f_x = \lambda g_x$$

Resta da dimostrare che $f_y = \lambda g_y$ con LO STESSO λ , ma
questo è sostanzialmente la def. di λ !!

— o — o —



ANALISI 2

—

LEZIONE 11

Note Title

04/10/2022

Moltiplicatori di Lagrange (plurale)

Setting: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $k < n$. Consideriamo

$$V = \{x \in D : g(x) = 0\}$$

$\uparrow$ k equazioni
 $\nwarrow$ CODIMENSIONE

(moralmente V ha dim. $n-k$)

Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in V$ un p.to di max/min per f ristretta a V , cioè

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad (\text{min. loc.})$$

$$\leq \quad (\text{max. loc.})$$

Allora succede almeno una delle seguenti 2 opzioni

- (1) $Jg(x_0)$ ha rango $\leq k-1$ (il max rango possibile sarebbe k)
- (2) Esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 righe della matrice $Jg(x_0)$

(cioè $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare dei gradienti delle k equazioni di V) (i λ_i sono i moltiplicatori di Lagrange)

Operativamente: se devo trovare max/min di f ristretta a V , allora i candidati si trovano tra le soluz. di due sistemi

$$1) \quad g(x) = 0 \quad \text{rango}(Jg(x)) \leq k-1 \quad (\text{si annullano tutti i MINORI } k \times k \text{ della matrice})$$

$$2) \quad \underbrace{g(x) = 0}_{k \text{ equ.}} \quad \underbrace{\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_k \nabla g_k}_{n \text{ equ.}}$$

$n+k$ incognite:
 $x \approx n$ comp.
 k moltiplicatori

Esempio 1 $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 2y^2 + z^2 = 4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x - y + 2z = 0}_{\text{piano}} \}$
 $f(x, y, z) = x + y$

Moralmente: V è l'intersezione tra ellissoide e piano
 $\leadsto$ quindi è una curva

Oss. preliminari: f è continua e V è compatto (è limitato perché lo è l'ellissoide, ed è chiuso perché è definito da uguaglianze)

$$g_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4$$

$$g_2(x, y, z) = x - y + 2z$$

1° sistema $(Jg)(x) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla g_1 \\ \leftarrow \nabla g_2 \end{matrix}$

Rango $\leq 1 \leadsto$ si annullano i 3 determinanti 2×2

$$\begin{cases} -2x - 4y = 0 & \leadsto x = -2y \\ 8y + 2z = 0 & \leadsto z = -4y \\ 4x - 2z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\begin{matrix} \downarrow 3^a \\ \leadsto -8y + 8y = 0 \text{ (}\odot\text{)} \\ \uparrow 5^a \\ -2y - y - 8y = 0 \leadsto y = 0 \end{matrix}$

$\downarrow$
 $x = z = 0$
 $\downarrow$
 incompatibile con la 4^a

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ 1 = 4\lambda y - \mu \\ 0 = 2\lambda z + 2\mu \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema devono uscire almeno 2 soluzioni

$$3^a \text{ equ. } \leadsto \mu = -\lambda z \leadsto 1 = 2\lambda x - \lambda z$$

$$1 = 4\lambda y + \lambda z$$

$$\text{Sommando: } 2 = 2\lambda x + 4\lambda y \quad 1 = \lambda x + 2\lambda y$$

$$\text{Sottraggo: } 0 = 4\lambda y - 2\lambda x + 2\lambda z \\ = 2\lambda(2y - x + z) \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda = 0 \leadsto \text{NO BUONO} \\ \searrow 2y - x + z = 0 \end{array}$$

$$\text{C'è rimasto } \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}$$

$$\text{Dalle prime 2: } y = -3z, \quad x = 2y + z = -5z$$

$\leadsto$ sostituisco nella 3^a e finisco.

Trovo due p.ti (non mi serve trovare λ e μ , ma non sarebbe difficile farlo)

Sostituisco in $f(x, y, z)$ e scopro chi è max e chi è min.

Esempio 2 $f(x, y, z) = x^2 - y - z$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 5 + x + y \}$$

Come è fatto l'insieme

$z \geq x^2 + y^2 \leadsto$ dentro il paraboloide

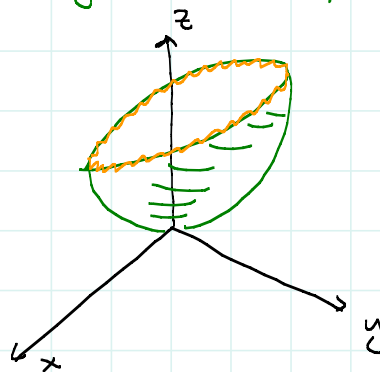
$z \leq 5 + x + y \leadsto$ sotto il piano

Preliminari: dal disegno è ovvio

Come dimostro che l'insieme è limitato? ...

Devo ottenere un bound su

x, y, z



$$p^2 \leq z \leq 5 + p(\cos\theta + \sin\theta) \leq 5 + 3\sqrt{2}p \leadsto p^2 \leq 5 + 3\sqrt{2}p \\ \leadsto \text{bound su } p$$

Singolari int. : $\emptyset$

Staz. " : $\emptyset$

Bordo

→ Studio sull'insieme $z = x^2 + y^2$ (1 solo moltiplicatore)

buttando via i candidati con $z \geq 5 + x + y$

→ Studio su $z = 5 + x + y$ (1 solo moltiplicatore)

buttando via i candidati con $z \leq x^2 + y^2$

→ studio il bordo del bordo con 2 moltiplicatori

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 12

Note Title

10/10/2022

LIMITI ALL'INFINITO IN PIU' VARIABILI

Setting: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ NON LIMITATO

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Vogliamo definire

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{array}{l} \nearrow l \in \mathbb{R} \\ \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \\ \searrow \text{N.E.} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Def. 4 Nessuno dei precedentiDef. 2 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

$\uparrow$
anche enorme

Def. 3 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

Def. 1 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \setminus B(0, R)$$

$\uparrow$
 $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

Defn Data una successione $\{x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ diciamo che x_m tende all'infinito se $\|x_m\| \rightarrow +\infty$ cioè

$\forall R > 0$ si ha che $\|x_m\| \geq R$ definitivamente
 $\uparrow$ da un certo m in poi

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2+y^2-3x+2y}_{f(x,y)} = +\infty$

Passiamo in coord. polari

$$\begin{aligned} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \rho^2 + \rho(-3 \cos \theta + 2 \sin \theta) \\ &\geq \underline{\rho^2 - 2\rho} \\ &\text{NON DIPENDE DA } \theta \\ &\text{e tende a } +\infty \text{ per } \rho \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Oss. Come dimostro che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$?
 $= -\infty$

Basta ottenere una stima del tipo

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq g(\rho) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = +\infty$$

Come dimostro che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$?

Cerco una stima del tipo

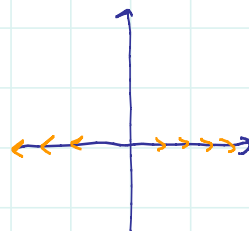
$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho) \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_2(\rho) = l$$

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x+2y$ $\rightarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$
 $\rightarrow$ sul solo 1° quadrante $x \geq 0, y \geq 0$

Su tutto $\mathbb{R}^2$ non esiste: basta osservare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, 0) = -\infty$$



Sul solo primo quadrante invece

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+2y) = +\infty$$

(Moralmente: una delle 2 variabili deve andare a $+\infty$)

Più rigorosamente

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho (\cos \theta + 2 \sin \theta) \geq m \rho \rightsquigarrow +\infty$$

dove $m = \min \{ \cos \theta + 2 \sin \theta : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \} > 0$ perché

→ il minimo esiste

→ quindi è il valore per un certo θ_0

→ $\cos \theta$ e $\sin \theta$ sono ≥ 0 e non contemporaneamente nulli.

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} xy$

→ sul primo quadrante $x > 0, y > 0$

→ su $x \geq 1, y \geq 1$

Il primo non esiste perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Il secondo esiste e fa $+\infty$. Proviamo

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{> 0} \rightsquigarrow +\infty$$

NO, perché NON esiste una limit. dal basso indipend. da θ

Claim: nella zona $x \geq 1, y \geq 1$ vale la stima

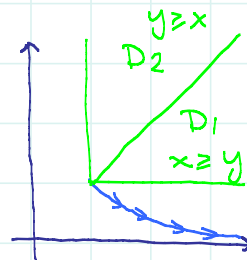
$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y)$$

questo tiene a + ∞ su tutto $x \geq 0, y \geq 0$
(qui posso usare le polari)

Come dimostro la stima?

• in D_1 si ha $xy \geq \underset{y \geq 1}{x} \geq \underset{x \geq y}{\frac{1}{2}}(x+y)$

• in D_2 si ha $xy \geq y \geq \frac{1}{2}(x+y)$

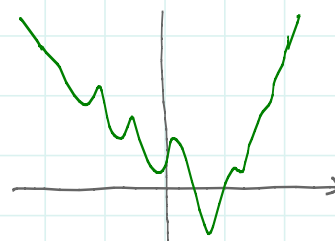


Teo Weierstrass generalizzato

Analisi 1 : sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



Allora esiste per forza $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Allora esiste $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Dim. Sia M tale che $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < M\}$ sia diverso dal vuoto
(basta prendere $M = f(0)$)

Per definizione di limite

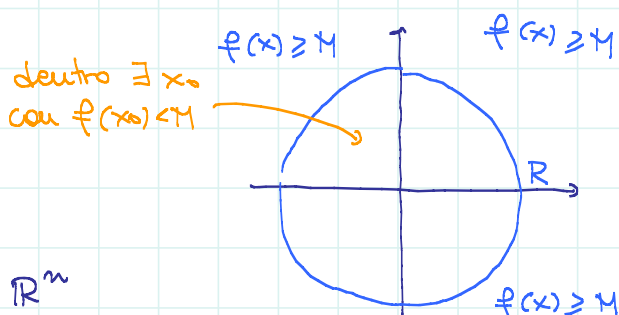
$\exists R > 0$ t.c. $f(x) \geq M$ per ogni x con $\|x\| \geq R$

Ora considero

$$m := \min \{f(x) : \|x\| \leq R\}$$

(esiste per W. classico)

Claim: $f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$



- se $\|x\| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ perché m è il min. nella palla
- se $\|x\| \geq R$, allora

$$f(x) \geq M \geq m$$

perché M , specie se l'ho preso come $f(0)$, è un competitor nella definizione di m .

ANALISI 2

—

LEZIONE 13

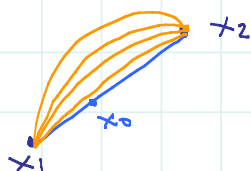
Note Title

10/10/2022

 Variante del teorema degli zeri

Analisi 1: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

Analisi 2 (versione basic) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua ed esistono x_1 e x_2 in $\mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x_0) = 0$

Dim.

Pongo $\varphi(t) := f(x_1 + t(x_2 - x_1))$
e osservo che $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$ e
 φ è continua

Oss. In realtà i p.ti x_0 sono infiniti, perché posso considerare infiniti cammini disgiunti che congiungono x_1 e x_2

Analisi 2 (new basic) Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

(i) esiste x_n con $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ e $f(x_n) \rightarrow -\infty$

(ii) esiste y_n con $\|y_n\| \rightarrow +\infty$ e $f(y_n) \rightarrow +\infty$

Allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \lambda\}$$

è NON LIMITATO.

Dim Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$ devo trovare punti $z_n \in \mathbb{R}^n$ tali che

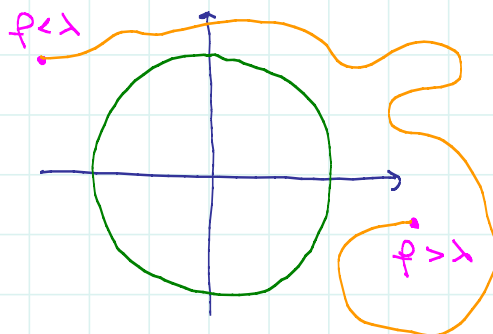
$$f(z_n) = \lambda$$

e

$$\|z_n\| \rightarrow +\infty$$

Fissato $R > 0$ considero $B(0, R)$

- Per l'ipotesi (i) esiste un pto fuori da $B(0, R)$ in cui $f < \lambda$
- Per l'ipotesi (ii) esiste un pto fuori da $B(0, R)$ in cui $f > \lambda$
- Considero un cammino che unisce i due pti restano fuori dalla palla
- In quel cammino esiste un punto z con $f(z) = \lambda$.

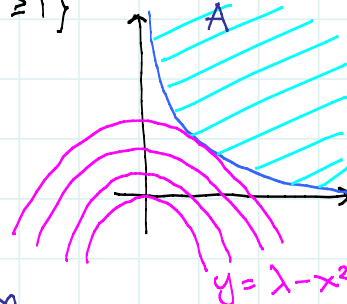


Esempio 1 $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^4 + y^3 + e^{xy} - \sin x}_{f(x, y)} = 2022 \}$
è non limitato

Basta osservare che $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0, t) = \pm\infty$

Esempio 2 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1 \}$
 $f(x, y) = x^2 + y$

inf / sup / max / min di f in A



A non è compatto.

sup = $+\infty$ ad esempio $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$
 $f(1, t)$ $f(t, 2022)$

Per inf e min conto su Weierstrass generalizzato. Spero che

$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in A}} f(x, y) = +\infty$ (su tutto $\mathbb{R}^2$ il limite non esiste $f(0, t)$ con $t \rightarrow \pm\infty$)

Infatti nell'insieme A , e anzi ovunque, vale la stima

$$x^2 + y \geq \underbrace{x + y - 1}_{\text{questo tende a } +\infty \text{ nel 1° quadrante}}$$

(ho usato che $x^2 + 1 \geq x$)

Da W. generalizzato so che min. esiste.

La ricerca dei candidati funziona come sempre

→ staz. e sing. interni: $\emptyset$

→ bordo $xy=1$ per cui uso moltiplicatori o param $y = \frac{1}{x}$

Esempio 3 $A = \text{primo quadrante } x \geq 0, y \geq 0$

$$f(x, y) = x^{20} + \arctan(xy)$$

$$B = \text{tutto } \mathbb{R}^2$$



Su A : $\sup = +\infty$ $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$

min = 0 perché $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$
e ci sono p.ti in cui $f(x, y) = 0$, cioè tutti e soli
quelli con $x = 0$

Domanda: in A esiste $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = ?$ No!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0$$

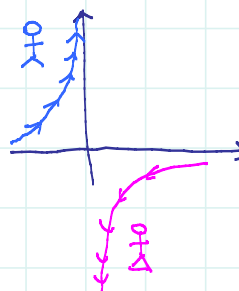
Su B : $\sup = +\infty$ (lo era già solo su un pezzo)

$\inf = -\frac{\pi}{2}$ e MIN non esiste. Come lo dimostro?

Devo dire 2 cose

• $f(x, y) > -\frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Questo è ovvio

• Devo trovare un cammino su cui $f(x, y) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$



$$f\left(1 - \frac{1}{t}, t\right) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{20} + \arctan(t-1)$$

quando $t \rightarrow +\infty$ tende a $1 + \frac{\pi}{2}$ ☹

$$\text{☹ } f\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \frac{1}{t^{20}} + \arctan(t) \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty$$

questo tende a $-\frac{\pi}{2}$ ☹

Cosa serve?

x piccolo

xy grande e negativo

t con $t \rightarrow 0^+$
 $-\frac{1}{t^2}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(t, -\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{0}{\infty}$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 14

Note Title

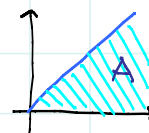
11/10/2022

Limiti all'infinito in 2 o 3 variabiliEsempio 1 $f(x, y) = x^4 - y^2$ Su tutto $\mathbb{R}^2$: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^4 = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (-t^2) = -\infty$$

su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

(idea: x va all'infinito per forza,
 y può andare all'infinito, ma meno di x)



$$x^4 - y^2 \geq x^4 - x^2 \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

$\uparrow$
 $y \leq x$

Se dimostro che

$$\lim_{\substack{x^4 + y^2 \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in A}} x^4 - x^2 = +\infty$$

ho finito

Domanda $\lim_{x^4 + y^2 \rightarrow +\infty} x^4 - x^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$? Non esiste

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0 \quad \text{mentre} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$$

Sull'insieme A vedo 1.5 soluzioni

Coord. polari:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= \rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2 \cos^2 \theta \geq \rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \rho^4 - \rho^2 \rightarrow +\infty \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty \\ &\quad \uparrow \cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ in } A \end{aligned}$$

Per il secondo metodo consideriamo sempre in A il limite di x

1° metodo : coord polari $\rho \cos \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \rho$

2° metodo : $x \geq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in A$
 e questo tende a $+\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$$4x^2 \stackrel{?}{\geq} x^2 + y^2 \rightsquigarrow 3x^2 \stackrel{?}{\geq} y^2$$

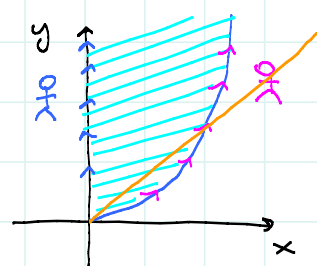
↑
vera perché $y \leq x$ in A

Consideriamo ora $B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x^\alpha\}$ $\alpha > 0$ reale

Domanda: per quali α esiste il limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ in questo insieme $f(x, y) = x^4 - y^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = -\infty \quad (\text{se esiste è } -\infty)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^{\frac{1}{\alpha}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 - t^{2\alpha}$$



Se $2\alpha < 4$, cioè $\alpha < 2$, allora il 2° viene $+\infty$, quindi in gen. N.E.
 " $2\alpha = 4$ $\alpha = 2$ " 0 "

Se $\alpha > 2$ POTREBBE ESISTERE

$$f(x, y) = x^4 - y^2 \leq y^{\frac{4}{\alpha}} - y^2 = \text{espressione del tipo } y^p - y^2 \text{ con } p < 2$$

Proviamo in coord. polari

$$y^p - y^2 = \rho^p \underbrace{\sin^p \theta}_{\leq 1} - \rho^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_{\geq \frac{1}{2}} \stackrel{?}{\leq} \rho^p - \frac{1}{2} \rho^2 \rightarrow -\infty$$

Servirebbe sapere che $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ in B_α . Questo non è vero sempre, ma lo è per p grande

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^6 + y^4 - x^2 y^3$

Se esiste, fa $+\infty$

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^6 \cos^6 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

- Se $\cos \theta \neq 0$ allora vince il termine con ρ^6
- Se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^4 \theta = 1$ e c'è solo ρ^4

Questo è fare il limite sulle rette!!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^2, t^3) = t^{12} + t^{12} - t^{13} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(2t, t^2) = 64t^6 + t^8 - 4t^8 \rightarrow -\infty \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 bis $f(x, y) = x^6 + y^4 - x^2 y^3$ Sul 1° quadrante

Cambio di variabili che "poneggia" gli esponenti

$$x = u^2 \quad y = v^3$$

Nelle nuove variabili diventa $u^{12} + v^{12} - u^4 v^{3\beta}$

Punto chiave: fare il limite della prima per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ è equivalente a fare il limite della seconda per $u^2 + v^2 \rightarrow +\infty$

"abbiamo $x^2 + y^2$ grande se e solo se $u^2 + v^2$ è grande"

In limite in (u, v) si può fare con le coord. polari

$$\begin{aligned} u^{12} + v^{12} - u^4 v^{3\beta} &= \rho^{12} (\cos^{12} \theta + \sin^{12} \theta) - \rho^{4+3\beta} \dots \\ &\geq m > 0 \leftarrow \text{SOLITO DISCORSO} \\ &\geq m \rho^{12} - \rho^{4+3\beta} \end{aligned}$$

Quindi se $4+3\beta < 12$, cioè $\beta < \frac{8}{3}$, allora $\lim = +\infty$

Se $4+3\beta \geq 12$, cioè $\beta \geq \frac{8}{3}$, allora il limite non esiste e lo verifico con l'unico che pareggia gli esponenti

$$f(t^2, t^3) = t^{12} + t^{12} - t^4 \cdot t^{3\beta}$$

Se $\beta > \frac{8}{3}$, allora va a $-\infty$, se $\beta = \frac{8}{3}$, allora diventano importanti e potrebbe essere che fa comunque $+\infty$

Allenamento + semplice

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + cxy$$

Se esiste, il limite è $+\infty$. Provo in coord. polari:

$$\rho^2 + c\rho^2 \cos\theta \sin\theta = \rho^2 (1 + c \cos\theta \sin\theta)$$

Qui dipende da c : $\rightarrow$ se è "piccolo" allora viene $+\infty$
 $\rightarrow$ se è "grande" allora ci sono direzioni in cui viene $-\infty$.

Mettiamo c negativo. Può essere $1 + c \cos\theta \sin\theta \stackrel{?}{\leq} 0$
 $\cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ assume valori tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

Quindi $1 + c \cos\theta \sin\theta \geq 1 + \frac{c}{2} > 0$ se $c > -2$
 se $c \leq -2$, allora il coeff. può essere nullo o neg.

Conclusione: il limite esiste e fa $+\infty$ se e solo se $|c| < 2$
 — 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 15

Note Title

14/10/2022

Forme quadratiche

- in 2 variabili $q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$
- in 3 variabili $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$
- analogamente in n variabili

Forme vs matrici simmetriche: in generale

$$q(x) = x^t A x$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 vettore $\uparrow$ matrice $d \times d$
 d -dimens. $\uparrow$ simmetrica

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = (x,y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
- semidef. positiva se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
- idem con (semi)def. neg.
- indefinita se $\exists x \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } q(x) > 0$
 $\exists y \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } q(y) < 0$

Segnatura di $q(x)$: sono 3 numeri m_0, m_+, m_- tali che

$$m_0 + m_+ + m_- = d$$

- m_+ = max dim. di sottospazio su cui q è def. pos. (# autov. > 0)
- m_- = " " " " " " " " neg. (# autov. < 0)
- m_0 = ciò che rimane = dim. ker A (# autov. $= 0$)

In questo senso si parla di matrici $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$

$\uparrow$
simmetriche

Come calcolare la segnatura?

- ① segno autovalori
- ② Sylvester (minori orlati)
- ③ Completamento quadratico
- ④ Cartesio (dal segno dei coeff. del pol. caratteristico)

Esempio $x^2 + 2y^2 + 8xy$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -14 \leadsto \text{autov} \quad - \quad + \leadsto \text{indefinita}$$

(Questo da solo dice che esistono direzioni in cui il limite all'infinito fa $\pm \infty$)

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 8xy &= x^2 + 8xy + 2y^2 = x^2 + 8xy + 16y^2 - 16y^2 + 2y^2 \\ &= (x + 4y)^2 - 14y^2 \\ &= (x + 4y)^2 - (\sqrt{14}y)^2 \end{aligned}$$

In generale: scrivo $q(x)$ come somma/differenza di $\square$ di roba lin. indip. Allora

$m_+ = \# \text{ quadrati con il } +$

$m_- = \# \text{ quadrati con il } -$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = -14$$

d'ufficio intesa

$$\begin{array}{cc} + & + & - \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\ p & v & \end{array}$$

$$\# p = m_+$$

$$\# v = m_-$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -14 - 14 - 4 + 49 > 0$$

$$+++ \quad \boxed{+ \quad - \quad -}$$

$q(0,0,1) = 0$ e quindi non può essere def. pos.

$\text{Det}_{2 \times 2} < 0 \leadsto$ da qualche parte c'è negatività

Def. Una forma quadratica si dice COERCIVA se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } q(x) \geq c \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

informazione quantitativa sull'essere def. pos.

(c'è l'analogo negativo)

Teorema Una forma quadratica $q(x)$ è def. pos. se e solo se è coerciva.

Inoltre c è il minimo degli autovalori.

Dim. di Analisi 2 Osserviamo che una forma quadratica è 2-omogenea, cioè

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

Quindi basta conoscere i valori di $q(x)$ quando $\|x\| = 1$.

Ora $q(x)$ è continua e la sfera $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ è un compatto. Dunque $q(x)$ assume il minimo sulla sfera (Weierstrass) e il min. è il valore in un certo x_0 , dunque è un certo $c > 0$.

Conclusione: posto

$$c := \min \{ q(x) : \|x\| = 1 \}$$

vale che $c > 0$ è

$$q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fatto} \\ \text{lineare}}}{q(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|})} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-omog}}}{\|x\|^2} \underbrace{q\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\substack{\geq c \text{ per} \\ \text{def. di } c}} \geq c \|x\|^2$$

Oss. Allo stesso modo posso dim. che

$$q(x) \leq M \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$\uparrow$ max di $q(x)$ per $\|x\| = 1$

Dim. di Algebra Lineare Scrivo $q(x) = x^t A x$

A è simmetrica, quindi diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè
esiste M matrice $d \times d$ invertibile tale che

$$M A M^{-1} = D \quad M^{-1} = M^t$$

$\uparrow$ diagonale

quindi $M A M^t = D$, da cui $A = M^t D M$
Ma allora

$$\begin{aligned} q(x) &= x^t M^t D M x \\ &= (Mx)^t D (Mx) \end{aligned}$$

Ora $Mx = y = (y_1, \dots, y_d)$. Allora

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_d y_d^2$$

$\uparrow$
 D è
diagonale

$$\begin{aligned} &\geq \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_d \} (y_1^2 + \dots + y_d^2) \\ &= \min \{ \lambda_1, \dots, \lambda_d \} \|y\|^2 \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che $\|y\|^2 = \|Mx\|^2 = \|x\|^2$, in quanto

$$\|Mx\|^2 = \langle Mx, Mx \rangle = (Mx)^t Mx = x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2$$

Oss. Se calcolo i candidati p.ti di max/min per $q(x)$ sulla sfera trovo che sono esattamente gli autovettori normalizzati e il moltiplicatore di Lagrange è l'autovalore corrispondente.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 16

Note Title

14/10/2022

DERIVATE SECONDE

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to stazionario, cioè $f'(x_0) = 0$

Allora

- x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
- x_0 p.to di max. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.
- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ BOH (può essere max/min loc., flesso)

[Pensare come esempi a $x^4, -x^4, x^5$]

Def. Data $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce matrice HESSIANA la matrice che ha come elementi le derivate seconde di f in x

$$Hf(x) = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right\}$$

Per il teorema di inversione dell'ordine di derivazione, si tratta di una matrice simmetrica.

Teorema (Analisi 2) Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un p.to stazionario, cioè $\nabla f(x_0) = 0$.

Allora

- x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$ (semidef. pos.)
- $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.
- $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ né p.to di max, né p.to di min, stile MOUNTAIN PASS
- $Hf(x_0) \leq 0 \Rightarrow$ BOH

Esercizio Hand - Hand

Analisi 1: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ ha 2 p.ti di min. relativo, allora per forza ha un altro p.to stat.

Analisi 2: vale ancora? (2 min. $\Rightarrow$ altro stat., non nec. max)

Esempio 1 $f(x,y) = x \sin y$

Cosa succede nell'origine?

$$f_x = \sin y$$

$$f_y = x \cos y$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $< 0 \Rightarrow$ autovalori $+$ $-$

$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella (mountain pass)

Esempio 2 $f(x,y) = \cos y + \cos x$

È ovvio che $(0,0)$ è un p.to di max locale perché

$$f(0,0) = 2 \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f(x,y) = (-\sin x, -\sin y)$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \text{autov. : } - -$$

Oss. La traccia della matrice Hessiana è il Laplaciano

Esempio 3 $x^4 + y^2 - xy$

Trovare i p.ti stazionari e capire cosa sono

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - y, 2y - x)$$

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y - x = 0 &\leadsto x = 2y \leadsto 32y^3 - y = 0 \leadsto y = 0 \\ &\leadsto y = \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi 3 p.ti stazionari.

[Potevamo sapere che i p.ti stat. erano almeno 3 senza fare conti?]

Calcolo

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} x^4 + y^2 - xy \quad (\text{se esiste} = +\infty)$$

Paraggio gli esponenti (posso assumere di essere nel 1° quadrante)

$$x = u \quad y = v^2$$

Mi ritrovo

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow \infty} u^4 + v^4 - uv^2 = +\infty$$

$$\dots \text{ in polari } \dots \quad p^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq m > 0}) - p^3 \cos \theta \sin^2 \theta \geq m p^4 - 37 p^3$$

(solito discorso)

Per W generalizzato esiste il minimo, ed è un numero negativo

$$f(2t, t) = 16t^4 + t^2 - 2t^2 = 16t^4 - t^2$$



$\leadsto f$ assume valori negativi $\leadsto \min < 0 \leadsto$ il minimo non è sugli assi, quindi è in un certo (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$.
Ma allora $(-x_0, -y_0)$ è un altro p.to di min.

Infine l'origine è banalmente stat. $\leadsto$ almeno 3 stat.]

Per classificare i 3 p.ti staz. posso fare la matrice Hessiana, ma so già che

→ i 2 p.ti "strani" sono p.ti di min.

→ l'origine è una sella perché

$f(2t, t)$ vede un max

$f(t, 0)$ vede un min



In ogni intorno di $(0,0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$.

Classificazione di $(0,0)$ come p.to staz

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

MIN. LOC. (e anche glob.)

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

SELLA ($f(t, 0)$, $f(0, t)$)

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

MIN. loc. e glob. ma non stretto

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

SELLA $f(0, t) = t^3$

$$f(x, y) = (x+y)^3$$

SELLA $f(0, t) = t^3$

In tutti gli esempi $Hf(0,0)$ ha almeno un autovalore nullo

$x^2 + 2xy + y^2$ ha ∞ p.ti staz. di min.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 17

Note Title

17/10/2022

Sviluppi di TAYLOR in più variabili

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $n \geq 1$ un intero.

Allora sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

dove il resto $r_n(x)$ verifica

$$r_n(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0 \right] \quad (\text{resto di PEANO})$$

oppure

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(cx) x^{n+1} \quad \text{per un opportuno } c \in (0,1)$$

(resto di LAGRANGE)

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla formula

$$P_n(x) := \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i$$

↑
derivata i-esima

ed è caratterizzato dall'essere l'unico polinomio di grado $\leq n$ la cui derivate coincidono con quelle di $f(x)$ in $x=0$ fino all'ordine n .

La formula con centro in $x_0 \in \mathbb{R}$ qualunque è analoga

$$f(x_0 + R) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) R^i + o(R^n) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + cR) R^{n+1}$$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $n \geq 1$ intero.

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che
 $\uparrow$
variabili

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

dove $r_n(x) = o(|x|^n)$ $o(p^n)$ (resto di PEANO)

cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{|x|^n} = 0$$

limite in più variabili

Il pol. $P_n(x)$ è l'unico pol. di grado $\leq n$ le cui derivate parziali in $x=0$ coincidono con quelle di $f(x)$ fino all'ordine n .

Tale pol. è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha$$

per di usare il linguaggio dei MULTI-INDICI

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con α_i interi ≥ 0

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{a_1} x_1 \dots \partial^{a_d} x_d}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

Volendo, il resto alla Lagrange si scrive come

$$r_n(x) := \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(cx) x^\alpha$$

Taylor in 2 variabili

$$f(x, y) = f(0, 0)$$

← ordine 0

$$+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

← ordine 1

$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0)y^2$$

← ordine 2

$$\uparrow$$

$$\alpha = (2, 0)$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (1, 1)$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (0, 2)$$

$$+ \frac{1}{6} f_{xxx}(\dots)x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(\dots)x^2y + \frac{1}{2} f_{xyy}(\dots)xy^2 + \frac{1}{6} f_{yyy}(\dots)y^3$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (3, 0)$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (2, 1)$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (1, 2)$$

$$\uparrow$$

$$\alpha = (0, 3)$$

+ ...

Riscrivo il termine di ordine 2:

$$\frac{1}{2!} (f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2)$$

Riscrivo il termine di ordine 3:

$$\frac{1}{3!} \{ f_{xxx} x^3 + 3f_{xxy} x^2y + 3f_{xyy} xy^2 + f_{yyy} y^3 \}$$

Oss. Formalmente è come fare le potenze del binomio, quindi all'ordine n troverai

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n f_{\underbrace{x \dots x}_i \underbrace{y \dots y}_{n-i}} x^i y^{n-i} \binom{n}{i}$$

Basta osservare che

$$\frac{1}{n!} \binom{n}{i} = \frac{1}{i! (n-i)!} = \frac{1}{\underbrace{(i, n-i)!}_{\text{multiplifica}}}$$

In d variabili funziona allo stesso modo

$$(x_1 + \dots + x_d)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$$

Oss. Siano α e β due multi-indici a d componenti

$$D^\beta x^\alpha \text{ calcolata in } 0 \text{ fa } \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \text{se } \beta = \alpha \end{cases}$$

Come si calcolano i polinomi di Taylor Come ad analisi 1, a partire da quelli delle funzioni elementari

Esempio 1 $f(x, y) = \sin(xy) e^{x+y}$ $n=4$ in $(0,0)$

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$$

$$\sin(xy) = xy + o((x^2+y^2)^2)$$

$$+ o((x^2+y^2)^{5/2})$$

$$o(p^5)$$

← il termine successivo sarebbe di ordine 6, e cioè x^3y^3

$$e^{x+y} = 1 + x+y + \frac{1}{2} (x^2+2xy+y^2) + o(p_2^2)$$

$$\sin(xy) \cdot e^{x+y} = xy + x^2y + xy^2 + \frac{1}{2} x^3y + x^2y^2 + \frac{1}{2} xy^3 + o((x^2+y^2)^2)$$

Domanda: quanto fa $f_{xxx}(0,0)$?

Fa 0, perché il coeff. di x^3 è $\frac{1}{6} f_{xxx}(0,0)$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 18

Note Title

17/10/2022

Taylor e studio locale

I termini fino all'ordine 2 in Taylor si possono scrivere come

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^t \underbrace{Hf(0)}_{\substack{\text{forma quadratica} \\ \text{associata a } Hf(0)}} x + o(\|x\|^2)$$

Dim che $Hf(0) > 0 \Rightarrow 0$ è p.to di min. locale (se è stazionario)

Da Taylor otteniamo

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + r_2(x)$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} = 0 \quad (\text{non c'è grado 1 perché } \nabla f(0) = 0)$$

Ora sappiamo che $Hf(0)$ è coerciva, cioè

$$\exists m > 0 \quad \text{t.c.} \quad x^t Hf(0) x \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

da cui

$$f(x) - f(0) \geq \frac{m}{2} \|x\|^2 + r_2(x) = \left\{ \frac{m}{2} + \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} \right\} \|x\|^2$$

Per definizione di limite sappiamo che

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{r_2(x)}{\|x\|^2} \geq -\frac{m}{4} \quad \forall x \text{ con } \|x\| \leq \varepsilon$$

Ma allora per ogni x con $\|x\| \leq r$ vale la stima

$$f(x) - f(0) \geq \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right\} \|x\|^2 = \frac{m}{4} \|x\|^2$$

e quindi è positivo.

— o —

Oss. Allo stesso modo si dimostra che $Hf(0) < 0 + \nabla f(0) = 0$ implica 0 p.to di max relativo. (basta invertire opportune disuguaglianze)

Dim. che $Hf(0)$ indef. $\Rightarrow$ 0 non è p.to di max/min loc ($\nabla f(0) = 0$)

Come prima

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + r_2(x)$$

Perché $Hf(0)$ è indefinita, per forza esistono $v \in \mathbb{R}^d$ e $w \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$v^t Hf(0) v > 0$$

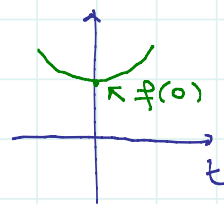
$$w^t Hf(0) w < 0$$

Considero $f(tv)$ e $f(tw)$ (2 curve in direzione v e w)

$$f(tv) = f(0) + \frac{1}{2} \underbrace{v^t Hf(0) v}_{> 0} \cdot t^2 + r_2(tv)$$

$o(t^2)$

$\leadsto$ questo minimo vede un min. locale



Analogamente $f(tw)$ vede un max locale.

— o —

Oss. Allo stesso modo si dimostrano enunciati del tipo

$Hf(0)$ ha almeno un autovettore positivo + $\nabla f(0) = 0$

$\Rightarrow$ 0 non è p.to di max loc. (e' minimo in quella direzione vede un minimo).

Idea della dim. di Taylor in 2 variabili (almeno con resto di Lagrange)

Fissiamo $(x, y) \neq (0, 0)$. Consideriamo la funzione

$$\varphi(t) := f(\underline{tx, ty}) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

stiamo percorrendo il segmento
da $(0, 0)$ a (x, y)

Allora

$$f(x, y) = \varphi(1)$$

$$= \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} \varphi''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \varphi'''(0) \cdot 1^3 + \dots$$

↑
Formula di Taylor di
Analisi 1 applicata a
 $\varphi(t)$ con poi $t=1$

$$+ \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0) \cdot 1^n + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\xi) \cdot 1^n$$

↑
 $\xi \in (0, 1)$

Calcoliamo le derivate successive di $\varphi(t) = f(tx, ty)$

$$\varphi(0) = f(0, 0)$$

$$\varphi'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{f_x(tx, ty) x + f_y(tx, ty) y}$$

↑
deriv. di tx
risp. ad x

$$\varphi'(0) = f_x(0, 0) x + f_y(0, 0) y \quad \rightsquigarrow \text{termine di ordine 1}$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(tx, ty) x^2 + f_{xy}(tx, ty) xy + f_{yx}(tx, ty) xy + f_{yy}(tx, ty) y^2$$

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0, 0) x^2 + 2 f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0, 0) y^2$$

$\rightsquigarrow$ termine di ordine 2

Andando avanti allo stesso modo si potrebbe dimostrare per induzione che gli altri termini vengono come previsto.

— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = \arctan(x+y^3) - \sin(x+y^2)$

Taylor di ordine 4 sempre in $(0,0)$

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 \Rightarrow \sin(x+y^2) = x+y^2 - \frac{1}{6} (x+y^2)^3 + o(\rho^4)$$

$$= x+y^2 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4)$$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3} t^3 + o(t^4) \Rightarrow \arctan(x+y^3) = x+y^3 - \frac{1}{3} (x+y^3)^3$$

$$= x+y^3 - \frac{1}{3} x^3 + o(\rho^4)$$

Conclusione

$$f(x, y) = \cancel{x+y^3} - \frac{1}{3} x^3 - \cancel{y^2} + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4)$$

$$= \boxed{-y^2 - \frac{1}{6} x^3 + y^3 + \frac{1}{2} x^2 y^2 + o(\rho^4)}$$

Calcolare $f_{xxy}(0,0)$, $f_{xxx}(0,0)$, $f_{xyy}(0,0)$

non ci sono i corrispondenti termini nel Taylor

Il coeff. di $x^2 y^2$ nel Taylor è

$$\frac{1}{(2,2)!} \cdot f_{xxyy}(0,0) = \frac{1}{2} \quad \leadsto f_{xxyy}(0,0) = 2$$

Dimostrare che $(0,0)$ è stazionario e classificarlo

Non ci sono x e y nel Taylor

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidef. neg. con } -2 \text{ autovalore}$$

$$\Rightarrow (0,0) \text{ non è min rel.}$$

$$\text{Ma } f(t,0) = \underbrace{-\frac{1}{6} t^3}_{\text{cambia segno vicino a } 0} + o(t^4) \leadsto \text{SELLA}$$

ANALISI 2

—

LEZIONE 19

Note Title

18/10/2022

Esempio 1 $f(x, y) = x \sin y - y \sin x$

Dimostrare che origine p.to stat. e capire di cosa si tratta

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^4) \right) - y \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right) \\
 &= \cancel{xy} - \frac{1}{6} xy^3 - \cancel{yx} + \frac{1}{6} x^3 y + o(p^5) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad o((x^2 + y^2)^{3/2})
 \end{aligned}$$

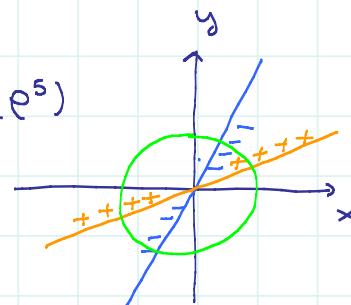
 $(0, 0)$ è stat. ("non ci sono" x e y)

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{BOH}$$

Dal Taylor

$$f(x, y) = \frac{1}{6} xy(x^2 - y^2) + o(p^5)$$

Questo suggerisce di usare



$$f(t, 2t) = \frac{1}{3} t^2 (t^2 - 4t^2) + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \quad \text{MAX LOC}$$

$$f(2t, t) = \frac{1}{3} t^2 (4t^2 - t^2) + o(t^5) = t^4 + o(t^5) \quad \text{MIN LOC.}$$

In ogni intorno di $(0, 0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0 \Rightarrow (0, 0)$ è un punto di sella.

Verifichiamo che $\sup \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$
 $\inf \{ \quad \quad \quad \} = -\infty$

$$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = x - \frac{\pi}{2} \sin x \quad \text{Basta mandare } x \rightarrow \pm \infty$$

Esempio 2 $f(x, y) = x^6 + y^2 + x^3 y$

Classificazione di $(0, 0)$, che è stazionaria

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 0) \text{ non è un max}$$

(se lo fosse, dovrebbe essere $Hf(0, 0) \leq 0$)

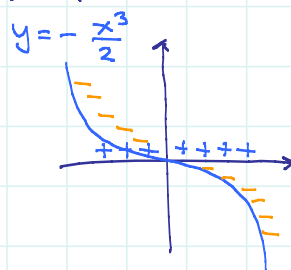
Completando i quadrati:

$$x^6 + x^3 y + \frac{1}{4} y^2 + \frac{3}{4} y^2 = \left(x^3 + \frac{1}{2} y\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 \geq 0$$

e vale $\Leftrightarrow$ se e solo se $(x, y) = (0, 0) \leadsto \text{MIN. LOC.}$

Esempio 3 $f(x, y) = x^6 + y^2 + 4x^3 y$

$$f(x, y) = x^6 + 4x^3 y + 4y^2 - 3y^2 = \underbrace{(x^3 + 2y)^2 - 3y^2}_{\text{non ha un segno}}$$



$$f(t, 0) = t^6 \leadsto \text{MIN. LOC. in origine}$$

$$f\left(t, -\frac{t^3}{2}\right) = -\frac{3}{4} t^6 \leadsto \text{MAX. LOCALE in } (0, 0)$$

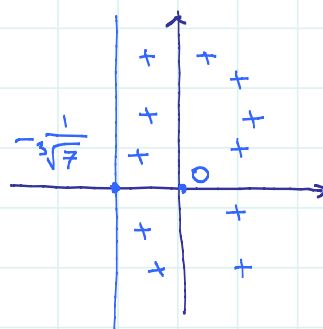
$\leadsto (0, 0)$ è p.to di sella

Esempio 4 $f(x, y) = x^6 + y^2 + 7x^3 y^2$

In questo caso posso raccogliere y^2

$$f(x, y) = x^6 + y^2 \underbrace{(1 + 7x^3)}_{\geq 0 \text{ ovunque}}$$

$\uparrow$
 ≥ 0 ovunque
 ≥ 0 (o anche di $\frac{1}{2}$ in un intorno di $x=0$)
 $x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$



$\leadsto (0, 0)$ è un p.to di min. loc.

Sup / inf su $\mathbb{R}^2$ Sup = $+\infty$ $f(t,t)$ con $t \rightarrow +\infty$ $f(t,0)$ opp. $f(0,t)$ Inf = $-\infty$ "Paraggio gli esponenti"

$$f(t,t^3) = 2t^6 + 7t^3 \quad \text{mandando } t \rightarrow -\infty$$

Esempio 5 $f(x,y) = |\sin x| + y^2$ $(0,0)$ è un p.to di min. locale $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) \geq 0$ sempre

Sup = $+\infty$ Inf = min = 0 e ci sono infiniti p.ti di minimo, cioè tutti quelli del tipo $(k\pi, 0)$ con k intero.

Esempio 6 Consideriamo l'insieme

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 27\}$$

È un insieme compatto?

Chiuso lo è (naturalmente c'è il $\leq \dots$). È limitato?Oss. generale Sia $q(x)$ una forma quadratica in $\mathbb{R}^d$ Supponiamo che $q(x)$ sia def. positiva.

Allora

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^d : q(x) \leq \text{cost}\} \text{ è}$$

Limitato qualunque sia la cost.

Infatti def. pos. $\Rightarrow$ coerciva, quindi

$$q(x) \geq m \|x\|^2$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Questo ci dice che fuori da una palla abbastanza grande
avremo $q(x) \geq \text{cost} + 1$ e quindi $x \notin$ insieme

In alternativa $m \|x\|^2 \leq q(x) \leq \text{cost} \leadsto \|x\|^2 \leq \frac{\text{cost}}{m}$

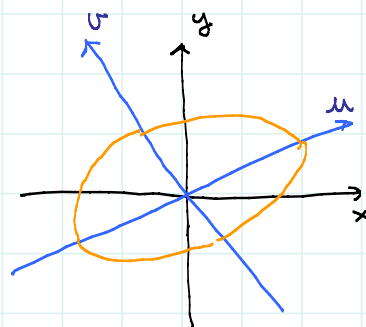
Nell'esempio basta dire che $x^2 + y^2 + xy$ è def. pos.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1 - \frac{1}{4} > 0$$

$$\text{Tr} = 2$$

Autov: ++



L'insieme negli "assi storti"
diventa

$$a u^2 + b v^2 \leq 27$$

Gli assi storti corrispondono agli autovettori

a e b sono

gli autovalori

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 20

Note Title

21/10/2022

CALCOLO INTEGRALE IN DUE VARIABILI

INTEGRALE DI RIEMANN

- Notazioni
- Significato geometrico
- Idea definizione
- Tecniche di calcolo

NOTAZIONI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

integrale DOPPIO
 integrale rispetto alle due variabili
 funzione che si integra
 INTEGRANDA
 zona di integrazione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Integrali PROPRI . Due ingredienti fondamentali

- A è un insieme LIMITATO
- f è una funzione LIMITATA, cioè

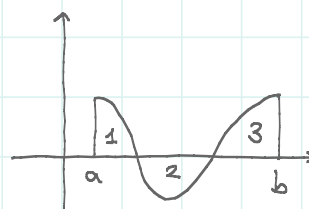
$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$$

(cioè il grafico sta tra il piano $z = -M$ ed il piano $z = M$)

Integrali IMPROPRI : se manca uno o entrambi gli ingredienti fondamentali

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Analisi 1 : $\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO della}$
 parte di piano tra
 asse x e grafico di $f(x)$



$$= \text{Area 1} + \text{Area 3} - \text{Area 2}$$

Analisi 2 : $\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume con segno della parte dello spazio $\mathbb{R}^3$ compresa tra il grafico di $f(x,y)$ ed il piano base x,y .

IDEA DELLA DEFINIZIONE (alla DARBOUX)

Per convenzione integriamo funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^2$ ma nulle al di fuori di un insieme A limitato.

Ci sono 3 casi :

- caso banale,
- caso semi-banale,
- caso generale.

Caso banale

$$A = [a,b] \times [c,d]$$

= rettangolo con lati // agli assi

$$f(x,y) = \lambda \text{ costante in } A \text{ (e 0 fuori di } A)$$

Per definizione

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lambda \cdot \underbrace{(b-a) \cdot (d-c)}_{\text{area della base}}$$

↑
altezza con segno

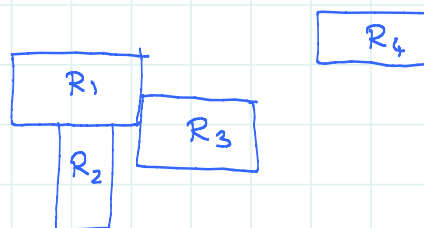
= volume con segno di un parallelepipedo

Caso semi-banale

$A =$ unione finita di rettangoli come sopra senza pti interni in comune

$f(x,y)$ è costante in ogni rettangolo, eventualmente con costanti diverse

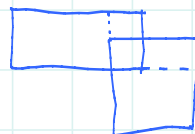
(non sottilizziamo sui bordi comuni)



Geometricamente possiamo pensare il sotto grafico come un "sistema di grattacieli"

Ufficialmente si chiamano STEP FUNCTIONS e sono combinazioni di casi banali

(non ci sono problemi anche se i rettangoli si intersecano, per di suddividerne ulteriormente)



$$\iint_A f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$$

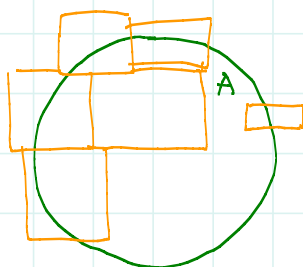
Caso generale Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un insieme A limitato.

Definiamo

$$\overset{\substack{\uparrow \\ \text{integrale} \\ \text{superiore}}}{I^+}(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$I^-(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Oss. geometrica L'insieme di defn. delle step funct. sopra e sotto è in generale diverso dall'insieme A



Oss Le ipotesi dell'integrale proprio garantiscono che esistono step function sopra e sotto!

Prop. Per ogni f con le due proprietà vale che

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

Def. Se per caso accade che $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile secondo Riemann e il valore comune è proprio

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \iint_A f(x,y) dx dy$$

↑
se $f \equiv 0$ fuori di A

Teorema misterioso Se A è decente e f pure, allora tutto ok ☺

il bordo si può ricoprire
con rett. di area piccola ↑ ad esempio
continua

Esempio cattivo (DIRICHLET di Analisi 2)

Sia $A = [0,1] \times [0,1]$ e sia

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono in } \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso $I^+(f) = 1$ e $I^-(f) = 0$

Ogni step function $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ deve valere 1 in A

" $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ " 0 in A

Proprietà dell'integrale Le stesse di Analisi 1

① È lineare a parità di zona di integrazione

② È "monotono": se $f(x,y) \leq g(x,y)$ in A , allora $\iint_A f(x,y) \leq \iint_A g(x,y) \dots$

③ È additivo rispetto alla zona di integrazione, cioè

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A f(x,y) dx dy + \iint_B f(x,y) dx dy$$

se A e B non hanno p.ti interni in comune.

ANALISI 2

LEZIONE 21

Note Title

21/10/2022

TECNICHE DI CALCOLO

→ Formula di riduzione sui rettangoli

→ Formula di riduzione sugli insiemi NORMALI

Morale: un integrale doppio = 2 integrali singoli**RETTANGOLI**Sia $A = [a, b] \times [c, d]$ Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ decante.

Allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y)$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$$

Oss. La formula di riduzione è l'equivalente del DOUBLE COUNTING della combinatoria

Supponiamo di dover sommare una tabella rett. di numeri, ad esempio gli elementi di una matrice

$$\begin{array}{ccccc} * & * & * & * & * \rightarrow r_1 \\ * & * & * & * & * \rightarrow r_2 \\ * & * & * & * & * \rightarrow r_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array}$$

$$\int dy \int dx f$$



$$r_1 + r_2 + r_3 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

= somma di tutti i numeri

$$\int dx \int dy f$$



Esempio 1 $A = [0,1] \times [2,3]$

$$\iint_A (x^2y + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_2^3 dy (x^2y + y^2)}_{\text{considero } x \text{ una costante e integro in } y}$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=2}^{y=3}$$

↑
primitiva risp. ad y

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{9}{2} x^2 + 9 - 2x^2 - \frac{8}{3} \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{5}{2} x^2 + \frac{19}{3} \right\} = \left[\frac{5}{6} x^3 + \frac{19}{3} x \right]_{x=0}^{x=1}$$

↑
primitiva risp. a x

$$= \frac{5}{6} + \frac{19}{3} = \frac{43}{6}$$

Nell'altro modo:

$$\iint_A (x^2y + y^2) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 dx (x^2y + y^2)$$

$$= \int_2^3 dy \left[\frac{1}{3} x^3 y + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1}$$

↑
primitiva in x

$$= \int_2^3 dy \left\{ \frac{1}{3} y + y^2 \right\} =$$

$$\left[\frac{1}{6} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=2}^{y=3} = \frac{9}{6} + 9 - \frac{4}{6} - \frac{8}{3}$$

↑
primitiva in y

$$= \frac{5}{6} + \frac{19}{3} = \text{come prima } \ddot{\smile}$$

Un minimo di scorciatoie

$$\iint_A (x^2y + y^2) dx dy = \iint_A x^2y dx dy + \iint_A y^2 dx dy$$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2y dx dy &= \int_0^1 dx \int_2^3 x^2y dy = \int_0^1 x^2 dx \int_2^3 y dy \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\iint_A y^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 y^2 dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3} = \int_0^1 \frac{19}{3} dx = \frac{19}{3} \cdot 1$$

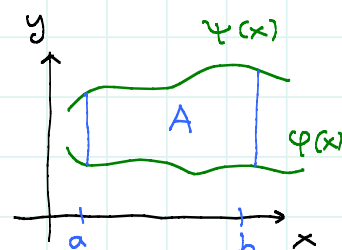
— 0 — 0 —

lunghe.
intervalli

INSIEMI NORMALI Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

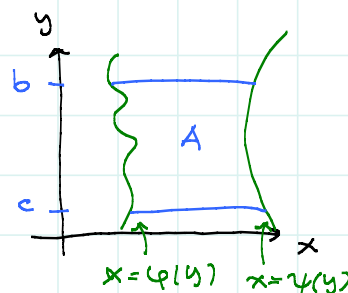
- normale rispetto all'asse x se è del tipo

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$



- normale rispetto all'asse y se è del tipo

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$



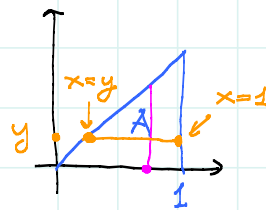
Formule di riduzione

Asse x : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$

Asse y : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$

Esempio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

$$\iint_A x^2 y^3 dx dy$$



1° modo Normale asse x

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x dy x^2 y^3 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^x y^3 dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{4} \int_0^1 x^6 dx = \boxed{\frac{1}{28}} \end{aligned}$$

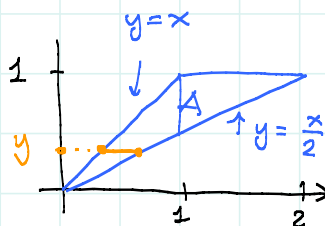
2° modo Normale asse y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

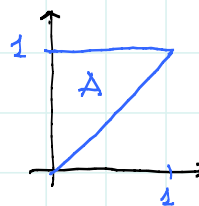
$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^1 dx x^2 y^3 = \int_0^1 y^3 dy \int_y^1 x^2 dx \\ &= \int_0^1 y^3 dy \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=y}^{x=1} = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 (1 - y^3) dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (y^3 - y^6) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{7} y^7 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{3} \frac{3}{28} = \boxed{\frac{1}{28}} \quad \therefore \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \iint_A f dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy f + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy f \\ &= \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx f \end{aligned}$$



Esempio 3 $\iint_A e^{-y^2} dx dy$



1° modo : asse x

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} = \text{☹} \text{ non so fare la primitiva in } y$$

2° modo : asse y

$$\int_0^1 dy \int_0^y dx e^{-y^2} = \int_0^1 e^{-y^2} dy \underbrace{\int_0^y 1 \cdot dx}_{\text{lunghezza}} = \int_0^1 y e^{-y^2} dy$$

e ora so fare la primitiva ☺

Prima mi sono mosso troppo presto

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} &= \int_0^1 dx \left[F(y) \right]_{y=x}^{y=1} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{una primitiva, ad} \\ &\quad \text{esempio quella che si annulla in 1} \\ &= \int_0^1 dx \left\{ F(1) - F(x) \right\} = - \int_0^1 F(x) dx \end{aligned}$$

ma ora integro per parti e la F se ne va ☺
— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 22

Note Title

24/10/2022

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \underbrace{\rho}_{\text{pagamento}} d\rho d\theta$$

$\uparrow$
 insieme A descritto
 in coord. polari

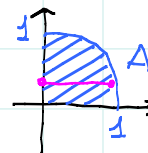
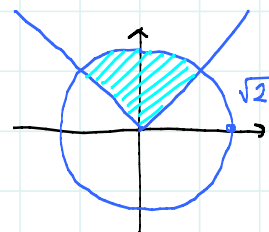
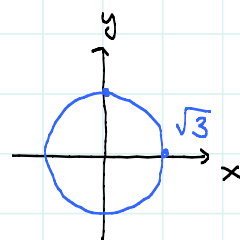
Descrizione di insiemi in coord. polari

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$$

$$B = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq |x|\}$$

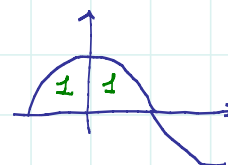
$$B = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

Esempio 1 $\iint_A x dx dy$

$$B = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \leftarrow B \text{ è un rettangolo}$$

1° modo: in coord. polari

$$\iint_B \underbrace{\rho \cos \theta}_x \underbrace{\rho}_{\text{pag.}} d\rho d\theta = \int_0^1 \underbrace{\rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos \theta d\theta}_1 = \frac{1}{3}$$

Fatto di Analisi 1: le "colline" di $\sin \theta$ e $\cos \theta$ hanno area 22° modo: normale asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\begin{aligned}\iint_A x \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy = \int_0^1 x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \\ &= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \quad \text{☺}\end{aligned}$$

verificare la primitiva derivando!

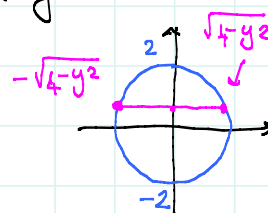
3° modo : normale risp. asse y

$$\begin{aligned}A &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \} \\ \iint_A x \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2) dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \quad \text{☺}\end{aligned}$$

Esempio 2 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$ $\iint_A y^2 \, dx \, dy$

1° modo : coord. polari

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta}_{A \text{ in coord. polari}} \underbrace{p^2 \sin^2 \theta}_{y^2} \underbrace{p}_{\text{pag.}} &= \int_0^2 p^3 dp \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \pi \int_0^2 p^3 dp = \pi \left[\frac{1}{4} p^4 \right]_{p=0}^{p=2} = 4\pi.\end{aligned}$$



Fatto di analisi 1 $\int_a^b \sin^2 \theta \, d\theta = \int_a^b \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{b-a}{2}$
se a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$

Basta vederlo nel caso in cui $a=0$ e $b=\frac{\pi}{2}$ (per simmetria)

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta & C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta & \leadsto & S=C \text{ per simmetria} \\ S+C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2° modo : normale asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2 ; -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$$

$$\iint_A y^2 dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2 dx$$

$$= \int_{-2}^2 y^2 dy \cdot 2\sqrt{4-y^2} = 2 \int_{-2}^2 y^2 \sqrt{4-y^2} dy$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin t \quad \nearrow \\ dy &= 2 \cos t dt \end{aligned} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot 4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t} dt$$

$$= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t \cdot 2 \cos t dt$$

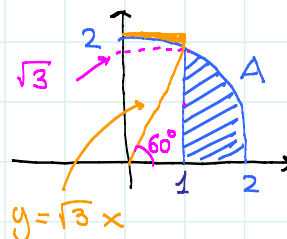
$$= 32 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt$$

$$\begin{aligned} 2t &= w \quad \nearrow \\ 2dt &= dw \end{aligned} \quad 8 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 w \frac{1}{2} dw = 4 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 w dw}_{\pi} = 4\pi \quad \text{☺}$$

Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1, y \geq 0\}$

$$\iint_A x dx dy$$

1° modo Normale asse x



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \cdot x = \text{si fa}$$

2° modo Normale a x e y

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{3}, 1 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \}$$

3° modo $\iint_A \dots = \iint_{\text{settore}} \dots - \iint_{\text{triangolo}} \dots$

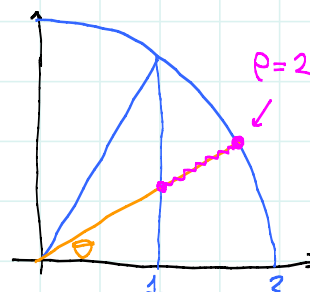
$$\iint_{\text{settore}} x \, dx \, dy = \int_0^2 dp \int_0^{\frac{\pi}{3}} p \cos \theta \cdot p \cdot d\theta = \text{banale}$$

$$\iint_{\text{triangolo}} x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} dy \cdot x = \sqrt{3} \int_0^1 x^2 dx = \text{banale}$$

↑
normale
a x

4° modo Polari dirette !!

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



Fissato θ , dove varia p ?

$$\frac{1}{\cos \theta} \leq p \leq 2$$

$$x=1 \leadsto p \cos \theta = 1 \leadsto p = \frac{1}{\cos \theta}$$

Morale: in coord. polari ρ insieme è "normale risp. a θ "

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 dp \underbrace{\frac{p \cos \theta}{x}}_p$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \cos \theta \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_{p=\frac{1}{\cos \theta}}^{p=2}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8 - \frac{1}{\cos^3 \theta} \right) \cos \theta \, d\theta = \text{banale}$$

ANALISI 2

LEZIONE 23

Note Title

24/10/2022

CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE(In 2 variabili, ma in n è completamente uguale)

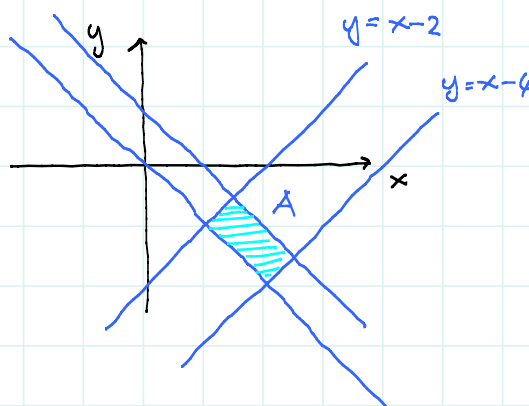
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B g(u,v) J(u,v) du dv$$

$\uparrow$ insieme A descritto usando u e v
 $\uparrow$ funzione f scritta nelle variabili u e v
 $\leftarrow$ pagameto "Determinante JACOBIANA"

Esempio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 2 \leq x-y \leq 4\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

Come insieme normale sono almeno 3 pezzi 😞



Pongo $u := x+y$
 $v := x-y$

L'insieme diventa $0 \leq u \leq 1, 2 \leq v \leq 4 \rightsquigarrow$ rettangolo ☺

Funzione diventa $(x+y)(x-y) = uv \rightsquigarrow$ ☺

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 du \int_2^4 dv uv J(u,v)$$

Come calcolo $J(u,v)$?

Procedura in 3 passi:

① Ricavare (x, y) in funzione di u e v

② Matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

③ Determinante $J(u,v) = |\text{Det matrice jacobiana}|$

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-y \end{aligned} \quad x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u, v) = |\text{Det}| = \frac{1}{2}$$

Alla fine $\iint_A \dots = \frac{1}{2} \int_0^1 u \, du \int_{-2}^0 v \, dv = \text{banale.}$

Esempio $x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$

$\textcircled{1}$ Ricavare ... già fatto

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(\rho, \theta) = |\text{Det}| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho$$

Casi speciali : $\rightarrow$ se la trasformazione è affine, $J = \text{costante}$
 $\rightarrow$ se la trasformazione è una isometria, allora
 $J = 1$ (vale in particolare per tutte le traslazioni)

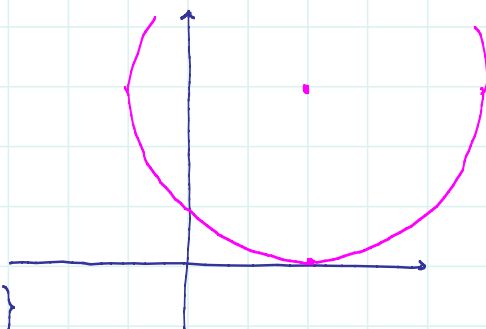
Esempio $A = \text{cerchio con centro in } (2, 3) \text{ e raggio } 3.$

Calcolare

$$\iint_A x^2 \, dx \, dy$$

Scrivo A in cartesiana

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-2)^2}_u + \underbrace{(y-3)^2}_v \leq 9 \}$$



Normale axe x :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 5, 3 - \sqrt{9 - (x-2)^2} \leq y \leq 3 + \sqrt{9 - (x-2)^2}\} \quad (\odot)$$

2° modo Uso la traslazione

$$\iint_A x^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 9} \underset{\substack{\uparrow \\ x^2}}{(u+2)^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f(u,v)}}{1} du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 9} (u^2 + 4u + 4) du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 9} u^2 du dv + 36\pi$$

Cosa ho usato ?

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 9} 4 du dv = 4 \cdot \text{area cerchio} = 4 \cdot 9\pi$$

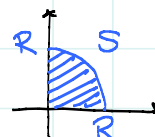
Fatto generale $\iint_A 1 dx dy = \text{Area}(A) =$ volume di un "cilindro" con base A e altezza 1

$\int_a^b 1 dx = \text{lungh. interv.} =$ area rett. con base ... e altezza 1.

Ho poi usato che

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 9} u du dv = 0 \quad (\text{per simmetria i pezzi + semplificano i pezzi -})$$

Fatto generale $\iint_S x dx dy = \iint_S y dx dy$



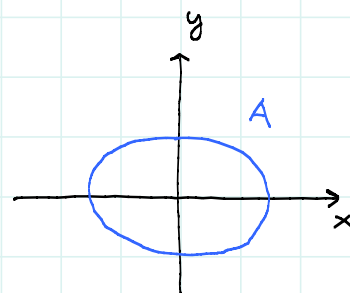
e tanti altri uguali per simmetria

$$\begin{aligned} \iint_{u^2+v^2 \leq 9} u^2 du dv &= \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \cdot p \\ &= \underbrace{\int_0^3 p^3 dp}_{\frac{81}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{81}{4} \pi \end{aligned}$$

— o — o —

Esempio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$

$$\iint_A |y| dx dy$$



$$u = x$$

$$v = \sqrt{2}y$$

$$\leadsto u^2 + v^2 \leq 3 \quad \ddot{u}$$

① $x = u$
 $y = \frac{1}{\sqrt{2}} v$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

③ $J(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Quindi $\iint_A |y| dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 3 \\ \text{muovo} \\ \text{insieme}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} |v|}_{\uparrow |y|} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\uparrow J}$

$$= \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 \leq 3} |v| du dv = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 3 \\ v \geq 0}} v du dv$$

↑
per simmetria

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dp \int_0^{\pi} d\theta \, p \sin \theta \, p = \text{banale.}$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 24

Note Title

25/10/2022

INTEGRALI① Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

con il solito accordo che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un insieme limitato
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

③ Definizione Soliti 3 casi3.1 Caso banale

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \quad \text{"mattoni"}$$

$$f(x, y, z) = \text{costante } \lambda \text{ in } A$$

$$\begin{aligned} \iiint_A f dx dy dz &= \lambda \cdot \text{Vol}(A) \\ &= \lambda (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

3.2 Caso semibanale

A = unione finita di mattoni

f = comb. lineare di caratteristiche di mattoni (step function)

Estendo l'integrale per linearità

3.3 Caso generale Posso f definita su tutto $\mathbb{R}^3$ e $= 0$ fuori di A e posso

$$I^+(f) := \inf \left\{ \iiint_A \varphi(x, y, z) dx dy dz : \varphi \text{ è una step function e } \varphi \geq f \text{ ovunque} \right\}$$

$$I^-(f) := \sup \left\{ \dots \quad \varphi \leq f \text{ ovunque} \right\}$$

Prop. In generale vale $I^+(f) \geq I^-(f)$

Def. Se sono uguali, allora dico che f è integrabile e il valore comune è l'integrale.

Solite proprietà :

- linearità
- monotonia ($f \geq g$ in $A \Rightarrow \iint_A f \geq \iint_A g$)
- addittività rispetto alla zona di integrazione (sotto-prodotto dell'addittività)

② Interpretazione "fisica"

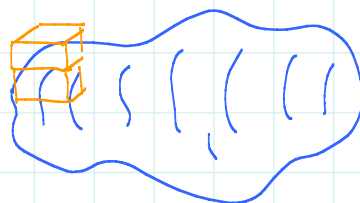
Pensiamo A come un solido di $\mathbb{R}^3$

Supponiamo $f(x, y, z) > 0$ rappresenti la densità del materiale di cui è fatto il solido.

In questo l'integrale rappresenta la massa totale del solido.

Come posso approssimarla

→ approssimo il solido con dei mattoni (sforando ai bordi se serve)



→ faccio finta che in ogni mattone la densità sia costante (scegliendo la costante $\geq$ oppure $\leq$ della densità vera a seconda del verso in cui voglio l'approssimazione)

→ sommo il peso dei singoli mattoni (step function)

→ infittisco i mattoni e "passo al limite"

Se f è a segno variabile, posso pensare ad una densità di cariche elettriche.

④ Tecniche di calcolo

Ci sono 3 tipi di formule di riduzione

- caso dei parallelepipedi $3 = 1+1+1$
- per COLONNE $3 = 2+1$
- per SEZIONI $3 = 1+2$

4.1 PARALLELEPIPEDI

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} dz f(x, y, z)$$

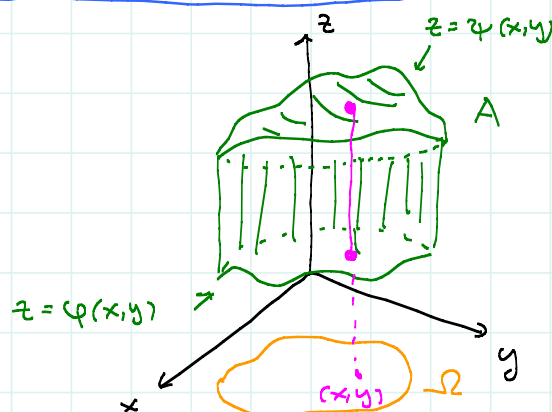
Posso fare il conto in 6 modi diversi, a seconda di come permuto le variabili

4.2 PER COLONNE

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE risp. al piano xy se esiste un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (la base) ed esistono due funzioni $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

A è una specie di cilindro con
 sup laterale che si proietta su $\partial\Omega$
 e le due basi "storte" sono i
 grafici di φ e ψ
 Preso un pto $(x, y) \in \text{base } \Omega$,
 l'intervallo
 $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$
 è la "colonna su (x, y) "



Formula di riduzione

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

prima integro risp. a z sostituendo
gli estremi $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$
poi integro in x e y .

Oss. Valgono formule analoghe per insiemi normali
rispetto al piano xz e al piano yz .

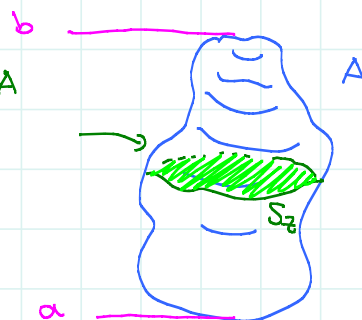
4.3 PER SEZIONI

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx dy f(x,y,z)$$

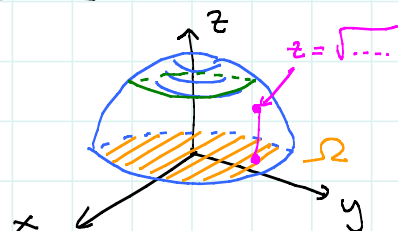
dove

- a e b sono $z_{\min}$ e $z_{\max}$, cioè la max e la minima quota dei punti dell'insieme A
- Fissato $z \in [a, b]$, indichiamo con S_z la "sezione di A ad altezza z " che è una figura 2-dim.

intersezione tra A
ed il piano ad
altezza z



Esempio di descrizione Sia A = semisfera con centro in $(0,0,0)$
raggio 2 e $z \geq 0$

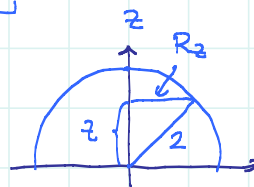


Per colonne

$$\text{Base} : \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$$

$$\text{Colonna} : 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leftarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 4}_{\text{base}}, \underbrace{0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}}_{\text{colonna}} \}$$



Per sezioni

$$z_{\min} = 0 \quad z_{\max} = 2$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 4 - z^2}_{\text{sezione ad altezza } z} \}$$

$$= \text{cerchio di raggio } R_z = \sqrt{4 - z^2}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

LEZIONE 25

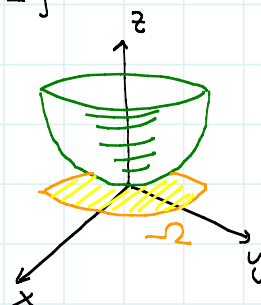
Note Title

28/10/2022

Esempio 1 Ciotola $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$$

1° modo PER COLONNE



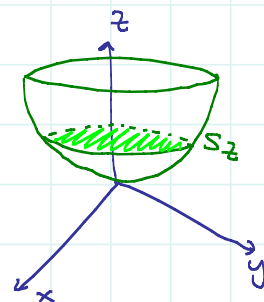
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 2}_{\text{colonna}}\}$$

dove $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^2 dz \, z \\ &= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=2} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [4 - (x^2+y^2)^2] \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta [4 - \rho^4] \rho \uparrow \text{rag.} \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4\rho - \rho^5) \, d\rho \\ &= \pi \left[2\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = \pi \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

2° modo: per SEZIONI

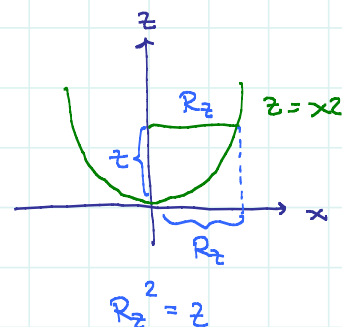
$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 z \, dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \end{aligned}$$



$$= \int_0^2 z \cdot \text{Area}(S_z) dz$$

$$= \pi \int_0^2 z \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{raggio } S_z}}{R_z^2} dz$$

$$= \pi \int_0^2 z^2 dz = \frac{\pi}{3} [z^3]_{z=0}^{z=2} = \frac{8}{3} \pi \quad \text{😊}$$



Fosse stato $\iiint_C x dx dy dz = 0$ (simmetria)

→ Se faccio la trasformazione $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

l'insieme C va in se stesso

→ L'integranda cambia segno $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$.

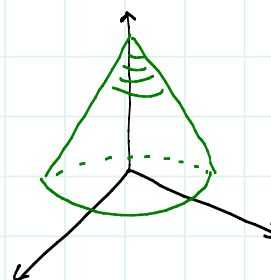
Analisi 1 Se $f(-x) = f(x)$, allora $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Se $f(-x) = -f(x)$, allora $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Esempio 2 C = cono come in figura

$r = 2$

altezza $z \in [0, 4]$



$$\iiint_C (z^2 + xy) dx dy dz$$

Inoltre $\iiint_C xy dx dy dz = 0$ per la stessa simmetria di prima
(sia risp. ad x , sia risp. ad y)

1° modo Per sezioni

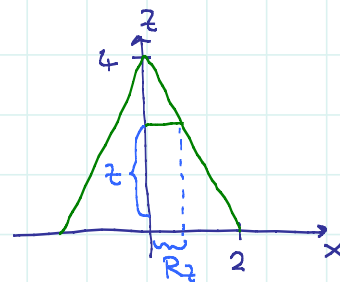
$$\iiint_C z^2 dx dy dz = \int_0^4 dz z^2 \iint_{S_z} dx dy = \int_0^4 dz z^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cerchio di raggio } R_z}}{\text{Area}(S_z)}$$

$$= \pi \int_0^4 z^2 \left(\frac{4-z}{2} \right)^2 dz = \text{si fa}$$

$$z = 4 - 2x$$

$$z = 4 - 2R_2$$

$$R_2 = \frac{4-z}{2}$$



2° modo Per colonne

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{base } \Omega} \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Senza l'equazione del cono $z = 4 - 2\rho = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$

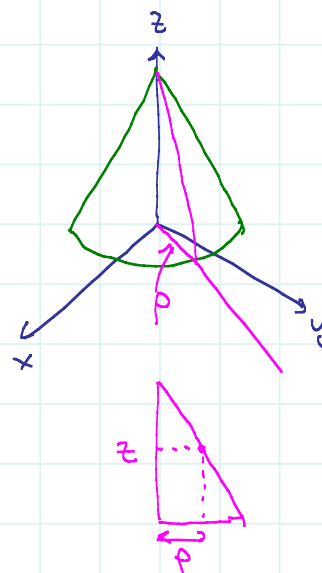
Volendo si arrivava anche dalla sezione

$$x^2 + y^2 \leq R_z^2 = \left(\frac{4-z}{2} \right)^2$$

Quindi vale il segno di = quando

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{4-z}{2} \right)^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4-z}{2} \leadsto \text{ricavo } z$$



$$\iiint_C z^2 dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \int_0^{4-2\sqrt{x^2+y^2}} z^2 dz$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4-2\sqrt{x^2+y^2})^3 dx dy$$

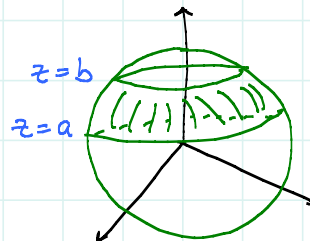
$$= \frac{1}{3} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (4-2\rho)^3 \rho = \text{si fa e forse viene come l'altro.}$$

Esempio 3 Volume del segmento sferico

$$S_{a,b}(R) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, a \leq z \leq b\}$$

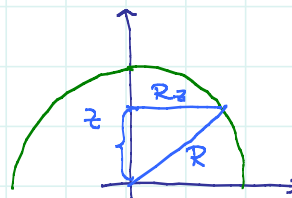
Fatto generale Dato $S \subseteq \mathbb{R}^3$ vale che

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz \quad (\text{tecnicamente è la def. di Volume})$$



Descritto per colonne è omnibile. Quindi proviamo per sezioni.

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \, \text{Area}(S_z) = \\ &= \pi \int_a^b R_z^2 \, dz \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left\{ R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right\} \end{aligned}$$



Caso speciale Se $a = -R$ e $b = R$ viene $\pi \left\{ R^2 \cdot 2R - \frac{1}{3} 2R^3 \right\}$
 $= \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$

Esempio 4 $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

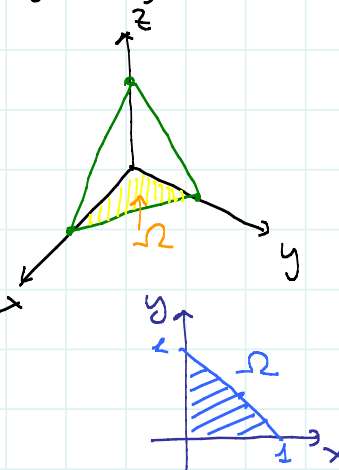
$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz$$

1° modo Per colonne

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$$



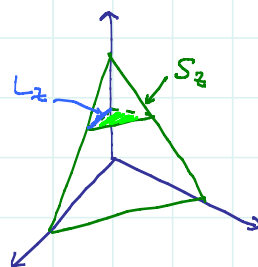
Di conseguenza

$$\begin{aligned}
 \iiint_T y \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \, y \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y \, dy \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) \, dy = \text{si fa}
 \end{aligned}$$

2° modo Per sezioni

$$\iiint_T y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} y \, dx \, dy$$

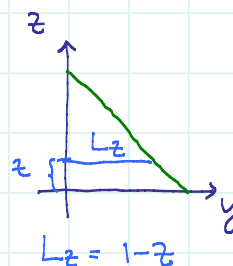
↑
triangolo



Se mi faccio furbo

$$\begin{aligned}
 \iiint_T y \, dx \, dy \, dz &= \iiint_T z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 z \cdot L_z^2 \, dz
 \end{aligned}$$

↑
cateto di S_z



$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 \, dz = \text{si fa facile} \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 26

Note Title

28/10/2022

Cambi di variabile negli integrali tripli = esattamente come nei doppi
(solo che la matrice jacobiana è 3×3).

Casi speciali: $\rightarrow$ coord. cilindriche
 $\rightarrow$ coord. sferiche

COORD. CILINDRICHE

 ρ, θ, z $\uparrow$ piani corrispondenti a (x, y)

Formule di passaggio

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$$

In questo caso

$$J(\rho, \theta, z) = \rho$$

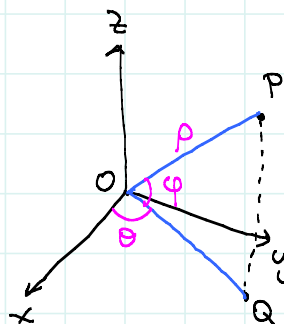
COORD. SFERICHE

Versione geografica

 ρ, θ, φ $\uparrow$ latitudine
 $\uparrow$ longitudine

$$OQ = OP \cdot \cos \varphi = \rho \cos \varphi$$

$$PQ = OP \cdot \sin \varphi = \rho \sin \varphi$$



Formule di passaggio:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

In queste notazioni

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos \varphi$$

Esempio 1 $\iiint_{S^+} (x^2+y^2) dx dy dz$

dove $S^+ := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0 \}$

1° modo Per colonne

$$S^+ := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\text{base } \Omega}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \}$$

$$\iiint_{S^+} (x^2+y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (x^2+y^2) \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\text{lunghezza colonna}}$$

$$= \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \sqrt{1-p^2} \cdot p = 2\pi \int_0^1 p^3 \sqrt{1-p^2} dp$$

= si fa per parti

$\underbrace{p^2 \cdot 2p \sqrt{1-p^2}}_{\substack{\uparrow \text{ si integra bene} \\ \text{si deriva bene}}}$

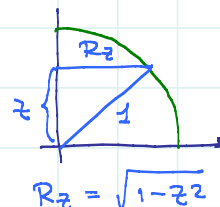
2° modo Per sezioni, che è equivalente alle cilindriche

$$\begin{aligned} \iiint_{S^+} (x^2+y^2) dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} (x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{R_z} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, \underbrace{p^2}_{\substack{\text{base} \\ 2\pi}} \cdot p \uparrow \text{ pag} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^1 dz \int_0^{R_z} dp \, p^3$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 R_z^4 dz$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-z^2)^2 dz = \text{si fa ancora meglio.}$$



Una descrizione di S_+ in cilindriche è

$$S_+ := \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, \underbrace{0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi}_{\text{Descrizione della sezione di prima}}\}$$

Mi raccomando evitare

$$\underbrace{0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi}_{\text{cilindro}}$$

Sì, poteva anche scrivere

$$S_+ := \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi}_{\text{base}}, \underbrace{0 \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}}_{\text{colonna}}\}$$

3° modo Sferiche dei geografi

$$S_+ := \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \underbrace{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{latitudine}}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{S_+} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \cos^2 \varphi}_{x^2 + y^2} \rho^2 \cos \varphi \\ &= 2\pi \underbrace{\int_0^1 \rho^4 d\rho}_{\frac{1}{5}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

Analisi 1 $\int \cos^3 \theta d\theta = \int \cos^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta$

$$= \int (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \int (1 - y^2) dy$$

$y = \sin \theta$
 $dy = \cos \theta d\theta$

$$= y - \frac{1}{3} y^3 = \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta$$

4° modo Mi faccio furbo

$$\iiint_{S+} (x^2+y^2) dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_S (x^2+y^2) dx dy dz$$

↑
tutta la sfera

$$\stackrel{\text{per simmetria}}{=} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \iiint_S (x^2+y^2+z^2) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \rho^2 \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^1 \rho^4 d\rho}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi}_{2} = \frac{4\pi}{15}$$

Oss. È collegato al momento di inerzia risp. all'asse z.

Esempio 2 S = sfera con centro in $(1, 2, 3)$ e raggio 2

$$\iiint_S x dx dy dz$$

Scrivo $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x-1)^2}_{u^2} + \underbrace{(y-2)^2}_{v^2} + \underbrace{(z-3)^2}_{w^2} \leq 4 \}$

$$\iiint_S x dx dy dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 4} \underbrace{(u+1)}_x \underbrace{1}_{\uparrow \text{traslazione}} du dv dw = \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$$

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 4} u du dv dw = 0 \text{ per simmetria!}$$

$$\iiint_{\dots} 1 \dots = \text{Volume sfera}$$

Esempio 3 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 1\}$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$$

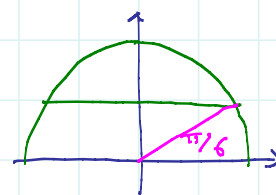
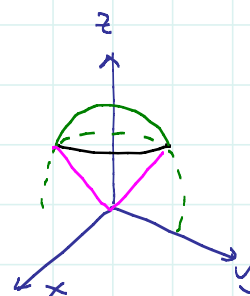
Giro le variabili e calcolo

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$$

Per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_B z \, dx \, dy \, dz &= \int_1^2 dz \cdot z \cdot \pi R_z^2 \\ &= \pi \int_1^2 dz \, z (4 - z^2) \end{aligned}$$



Come si scriverebbe B in coord. sferiche?

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \rho \leq 2$$

cow+gelato

$$\frac{1}{\sin \varphi} \leq \rho \leq 2$$

$$z \geq 1$$

$$\rho \sin \varphi \geq 1$$

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 27

Note Title

31/10/2022

AREE, VOLUMI, BARICENTRI

In dimensione 2 : $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy$$

Il baricentro è $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy \quad y_G := \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

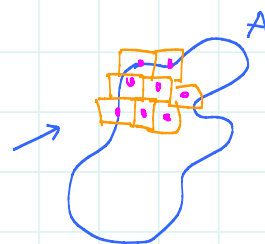
Oss. Se la figura A non ha densità costante, allora

$$\text{Massa}(A) := \iint_A \rho(x, y) \, dx \, dy \quad \text{e analogamente}$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Massa}(A)} \iint_A x \rho(x, y) \, dx \, dy \quad y_G := \dots$$

Oss. Coerente con la def. classica nel caso di un # finito di punti.
Nel passaggio al continuo, possiamo pensare A come unione di tante masse puntiformi e passare al limite

quando infinitesimale la suddivisione sto approx la def. di integrale

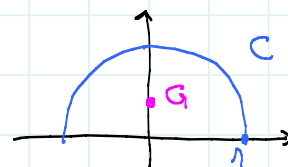


In dimensione 3 è analogo: $A \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \iiint_A x \, dx \, dy \, dz \quad y_G := \dots \iiint_A y \quad \dots \quad z_G = \dots \iiint_A z$$

Esempio 1 Semicirconferenza di raggio r



$$\text{Area}(C) = \frac{\pi}{2} r^2$$

$x_G = 0$ per simmetria

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^r dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin\theta \cdot p = \underbrace{\int_0^r p^2 dp}_{\frac{1}{3} r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta}_2 = \frac{2}{3} r^3$$

$$y_G = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3\pi} r \quad (\text{un po' sotto metà})$$

Esempio 2 Semisfera $z \geq 0$ La chiamiamo S

$$\text{Vol}(S) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$x_G = y_G = 0$$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, p \sin\varphi \cdot p^2 \cos\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^r p^3 dp}_{\frac{1}{4} r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{4} r^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} r^4$$

↑
sferiche
geografiche

$$\text{Conclusione} \quad z_G := \frac{3}{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{3}{8} r < \frac{4}{3\pi} r \quad 9\pi < 32$$

Esempio 3 Baricentro di un cono C

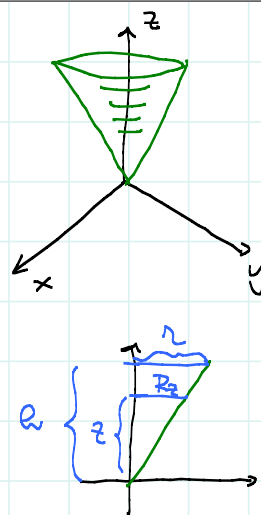
$$\text{Vol}(C) = \frac{1}{3} \pi r^2 R \quad (\text{si fa con l'integrale})$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \int_0^R z \cdot \pi R_z^2 \, dz \end{aligned}$$

$$z: R_z = R: r \leadsto R_z = \frac{r z}{R}$$

$$= \pi \int_0^R \frac{r^2 z^2}{R^2} \cdot z \, dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z^3 \, dz = \frac{\pi r^2 R^2}{4}$$

$$z_G := \frac{3}{\pi r^2 R} \cdot \frac{\pi r^2 R^2}{4} = \frac{3}{4} R \quad (\text{il baricentro sta a } \frac{1}{4} \text{ dell'altezza})$$



CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA RISP. AD UN ASSE

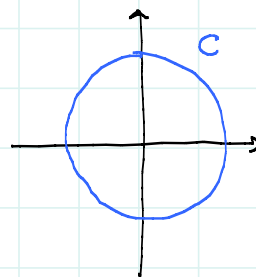
$$I = \iint_A \text{dist}((x,y), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{asse}}}{r})^2 \, dx \, dy$$

$$I = \iiint_A \text{dist}((x,y,z), r)^2 \, dx \, dy \, dz$$

Esempio 4 Cerchio risp. a retta passante per il centro

$$\int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \, \underbrace{p^2 \cos^2 \theta}_{\substack{\uparrow x^2 \\ \text{pensando all'asse } y}} p =$$

$$= \underbrace{\int_0^r p^3 \, dp}_{\frac{r^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{4} r^4$$

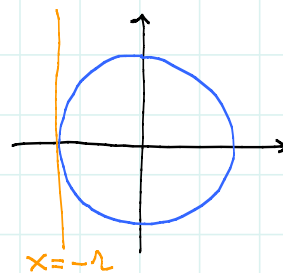


Esempio 5 Cerchio rispetto a retta tangente

$$\iint_C (x+r)^2 dx dy = \iint_C (x^2 + 2rx + r^2) dx dy$$

$$\iint_C r^2 dx dy = r^2 \cdot \text{Area}(C) = \pi r^4$$

$$\iint_C 2rx dx dy = 0 \quad \iint_C x^2 dx dy = \frac{\pi}{4} r^4$$



Fatto generale Come calcolo I del cerchio rispetto ad una retta r che dista d dal centro?

$$\begin{aligned} \iint_C (x+d)^2 dx dy &= \iint_C (x^2 + 2dx + d^2) dx dy \\ &= \frac{\pi}{4} r^4 + d^2 \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

Esempio 6 Calcolare la distanza media di un punto di un quadrato da un vertice fissato.



Che cosa devo fare?

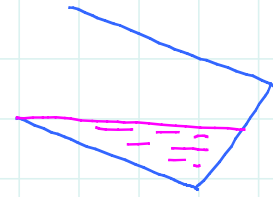
$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad \text{volendo si fa in cartesiane}$$

Proviamo in polari $T: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$
 $x \leq 1 \Rightarrow \rho \cos \theta \leq 1$

$$= 2 \iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta \underset{y=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{(1-y^2)^2} = \text{con un po' di pazienza si fa.}$$

Esempio 7 La Lattina

Abbiamo un cilindro pieno.

Lo incliniamo fino a quando la sup.
del liquido passa per il p.to medio della base.
Quanto liquido è rimasto?

Se congeliamo e "rimettiamo in piedi" ci troviamo ad
integrare

$$f(x,y) = \frac{R}{2} y$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ y \geq 0}} \frac{R}{2} y \, dx \, dy = \text{si fa in polari}$$

$$= \frac{R}{2} \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^\pi d\theta \, \rho \sin \theta \, \rho$$

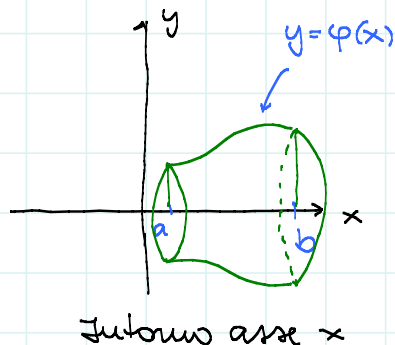
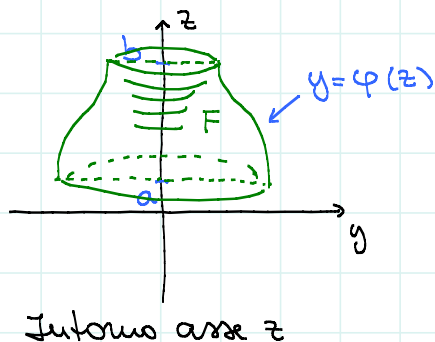
— 0 — 0 —

ANALISI 2

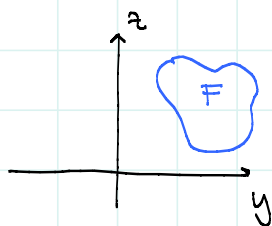
LEZIONE 28

Note Title

31/10/2022

SOLIDI DI ROTAZIONE Due tipi di setting

Possiamo anche ruotare figure più generali



Domande:

- descrivere l'equazione
- calcolare Volume
- calcolare baricentro

Equazione Sia $F = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$
 ↑
 come nella rotazione asse z

Qual è l'eq. del solido?

In coord cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq \varphi(z)$$

↑
 rotazione
 "completa"
 ↑
 posso considerare
 anche rotazioni di
 angoli diversi

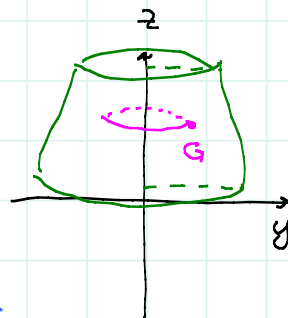
↑ ↑
 è come dire che la sezione
 ad altezza z è un cerchio
 di raggio $R_z = \varphi(z)$

TEOREMA (GULDINO 1) (Guldino per i volumi)

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Figura
che ruota

lunghezza della
circonf. descritta
dal baricentro della figura
durante la rotazione



Dim Usiamo la formula per il baricentro

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \, y \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \, \frac{1}{2} \varphi(z)^2 = \frac{1}{2 \text{Area}(F)} \int_a^b \varphi(z)^2 dz \end{aligned}$$

Quando moltiplico per $2\pi \text{Area}(F)$, ottengo il volume calcolato per sezioni.

— o — o —

Formule analoghe valgono anche se la figura F che ruota NON è un insieme normale

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dz \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(z,p) \in F} p \, dz \, dp \\ &= 2\pi \iint_F p \, dz \, dp \end{aligned}$$

cilindriche pag.

D'altra parte

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dz \, dy = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F p \, dz \, dp$$

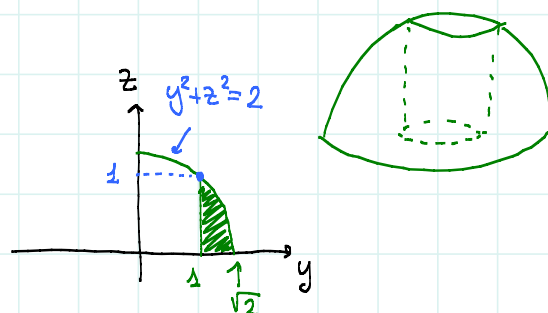
Anche in questo caso moltiplicando per 2π Area (F) si ottiene nuovamente il volume?

Se la rotazione non è completa, se ne tiene conto scrivendo dove varia θ .

Esercizio 1 Volume e coord. del baricentro di

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2}_{\text{Dentro la sfera}}, \underbrace{x^2 + y^2 \geq 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{fuori dal} \\ \text{cilindro}}}, \underbrace{z \geq 0}_{\text{parte alta}} \}$$

"Semisfera con una cavità cilindrica dentro"



$$\text{Vol}(S) = \int_0^1 dz \text{ Area}(S_z)$$

$\uparrow$
 corona circolare con
 raggio interno 1 e raggio
 esterno $\sqrt{2-z^2}$

$$= \pi \int_0^1 (2 - z^2 - 1) dz = \pi \int_0^1 (1 - z^2) dz = \frac{2}{3}\pi$$

In alternativa, posso usare la formula con le cilindriche

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F p \, dz \, dp = 2\pi \int_0^1 dz \int_1^{\sqrt{2-z^2}} dp \, p$$

$\uparrow$
 F è
 normale risp.
 asse z

$$= \pi \int_0^1 [p^2]_{p=1}^{p=\sqrt{2-z^2}} dz = \text{come prima}$$

Baricentro: $x_G = y_G = 0$ (solite simmetrie)

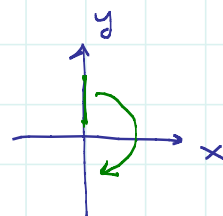
$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) = \int_0^1 z (1-z^2) \, dz = \frac{1}{4}$$

da cui il calcolo di z_G

Se avessi ruotato la figura di 180° in verso orario visto dall'alto, cosa succedeva?

Il volume era metà, z_G restava uguale, la descrizione era

$$0 \leq z \leq 1, \quad 1 \leq \rho \leq \sqrt{2-z^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



In particolare $y_G = 0$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 29

Note Title

04/11/2022

Integrali dipendenti da parametro

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: \mathbb{R} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Considero la funzione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\varphi(t) := \int_A f(t, x) dx$$

Integrale dipendente
dal parametro t

Affinché abbia senso basta che

$\forall t \in \mathbb{R}$ la funzione $A \ni x \rightarrow f(t, x)$ sia integrabile risp.
a Riemann in A .

Domande: continuità e derivabilità di $\varphi(t)$. Stessa cosa per $t \in [a, b]$

Teo 1 Supponiamo che $f(t, x)$ sia continua come funzione di (t, x)
Allora $\varphi(t)$ è continua come funzione della t .

Specie di dimostrazione Supponiamo $t \in [a, b]$ e A sia compatto
Allora $\mathcal{Q}$ insieme $[a, b] \times A$ è compatto e quindi f , essendo
continua, allora è pure unif. continua.

Fissiamo $t_0 \in [a, b]$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuità ci
garantisce che esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

$\uparrow$
non deve dipendere da x

Ma allora

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = \left| \int_A f(t, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_A (f(t, x) - f(t_0, x)) dx \right| \\
 &\stackrel{\text{proprietà dell'integrale}}{\leq} \int_A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\
 &\stackrel{\text{se } |t - t_0| \leq \delta}{\leq} \int_A \varepsilon dx \\
 &= \varepsilon \text{ misura}(A) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{lunghezza, area, volume}
 \end{aligned}$$

Questo dice che se $|t - t_0| \leq \delta$, allora $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon$.
 — o — o —

Oss. Che cosa abbiamo davvero usato come ipotesi?

Che $\forall x \in A$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ è continua in t_0 ,
 cioè verifica la solita storia ε/δ con un δ che dipende da ε
 ma non da x (cioè l'uniformità di δ rispetto a x).
 — o — o —

Teo 2 (Teo. di derivazione sotto il segno di integrale)

Sotto opportune ipotesi vale che

$$\varphi'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

La derivata dell'integrale
 è l'integrale della
 derivata

Ipotesi di stracomodo: $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ continua nella coppia (x, t)

Specie di dim. Mettiamoci in un intervallo $[a, b] \times A$ con
 A compatto. Prendiamo $t_0 \in (a, b)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_A f(t_0 + h, x) dx - \int_A f(t_0, x) dx \right\} \\
 &= \int_A \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} dx
 \end{aligned}$$

Non è che
 posso passare
 al limite...

Lagrange
risp. alla
variabile t

$$= \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + c(x), x) dx$$

↑
punto misterioso tra $0 \in \mathbb{R}$
che a priori dipende da x

$$= \underbrace{\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx}_{\text{quello che vorrei}} + \underbrace{\int_A \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + c(x), x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right\} dx}_{\text{spero che vada a 0 quando } R \rightarrow 0}$$

Ma allora siamo alle solite. Seme che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\uparrow$ indep. da x

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Questo è gratis se $\frac{\partial f}{\partial t}$ è continua, quindi unif. continua

Conclusione

$$\int_A \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\underbrace{t_0 + c(x)}_t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| dx \leq \int_A \varepsilon dx = \varepsilon \cdot \text{misura}(A)$$

↑
che soddisfa
 $|t - t_0| \leq \delta$

↑
vera se $|R| \leq \delta$

— o — o —

Oss. Potrei ottenere la sola derivabilità in t_0 assumendo che per ogni $x \in A$ la funzione $t \rightarrow f(t, x)$ sia derivabile in t_0 , ma "con un δ uniforme", cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall |R| \leq \delta$$

$$\left| \frac{f(t_0 + R, x) - f(t_0, x)}{R} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

— o — o —

Caso in dimensione 1 Caso base

$$\varphi(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli $\varphi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$

Caso più generale :

$$\varphi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx + f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t)$$

Come si giustifica? Consideriamo la funzione

$$F(t, a, b) := \int_a^b f(t, x) dx$$

Allora $\varphi(t) = F(t, a(t), b(t))$

Ma allora per la CHAIN RULE

$$\varphi'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, a(t), b(t)) + \frac{\partial F}{\partial a}(t, a(t), b(t)) a'(t) + \frac{\partial F}{\partial b}(t, a(t), b(t)) b'(t)$$

Quindi ci servono le derivate parziali di F risp. a t, a, b .

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, a, b) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx \quad (\text{teo. 2 di prima})$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}(t, a, b) = f(t, b) \quad \frac{\partial F}{\partial a}(t, a, b) = -f(t, a)$$

Analisi 1

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(t) dt = f(b)$$

Esempio

$$\varphi(t) = \int_{2t}^{t^2} \sin(tx) dx$$

Allora

$$\varphi'(t) = \int_{2t}^{t^2} x \cos(tx) dx + \overset{\uparrow}{\sin(t^3)} \cdot 2t - \sin(2t^2) \cdot 2$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{— } 0 \text{ — } 0 \text{ —}}$
 $\overset{\uparrow}{f(t, b(t))} \cdot b'(t) \quad \overset{\uparrow}{f(t, a(t))} \cdot a'(t)$

ANALISI 2

-

LEZIONE 30

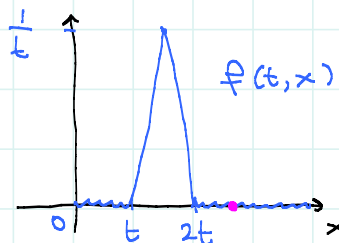
Note Title

04/11/2022

IL CONTROESEMPIO Per ogni $t \geq 0$ consideriamo $f(t, x)$ fatta come in figura

Per ogni $t > 0$ vale che

$$\int_0^1 f(t, x) dx = \text{area triangolo} = \frac{1}{2}$$



Per ogni $x \in [0, 1]$, e in realtà anche per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, x) = 0$$

(anzi $f(t, x) = 0$ se t è abbastanza piccolo)

↑ una "quanto piccolo" dipende da x

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(t, x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{ma}$$

$$\int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) dx = 0$$

Quindi **LIMITE DELL'INTEGRALE $\neq$ INTEGRALE DEL LIMITE**

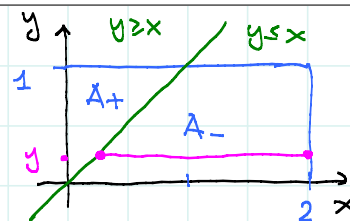
Con una ipotesi in più funzionerebbe ... anche senza uniformità ... e la parola chiave è **DOMINAZIONE**, cioè l'esistenza di una funzione $g(x)$, integrabile in $[0, 1]$, tale che

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall t \text{ dove ci interessa.}$$

— o — o —

Esempio 1 $A = [0, 2] \times [0, 1]$

$$\iint_A |y-x| dx dy$$

In A_+ si ha che $|y-x| = y-x$ In A_- si ha che $|y-x| = x-y$

Quindi
$$\iint_A |y-x| dx dy = \iint_{A_+} (y-x) dx dy + \iint_{A_-} (x-y) dx dy$$

$$= \iint_{A_+} (y-x) dx dy - \iint_{A_-} (y-x) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) - \int_0^1 dy \int_y^2 dx (y-x)$$

normale axe x normale axe y

In alternativa

$$\iint_A |y-x| dx dy = \iint_A (y-x) dx dy - 2 \iint_{A_-} (y-x) dx dy$$

(basta aggiungere e togliere $\iint_{A_-} (y-x) dx dy$ alla scrittura precedente)Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\iint_A |x| dx dy$$

$$= 4 \iint_D x dx dy = 4 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta p \cos \theta \cdot p = \text{banale}$$

parte $\uparrow$ nel 1° quadranteEsempio 3 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

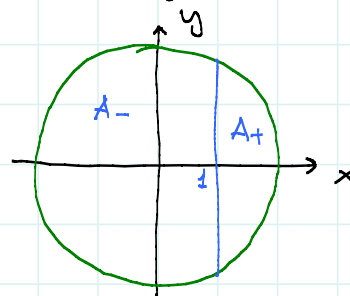
$$\iint_A |x-1| dx dy$$

$$= \iint_A (x-1) dx dy - 2 \iint_{A_-} (x-1) dx dy$$

oppure

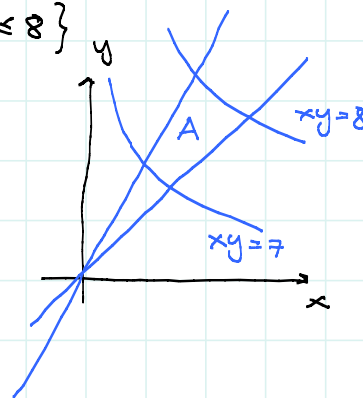
$$= \iint_A (1-x) dx dy - 2 \iint_{A_+} (1-x) dx dy$$

$\uparrow$ banale $\uparrow$ fatto alcune volte in passato



Esempio 4 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 7 \leq xy \leq 8\}$

Area (A)



1° modo Mi divento a spezzare 😊

2° modo $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, 7 \leq xy \leq 8$

$\underbrace{\quad}_{u} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\quad}_{v}$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy = \int_1^2 du \int_7^8 dv \, 1 \cdot J(u, v)$$

Calcoliamo $J(u, v)$. 1 - Ricavare... x e y in funzione di u e v

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u & y^2 = uv \rightsquigarrow y = \sqrt{u} \sqrt{v} \\ xy = v & x^2 = \frac{v}{u} \rightsquigarrow x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \end{cases}$$

Ora con un po' di radici faccio la matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$... si fa

3° modo (OFF LABEL) Calcolo la matrice "inversa"

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix} \quad |\text{Det}| = \left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = 2 \left| \frac{y}{x} \right| = 2u$$

Il pagamento di prima è l'inverso di questo, cioè $J(u, v) = \frac{1}{2u}$ e quindi

$$\text{Area}(A) = \int_1^2 du \int_7^8 dv \, \frac{1}{2u} = \text{banale}$$

(anche ad analisi 1 si facevano queste cose)

Giustificazione + serie

$$\int_1^2 du \int_7^8 dv \frac{1}{2u} = \int_A \frac{x}{2y} \cdot J(x,y) dx dy = 0$$

cambio variabili ponendo
 $\frac{y}{x} = u$
 $xy = v$

$$\iint_A \frac{x}{2y} \cdot J(x,y) dx dy = 0$$

2
x/5

Esempio 5 $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } y}, \underbrace{y^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } x} \}$

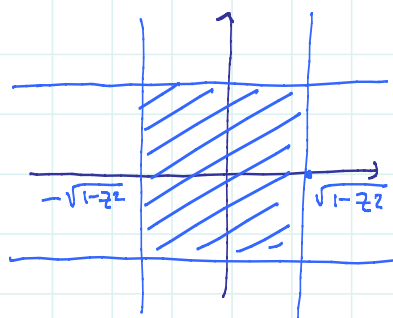
↑
 intersezione di 2
 cilindri con assi $\perp$

$$\text{Vol}(F) = ?$$

1° modo Per sezioni !! Le sezioni ad altezza z
 sono dei quadrati !!!

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 1-z^2 & y^2 &\leq 1-z^2 \\ |x| &\leq \sqrt{1-z^2} & |y| &\leq \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(V) = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) dz = 4 \int_0^1 (1-z^2) dz = 0$$



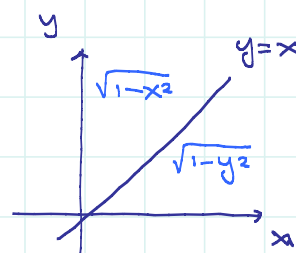
2° modo Per colonne. Fissato x e y , dove varia z ?

$$x^2+z^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1 \rightsquigarrow z \leq \sqrt{1-x^2}, z \leq \sqrt{1-y^2} \text{ e analoghe } z \geq$$

$$\text{Quindi } z \leq \min \{ \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2} \}$$

Il minimo dipende da chi è + grande tra x e y

La base è il quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.



Aggiungere il 3° cilindro ☺

ANALISI

2

-

LEZIONE 31

Note Title

07/11/2022

3^a parte programma: → Curve e integrali curvilinei
 → Forme diff. e campi di vettori
 → Superfici e integrali sup.
 → Teo. della divergenza (Gauss-Green)
 → Teo. del rotore (STOKES)

CURVE

Una curva a valori in $\mathbb{R}^d$ è una funzione

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \leftarrow \begin{array}{l} \text{o addirittura un insieme} \\ \text{contenuto nella retta} \end{array}$$

$$\gamma(t) \begin{array}{l} \text{=} \text{posizione occupata da un punto al tempo } t \\ \text{tempo} \end{array}$$

$$d=2 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$d=3 \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Def. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ si dice

- CHIUSA se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (partenza = arrivo)
- SEMPLICE se è iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè
 $\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } \{t, s\} = \{a, b\}$

Si definisce SOSTEGNO DELLA CURVA l'immagine della γ , cioè

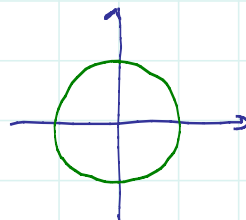
$$\text{Sostegno} = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^d : t \in [a, b] \}$$

Achtung! È importante distinguere una curva dal suo sostegno.
 Lo stesso sostegno può essere percorso in modo diverso.

→ Sostegno = "foto" = insieme dei p.ti in cui è passata la curva
 → curva = "video" = come l'animato ha percorso il sostegno

Esempio 1

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t) & : t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t) & : t \in [0, 4\pi] \\ \gamma_3(t) &= (\sin t, \cos t) & : t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$



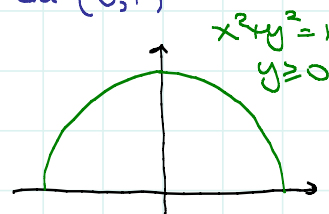
Il sostegno è sempre $x^2 + y^2 = 1$ (tutta la circ.)

→ $\gamma_1(t)$ fa un giro (chiusa e semplice)

→ $\gamma_2(t)$ fa due giri (chiusa ma NON semplice)

→ $\gamma_3(t)$ fa un giro in senso orario partendo da (0,1)

Esempio 2 Trovare curve con quel sostegno



$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1] \quad (\text{stesso verso di percorrenza di } \gamma_1(t), \text{ ma con velocità diversa})$$

Def. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 (le singole componenti sono derivabili con derivata continua).

Si definisce

→ **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t)$

→ **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t)\|$

→ **RETTA TANGENTE** nel p.to corrispondente ad un certo t_0
la retta di eq. parametrica

$$\gamma(t_0) + s \dot{\gamma}(t_0)$$

↑
parametro

retta che passa per $\gamma(t_0)$ con
direzione data da $\dot{\gamma}(t_0)$
Ha senso se $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$

Achtung! La curva, se non è semplice, può passare più volte dallo stesso p.to con diverse rette tangenti



Imparare a fare: banale (sostituisco gli estremi)

→ stabilire se una curva è chiusa e/o semplice

→ calcolare rette tangenti * uso formula

→ disegnare il sostegno

Strategie per dimostrare la semplicità

① Sperare che una componente sia strett. monotona

$$\gamma_1(t) = (t^2 + \sin(2t), \cos t, \arctan t - t^3) \quad t \in [0, \pi]$$

↑↑
è strett. decrescente ☺

$$\gamma_2(t) = (t^2, t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 4]$$

↑↑
crescente per $t \in [0, 4]$

$$\gamma_3(t) = (t^2, \cos t) \quad t \in [-1, 1]$$

↑ ↑
due funzioni PARI, quindi
 $\gamma_3(\frac{1}{2}) = \gamma_3(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ NO SEMPLICE

② Sperare che ci sia un "invariante" monotono

$$\gamma(t) = (t + 2 \sin t, t + 10 \sin t) \quad t \in [0, 10\pi]$$

↑ ↑
NO MONOTONE

Ma $y(t) - 5x(t) = -4t \leftarrow$ questo è monotono

Se ci fossero $t_1 \neq t_2$ t.c. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, allora

$$\begin{array}{ccc} y(t_1) - 5x(t_1) & = & y(t_2) - 5x(t_2) \\ \text{"} & & \text{"} \\ -4t_1 & & -4t_2 \end{array} \rightsquigarrow t_1 = t_2$$

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

... $x(t)^2 + y(t)^2 = t^2$ è monotono $\Rightarrow$ SEMPLICE ☺

Oss. Una curva chiusa per forza fallisce ① e ②.

③ Separazione in tratti che stanno in zone diverse

$$(cost, sint) : t \in [0, 2\pi]$$

Considero $t \in [0, \pi]$ e $t \in [\pi, 2\pi]$

→ Per $t \in [0, \pi]$ la curva è iniettiva perché $\cos t$ è monotona e la curva sta nel semipiano $y \geq 0$ (tranne agli estremi)

→ Per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva è iniettiva perché $\cos t$ è di nuovo monotona e la curva sta nel semipiano $y \leq 0$ (tranne agli estremi)

Quindi se esistono $t_1 \neq t_2$ con $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ questi

- non possono essere entrambi in $[0, \pi]$ $\nwarrow$ è iniettiva
- " " " " in $[\pi, 2\pi]$ $\swarrow$ è iniettiva
- non possono essere uno in $[0, \pi]$ e uno in $[\pi, 2\pi]$, a meno di estremi (in un caso è $y > 0$ nell'altro è $y < 0$).

④ Risolvere di brutto il sistema

$$\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Curva chiusa ($\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0)$) $\leadsto$ ① e ② No.

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \text{Spero di dedurre che } t=s \text{ oppure } t=0 \text{ e } s=1, \text{ oppure } t=1 \text{ e } s=0.$$

$$\begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ t-s = t^3-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-s) = (t-s)(t+s) \\ (t-s) = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

o $t=s$ (e non c'è problema), o divido

$$\begin{cases} t+s=1 \\ t^2+ts+s^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} s=1-t \\ t^2 + \frac{t-t^2}{ts} + \frac{1+t^2-2t}{s^2} = 1 \end{cases}$$

$$t^2 = t \quad \begin{matrix} \nearrow t=0 \quad s=1 \\ \searrow t=1 \quad s=0 \end{matrix} \quad \text{😊}$$

ANALISI

2

-

LEZIONE 32

Note Title

07/11/2022

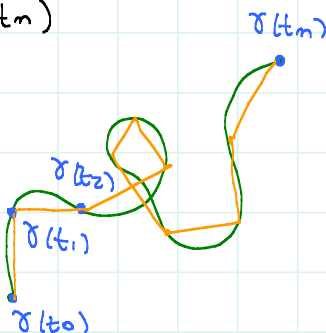
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Setting : sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva (anche orribile, anche non continua)

Fissata una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$, consideriamo la poligonale che ha estremi $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$

La lunghez. della poligonale è data da

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{\text{lunghez. del segmento}}$$



Idea intuitiva: lunghez. poligonale $\leq$ lunghez. curva e quando rendo la partizione + fitta sto approx. la lunghez. della curva

Def (lunghez. di una curva) Setting come sopra, Allora

$$\text{Lunghez}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}$$

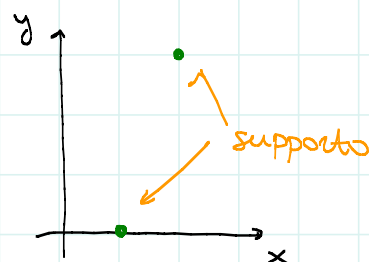
il sup è fatto al variare di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$

Il sup può venire $+\infty$. Se viene un numero (ovviamente ≥ 0) diciamo che la curva ha lunghez. oppure (sinonimo) che la curva è RETTIFICABILE

Esempio 1 $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2, 3) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$$

teletrasporto

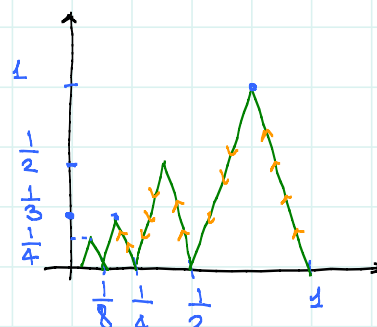


$\text{Lunghe}(\gamma) = \sqrt{10}$ = distanza tra i 2 p.ti (ogni poligonale contiene il segmento che congiunge i 2 p.ti)

Esempio 2 Se una curva percorre più volte un certo tratto del sostegno, quel tratto conta + volte ai fini della lunghezza.

Esempio 3 (Curva di lunghe. infinita fatta apposta)

Consideriamo la curva descritta in figura



$\text{Lunghe} \geq \text{somma Lunghe. lati}$

↑
basta scegliere gli istanti della
partizione come quelli in cui è
agli estremi dei segmenti

$$\geq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$$

↑
stiamo ogni
dato con l'altezza

Esempio 4 (Come sopra, ma meno burocratico)

$$\gamma(t) = \left(t, t \sin^2 \frac{1}{t}\right) \\ t \in [0, 1]$$

Il sostegno è il grafico di

$$y = x \sin^2 \frac{1}{x} \quad (\text{funzione continua in } [0, 1])$$

Curva nel piano data in coord. polari $\rho(t), \theta(t)$ $t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

$$\text{Speed} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}$$

↑
i doppi prodotti se
ne vanno

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2}$$

↑
a parità di θ' , il contributo alla
speed varia in funzione di ρ

— o — o —

Se due curve hanno lo stesso sostegno, in generale possono avere lunghezze diverse MA se il sostegno viene percorso "allo stesso modo" la lunghezza viene la stessa.

Riparametrizzazione di una curva

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva. Sia $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione monotona con $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Supponiamo tutto di classe C^1 .

Consideriamo

$$\hat{\gamma}(t) := \gamma(\varphi(t)) \quad t \in [c, d]$$

Moralmente: $\hat{\gamma}$ è la "stessa curva" percorsa in modo diverso

Allora $\text{Lunghezza}(\gamma) = \text{Lunghezza}(\hat{\gamma})$

Facciamo il conto in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\hat{\gamma}(t) = (x(\varphi(t)), y(\varphi(t))) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$$

$$\hat{x}'(t) = x'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

$$\hat{y}'(t) = y'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

Ma allora $\|\hat{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\hat{x}'(t)^2 + \hat{y}'(t)^2}$

$$= \underbrace{\varphi'(t)}_{\varphi \text{ era crescente}} \sqrt{x'(\varphi(t))^2 + y'(\varphi(t))^2}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \text{lunghezza}(\hat{\gamma}) &= \int_c^d \|\hat{\gamma}'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \end{array} \\ &= \text{lunghezza}(\gamma). \end{aligned}$$

Oss. Funziona anche se φ è monotona decrescente
— o —

ANALISI 2

LEZIONE 33

Note Title

08/11/2022

Obiettivo : dimostrare che

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 .
— o — o —

INTEGRALI DI FUNZIONI VETTORIALI

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ($k=1,2,3$) $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$
↑ ↑

$$\int_A f(x) dx = \left(\int_A f_1(x) dx, \dots, \int_A f_d(x) dx \right)$$

dove $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$

Teorema 1 (Stima dall'alto) Setting come sopra.

Allora

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

↑
norma di un
vettore

↑
integrale di una
funzione scalare

Analogo di Analisi 1: $\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx$

Dici per dualità

Considero un qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^d$.

Allora

int. è lineare

$$\langle v, \int_A f(x) dx \rangle = \sum_{i=1}^d v_i \int_A f_i(x) dx \stackrel{\text{int. è lineare}}{=} \int_A \sum_{i=1}^d v_i f_i(x) dx = \int_A \langle v, f(x) \rangle dx$$

Adesso metto i moduli:

$$\begin{aligned}
 \left| \langle v, \int_A f(x) dx \rangle \right| &= \left| \int_A \langle v, f(x) \rangle dx \right| \\
 &\stackrel{\text{Analisi 1}}{\leq} \int_A |\langle v, f(x) \rangle| dx \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx \\
 &= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx
 \end{aligned}$$

Ora scelgo un v speciale e cioè $v := \int_A f(x) dx$. Ottengo

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

Ora distinguo 2 casi:

→ se $\left\| \int_A f(x) dx \right\| = 0$, c'era davvero poco da dire. ☺

→ se $\left\| \int_A f(x) dx \right\| > 0$, divido e ho la tesi.
— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare lo stesso risultato con un'altra norma a scelta (vale per tutte le norme).
— 0 — 0 —

Teorema 2 (Stima dal basso) Stesso setting.

Allora per ogni $x_0 \in A$ vale la stima

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim La portenta è aggiungere e togliere
 $f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$

Ora faccio due operazioni in due modi diversi

① Triangolo + Integro

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\begin{aligned} \int_A \|f(x)\| dx &\leq \int_A \|f(x_0)\| dx + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &= \|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A) + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \end{aligned}$$

② Integro e poi triangolo dalla parte opposta

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \left\| \int_A f(x_0) dx \right\| - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

Ho usato che se $a = b + c$, allora $\|a\| \geq \|b\| - \|c\|$
 $b = a - c \leadsto \|b\| \leq \|a\| + \|c\|$

$$= \|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A) - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

Uso stima
dall'alto con il
segno - davanti

$$\begin{aligned} &\geq \underbrace{\|f(x_0)\| \cdot \text{misura}(A)}_{\text{lo ricavo dalla precedente}} - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \end{aligned}$$

$$\geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx.$$

— 0 — 0 —

Dim. Lungh. curva

Devo dimostrare due cose

① Per ogni partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ si ha che

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{\text{Lungh. della poligonale}} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

② Per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare una partizione t.c.

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon$$

Dim di ①

L'osservazione fondamentale è che

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \quad (\text{sono vettori})$$

↑
è vero component-wise

Metto la norma

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

↑
stimo dall'alto

Sommando su i , a dx trovo l'integrale su $[a, b]$.

Dim di ②

Idea: prendere i t_i "abbastanza vicini"

Qui uso l'uniforme continuità di $\dot{\gamma}(t)$.

Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t_1) - \dot{\gamma}(t_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Prendo ora una partizione con $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Su ogni uso la stima dal basso con $A = [t_{i-1}, t_i]$ e punto $x_0 = t_i$ (ma ogni altro punto avrebbe bene)

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \\
 &\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\|}_{\substack{|t-t_i| \leq \delta, \\ \text{quindi si stimare} \\ \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_i)\|}} dt \\
 &\geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2(t_i - t_{i-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)}
 \end{aligned}$$

Quando sommo su i ottengo

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}_{b-a}$$

— o — o —

Brutalmente

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &\sim \|(t_i - t_{i-1}) \dot{\gamma}(t_i)\| \\
 &\sim (t_i - t_{i-1}) \|\dot{\gamma}(t_i)\|
 \end{aligned}$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \sim (t_i - t_{i-1}) \|\dot{\gamma}(t_i)\|$$

La dimostrazione rende formali i " $\sim$ "

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 34

Note Title

11/11/2022

INTEGRALI CURVILINEI(Integrali di funzioni lungo curve)
(Integrazione NON ORIENTATA)

- ① Notazioni
- ② Interpretazione geometrica
- ③ Idea della definizione
- ④ Formula il calcolo

① Setting: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

 $\uparrow$
o comunque almeno definita sul supporto di γ

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

 $\uparrow$
insieme di
integrazione $\uparrow$
integrand $\leftarrow$ sta ad indicare che si tratta di
un integrale
curvilineo

③ Idea della definizione: la solita con somme inferiori / superiori

Prendiamo una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ e
consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\text{Lung}(t_{i-1}, t_i)}_{\substack{\text{lung. del tratto} \\ \text{di curva per} \\ t \in [t_{i-1}, t_i]}} M_i$$

$\uparrow$ costante $\geq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\sum_{i=1}^n \text{Lung}(t_{i-1}, t_i) m_i$$

$\uparrow$ costante $\leq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

Poi faccio l'integrale superiore come inf delle prime
 " inferiore " sup delle seconde
 Se coincidono, sono contento.

2) Interpretazione geometrica

Consideriamo la funzione

$$[a, b] \ni t \rightarrow f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

↑ quota a cui si trova l'ovino
 al tempo t

L'integrale curvilineo **NON** ha a che fare con questa

$[0, \text{lunghe}(\gamma)] \ni s \rightarrow$ quota a cui si trova l'ovino
 dopo aver percorso un tratto
 lungo s .

L'integrale curvilineo è l'integrale di questa
 [Disegnavi e discorsi nel video]

Ad esempio, se $f(x) \equiv 1$, allora

$$\int_{\gamma} 1 \, ds = \text{lunghe}(\gamma)$$

Integrazione NON ORIENTATA:

→ se faccio avanti/indietro (anche in modo diverso)

l'integrale raddoppia

→ se percorro la curva al contrario, l'integrale resta lo stesso,

→ tratti percorsi più volte, pagano più volte.

4 Formula per il calcolo

Se tutto è decente, diciamo f continua e curva C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{speed}} dt$$

Se $d = 2$, allora $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\underbrace{x(t), y(t)}_{\text{vettore di } \mathbb{R}^2}) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{ds} dt$$

ds = speed · dt tempo

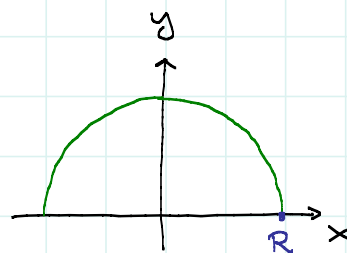
(La dimostrazione è del tutto analoga alla Lunghezza della curva)

Baricentro di una curva nel piano : $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G := \frac{1}{\text{Lung}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

$$y_G := \frac{1}{\text{Lung}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro di una semicirconferenza (solo la curva)



È ovvio che $x_G = 0$ per simmetria

Parametizzo

$$(R \cos t, R \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{\pi} \underbrace{R \sin t}_y \sqrt{\underbrace{R^2 \sin^2 t}_{\dot{x}(t)^2} + \underbrace{R^2 \cos^2 t}_{\dot{y}(t)^2}} dt$$

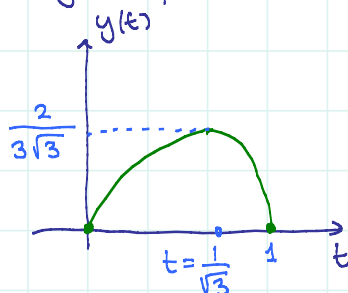
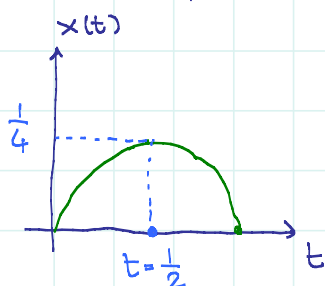
$$= R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2R^2 \leadsto y_G = \frac{2R^2}{\underbrace{\pi R}_{\text{Lung}}} = \boxed{\frac{2}{\pi} R}$$

Esempi di disegno di un sostegno

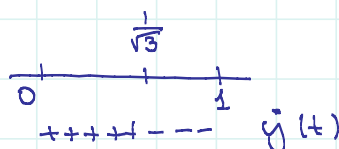
$$\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \quad t \in [0, 1]$$

Studiata in lezione passata. Veriva chiusa e semplice.
Come è fatto il sostegno.

Studio separatamente $x(t)$ e $y(t)$ per $t \in [0, 1]$



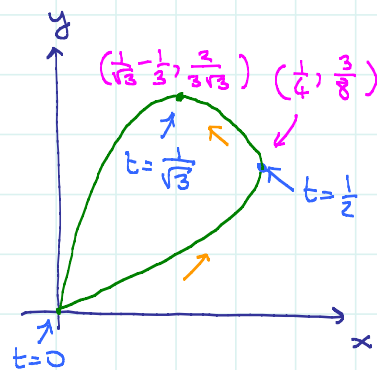
$$\dot{y}(t) = 1 - 3t^2$$



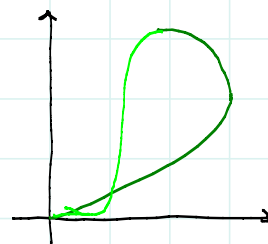
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ora studio $(x(t), y(t))$ nel piano x, y

- Quando $t \in [0, \frac{1}{2}]$ abbiamo che $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Quando $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ abbiamo che $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Quando $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo che $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$



Achtung! Queste sole info non bastavano a dedurre la semplicità



Fino a $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ci salva la monotonia di $y(t)$, ma poi il ritorno potrebbe essere fatto male

Oss. In questo caso Ω insieme limitato dalla curva è normale rispetto ai 2 assi, ma scriverlo non è banale

$$\begin{matrix} (t-t^2, t-t^3) \\ x \quad y \end{matrix}$$

$x = t - t^2$ ~> ricavato, prendendo il t più piccolo

$$t^2 - t + x = 0$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{2} \quad t_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4x^2}}{2}$$

Ora Ω insieme è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, t_1 \leq y \leq t_2\}$$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 35

Note Title

11/11/2022

FORME DIFFERENZIALI

Nota def. (da corso di servizio)

Una forma differenziale è un oggetto che si presenta nella forma

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy \quad \text{in due variabili}$$

↑
omega
piccolo

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \quad \text{in 3 variabili}$$

e analogo in più di 3 variabili

Le funzioni A, B, C si chiamano coeff. della forma diff., e sono funzioni definite in un certo insieme del piano o dello spazio.

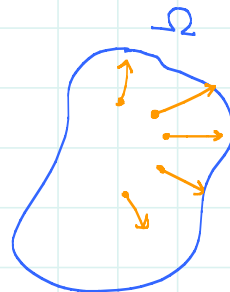
Def. Un campo di vettori in $\mathbb{R}^d$ è una funzione

$$E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Esempio Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un campo di vettori vuole dire assegnare un vettore in ogni punto

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$



Possiamo ABUSIVAMENTE identificare forme diff. e campi di vettori

Integrale di una forma diff. lungo una curva

INTEGRAZIONE
ORIENTATA

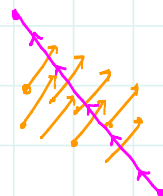
- [1] Setting : sia ω una forma diff. in $\mathbb{R}^d$
 sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva il cui sostegno
 è contenuto nell'insieme in cui sono def. i coeff.
 della forma

$$\int_{\gamma} \omega$$

In due variabili diventa

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

- [2] Significato fisico Caso di $\mathbb{R}^2$ in cui $\vec{E} = (A, B)$ è
 un campo costante e
 γ è una curva che percorre un segmento
 a velocità costante $\vec{v}$



Il lavoro del campo sul punto che si muove è

$$\langle \vec{v}, \vec{E} \rangle \text{ lungo segmento} = \int_{\gamma} \omega \quad \uparrow \quad A dx + B dy$$

Questa è l'idea che si vuole
 tradurre con la definizione

- [3] Idea della definizione. Approssimare la curva con una spezzata
 e in ogni tratto considerare costanti i coeff. e la velocità, e
 sommare i contributi come sopra

4 Formula per il calcolo $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$

$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_a^b \{A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)\} dt$$

Nota bene: stiamo integrando il prodotto scalare tra

$$\vec{E}(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) \quad \text{e} \quad \vec{V} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

Relazione tra integrale di funzioni e di forme

Posso scrivere

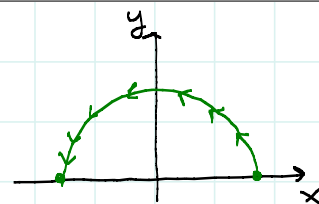
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A dx + B dy &= \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} + B(\dots) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dots}} \right\} \\ &\quad \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt}_{ds} \\ &= \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \text{vettore tangente} \rangle ds \end{aligned}$$

INTEGRAZIONE ORIENTATA

- Se percorro la curva al contrario, l'integrale cambia segno
- Se faccio avanti / indietro, i due contributi si cancellano

— o — o —

Esempio 1 $\omega = (x+y) dx - y dy$
 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$



Uso la formula

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{\pi} \left\{ \underbrace{(\cos t + \sin t)}_{x+y} \underbrace{(-\sin t) dt}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{\sin t}_{y} \underbrace{\cos t}_{\dot{y}(t)} \right\} dt \\ &= \int_0^{\pi} \{ -\sin^2 t - 2 \cos t \sin t \} dt = -\frac{\pi}{2} + [\cos^2 t]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Consideriamo ora la curva $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$

Osservo che γ_1 percorre lo stesso sostegno, una sola volta, ma in verso opposto. Quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{!}$$

Ufficialmente avrei dovuto fare

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ \underbrace{(t + \sqrt{1-t^2})}_{x+y} \underbrace{1}_{\dot{x}(t)} dt - \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \underbrace{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}_{\dot{y}(t)} \right\} dt \\ = \int_{-1}^1 (2t + \sqrt{1-t^2}) dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

FATTO IMPORTANTE Se γ_1 e γ_2 percorrono lo stesso sostegno nello stesso verso, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Può anche fare avanti / indietro in alcuni tratti.

NON STIAMO DICENDO che dipende solo dagli estremi, ma dipende solo dal sostegno e dal verso di percorrenza

Per l'integrale delle funzioni è importante percorrere lo stesso sostegno (in qualunque verso), ma facendo una volta sola ogni tratto.

Idea che ci sta sotto ... quando cambio la parametrizz., cioè considero la curva

$$\gamma(\varphi(t))$$

allora
$$\int_Y x(\varphi(t)) = \int_Y \dot{x}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

↑ questo è quello che serve per il cambio di variabili negli integrali

Lo stesso cambio nella speed fa usare $|\dot{\varphi}(t)|$

↑ fa la differenza

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 36

Note Title

14/11/2022

Forma diff. $\omega = \sum_{i=1}^d A_i(x) dx_i$ $A_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Integrale di ω su γ Se $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

Si intende che γ è almeno continua + C^1 a tratti ($[a,b]$ è unione di un numero finito di intervalli su cui γ è di classe C^1).

Definizioni chiave Una forma diff. ω si dice

ESATTA in Ω se esiste $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$A_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \quad \text{per ogni } i=1, \dots, d$$

La $V(x)$ si dice PRIMITIVA di ω

Oss. Se identifichiamo ω con il campo $\vec{E}(x) = (A_1(x), \dots, A_d(x))$, allora ω è esatta se e solo se $\vec{E} = \nabla V$. In tal caso possiamo chiamare V il POTENZIALE

Oss. È importante dire esatta "dove", cioè ω può essere esatta in un certo Ω_1 , ma non in un altro Ω_2 . (Può anche essere esatta in Ω_1 e Ω_2 , ma non in $\Omega_1 \cup \Omega_2$)

CHIUSA se i coeff. sono di classe C^1 e vale

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i \neq j \quad (\text{le derivate in croce sono uguali})$$

Caso $d=2$ $\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$

Chiusa

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$$

Esatta:

$$A(x,y) = V_x(x,y)$$

$$B(x,y) = V_y(x,y)$$

Caso $d=3$

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(\dots) dy + C(\dots) dz$$

Esatta:

$$A = V_x$$

$$B = V_y$$

$$C = V_z$$

Chiusa:

$$A_y = B_x$$

$$A_z = C_x$$

$$B_z = C_y$$

Implicazione facile

$$\omega \text{ ESATTA} \Rightarrow \omega \text{ CHIUSA}$$

(se i coeff. sono almeno C^1)**Dim**

$$\text{Se } A_i = V_{x_i}$$

$$A_j = V_{x_j}, \text{ allora}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = V_{x_i x_j}$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} = V_{x_j x_i}$$

quindi si tratta dell'inversione dell'ordine di derivazione.

[In due variabili : $A = V_x$ e $B = V_y$, allora $A_y = V_{xy}$
 $B_x = V_{yx}$]

Corollario

$$\omega \text{ NO CHIUSA} \Rightarrow \omega \text{ NO ESATTA} \Rightarrow \text{ADDIO PRIMITIVA}$$

Prop (Conseguenza dell'esattezza)

Sia ω una forma ESATTA. Allora per ogni curva C^1 (o anche C^1 tratti) vale che

$$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

Differenza tra valori della primitiva agli estremi

Def.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

uso
 ω è esatta

$$\text{CHAIN RULE} \nearrow = \int_a^b \frac{d}{dt} [V(\gamma(t))] dt$$

$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

Analisi 1:

integrale di una
derivata

Esercizio

- Riscrive esplicitamente il conto con $d=2$ e $d=3$
- Estendere al caso di curve C^1 a tratti, e capire dove serve la continuità.

— o — o —

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia ω una forma diff. definita in Ω .

Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) ω è esatta come da definizione (esiste primitiva)

(ii) vale che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

per ogni coppia di curve a valori in Ω con gli stessi estremi.

(quindi l'integrale su una curva dipende solo dagli estremi)

(iii) vale che

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

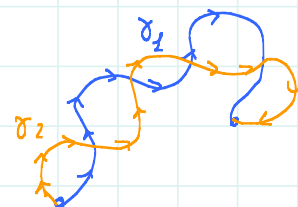
per ogni curva a valori in Ω che sia chiusa.

Dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) è quasi ovvia. Uso $\gamma_1 =$ curva γ chiusa data e come γ_2 la curva costantemente uguale all'estremo, su cui chiaramente l'integrale è nullo, perché $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sia γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi.

Considero la curva γ_3 che fa γ_1 e poi γ_2 al contrario. Allora γ_3 è chiusa, quindi



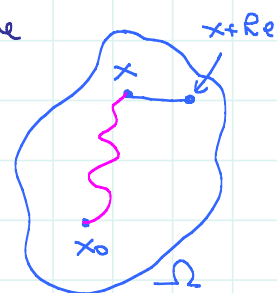
$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi} \\ \text{(ii)}}} = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2 \text{ al contr.}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

da cui si ottiene la (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue dalla prop. precedente.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per ipotesi l'integrale dipende solo dagli estremi e non dalla curva. Devo dim. che esiste una primitiva.

Scelgo $x_0 \in \Omega$ a piacere e per ogni $x \in \Omega$ pongo



$$V(x) := \int_{\gamma} \omega$$

$\uparrow$ curva qualunque (C^1 a tratti) che unisce x_0 a x

Devo dimostrare che $\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$.

Lo faccio per $i=1$.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V(x + R e_1) - V(x)}{R}$$

Ora come calcolo $V(x + R e_1)$?

Potendo scegliere la curva, uso quella che andava bene per x più il segmento tra x e $x + R e_1$, cioè

$$\gamma_2(t) := x + t R e_1 \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$$V(x + R e_1) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$= V(x) + \int_0^1 A_1(x + t R e_1) R dt$$

$$= V(x) + R A_1(x + c R e_1)$$

↑
teo. media
integrale di Analisi 1

↑
compresso
tra 0 e 1

(Ho usato che
 $\dot{\gamma}_i(t) \equiv 0$
per $i = 2, \dots, d$

$$\text{e } \dot{\gamma}_1(t) = R$$

Ma allora

$$\frac{V(x + R e_1) - V(x)}{R} = A_1(x + c R e_1) \rightarrow A_1(x)$$

↑
dipende da R , ma
 $c R e_1 \rightarrow 0$ (vettore)
quando $R \rightarrow 0$

Come richiesto.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 37

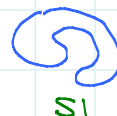
Note Title

14/11/2022

Tipi di insiemi in $\mathbb{R}^2$, ma vale più in generale

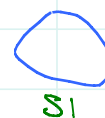
Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- **CONNESSO** se è fatto da un pezzo solo



- **CONNESSO PER ARCHI** se per ogni coppia di p.ti $P, Q \in \Omega$ esiste una curva continua t.c. $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$

- **CONVESSO** se per ogni coppia di p.ti $P, Q \in \Omega$ tutto il segmento PQ sta in Ω



- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ t.c. per ogni $Q \in \Omega$ si ha che il segmento PQ sta tutto in Ω

(è possibile mettere un quadrilatero in P e quello vede tutto Ω)



- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se non ha "buchi" detto un po' meglio, occorre introdurre il concetto di **OMOTOPIA**.



Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e siano $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \Omega$ curve

continue con gli stessi estremi. Una omotopia tra γ_1 e γ_2

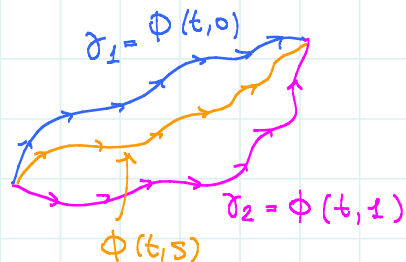
è una funzione $\Phi: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continua t.c.

$$\Phi(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Phi(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Phi(a, s) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \quad \Phi(b, s) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b) \quad \forall s \in [0, 1]$$

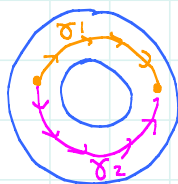
Quando s varia in $[0,1]$ posso pensare $\phi(t,s)$ come una famiglia di curve che congiunge $\gamma_1(t)$ a $\gamma_2(t)$.



Teorema misterioso I seguenti fatti sono equivalenti per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

- (i) Ogni coppia di curve con gli stessi estremi sono omotope
- (ii) Ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante
- (iii) Ogni funzione continua da una circonferenza a valori in Ω si estende ad una funzione continua definita su tutto il cerchio.

Def. Se vale una qualunque delle 3, Ω si dice sempl. connesso.



Esempio dirimente

$\mathbb{R}^3$ meno una sfera è sempl. connesso.

$\mathbb{R}^3$ meno una retta NON è sempl. connesso

Relazioni ovvie

CONVESSO $\Rightarrow$ STELLATO $\Rightarrow$ SEPL. CONNESSO $\Rightarrow$ CONNESSO

tutte quelle al contrario sono false

Back to forme diff.

ESATTA $\Rightarrow$ CHIUSA

CHIUSA $\Rightarrow$ ESATTA ?

In generale NO, ma SI se Ω è semplicemente connesso (se è stellato o connesso, meglio ancora)

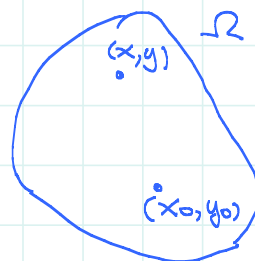
Teorema (versione LIGHT)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ stellato, e sia ω una forma diff. chiusa in Ω .

Allora ω è esatta in Ω .

Dim Sia (x_0, y_0) il pto in cui sta il guardiano.

Per ogni $(x, y) \in \Omega$ pongo



$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega$$

$\uparrow$ segmento congiungente

$$\gamma(t) := (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$$

Anzi, per semplicità tralasciamo tutto e supponiamo che $(x_0, y_0) = (0, 0)$ quindi

$$\gamma(t) = (tx, ty) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

e quindi

$$V(x, y) = \int_0^1 \left\{ \underbrace{A(tx, ty)}_{A(\gamma(t))} \underbrace{x}_{\gamma_1(t)} + \underbrace{B(tx, ty)}_{B(\gamma(t))} \underbrace{y}_{\gamma_2(t)} \right\} dt$$

Spero che $V_x(x, y) = A(x, y)$ e $V_y(x, y) = B(x, y)$

Per calcolare le derivate uso gli integrali dip. da parametro

$$V_x(x, y) = \int_0^1 \left\{ \underbrace{A_x(tx, ty)tx + A(tx, ty) \cdot 1}_{\text{derivata di } A(tx, ty)x \text{ rispetto a } x} + \underbrace{B_x(tx, ty)ty}_{\text{derivata di } B(tx, ty) \text{ risp. a } x} \right\} dt$$

$$= \int_0^1 \{ A_x(tx, ty)tx + A(tx, ty) + A_y(tx, ty)ty \} dt$$

uso
 $B_x = A_y$

= niente panico ... è una derivata

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t A(tx, ty)] \\
 &= [t A(tx, ty)]_{t=0}^{t=1} \\
 &= A(x, y)
 \end{aligned}$$

Per l'altra variabile è uguale
— o —

Esercizio utile Riferire la dimostrazione con d generico

Per il caso generale del sempl. connesso, vale questo teorema

Teorema misterioso Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (aperto e basta).

Siano γ_1 e γ_2 curve di classe C^1 a valori in Ω .

Supponiamo che γ_1 e γ_2 abbiano gli stessi estremi e siano omotope.

Sia ω una forma diff. chiusa in Ω .

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(In breve: l'integrale di forme chiuse su curve omotope è lo stesso)

Oss. Se Ω è pure sempl. connesso, allora γ_1 e γ_2 con estremi coincidenti sono sempre omotope, quindi l'integrale è lo stesso, quindi vale una caratterizzazione dell'esattezza.

— o —

ANALISI 2

LEZIONE 38

Note Title

15/11/2022

LA SOLITA

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Definita in $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ω è CHIUSA

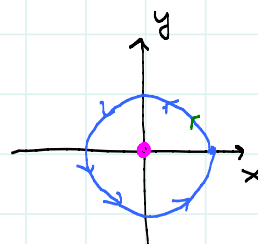
$$A_y = \frac{-(x^2+y^2) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

∴

 ω NON È ESATTA di Ω Come dimostro non esattezza?

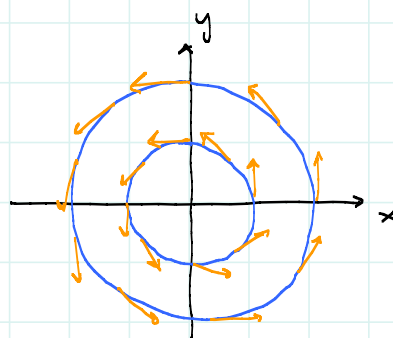
→ spero che non chiusa (ma qui invece lo è)

→ trovo una curva γ chiusa su cui $\int_{\gamma} \omega \neq 0$ Uso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left\{ \underbrace{(-\sin t)}_{-y} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\cos t}_{x} \underbrace{\cos t}_{\dot{y}} \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Curiosità geometrica Come è fatto il campo $\vec{E} = (A, B)$?

Osservo che $(-y, x)$ è (x, y)
ruotato di 90° in verso
antiorario



Interpretazione ciclistica

Se faccio un giro chiuso in bici e ho sempre il vento contro, allora il vento non è gradiente di un potenziale!

$$\int_{\gamma} \underbrace{\langle \vec{E}, \vec{\gamma}' \rangle}_{<0} dt < 0 \Rightarrow \text{forma non esatta}$$

— o — o —

ω è ESATTA su $x > 0$

← è un semipiano, quindi connesso, quindi sempl. conn.

Una primitiva per esempio è

$$V(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$V_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = A(x, y)$$

$$V_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = B(x, y)$$

ω è ESATTA su $x < 0$

La stessa primitiva funziona

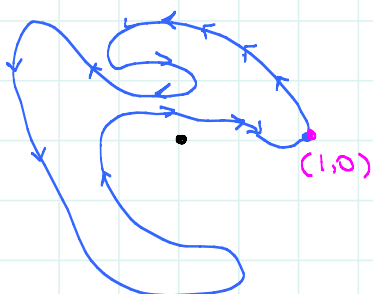
ω è ESATTA su $y > 0$ e su $y < 0$

Stessi ragionamenti e volendo una primitiva è

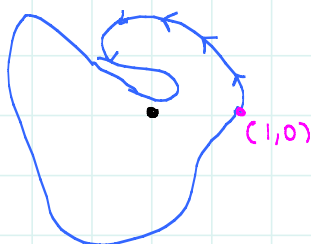
$$V(x, y) = -\arctan \frac{x}{y}$$

ω è ESATTA su $\mathbb{R}^2 \setminus \text{semianno } x \text{ negative}$

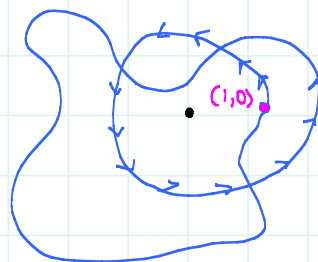
L'insieme è stellato rispetto a $(1, 0)$
quindi anche qui c'è una primitiva



$$\int_{\gamma} \omega = 0$$



$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi$$



$$\int_{\gamma} \omega = 4\pi$$

La prima curva è omotopa ad una curva costante $\Rightarrow \int = 0$

La seconda curva è omotopa alla circ. di prima

terza

" " che fa 2 giri, quindi
l'integrale raddoppia.

Fatto Ogni forma su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che sia chiusa ma non esatta si può scrivere come

$$\omega = \alpha \omega_{\text{solita}} + \omega_2$$

$\uparrow$ numero $\uparrow$ esatta

Fatto da cui segue Se su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abbiamo una forma chiusa, allora questa è esatta se e solo se

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

$\uparrow$
 circonferenza che
 gira intorno al
 buco

Idea: Le possibili curve chiuse o non girano intorno al buco, o sono omotope ad un multiplo della solita circonfer.

A quel p.to basta scegliere α in modo tale che

$$\int_{\gamma} \omega = \alpha \int_{\gamma} \omega_{\text{solita}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$


La differenza $\omega - \alpha \omega_{\text{solita}}$ ricade nel secondo fatto.

TRE strategie per calcolare $\int_{\gamma} \omega$

- ① Uso direttamente la def.
- ② Spero che ω sia esatta, quindi calcolo una primitiva, e faccio la diff. tra i valori agli estremi
in un insieme che contiene il supp. di γ
- ③ Spero che ω sia chiusa, e sostituisco γ con una nuova curva omotopa, che spero essere più semplice.

Esempio $\omega = x dx + y dy$

Chiusa, definita su $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ esatta $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$\omega = x^2 y^3 dx + \alpha x^3 y^2 dy$$

Per quali valori di α è esatta?

$$A_y = 3x^2 y^2 \quad B_x = 3\alpha x^2 y^2$$

- Se $\alpha \neq 1$ allora ω non è chiusa e quindi non è esatta
- Se $\alpha = 1$, allora è chiusa + definita su $\mathbb{R}^2$, quindi esatta

$$V(x, y) = \frac{1}{3} x^3 y^3$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

Facendo il conto si vede che è chiusa e definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Testiamo sulla solita circonferenza $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \cos t (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t dt = 0$$

Quindi deve essere esatta. Una primitiva è

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

$$\omega = 3x^2y dx + (x^3 + e^{-y^2}) dy$$

$$\gamma(t) = (t \sin t, t(\pi - t)) \quad t \in [0, \pi]$$

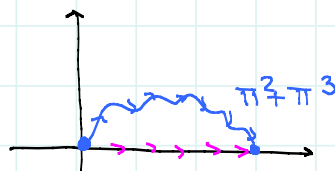
$$\int_{\gamma} \omega = 0 \quad (\text{curva è chiusa e } \omega \text{ è chiusa, quindi esatta su } \mathbb{R}^2)$$

$$\gamma(t) = (t^2 + t^3, t(\pi - t)) \quad t \in [0, \pi]$$

La curva non è più chiusa 😞, quindi devo calcolare la primitiva

$$V(x, y) = x^3y + \text{primitiva di } e^{-y^2} \quad \therefore$$

Proviamo la ③



ω è chiusa, quindi cambio curva

usando la rettilinearia $(t, 0)$ con $t \in [0, \pi^2 + \pi^3]$ e su questa il conto è banale e viene 0.

— o — o —

(in alternativa potrei lasciar indicata la primitiva)

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 39

Note Title

18/11/2022

SUPERFICI NELLO SPAZIO

Tre tipi di presentazione:

→ cartesiana

→ implicita

→ parametrica

Cartesiana Grafico di una funzione $z = f(x, y)$ dove
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Implicita Definita come luogo di zeri $g(x, y, z) = 0$
 sotto certe ipotesi su g .

PARAMETRICA Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme. Una superficie è una
 funzione

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Si definisce **sostegno** di una superficie l'immagine di Φ , dunque

$$\text{sostegno}(\Phi) = \{ \Phi(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in \Omega \}$$

Oss. La cartesiana rientra ponendo

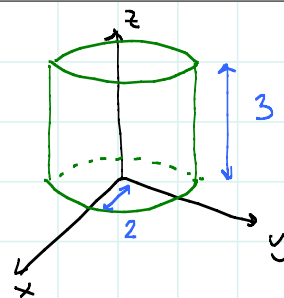
$$\Phi(u, v) := (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega.$$

Esempio 1 Il cilindro in figura è sostegno della superficie

$$\Phi(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$$

$$\text{con } \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

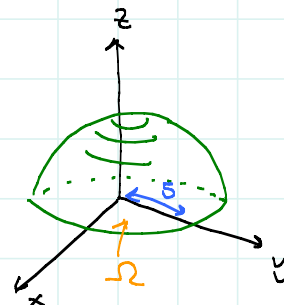
$\underbrace{\quad}_{u} \quad \underbrace{\quad}_{v}$



Esempio 2 Semisfera alta di raggio 5

$$\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{25 - u^2 - v^2}) \quad \uparrow \text{param.}\br/> \text{cartesiana}$$

$$\text{con } \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 25\}$$



In alternativa posso usare le sfere. In versione geografica sarebbe

$$\Phi(u, v) = (5 \cos v \cos u, 5 \cos v \sin u, 5 \sin v)$$

$$\text{con } \Omega = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$

$\underbrace{\quad}_{u} \quad \underbrace{\quad}_{v}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 latitudine longitudine
 — 0 — 0 —

PIANO TANGENTE

Nel caso cartesiano è il piano di equazione

primi 2 termini di Taylor nello sviluppo di $f(x, y)$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

viene dalla definizione di differenziale

$\uparrow$ ha senso se
 $\nabla f(x_0, y_0)$ esiste

Piano tangente nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Nel caso implicito $g(x, y, z) = 0$, il piano tangente in un p.to generico (x_0, y_0, z_0) della superficie è

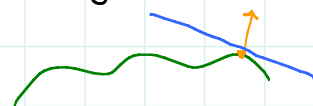
$$g_x(x_0, y_0, z_0)x + g_y(x_0, y_0, z_0)y + g_z(x_0, y_0, z_0)z = \text{qualcosa}$$

↑
fatto in modo
che (x_0, y_0, z_0) lo
soddisf.

$$g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(\dots)(y - y_0) + g_z(\dots)(z - z_0) = 0$$

È come dire che $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ è $\perp$ al piano tangente.

[Tutto ciò ha senso se $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$]



Caso parametrico Prendiamo $(u_0, v_0) \in \Omega$ e vogliamo il piano tangente nel punto $\Phi(u_0, v_0)$.

Il piano è dato in parametrica

$$\Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Ha senso quando Φ_u e Φ_v esistono, quindi $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$ devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI, il che è equivalente a dire che la matrice jacobiana di Φ ha rang max (cioè 2)

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix}$$

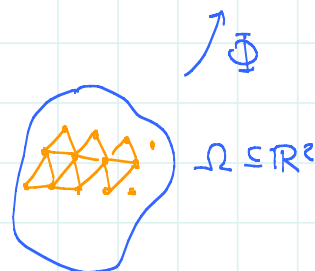
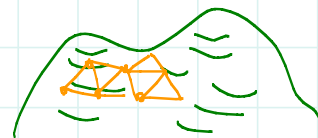
↑ ↑
 $\Phi_u(u, v)$ $\Phi_v(u, v)$
— o — o —

AREA DI UNA SUPERFICIE

Facciamo il caso parametrico.

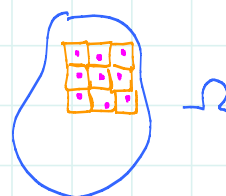
Con le curve si passava per le poliguali.

L'analogo qui sarebbe "triangolare la sup",
poi sommare le aree dei triangoli, e
passare al limite o al sup
"infittendo la triangolazione"



PORTOPPO IL SUP È PRATICAMENTE
SEMPRE $+\infty$

Il controesempio classico è la lanterna di SCHWARZ (google) in
cui c'è un effetto pisanonica che fa esplodere l'area.

Definizione che funziona

- Rettangolo Ω
- In ogni rettangolo scelgo un p.to
- In ogni rettangolo approssimo ϕ
con il suo Taylor di ordine 1 calcolato
nel p.to prescelto
- Calcolo l'immagine del rettangolo mediante l'approssimazione
- Approssimo il sostegno della superficie con dei parallelogrammi
contenuti in un po' di piani tangenti
- Algebra Lineare $\rightsquigarrow$ aree di questi parallelogrammi
- Sommo tutto e passo al limite.

Formula per il calcolo

$$\text{Area}(\Phi) = \int_{\Omega} \sqrt{M_1^2(u,v) + M_2^2(u,v) + M_3^2(u,v)} \, du \, dv$$

dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori 2×2 di $J\Phi(u,v)$.

Più precisamente

$$M_1 = Y_u Z_v - Y_v Z_u \quad \leftarrow \text{cancello prima riga}$$

$$M_2 = Z_u X_v - Z_v X_u$$

$$M_3 = X_u Y_v - X_v Y_u$$

Quindi

$$\text{Area}(\Phi) = \int_{\Omega} \|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)\| \, du \, dv$$

Cosa che ci sta sotto: se $a, b \in \mathbb{R}^3$, allora

$$\|a \wedge b\| = \text{area parallelogrammo spannato da } a \text{ e } b$$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 40

Note Title

18/11/2022

Area di superfici cartesiane

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{con } (u, v) \in \Omega$$

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Φ_u $\uparrow$ Φ_v

$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$$

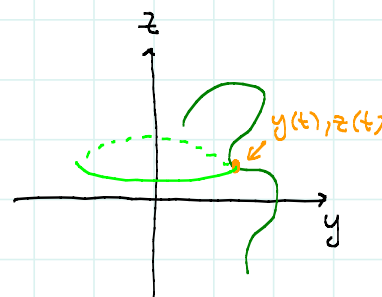
$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2} \, du \, dv$$

← analogo per le curve
 $\text{lunghezza} = \int \sqrt{1 + \dot{f}^2}$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Consideriamo una curva nel piano y, z

$$\underbrace{(y(t), z(t))}_{\geq 0} \quad \text{con } t \in [a, b]$$



Ruoto tutto di 2π intorno all'asse z (o anche di un angolo α)
 Qual è la parametrizzazione della sup. che si ottiene

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) = \Phi(t, \theta)$$

$$\text{con } (t, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

← Fissato t , abbiamo tutti i punti ad altezza $z(t)$ che distano $y(t)$ dall'asse z .

Dimostriamo che

$$\text{Area}(\text{Sup}) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

e che vale il teo. di Guldino 2, secondo cui

$$\text{Area}(\text{Sup}) = \text{Lunghezza}(\text{curva}) \cdot \underbrace{2\pi y_G}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lunghezza della circ.} \\ \text{descritta dal baricentro} \\ \text{della curva durante la} \\ \text{rotazione}}}$$

Dim $\phi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$

Calcoliamo

$$J\phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & -y(t) \sin \theta \\ \dot{y}(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta \\ \dot{z}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$(M_1, M_2, M_3) = (-\dot{z}(t) y(t) \cos \theta, \dot{z}(t) y(t) \sin \theta, y(t) \dot{y}(t))$$

quindi $\|(M_1, M_2, M_3)\| = \{ \dot{z}(t)^2 y(t)^2 \cos^2 \theta + \dot{z}(t)^2 y(t)^2 \sin^2 \theta + y(t)^2 \dot{y}(t)^2 \}^{1/2}$

$$= \{ \dot{z}(t)^2 y(t)^2 + \dot{y}(t)^2 y(t)^2 \}^{1/2}$$

$$= y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

$\uparrow$
non metto il val. assol. perché
avevamo supposto $y(t) \geq 0$

Integrando abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\sigma \, y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \\ &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{era } \alpha \text{ se ruotavamo di un} \\ &\quad \text{angolo } \alpha \end{aligned}$$

Da qui a Guldino 2 } Il baricentro della curva è il punto (y_G, z_G) con

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{lunghezza}(\sigma)} \int_{\sigma} y \, ds \\ &= \frac{1}{\text{lunghezza}(\sigma)} \int_a^b y(t) \underbrace{\sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}_{\text{speed}} dt \end{aligned}$$

Da qui è ovvio che

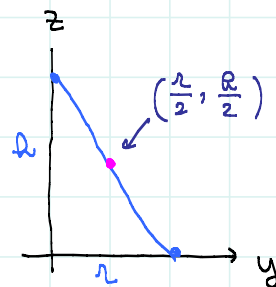
$$2\pi y_G \cdot \text{lunghezza}(\sigma) = \text{Area}(\text{Sup})$$

Soliti esempi

→ Sup. laterale del cono

$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\sigma) \cdot 2\pi y_G$$

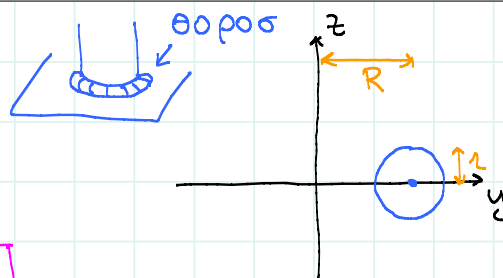
$$= \sqrt{R^2 + r^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r \sqrt{R^2 + r^2}$$



→ Sup. laterale del toro

$$\text{Area} = \text{lunghezza}(\gamma) \cdot 2\pi y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = \boxed{4\pi^2 r R}$$

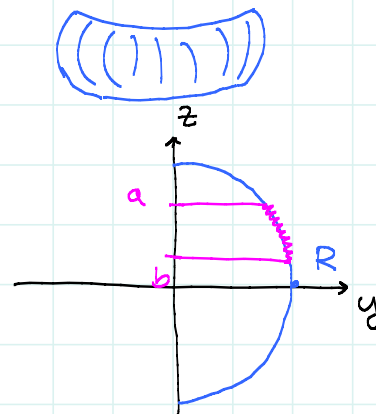


→ Area del segmento sferico

Usiamo la formula

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$$(y(t), z(t)) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \\ \text{con } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$



$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \cos \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= 2\pi R (\underbrace{R \sin \theta_2}_{a} - \underbrace{R \sin \theta_1}_{b}) \\ &= \boxed{2\pi R (a - b)} \end{aligned}$$

Caso speciale : $a = R$ e $b = -R$ e si ottiene

$$\boxed{\text{Area (Sup. sfera)} = 4\pi R^2}$$

— 0 — 0 —

INTEGRALI SUPERFICIALI

1) Notazioni

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

→ S è il sostegno di una superficie (sarebbe più corretto $\int_\Phi$)

→ $f(x, y, z)$ è una funzione di 3 variabili definita almeno sul sostegno della superficie

→ $d\sigma$ sta ad indicare l'integrale superficiale.

2-3) Significato e definizione ... si fanno le somme inferiori e superiori

Area parallelogramma. Max/min di $f(\phi(u, v))$

↑
corrispondente ad un rettangolo in Ω

↑
nello stesso rettangolo di Ω

Si passa al limite infittendo la rettangolazione.

4) Formula per il calcolo nel caso regolare

$$\int_\Phi f(x, y, z) d\sigma = \int_\Omega f(\phi(u, v)) \|\phi_u \wedge \phi_v\| du dv$$

Esercizio Calcolare il baricentro di una semisfera come superficie (è più alto rispetto alla semisfera come solido) e viene esattamente a metà del raggio

[Parametrizzare in sferiche e calcolare $\phi_u \wedge \phi_v$]

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 41

Note Title

21/11/2022

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Gradiente

INPUT: funzione scalare $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

OUTPUT: vettore

$$\text{Grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \right)$$

Laplaciano

INPUT: funzione scalare

OUTPUT: funzione scalare

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

In 2 variabili : $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ " 3 " : $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ Oss. Δf è la traccia della matrice HESSIANA

Divergenza

INPUT: funzione vettoriale $E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ OUTPUT: funzione scalare $\text{div} E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{div} E = \sum_{i=1}^d \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x)$$

 i -esima componente
del campo E In 2 variabili $E = (A, B)$ $\text{div} E = A_x + B_y$ In 3 variabili $E = (A, B, C)$ $\text{div} E = A_x + B_y + C_z$

Rotore (Oggetto specifico di $\mathbb{R}^3$)

INPUT : funzione **vettoriale** $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 OUTPUT : funzione **vettoriale** $\text{rot } E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Si definisce sviluppando formalmente il Del

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) =: \text{rot } E$$

Oss. In fisica spesso si fa il rotore anche di campi in dim 2, definito come

$$\text{rot } (A, B) := \text{rot } (A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

↑ ↑
dipendono
solo da x e y

Notazioni "dei fisici"

Grad = ∇ *gradiente*

Δ = ∇^2

$\text{div } E = \nabla \cdot E$

$\text{rot } E = \nabla \wedge E$

↑

curl E in inglese

$(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

$\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$

$(\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (A, B, C) = \dots$

in fondo è quello che abbiamo fatto

— o — o —

Formule base

Assumendo regolarità quanto serve

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \mathbf{0}$$

(inversione ordine di derivazione
↑
vettore)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) &= \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{yz} - f_{zy}, f_{zx} - f_{xz}, f_{xy} - f_{yx}) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{array}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) = \mathbf{0}$$

(ancora inversione ordine di derivazione)
↑
numero

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} E) = C_{yx} - B_{zx} + A_{zy} - C_{xz} + B_{xz} - A_{yz}$$

Achtung! Molte combinazioni di operazioni NON hanno senso,
ad esempio

$$\nabla(\operatorname{rot} E)$$

$$\operatorname{div}(\Delta f)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{div} E)$$

Altre invece hanno senso

— o — o —

Gradiente nullo / uguale

- Se $\nabla f(x) \equiv 0$, e Ω insieme di definizione è **CONNESSO**
 allora $f(x)$ è costante
- Se $\nabla f_1(x) = \nabla f_2(x)$ in Ω , e Ω è CONNESSO, allora
 $f_1(x) - f_2(x) = \text{costante}$ in Ω

Rotore nullo / uguale

- Se $\text{rot } E = 0$, e Ω insieme di definizione è **SEMP. CONN.**
 allora $E = \nabla f$ per una certa f .

$$\text{rot } E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (0, 0, 0)$$

allora

$$C_y = B_z$$

$$A_z = C_x$$

$$B_x = A_y$$

$$\leadsto \omega = A dx + B dy + C dz \text{ forma chiusa}$$

- Se $\text{rot } E_1 = \text{rot } E_2$, e Ω insieme ... è sempl. connesso,
 allora $E_1 = E_2 + \nabla f$

Oss. Se $E = (A, B, C)$ è il campo associato alla solita,
 allora $\text{rot } E = 0$, ma E non è ∇f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Oss. Il rot dei fisici in dim 2 fa lo stesso mestiere per
 i campi 2 dimensionali

Finestra sul futuro: una eventuale generalizzazione del
 rot in dim d avrebbe $\binom{d}{2}$ componenti

Divergenza nulla / uguale

gratis nel caso
stellato

→ Se $\text{div } E = 0$, e l'insieme di definizione ha una certa propr.
allora $E = \text{rot } F$ per un certo campo F .

↑
"assenza di
buchi 3-dim"

→ Se $\text{div } E_1 = \text{div } E_2$ e ...
allora $E_1 = E_2 + \text{rot } F$

Oss. Per questi operatori valgono formule di calcolo simili a
quelle usuali

$$\text{div}(\underbrace{f}_{\text{funzione}} \underbrace{E}_{\text{campo}}) = \langle \nabla f, E \rangle + f \text{div } E$$

$$\begin{aligned} \text{div}(fA, fB, fC) &= f_x A + f A_x \\ &\quad + f_y B + f B_y \\ &\quad + f_z C + f C_z \\ &\quad \downarrow \qquad \downarrow \\ &\langle \nabla f, E \rangle \quad f \text{div } E \end{aligned}$$

The slope of a scalar function has no curl.

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

The curl of a vector function has no convergence.

$$\text{div}(\text{rot } E) = 0$$

The convergence of the slope of a scalar function is its concentration.

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$$

The concentration of a vector function is the slope of its convergence, together with the curl of its curl.

↑ [Da MAXWELL: anticonoriginale in cui si introduce il termine
CURL (vedi CURL su WIKI in inglese)]

$$\text{rot}(\text{rot } E) = \pm(\Delta A, \Delta B, \Delta C) \pm \nabla(\text{div}(E))$$

[Fare per esercizio]

ANALISI 2

-

LEZIONE 42

Note Title

21/11/2022

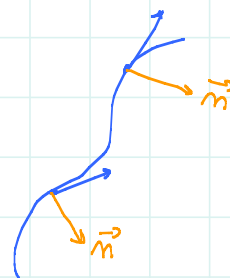
INTEGRALI DI FLUSSO

Versione 2 dimensionale

Ingredienti : $\rightarrow$ Campo di vettori $E = (A(x,y), B(x,y))$
 $\rightarrow$ Curva $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\rightarrow$ ORIENTAZIONE della curva, cioè una scelta del vettore normale $\vec{n}$ alla curva

Vettore normale canonico = tangente ruotato di 90° orario

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$



$$\text{tangente} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}$$

$$\vec{n} = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t)) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \quad \text{canonico}$$

$$\text{Flusso di } E \text{ attraverso } \gamma = \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

Interpretazione fisica:

- il sostegno di γ è una vela
- E è la direzione del vento
- il flusso è quanto il vento spinge la vela nella direzione di $\vec{n}$

Riscriviamo in altro modo, supponendo che $\vec{n}$ sia quello canonico (altrimenti cambio segno o percorso in senso inverso della curva)

$$\vec{n} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle E, n \rangle ds &= \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}} + B(x(t), y(t)) \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dots}} \right\} \sqrt{\dots} dt \\ &= \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \} dt \\ &= \int_{\gamma} A dy - B dx \end{aligned}$$

Conclusione

$$\boxed{\int_{\gamma} \langle E, n \rangle ds = \int_{\gamma} \underbrace{A dy - B dx}_{\text{forma differenziale}}}$$

↑
canonico

Oss. A sx abbiamo integrale curvilineo di E scalari n
 A dx abbiamo integrale di una forma che corrisponde
 a fase $(-B, A)$ scalari tangenti

↑
campo (A, B) ruotato
di 90° antiorario

↑ $\vec{n}$ ruotato di 90°
antiorario

— o — o —

Versione 3 dimensionale

- Ingredienti : $\rightarrow$ campo vettoriale (A, B, C)
 $\rightarrow$ superficie $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$
 $\rightarrow$ ORIENTAZIONE della superficie, cioè la scelta di uno dei 2 vettori normali

Il vettore normale canonico è il solito $(M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$ diviso per la norma

$$\text{Flusso di } E \text{ attraverso } S = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
integrale superficiale

$$\int_S \langle E, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \left\{ A \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} + B \frac{M_2}{\sqrt{\dots}} + C \frac{M_3}{\sqrt{\dots}} \right\} du dv$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

dove la sup. è parametrizzata da $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

— o — o —

Teorema della DIVERGENZA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora sotto opportune ipotesi di regolarità vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow$ integrale doppio

$\uparrow$ curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx

$\uparrow$ normale uscente

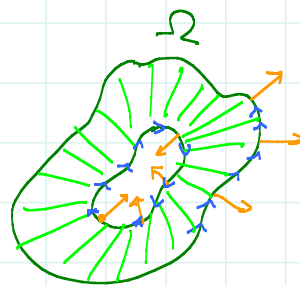
Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$, quindi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Allora

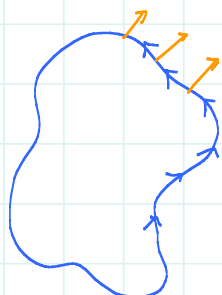
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
vettore normale
esterno.

Occhio alla faccenda del dx-sx in dim 2.



Interpretazione ciclistica



Se faccio un giro in bici (chiuso) e ho sempre il vento da destra, che dico all'arrivo.

Se il giro è stato fatto in senso antiorario, allora per forza da qualche parte la divergenza è negativa

$$\text{Vento da destra} = \langle E, \vec{n} \rangle < 0 \text{ sempre}$$

— 0 — 0 —

GAUSS - GREEN = integrazione per parti di Analisi 2

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
integrale doppio o
triplo

↑
integrale doppio o
triplo

↑
integrale sul
bordo

↑
vettore normale esterno

Quando $f \equiv 1$ otteniamo il precedente.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 43

Note Title

22/11/2022

Teorema della divergenza

 $d=2$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

int. doppio

integr. curvilineo
di funzioneintegr. curv. di
forma diff.vettore normale
esternocurva che percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a sx $\vec{E} = (A, B)$ $d=3$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\Phi} A \, \eta_1 + B \, \eta_2 + C \, \eta_3 \, du \, dv$$

int. triplo

integr. sup.

 $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una param.
di $\partial\Omega$
con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vettore norm.
esterno $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$
con segno giusto

Formula di integr. per parti

 f = funzione scalare E = campo di vettori

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Caso speciale in cui $\vec{E} = \nabla g$ con g funzione scalare

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \nabla g, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Laplaciano

 $\frac{\partial g}{\partial n}$ = derivata
direzionale

Banale Formula di integr. per parti $\Rightarrow$ teo. div.
 [Basta prendere $f \equiv 1$]

Facile Teo. div. $\Rightarrow$ formula integr. per parti

Applico il teo. della divergenza non al campo $\vec{E}$, ma al campo $f\vec{E}$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) = \int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 teo. div. applicato
 al campo $f\vec{E}$

Ora uso che $\operatorname{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$ e quindi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) = \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E}$$

$\downarrow$ si porta a dx

per $d=3$ cambia poco

Ragionevole Dim. del teo. della div. in dimensione $\boxed{d=2}$ nel
 caso in cui Ω è un insieme normale

Dimostriamo separatamente i due pezzi

①

$$\iint_{\Omega} A_x dx dy = \int_{\gamma} A dy$$

②

$$\iint_{\Omega} B_y dx dy = - \int_{\gamma} B dx$$

La somma dei due è quello che vogliamo.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

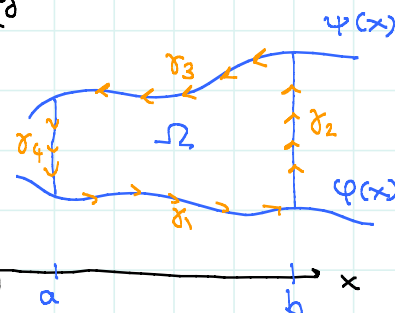
$$\gamma_1 (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_2 (b, t) \quad t \in [\varphi(b), \psi(b)]$$

$$\gamma_3 (t, \psi(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_4 (a, t) \quad t \in [\varphi(a), \psi(a)]$$

al contrario



Dim ②
$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} B_y(x, y) dy$$

$$= \int_a^b dx [B(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}$$

$$= \int_a^b B(x, \psi(x)) dx - \int_a^b B(x, \varphi(x)) dx$$

$$\int_{\gamma} B(x, y) dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\begin{matrix} \text{O} & & \text{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{O} & & \text{O} \end{matrix}$

$$\int_{\gamma_1} B(x, y) dx = \int_a^b B(t, \varphi(t)) \cdot \overset{\uparrow}{\dot{x}} dt$$

$\varphi(b)$

$$\int_{\gamma_2} B(x, y) dx = \int_{\varphi(b)}^b B(b, t) \cdot \overset{\uparrow}{\dot{x}} dt$$

$$\int_{\gamma_3} B(x, y) dx = - \int_a^b B(t, \psi(t)) \cdot \overset{\uparrow}{\dot{x}} dt$$

$\uparrow$ percorso al contrario

Abbiamo ottenuto esattamente i pezzi che servivano

Dim di ① Idea: definire la funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b]$$

Derivando si ottiene (integr. dipendente da parametro)

$$H'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy + A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) - A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x)$$

Adesso usiamo che

$$\int_a^b H'(x) dx = H(b) - H(a)$$

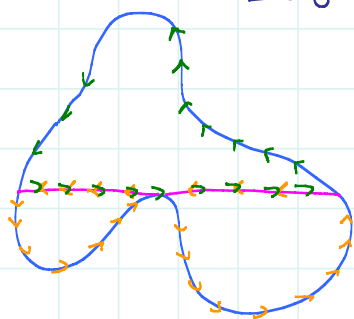
Sostituisco tutto

$$\begin{aligned} \int_a^b H'(x) dx &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy \rightsquigarrow \iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy \\ &+ \int_a^b A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) dx \rightsquigarrow \int_{\gamma_3} A(x, y) dy \\ &- \int_a^b A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) dx \rightsquigarrow - \int_{\gamma_1} A(x, y) dy \end{aligned}$$

$\uparrow (t, \psi(t))$
 $\uparrow (t, \varphi(t))$

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} A(b, y) dy - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} A(a, y) dy \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\int_{\gamma_2} A(x, y) dy - \int_{\gamma_4} A(x, y) dy \\ &\quad \uparrow (b, t) \qquad \uparrow (a, t) \end{aligned}$$

Portando tutto dalla parte giusta abbiamo la formula



Idea molto brutale e non formalizzabile

→ quando spesso in insieme normali, i "bordi aggiunti" si semplificano.

ANALISI 2

-

LEZIONE 44

Note Title

25/11/2022

Teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

In dimensione 2, se $\vec{E} = (A, B)$ allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx$$

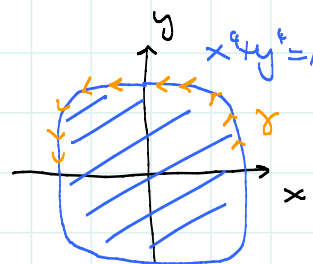
perché $\partial\Omega$ lasciamo
 Ω a sx

Utilizzo: di volta in volta scegliamo cosa è più comodo calcolare

Esempio 1 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$
 $\vec{E}(x, y) = (x^4 y^6, y^8)$

Voglio calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$



1° modo Parametizzo $\partial\Omega$, calcolo $\vec{n}$ e uso la formula

2° modo $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\gamma} A(x, y) \, dy - B(x, y) \, dx$

così mi risparmio la normale

Come parametizzo $\partial\Omega$?

$\gamma(t) = (\sqrt[4]{\cos t}, \sqrt[4]{\sin t})$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e analogo negli altri quadranti

$\gamma(t) = (t, \pm\sqrt[4]{1-t^4})$ con $t \in [-1, 1]$, poi aggiunto i versi

AREA DI UN DOMINIO LIMITATO DA UNA CURVA DATA



Sia γ una curva chiusa e semplice che percorre nel verso giusto il $\partial\Omega$
Allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx$$

Per combinazione ci sono anche tutte le formule del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} \lambda x dy - (1-\lambda) y dx$$

Con $\lambda = \frac{1}{2}$ diventa

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$$

Dim Considero il campo $E(x,y) = (x, 0)$ e applico teo. di'o.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \text{div } E \, dx dy &= \int_{\gamma} x dy \\ &\quad \uparrow \text{A} dy - \text{B} dx \\ \iint_{\Omega} 1 \, dx dy & \\ &\quad \text{Area} \end{aligned}$$

Se invece scelgo $E(x,y) = (0, y)$ ritrovo

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx dy = \iint_{\Omega} \text{div } E \, dx dy = \int_{\gamma} -y dx \\ \quad \uparrow \text{A} dy - \text{B} dx$$

Esempio 3 Area del cerchio con fo. div.

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

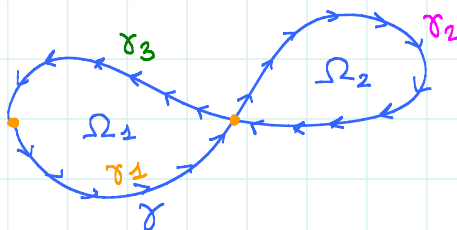
$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\cos t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

Alternativa: potevo usare la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) \, dt = -\pi$$

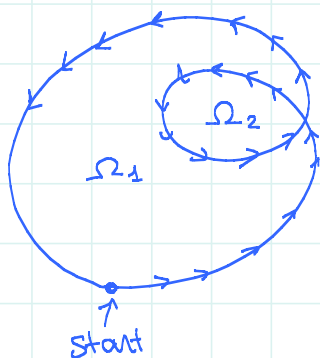
no: La curva γ percorre la circ.
in verso opposto a quello che
serve, quindi occorre mettere
un segno $-$.

Oss.



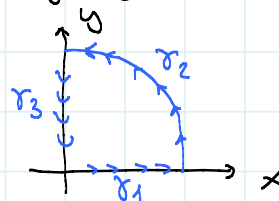
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x \, dy &= \\ &= \text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} = \underbrace{\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3}}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_4}}_{-\text{Area}(\Omega_2)}$$



$$\int_{\gamma} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1) + 2 \text{Area}(\Omega_2)$$

Esempio 4 $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \}$



$$\int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy + \int_{\gamma_3} x dy$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (0, t) \quad t \in [0, 1] \text{ ma poi devo mettere il segno -}$$

$$\int_{\gamma_1} x dy = \int_0^1 \underset{x}{t} \underset{y}{0} dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} x dy = \dots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$-\int_{\gamma_3} x dy = -\int_0^1 \underset{x}{0} \underset{y}{1} dt = 0$$

Allo stesso modo, se voglio

$$\iint_{\Omega} \underset{\uparrow \text{div } E}{x} dx dy = \int_{\gamma} \underset{\uparrow A dy - B dx}{\frac{x^2}{2}} dy$$

Solito teorema con $\vec{E} = (\frac{x^2}{2}, 0)$

$$\iint_{\Omega} x dx dy = - \int_{\gamma} xy dx \quad E = (0, xy)$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 45

Note Title

25/11/2022

Esercizio 1 Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (t+t^3, t+t^4)$

Sia Ω il dominio limitato dal sostegno di γ e dalla retta $y=x$.

Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

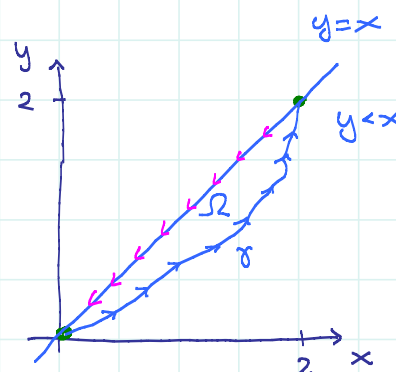
ROAD MAP: $\rightarrow$ capire il sostegno di γ

$\rightarrow$ capire Ω

$\rightarrow$ capire come organizzare $\iint_{\Omega}$.

1° passo γ è semplice (entrambe componenti sono monotone)
e va da $(0,0)$ a $(2,2)$ con $x(t)$ e $y(t) \nearrow$

2° passo Decidere la posizione relativa
della retta e del sostegno



Claim: sta sotto, cioè $y(t) \leq x(t)$
con uguaglianza solo agli estremi

$$y(t) \leq x(t) \Leftrightarrow$$

$$t+t^4 \leq t+t^3 \Leftrightarrow \underset{+}{t^3} (\underset{-}{t-1}) \leq 0 \quad \because$$

3° passo Se potessi scrivere la curva come $y = \varphi(x)$ procederei poi
con Ω insieme normale asse x

$$t+t^3, t+t^4$$

"
 $x \nearrow$ vorrei ricavare t in funzione di x
ma non sono capace $\because$

4° passo Provo ad usare il teo. della divergenza

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy & E(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x^2y, 0\right) \\ &= \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}x^2y \, dy\end{aligned}$$

Ora $\partial\Omega$ ha due parti

→ γ data con il verso giusto

→ $\gamma_1(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 2]$ con verso invertito

$$\begin{aligned}&= \int_{\gamma \text{ data}} \frac{1}{2}x^2y \, dy - \int_{\gamma_1} \frac{1}{2}x^2y \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(\underbrace{t+t^3}_x)^2(\underbrace{t+t^4}_y)(\underbrace{1+4t^3}_{y'}) \, dt - \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{t^3}_{x^2y} \cdot \underbrace{1}_{y'} \, dt\end{aligned}$$

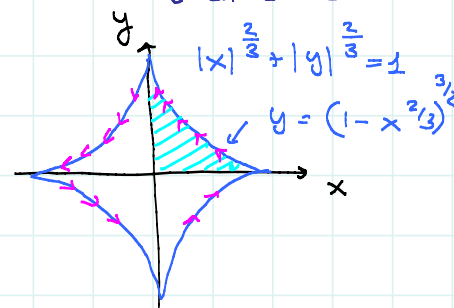
Esercizio 2 $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Allora γ è chiusa e semplice. Determinare l'area del dominio che limita.

Chiusura banale. Semplicità. Aiutiamo col sistema

$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ \sin^3 t = \sin^3 s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} t=s \\ \text{oppure} \\ t=0 \quad s=2\pi \\ t=2\pi \quad s=0 \end{matrix} \quad \text{☺}$$

Osservo che $|x(t)|^{\frac{2}{3}} + |y(t)|^{\frac{2}{3}} = 1$



1° modo

$$\text{Area}(\Omega) = 4 \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} \, dx \stackrel{=}{=} \int_{x=\sin^3 t} \quad (\text{con il segno di poi})$$

2° modo Uso teo. div.

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_0^{2\pi} x \, dy \quad \text{se gira nel verso giusto (e lo fa)} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^4 t \, dt = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In alternativa} \quad \text{Area}(\Omega) &= - \int_0^{2\pi} y \, dx \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) \, dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = \pi \end{aligned}$$

Ma facendo $\frac{1}{2} \cdot 1^0 + \frac{1}{2} \cdot 2^0$ trovo

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t \, dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(2t) \, dt \quad \begin{matrix} 2t = z \\ dt = \frac{1}{2} dz \end{matrix} \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(z) \cdot \frac{1}{2} \, dz \\ &= \frac{3}{16} \cdot 2\pi = \frac{3}{8} \pi \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio 3 Consideriamo la superficie $z = 2 - x^2 - 4y^2$ con $z \geq 0$ orientata con il versore normale che punta verso il basso.

Calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \quad \text{con } E = (xy, -y, 2z + x^2)$$

1° modo parametrizzo e uso formula

$$\Phi(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - 4v^2) \quad \text{con } (u, v) \in \Omega \text{ e}$$

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 4v^2 \leq 2\} = \text{ellisse}$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \iint_{\Omega} A M_1 + B M_2 + C M_3 \, du dv$$

dipende se (M_1, M_2, M_3) induce
l'orientazione giusta

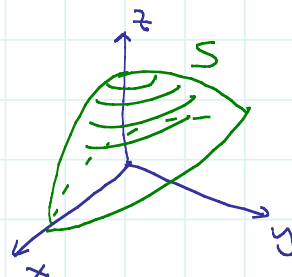
$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -8v \end{array}$$

$$\leadsto (M_1, M_2, M_3) = (\dots, \dots, 1)$$

↑
punta verso
l'alto, quindi bisogna
mettere segno -.

Non resta che sostituire A, B, C, M_1, M_2, M_3 tutto in funzione di u e v .

2° modo Aggiungo la base e faccio
teo. della div



$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx dy dz = - \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$+ \int_{\text{base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
 $(0, 0, -1)$

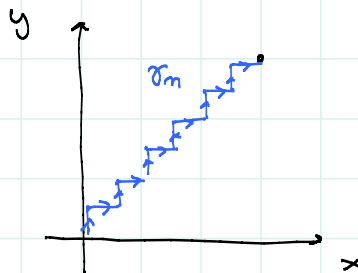
$$\iiint_V \operatorname{div} E = \iiint_V (y+1) \, dx dy dz = \text{Volume}(V) = \text{base} \times \text{altezza}$$

$$\int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (-2z - x^2) \, dx dy = - \iint_{x^2 + 4y^2 \leq 2} x^2 \, dx dy = \text{si fa.}$$

↑
= 0 sulla base

Esercizio della scaletta

γ_n = curva da $(0,0)$ a $(1,1)$
 con gradini di $\frac{1}{n}$



Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} f(x,y) ds$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 46

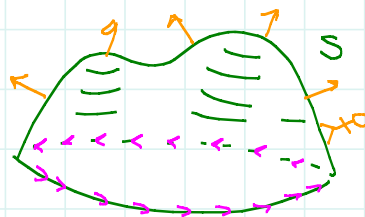
Note Title

28/11/2022

ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

Come si orienta il bordo di una sup.?

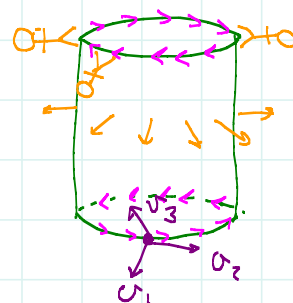
Data una orientazione su una sup. S ,
l'orientazione (verso di percorrenza)
involotta sul bordo è quella di un ormino che,
restando in piedi sulla sup. secondo il
versore normale dato dall'orientazione della sup.,
percorre il bordo lasciando la sup. a sinistra



Esempio Sup. laterale di un cilindro con orientazione esterna.

Come è orientato il bordo?

Come in figura, quindi in particolare in
maniera opposta nei due pezzi del bordo.



Formalmente abbiamo 3 vettori in gioco

→ il versore nel piano tangente alla sup. che punta verso l'esterno. u_1

→ il versore corrispondente alla velocità dell'ormo u_2

→ il versore normale alla sup. u_3

e questi devono avere la stessa orientazione della base canonica di $\mathbb{R}^3$
cioè la matrice di cambio base ha $\det = +1$.

u_1 = braccio destro di

u_2 = direzione occhi di

u_3 = testa di ormino

Fatto generale comodo Se la sup. è parametrizzata come

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

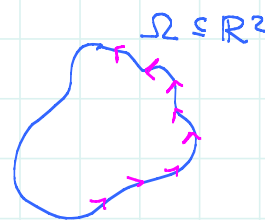
con sufficiente regolarità, e

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

percorrendo $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra e $\vec{n} = \Phi_u \wedge \Phi_v$, allora

$$\Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

percorrendo il bordo della sup. con il verso giusto.



Oss. L'enunciato precedente va interpretato.

Pensiamo al solito cilindro

$$\Phi(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$$

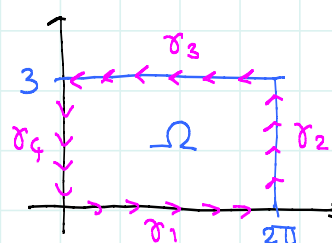
↑ ↑
Raggio 2

$$u \in [0, 2\pi]$$

$$v \in [0, 3]$$

↑
altezza

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



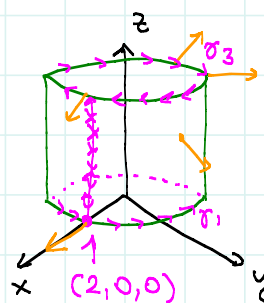
$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$$

= orientazione

Il punto $(2, 0, 0)$ arriva da

$$u = 0 \text{ e } v = 0$$

In quel punto $\Phi_u \wedge \Phi_v = (2, 0, 0)$



Parametrizz. bordo "sotto" : $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$

" " "sopra" : $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 3)$ MA percorsa al contrario

— o — o —

FORMULA DI STOKES (aka TEOREMA DEL ROTORE)

Enunciato da fisica: il flusso del rotore attraverso una sup. è uguale alla circuitazione del campo stesso lungo il bordo della superficie

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

campo di vettori (orange arrow to $\vec{E}$)
 int. superf. (orange arrow to S)
 versore tang. al bordo nel verso giusto (green arrow to $\vec{\tau}$)
 int. curvilineo (green arrow to γ)
 superficie (orange arrow to S)
 orientazione della sup. (orange arrow to $\vec{n}$)
 bordo della superficie (green arrow to ∂S)
 curva o unione di curve che percorre ∂S nel verso giusto (pink arrow to γ)

Uguaglianza tra secondo e terzo è praticamente ovvia se si osserva che, se σ percorre ∂S , allora

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}}, \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dots}} \right)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds &= \int_{\gamma} \left(A \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dots}} + B \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}} + C \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dots}} \right) \underbrace{\sqrt{\dots}}_{\text{speed}} dt \\ &= \int_{\gamma} (A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}) dt = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz \end{aligned}$$

Strategia per la dim. della prima

- Scrivo una param. $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S
- Scrivo una param. $\sigma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di $\partial\Omega$
- Otteengo $\Phi \circ \sigma$ come param. di ∂S
- Trasformo tutto in Ω e $\partial\Omega$ e quello che otteengo è il teo. della div.

Achtung! Quando scriviamo ∂S e $\partial \Omega$ sono due cose completamente diverse

→ $\partial \Omega$ è il "bordo topologico", definito come l'insieme dei punti x tale che $B(x, r)$ interseca sia Ω sia il suo complementare, per ogni $r > 0$.

Secondo questa definizione, una *sup.* è tutto bordo

→ ∂S va pensato per ora "intuitivamente".

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 47

Note Title

28/11/2022

Conseguenza di STOKES

Il flusso di un rotore attraverso una sup. chiusa (senza bordo) è sempre nullo

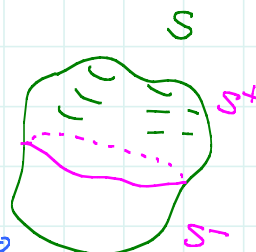
$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

↑
se è vuoto, questo viene 0

$$\int_{S^+} \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\int_{S^-} \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^-} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

scritto così, il $\vec{\tau}$ è opposto sopra e sotto



Ora $\partial S^+ = \partial S^-$, però sono percorsi in maniera opposta (se ho S^+ a dx, avrò S^- a sx, e viceversa).

Quindi quando sommo viene 0.

— o — o —

INVERSIONE DEL ROTORE

Dato un campo $E = (A, B, C)$, trovare un campo F t.c.

$$\operatorname{rot} F = E$$

Cond. necessaria: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

La cond. è pure sufficiente se l'insieme di def. è fatto bene (ad esempio $\mathbb{R}^3$, parallelepipedo, stellato, senza buchi 2-dim.)

Esempio $E = (xy + z^2, y^2 - xz, -3yz + x^4)$

$$\operatorname{div} E = y + 2y - 3y = 0 \quad \checkmark$$

Quindi esiste F su $\mathbb{R}^3$ t.c. $\operatorname{rot} F = E$

Partiamo dalla formula

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \operatorname{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Devo trovare A, B, C t.c.

$$C_y - B_z = xy + z^2$$

$$A_z - C_x = y^2 - xz$$

$$B_x - A_y = -3yz + x^4$$

Posso scegliere come mi pare una delle 3 componenti, ad esempio
 $C \equiv 0$

Otteniamo

$$\begin{aligned} -B_z &= xy + z^2 & \leadsto B &= -xyz - \frac{1}{3}z^3 + \varphi(x, y) \\ A_z &= y^2 - xz & \leadsto A &= y^2z - \frac{1}{2}xz^2 + \psi(x, y) \end{aligned}$$

← qualunque
purché
senza z

Posso scegliere come mi pare una delle 2 funzioni φ e ψ , ad esempio
 $\psi \equiv 0$

Ora sostituisco A e B nella 3ª equazione

$$B_x - A_y = \cancel{-yz} + \varphi_x(x, y) - \cancel{2yz} = \cancel{-3yz} + x^4$$

Tutte le z se ne devono andare

$$\leadsto \varphi_x(x, y) = x^4 \quad \leadsto \frac{1}{5}x^5$$

Conclusione $F = (y^2z - \frac{1}{2}xz^2, -xyz - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}x^5, 0)$

[Verificare che torni]

Variante Trovare F con $\text{rot } F = E$ e prima componente xy .

1° modo Ripeto la procedura usando $A = xy$

2° modo Ricordo che $\text{rot } F_1 = \text{rot } F_2$ se e solo se (megli insieme decenti)

$$F_2 = F_1 + \nabla g \quad (\text{differiscono per un gradiente})$$

Quindi basta prendere F di prima e aggiungere un

$$\nabla g = (xy - y^2z + \frac{1}{2}xz^2, \dots, \dots)$$

Basta prendere $g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y - xy^2z + \frac{1}{4}x^2z^2 +$ volendo roba con y e z

— o — o —

Giustificazione formale del procedimento

$E = (A, B, C)$. Cerco F della forma $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$.

Devo risolvere

$$\begin{array}{lcl} \hat{C}_y - \hat{B}_z = A & & -\hat{B}_z = A \\ \hat{A}_z - \hat{C}_x = B & \leadsto \text{metto } \hat{C} \equiv 0 & \leadsto \hat{A}_z = B \\ \hat{B}_x - \hat{A}_y = C & & \hat{B}_x - \hat{A}_y = C \end{array}$$

$$\hat{A} = \bar{B} + \varphi(x, y)$$

↑
primitiva di B rispetto a z

$$\hat{B} = -\bar{A} + \psi(x, y)$$

↑
primitiva di A rispetto a z

↑
Quello prendo $\psi \equiv 0$

Analando nella 3ª equazione troviamo

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \varphi_y(x, y) = C$$

In conclusione mi trovo a risolvere

$$\varphi_y(x, y) = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$$

Posso risolvere? Sarebbe che RHS non dipenda da z , quindi mi serve che la sua derivata risp. a z sia nulla

$$\begin{aligned} (\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z &= \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z \quad (\text{uso che } \bar{A}_z = A \text{ e } \bar{B}_z = B) \\ &= A_x + B_y + C_z \\ &= \operatorname{div} E = 0. \end{aligned}$$

Domanda: dove nella dim. abbiamo usato che Ω è fatto bene?

LA SOLITA IN $\mathbb{R}^3$ Consideriamo

$$E = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

(campo gravitazionale)

Un conto abbastanza semplice mostra che $\operatorname{div} E = 0$ (esercizio)

Dico che E non è il rotore di F su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Sia S la sfera unitaria centrata in $(0, 0, 0)$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \text{ per Stokes (infatti } \partial S = \emptyset)$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma = \operatorname{Area}(S) = 4\pi$$

$\uparrow$
 $\vec{E}$ è (x, y, z)

$\uparrow$
 $= 1$ sulla sfera

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 48

Note Title

29/11/2022

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN FLUSSO

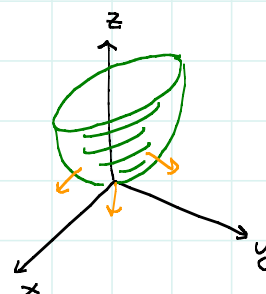
(di un campo vett. attraverso una sup. ORIENTATA)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 scelta del vettore
 normale

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1 \}$$

$$\vec{E} = (x + y^2, y + z, xy - 2z)$$

 $\vec{n}$ orientata "verso il basso" (in $(0, 0, 0)$ viene $(0, 0, -1)$)


1ª Strategia: DEFINIZIONE BOVINA

Road map: $\rightarrow$ scrivo una param $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S $\rightarrow$ controllo se (M_1, M_2, M_3) è concorde con $\vec{n}$ $\rightarrow$ Calcolo

$$\iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

Nel vostro esempio $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + 4v^2)$

$$(u, v) \in \Omega = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 4v^2 \leq 1 \}$$

x	y	z	
1	0	$2u$	$\leadsto (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -8v, 1)$
0	1	$8v$	

Controllo il verso della normale. Il p.to $(0, 0, 0)$ della sup. corrisponde a $(u, v) = (0, 0)$ e lì $(M_1, M_2, M_3) = (0, 0, 1)$, quindi ha il verso sbagliato.

Allora

segno cambiato

$$\begin{aligned}
 \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \iint_{\Omega} \left\{ \underbrace{(u+v^2)}_{M_1} \underbrace{(-2u)}_{M_2} + \underbrace{(v+u^2+4v^2)}_{M_2} \underbrace{(-8v)}_{M_2} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{(uv-2u^2-8v^2)}_{M_3} \cdot 1 \right\} du dv \\
 &= \text{è un conto che si fa}
 \end{aligned}$$

2^a strategia: STOKES con inversione del rotore

Road map : $\rightarrow$ spero che E sia rot F (ad esempio perché $\operatorname{div} E = 0$ e d'altronde è fatto bene)
 $\rightarrow$ calcolo F
 $\rightarrow$ calcolo la circuitazione di F lungo ∂S dopo averlo orientato per bene

$$E = (x+y^2, y+z, xy-2z) \quad \operatorname{div} E = 0 \quad \ddot{\circ}$$

Calcoliamo $F = (A, B, C)$

* * *

 $\partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z$

A B C

$$C_y - B_z = x + y^2$$

$$A_z - C_x = y + z$$

$$B_x - A_y = xy - 2z$$

Scelgo $B \equiv 0$

$$C_y = x + y^2 \quad \leadsto C = xy + \frac{1}{3}y^3$$

$$-A_y = xy - 2z \quad \leadsto A = -\frac{1}{2}xy^2 + 2yz + \varphi(x, z)$$

$$A_y = -xy + 2z$$

Vado nella restante equazione

$$A_z - C_x = \cancel{2y} + \varphi_z(x, z) - \cancel{y} = \cancel{y} + z \quad \leadsto \varphi_z(x, z) = z$$

Posso scegliere $\varphi = \frac{1}{2}z^2$

Conclusione $F = \left(-\frac{1}{2}xy^2 + 2yz + \frac{1}{2}z^2, 0, xy + \frac{1}{3}y^3\right)$

Ora uso Stokes:

$$\int_S \langle E, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = \int A dx + B dy + C dz$$

↑ dove percorrere
∂S nel verso giusto!

Ora devo scrivere una param. di γ che ha come sostegno

$$\partial S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = z = 1 \}$$

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, 1) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

CON IL VERSO OPPOSTO

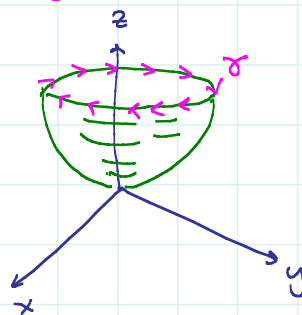
In conclusione otteniamo

$$-\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz = -\int_{\gamma} A dx = -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{2} \right) (-\sin \theta) d\theta$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{0 per} & \text{0 per merito} \\ \text{merito} & \text{di } dz \\ \text{di } B & \end{matrix}$

= conto che si fa

↑
inversione del verso



3^a strategia: STOKES con cambio di superficie

Road map: → spero che E sia $\text{rot } F$, ma non calcolo F
 → sostituisco S con una sup S_1 più "comoda"
 che abbia lo stesso bordo orientato allo stesso modo
 → calcolo

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Perché funziona?

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \stackrel{E = \text{rot } F}{=} \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$\text{Stokes su } S \rightarrow = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\partial S = \partial S_1 \rightarrow = \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{e} \rangle ds$$

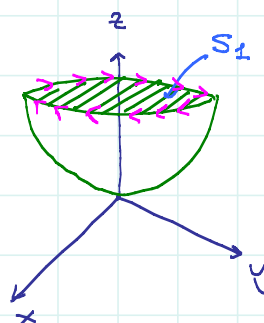
$$\text{Stokes su } S_1 \rightarrow = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$E = \text{rot } F \rightarrow = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

In questo caso uso

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 1, z = 1\}$$

con normale $\vec{n} = (0, 0, -1)$



$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{x^2 + 4y^2 \leq 1} -1 \cdot \underbrace{(xy - 2)}_{xy - 2z} dx dy$$

(le altre 2 componenti di E si annullano
con gli 0 di $\vec{n}$)

= si fa a mente

4ª Strategia: tappo la superficie e uso teo. div.

Road map: $\rightarrow$ considero il solido V ottenuto aggiungendo
eventuali "tappi"

$\rightarrow$ applico teo. div. in V .

Nell'esempio V è la ciotola tappata

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1\}$$

Teo. div. :

normale esterna a V

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \operatorname{div} E &= \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\
 &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 quella che
 vogliamo

$\uparrow$
 $(0,0,1)$

Nel nostro caso viene $\operatorname{div} E = 0$, quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 con normale $(0,0,1)$

Oss. La strategia 4 funziona anche se $\operatorname{div} E \neq 0$,
 mentre la 2 e la 3 no.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

—

LEZIONE 49

Note Title

02/12/2022

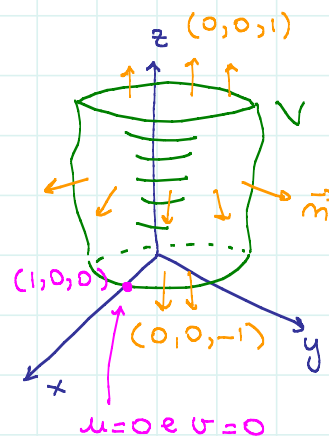
Esercizio 1 Consideriamo la sup. parametrizzata da

$$\Phi(u, v) = ((1+u) \cos v, (1+u^3) \sin v, u+u^2) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Consideriamo il solido V limitato dal sostegno di Φ e dai piani $z=0$ e $z=2$.

Determinare volume e coord. del baricentro.

La z va in maniera monotona da $z=0$ a $z=2$. Fissato $z \in [0, 2]$ trovo univocamente u tale che $u+u^2=z$. La sezione ad altezza z è parametrizzata da v e sono ellissi.



$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_V \text{div } E \, dx \, dy \, dz$$

$$E = (x, 0, 0) \quad E = (0, 0, z)$$

$$= \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\partial V =$ supporto di Φ + 2 basi sotto e sopra

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{\text{Basi}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

viene = 0 se abbiamo scelto E senza componenti z

Domanda: su S il vettore $\Phi_u \wedge \Phi_v$ è nel verso giusto?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \cos v & 3u^2 \sin v & 1+2u \\ -(1+u) \sin v & (1+u^3) \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-(1+2u)(1+u^3) \cos v, -(1+2u)(1+u) \sin v, (1+u^3) \cos^2 v + 3u^2(1+u) \sin v)$$

Quando $u = v = 0$ diventa

$$(-1, 0, 1)$$

↑ sembra che il verso sia quello opposto, quindi ci vuole un segno -

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \underbrace{(1+u) \cos v}_x \underbrace{(1+2u)(1+u^3) \cos v}_{M_1} \\ &= \pi \int_0^1 \text{polinomio}(u) du = \text{si fa.} \end{aligned}$$

Per fare il baricentro devo integrare x, y, z .

L'integrale di x e y farà 0. Per integrare z faccio lo stesso procedimento con $E = (xz, 0, 0)$.

Analogamente con i campi $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$. [Provare per verifica]

Se invece partivo con $E = (0, 0, z)$, allora

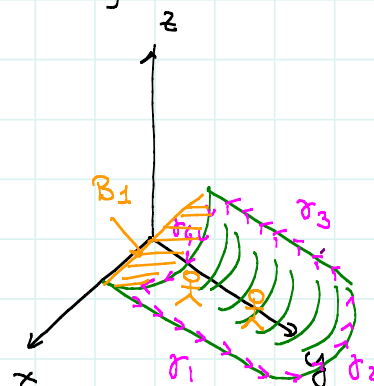
$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \int_S + \int_{\text{Base Sotto}} + \int_{\text{Base Sopra}} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{si fa come negli altri casi.} \\ \uparrow \\ \text{0} \\ \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \uparrow \\ = 0 \text{ su } z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{2. Area (Base sopra)} \\ \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \\ \uparrow \quad \nwarrow \\ (0, 0, 2) \quad (0, 0, 1) \end{array} \end{aligned}$$

Esempio 2 La tegola

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 = 2}_{\substack{\text{cilindro con} \\ \text{asse lungo} \\ \text{asse } y}}, 0 \leq y \leq 3, \underbrace{z \leq 0}_{\substack{\text{solo parte sotto} \\ \text{piano } z=0}}\}$$

$$E = (x, x^2 + y, 2z + x^2)$$

Calcolare $\int \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$
 $\uparrow$
 verso l'esterno



STOKES telefonato. Chi è ∂T ? Come è orientato

∂T = quattro curve

$$\sigma_1(t) = (\sqrt{2}, t, 0) \quad t \in [0, 3]$$

$$\sigma_2(t) = (\sqrt{2} \cos t, 3, -\sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\sigma_3(t) = (-\sqrt{2}, t, 0) \quad t \in [0, 3] \text{ al contrario}$$

$$\sigma_4(t) = (-\sqrt{2}, -t, 0) \quad t \in [-3, 0]$$

$$\sigma_5(t) = (\sqrt{2} \cos t, 0, -\sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, \pi] \text{ al contrario}$$

$$\int_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4} A dx + B dy + C dz = \text{abbastanza semplici}$$

$$\text{Calcolare } \int_T \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

1° modo Con la definizione si fa tranquillo (*)

2° modo Consideriamo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 2}_{\uparrow}, 0 \leq y \leq 3, z \leq 0\}$$

$$\text{Allora } \iiint_V \text{div } E \, dx dy dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

" $\uparrow$ 4 pezzi
4 vol (V)

∂V ha 4 pezzi

- T , ma $\vec{n}$ esterna è opposta a quella che serve a noi
- $R = \text{rettangolo } (u, v, 0)$ con $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $v \in [0, 3]$
con $\vec{n} = (0, 0, 1)$
- Semibase B_1 con $\vec{n} = (0, -1, 0)$
 $\uparrow x^2 + z^2 \leq 2, z \leq 0, y = 0$
- Semibase B_2 con $\vec{n} = (0, 1, 0)$
 $\uparrow x^2 + z^2 \leq 2, z \leq 0, y = 3$

Tutte le volte c'è una sola componente del campo.

⊗ $T = \text{supporto di}$

$$\Phi(u, v) = (\sqrt{2} \cos v, u, -\sqrt{2} \sin v) \quad (u, v) \in [0, 3] \times [0, \pi]$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 50

Note Title

02/12/2022

Esercizio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{2x^2 + 3y^4 + z^2}_{\text{specie di ellissoide}} \leq 5, \underbrace{x \geq 0, z \geq 0}_{\text{dividendo in 4}}\}$

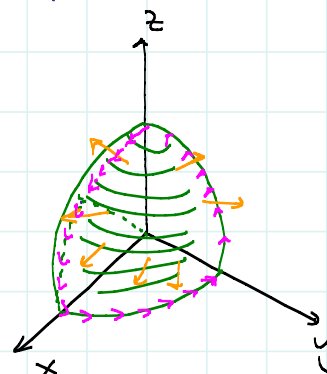
Le sezioni a y costante sono vere ellissi, con i quadranti

Consideriamo la corrispondente sup. S

con

$$2x^2 + 3y^4 + z^2 = 5, \quad x \geq 0, z \geq 0$$

orientata in maniera "uscente" rispetto a V .



Descrivere ∂S e parametrizzarlo con l'orientazione giusta

∂S è fatto da due specie di semicirconferenze

→ una nel piano $x=0$

→ una nel piano $z=0$

Piano $x=0$ $x=0, 3y^4 + z^2 = 5 \quad \leftarrow \gamma_1$

Piano $z=0$ $2x^2 + 3y^4 = 5 \quad z=0 \quad \leftarrow \gamma_2$

Parametrizzazione cartesiana

$$\gamma_1(t) = (0, t, \sqrt{5-3t^4}) \quad t \in [-\sqrt[4]{\frac{5}{3}}, \sqrt[4]{\frac{5}{3}}] \quad \text{al CONTRARIO}$$

$$\gamma_2(t) = \left(\sqrt{\frac{5-3t^4}{2}}, t, 0 \right) \quad t \in [\dots] \quad \text{con verso giusto.}$$

Descrizione di ∂V con orientazione esterna.

Ha 3 pezzi

- Superficie S con orientazione esterna
- Base $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, 2x^2 + 3y^4 \leq 5, x \geq 0\}$
con $\vec{n} = (0, 0, -1)$
- Muro dietro $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, z \geq 0, 3y^4 + z^2 \leq 5\}$
con $\vec{n} = (-1, 0, 0)$,
— o — o —

Esercizio border-line (versione 2D)

$$E(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

La corrispondente forma diff. è esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Sì, vedo a occhio una primitiva

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

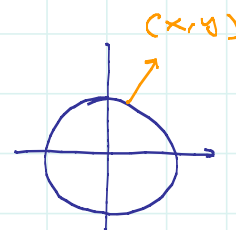
[Potero vedere che $\rightarrow$ è chiusa, ma non bastava

$\rightarrow$ l'integrale su $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
si annulla, e questo insieme alla chiusura
è sufficiente].

Calcolare il flusso $\int_{\partial B} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$
 $\uparrow$ $x^2 + y^2 \leq 1$ $\uparrow$ orientazione esterna

Con la definizione

$$\int_{\partial B} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\partial B} 1 ds = 2\pi$$



$$\operatorname{div} E = A_x + B_y = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

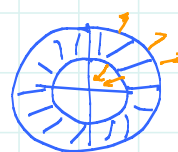
Come la vediamo con il teorema della divergenza?

$$\int_{\partial B} \underbrace{\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle}_{2\pi} ds = \underbrace{\iint_B}_{0} \operatorname{div} E \, dx \, dy$$

Il conto della divergenza nell'origine non ha senso!

Quanto vale $\int_{\partial B_{501}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = 2\pi$

↑
raggio 501



Posso applicare teo. div. nella corona.

Considero $E_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+\varepsilon^2}, \frac{y}{x^2+y^2+\varepsilon^2} \right)$

$$\int_{\partial B} \langle E_\varepsilon, \vec{n} \rangle ds = 2\pi \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

↑
conto come prima

$$\operatorname{div} E_\varepsilon(x, y) = \frac{2\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2}$$

Ora DEVE succedere che $\int_B \operatorname{div} E_\varepsilon \, dx \, dy = 2\pi \frac{1}{1+\varepsilon^2}$

per ogni $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{2\varepsilon^2}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^2} \, dx \, dy &= 2\varepsilon^2 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(\rho^2+\varepsilon^2)^2} \rho \\ &= 2\varepsilon^2 \cdot 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{(\rho^2+\varepsilon^2)^2} \, d\rho \\ &= \varepsilon^2 \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{\rho^2+\varepsilon^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} \end{aligned}$$

$$= \varepsilon^2 \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{1+\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right]$$

$$= 2\pi \cancel{\varepsilon^2} \frac{-\cancel{\varepsilon^2} + 1 + \cancel{\varepsilon^2}}{\cancel{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon^2)} = \text{come previsto.}$$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 51

Note Title

05/12/2022

INTEGRALI IMPROPRI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

L'integrale è improprio se succede almeno una di queste proprietà:

→ A è un insieme NON LIMITATO

→ $f(x,y)$ è NON LIMITATA in A .

Analogo di Analisi 1

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx$$

↑
funzione

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

↑
zona integr.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$$

↑
Due problemi

Un integrale improprio si dice MONOPROBLEMA se ha un problema solo, cioè

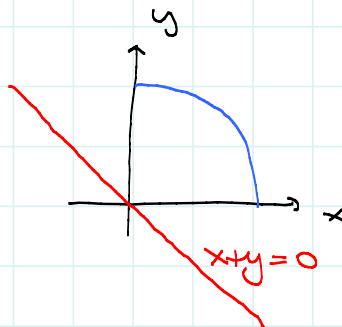
→ la zona di int. A è non limitata

→ la zona di integr. è limitata, ma $f(x,y)$ è non limitata nell'intorno di un p.to della chiusura di A

Esempio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0\}$

$$\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$$

↑
Non limitata solo in un intorno di $(0,0)$



Analisi 1

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{proprio } \forall \varepsilon > 0}$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_4^A \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx = \int_0^{\textcircled{42}} \frac{\sin x}{x^4} dx + \int_{\textcircled{42}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$$

↑
monoproblema

Posso sostituire 42
con un qualunque
 $a > 0$

Analisi 2 Si fa più o meno la stessa, ma solo nel caso in cui $f(x, y) \geq 0$ in A .

Se $f(x, y)$ NON ha segno costante in A , allora si pone per definizione

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{\textcircled{A+}} f(x, y) dx dy + \iint_{\textcircled{A-}} f(x, y) dx dy$$

↑
zona dove $f(x, y) \geq 0$ ↑
zona dove $f(x, y) \leq 0$

poi si studiano separatamente i due pezzi e si traggono le conclusioni.

Ciascuno dei due può convergere oppure divergere a $+\infty$ (il primo) o $-\infty$ (il secondo).

Se alla fine ci troviamo $+\infty - \infty$, allora quello globale si dichiara indeterminato

DefinizioniSia $f(x,y) \geq 0$ in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **Caso 1** Supponiamo A non limitato, ma f limitata sui limitati. Allora

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{A_R} f(x,y) dx dy$$

dove $A_R = A \cap B(0,R)$

↑
Fissato $R > 0$, questo è
un integrale proprio

Il limite esiste, e sta in $[0, +\infty)$ oppure $+\infty$, perché è il limite di una funzione crescente di R .

Caso 2 Supponiamo A limitato, ma f con dei problemi nell'intorno di un p.to (x_0, y_0) nella chiusura di A . Allora

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A \setminus B((x_0, y_0), \varepsilon)} f(x,y) dx dy$$



Anche qui il limite esiste per monotonia.

Oss. strategica

Il fatto che $f(x,y) \geq 0$ nella zona A ci garantisce che otterremo lo stesso risultato usando quadrati, rettangoli, triangoli, ... invece dei cerchi.

Altrimenti si trovano facili controesempi

Analisi 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < +\infty, \text{ ma } \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

Analisi 2

$$\iint_A f(x,y) dx dy < +\infty \Leftrightarrow \iint_A |f(x,y)| dx dy < +\infty$$

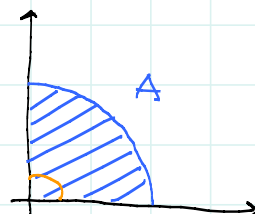
(la def. spezza A_+ e A_-)

Analisi 1

$$\int_0^5 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \leq 1 \end{cases}$$

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\iint_A \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a < 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \geq 2 \end{cases}$$

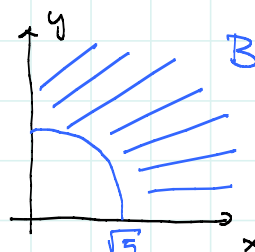
$$\iint_A \frac{1}{(\sqrt{\dots})^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\varepsilon}^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{corona circolare}} \frac{1}{p^a} \cdot p$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

e l'ultimo converge se e solo se $a-1 < 1$, cioè se e solo $a < 2$.

Esempio 2 $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$

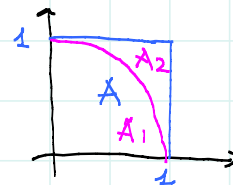
$$\iint_B \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \nearrow \text{converge se} & a > 2 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se} & a \leq 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{(\sqrt{\dots})^a} dx dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{5}}^R dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot p \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{5}}^R \frac{dp}{p^{a-1}} = \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{5}}^{+\infty} \frac{dp}{p^{a-1}} \end{aligned}$$

Esempio 3 $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \text{ converge}$$



$$\iint_A \dots = \iint_{A_1} \dots + \iint_{A_2} \dots$$

↑
converge perché
è l'esempio 1
con $\alpha = 1 < 2$

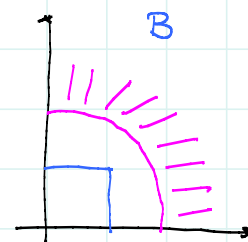
↑
integrale proprio
senza nessun problema

Esempio 4 $B = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \setminus A$ ↑ di prima

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \text{ diverge}$$

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \geq \iint_C \frac{1}{x^2+y^2} dx dy = +\infty$$

↑
 $x^2+y^2 \geq 1$ esempio 2
con $\alpha = 2$



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 52

Note Title

05/12/2022

Calcolo INTEGRALE GAUSSIANO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Brutal mode Calcolo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

e lo faccio in due modi.

Modo cartesiano

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_I = I^2 \quad (\text{il quadrato di quello che voglio})$$

Modo polare

$$= \int_0^{+\infty} dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} e^{-p^2} \cdot p = \pi \int_0^{+\infty} 2p e^{-p^2} dp$$

$$= \pi \left[-e^{-p^2} \right]_{p=0}^{p=+\infty} = \pi$$

Confrontando: $I^2 = \pi \leadsto I = \sqrt{\pi}$

Rendiamolo più rigoroso Poniamo

$$I(R) = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

Esempio 1 $\iint_Q \frac{1}{x^4+y^4+1} dx dy$ $Q = \text{primo quadrante}$

Brutale: unico pbm. la zona di integr., $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^4}$, $4 > 2$ e quindi converge

Passiamo in polari:

$$\int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 1} \rho \leq \quad \begin{array}{l} \text{(dovrei fare } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \dots) \\ \uparrow \text{ perché punto alla} \\ \text{convergenza} \end{array}$$

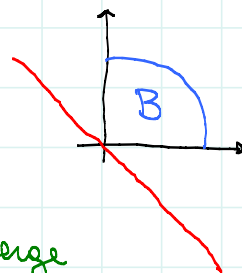
$$\int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{m\rho^4+1} \rho$$

$\uparrow$ solito discorso: $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq m > 0$ perché...

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{m\rho^4+1} d\rho = \text{converge per confronto asintotico con } \frac{1}{\rho^3}$$

Esempio 2 $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\iint_B \frac{1}{x+y} dx dy$$



Brutale: solo pbm. in $(0,0)$, $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho} \leadsto$ converge

Coord. polari: $\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}$

dovrei mettere $\varepsilon > 0$

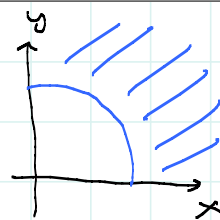
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \text{numero}$$

$\uparrow$ integrale proprio perché $\cos\theta + \sin\theta \geq m > 0$ per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(se fosse $\theta \in [0, \pi]$ non sarebbe vero!!!)

Esempio 3 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^4+y^4} dx dy$$



Brutale: unico problema $+\infty$, $f(x, y) \sim \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow$ diverge al polo

Polari: $\int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{1 + \rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \underset{\text{pag.}}{\rho} \geq$ $\uparrow$
così posso mettere solo 0

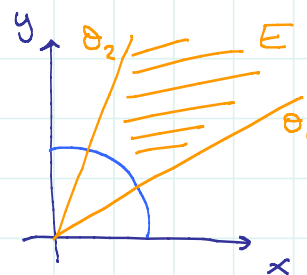
Prima uscita: $\geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^3 \cos\theta \sin\theta}{1 + 2\rho^4}$

$$= \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\rho^3}{1 + 2\rho^4}}_{\substack{\uparrow \\ \text{diverge per} \\ \text{compr. asint. con } \frac{1}{\rho}}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta}_{\text{si fa e viene numero } > 0} = +\infty$$

Seconda uscita: **RESTRINGO LA ZONA DI INTEGRAZIONE**

Nella zona E vale la stima

$$\frac{\rho^3 \cos\theta \sin\theta}{1 + \rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \geq \frac{\rho^3 m}{1 + 2\rho^4}$$



dove $m = \min \{ \cos\theta \sin\theta : \theta \in [\theta_1, \theta_2] \} > 0$ per il solito motivo

$$\begin{aligned} \iint_D \dots &\geq \iint_E \dots \geq \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\rho^3 m}{1 + 2\rho^4} \\ &= (\theta_2 - \theta_1) m \int_1^{+\infty} \frac{\rho^3}{1 + 2\rho^4} d\rho \end{aligned}$$

e si chiude con Analisi 1.

Esempio 4 $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \}$

$$\iint_S \frac{xy}{1+x^4+y^4} dx dy = \text{INDETERMINATO} !!!!!$$

$f(-x, y) = -f(x, y)$
 e il dominio è simmetrico,
 ma non basta



= $+\infty$ nel 1° quadrante $-\infty$ nel 2° quadrante

$$\iint_S \frac{xy}{1+x^6+y^6} dx dy = 0$$

Ora i pezzi sul 1° e 2° quadrante convergono (perché $\sim \frac{1}{p^4}$)
 e quindi si compensano !!

— 0 — 0 —

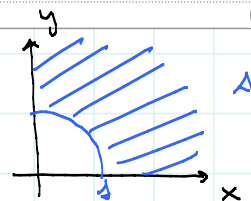
ANALISI 2

LEZIONE 53

Note Title

06/12/2022

Esempio 1 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^6} dx dy$



1° modo Paragghiamo gli esponenti

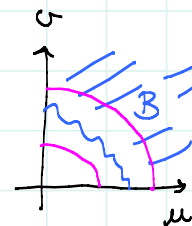
$$x = u^3$$

$$y = v \quad \iint_A \frac{x}{x^2+y^6} dx dy = \iint_B \frac{u^3}{u^6+v^6} \cdot 3u^2 du dv$$

$$J = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1$$

$$B = u \geq 0, v \geq 0, u^6+v^2 \geq 1$$



Come è fatto B non importa perché

$$\exists \iint_B \frac{u^5}{u^6+v^6} du dv \text{ conv.} \Leftrightarrow \iint_{u^2+v^2 \geq 1} \frac{u^5}{u^6+v^6} du dv$$

Brutal mode: $\frac{p^5}{p^6} = \frac{1}{p}$ e quindi diverge

$$\frac{u^5}{u^6+v^6} = \frac{p^5 \cos^5 \theta}{p^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \geq \frac{1}{p} \frac{\cos^5 \theta}{2}$$

$$\iint_{\substack{u^2+v^2 \geq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0}} \frac{u^5}{u^6+v^6} du dv \geq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\frac{1}{p} \cos^5 \theta}_{\text{numero} > 0} = +\infty$$

Alternativa

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{u^2+v^2 \geq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0}} \dots du dv &\geq \iint_{\substack{u^2+v^2 \geq 1 \\ 0 \leq v \leq u}} \dots \\ &= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{2p} \boxed{\cos^5 \theta} p \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned}$$

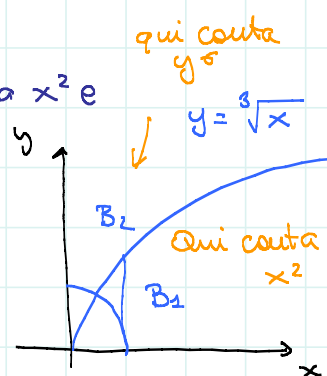


2° modo

$$\frac{x}{x^2+y^6}$$

Cerco di capire, al denominatore, quando domina x^2 e quando domina y^6

$$x^2 \geq y^6 \Leftrightarrow y \leq \sqrt[3]{x}$$



$$\iint_B \dots = \iint_{B_1} \dots + \iint_{B_2} \dots$$

$$\iint_{B_1} \frac{x}{x^2+y^6} dx dy \geq \iint_{B_1} \frac{x}{2x^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy \frac{1}{2x} \\ &\text{cartesiano} \nearrow \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx = \text{diverge} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\iint_Q \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4} dx dy$$

↑
primo quadrante

Due problemi : $\rightarrow$ nell'origine
 $\rightarrow$ all'infinito

$$\sim \frac{xy}{x^4+y^4} \sim \frac{1}{\rho^2} \leadsto \text{diverge}$$

$$\sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^4} \leadsto \text{converge}$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4} dx dy \leq \iint \dots \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^4+y^4} dx dy$$

... polari ... converge

Con il problema a 0 abbiamo

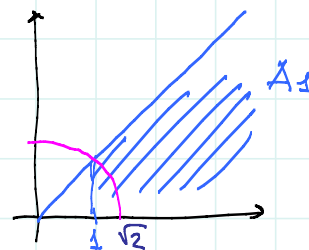
$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta)}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \cancel{\rho} \uparrow \text{polari} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{\rho^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\dots)$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{\rho^3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta) d\theta$$

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

Esempio 4 $\iint_{A_a} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$

dove $A_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^a\}$
 $\uparrow$
 $a > 0$



$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy &\geq \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{p^2} \cdot p \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{p} dp = \text{diverge} \end{aligned}$$

Osservo che $A_1 \subseteq A_a$ per ogni $a \geq 1$, quindi allo stesso modo

$$\iint_{A_a} \dots = +\infty \text{ per ogni } a \geq 1$$

Congetture che per $a < 1$ converge

$$\iint_{A_a} \dots = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^a} dy \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-a}} dx \quad \text{e questo converge}$$

se $2-a > 1$, cioè $a < 1$



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 54

Note Title

09/12/2022

Esercizio 3 $\iiint_A \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$ $a > 0$ parametro reale

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Se converge, allora per simmetria fa 0.

Per studiare la convergenza, mettiamoci per comodità su $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Sembra ragionevole andare in sferiche (dei geografi)

Brutal mode: $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ $2a-2 < 3$

Congettura: converge $\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$

Punk (a): converge per $a < \frac{5}{2}$

$$f(\dots) = \frac{\rho^2 \overbrace{\cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}^{\leq 1}}{\rho^{2a}} \leq \frac{\rho^2}{\rho^{2a}}$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{ottante}} \dots &\leq \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{\rho^{2a-2}} \cdot \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_{\leq 1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \quad 2a-4 < 1 \leadsto \text{converge} \end{aligned}$$

Punk (b): diverge per $a \geq \frac{5}{2}$

$$\iiint_{\text{ottante}} \dots \stackrel{\uparrow}{=} \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{\rho^{2a}} \cdot \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{dp}{p^{2a-4}}}_{\text{Diverge se } a \geq \frac{5}{2}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta}_{\text{numero} > 0} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi}_{\text{Numero} > 0}$$

Alternativa (più versatile): riempire la zona in modo da limitare dal basso le parti trigonometriche

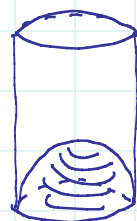
$$\begin{aligned} \iiint_{\text{otante}} \dots &= \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \text{ come prima} \\ &\geq \int_0^1 dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \text{ stessa roba} \\ &\geq m > 0 \\ &\geq m \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \cdot \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-4}} dp \end{aligned}$$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 12 \}$$

Tutto analogo, solo che ora converge per $a > \frac{5}{2}$.

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \} \quad (\text{cilindro infinito lungo asse } y)$$

$$\iiint_A \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz$$



Esattamente come prima, perché conv. su semisfera $\Leftrightarrow$ conv. su cilindro

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 1 \}$$

Brutal mode : $\frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} \leq \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^a} = \frac{\rho}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-1}}$

$$2a-1 > 3 \quad a > 2 \text{ converge}$$

UHH... forse è + un problema 1 dimensionale

$$2a-1 > 1 \rightsquigarrow a > 1 \text{ converge}$$

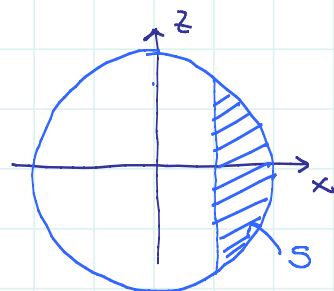
Per $a > 1$ converge

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{cilindro}} \frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz &\stackrel{|x| \leq 1}{\leq} \iiint_{\text{cilindro}} \frac{y}{y^{2a}} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{2a-1}} \iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ \text{base}}} 1 dx dz \\ &\quad \swarrow \text{converge} \quad \searrow \text{Area base} \\ &\Leftrightarrow a > 1 \end{aligned}$$

Per $a < 1$ diverge (e quindi glob. è INDET.)

$$\frac{|xy|}{(x^2+y^2+z^2)^a} \geq \frac{\frac{1}{2}y}{(y^2+1)^a}$$

$\uparrow$
 $x^2+z^2 \leq 1$
e mi sono messo dove $x \geq \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} \iiint_{\text{cilindro}} \dots &\geq \iint_{\substack{\text{cilindro} \\ \text{con } x \geq \frac{1}{2}}} \frac{1}{2} \frac{y}{(y^2+1)^a} dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \text{Area}(S) \int_1^{+\infty} \frac{y}{(y^2+1)^a} dy \\ &\quad \swarrow \text{converge} \Leftrightarrow a > 1 \text{ per confronto asintotico con } \frac{y}{y^{2a}} \\ &\quad \text{--- o ---} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iiint_{\text{ottante}} \frac{\log(1+x^2yz)}{(x^4+y^4+z^4)^a} dx dy dz$

Ci sono due problemi a 0 e a infinito.

Brutal mode:

→ prob. in origine: $f \sim \frac{\log(1+\rho^4)}{\rho^{4a}} = \frac{\rho^4}{\rho^{4a}}$ conv. $\Leftrightarrow 4a-4 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{7}{4}$

→ prob. all'infinito: $f \sim \frac{\log(1+\rho^4)}{\rho^{4a}} \sim \frac{\log \rho}{\rho^{4a}}$ conv. $\Leftrightarrow 4a > 3$
 $\Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$

Congettura: globalmente converge $\Leftrightarrow \frac{3}{4} < a < \frac{7}{4}$

Converge per $\frac{3}{4} < a < \frac{7}{4}$ Passiamo in sfere e otteniamo

$$f(\dots) \leq \frac{\log(1+\rho^4)}{(m\rho^4)^a}$$

dove m = min di tutta la roba trigonometrica.

Si stima $J = \rho^2 \cos \varphi$ con ρ^2 e si conclude

(senza il risultato di Analisi 1 per cui

$$\int_7^{+\infty} \frac{\log x}{x^b} dx \text{ converge } \Leftrightarrow b > 1)$$

Diverge per $a \leq \frac{3}{4}$ Restringiamo l'integrale a

$$\rho \geq 1 \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{33}, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$$

↑
quello dei geografi,
così z sta lontano da 0.

A questo punto

$$\text{Numeratore} \geq \log(1+m\rho^4)$$

↑
roba trigo. è lontano da 0

$$\text{Denominatore} \leq (3p^4)^a$$

↑
serve frazione
+ piccola

stimmo x, y, z con p

$$\iiint \geq \iiint_{\text{zona + piccola}} \geq \text{costante} \int_1^{+\infty} \frac{\log(1110p^4)}{p^{4a}} p^2 dp$$

↑
stimmo anche
dal basso il $\int$
qui serve $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$

e si conclude con analisi

Divergenza per $a \geq \frac{7}{4}$

Stessa cosa, ma ora è rilevante il
problema nell'origine, quindi ora

$$0 \leq p \leq 1 \dots$$

ANALISI 2

LEZIONE 55

Note Title

09/12/2022

Esempio 1 $\iiint_A \frac{z^a}{x^2+y^4+z^6} dx dy dz$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Puoggio e vedo che succede

$$x = u^6 \quad y = v^3 \quad z = w^2$$

$$J = \begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 36 u^5 v^2 w$$

La zona di integr. diventa $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u^{12} + v^6 + w^4 \leq 1$

Ma possiamo sostituire con $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ (così usiamo coord. polari nelle nuove variabili)

Alla fine ci siamo ridotti a $\iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 1 \\ u, v, w \geq 0}} \frac{w^{2a}}{u^{12}+v^{12}+w^{12}} 36 u^5 v^2 w$

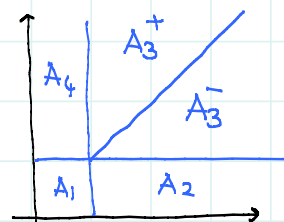
Brutal mode: $f \sim \frac{e^{2a+5+2+1}}{e^{12}} = \frac{1}{e^{4-2a}}$

e quindi converge $\Leftrightarrow 4-2a < 3 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$

La dimostrazione rigorosa ha i soliti due casi.

Esempio 2 $\iint_Q xy e^{-x^2y} dx dy \quad Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

$\iint_{A_1} \dots$ converge (è proprio)



[Oss.: si potrebbe impostare direttamente cartesiano facendo le primitive ...]

Esaminiamo A_3 In A_3 vale

$$xy e^{-x^2 y} \leq xy e^{-x^2} \quad \text{ma ora}$$

$$\iint_{A_3} xy e^{-x^2 y} dx dy \leq \iint_{A_3} xy e^{-x^2} dx dy = \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx \underbrace{\int_1^{+\infty} y dy}_{+\infty}$$

Se sono solo in A_3^- , allora

$$\begin{aligned} \iint_{A^-} xy e^{-x^2 y} dx dy &= \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx \int_1^x y dy \\ &\leq \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \quad \text{e questo converge} \end{aligned}$$

In A_3^+ usiamo la stima $xy e^{-x^2 y} \leq xy e^{-y}$ e concludiamo come sopra:

$$\begin{aligned} \iint_{A^+} xy e^{-x^2 y} dx dy &= \int_1^{+\infty} y e^{-y} dy \int_1^y x dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} y^3 e^{-y} dy \quad \text{e questo converge.} \end{aligned}$$

Esaminiamo A_2

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} xy e^{-x^2 y} dx dy &\leq \iint_{A_2} x e^{-x^2 y} dx dy \\ &\stackrel{y \leq 1}{=} \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy x e^{-x^2 y} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \left[-\frac{1}{x} e^{-x^2 y} \right]_{y=0}^{y=1} \end{aligned}$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \left\{ \underbrace{-\frac{1}{x} e^{-x^2}}_{\text{converge}} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{diverge}} \right\}$$

Però avendo detto $\leq \dots$ questo non basta

Nuova idea: su A_2 posso integrare rispetto a x

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} xy e^{-x^2y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx y x e^{-x^2y} \\ &= \int_0^1 dy \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2y} \right]_{x=1}^{x=+\infty} \\ &= \int_0^1 dy \left(+\frac{1}{2} e^{-y} \right) = \text{converge} \end{aligned}$$

Consideriamo ora A_4

$$\begin{aligned} \iint_{A_4} \dots &= \int_1^{+\infty} dy \int_0^1 dx y x e^{-x^2y} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2y} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-y}}_{\text{converge}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{diverge}} \right\} \end{aligned}$$

Quindi globalmente diverge per colpa di A_4 .

[A posteriori si poteva fare direttamente la primitiva]

Esempio 3 $\iint_Q \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} dx dy$ $Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

1° problema: origine, ma è un falso problema perché la funzione è pure limitata in un intorno di 0.

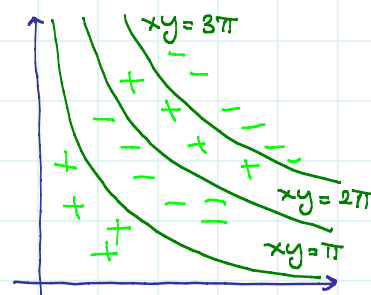
2° problema: segno che varia tantissimo, quindi occorre separare le zone + e -

Brutal mode: le zone + sono metà di Q
il sin è grande in metà delle zone +

→ stiamo integrando $\frac{1}{\rho^2}$ in $\frac{1}{4}$ di Q

→ diverge sul + e sul -

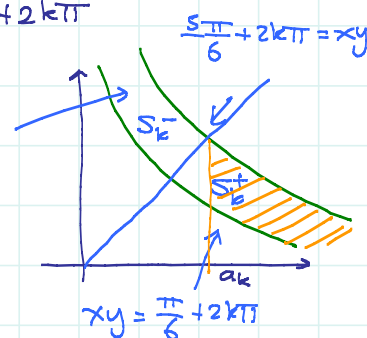
→ globalmente indeterminato.



Dove è che $\sin t \geq \frac{1}{2}$?

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

k-esima zona
in cui $\sin x \geq \frac{1}{2}$



Chiamiamo S_k questa zona

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} dx dy &\geq \frac{1}{2} \iint_{S_k} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_{S_k^+} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \iint_{S_k^+} \frac{1}{x^2} dx dy \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{a_k}^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{x}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}^{\frac{1}{x}(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)} \frac{1}{x^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{4} \int_{a_k}^{\infty} dx \quad \frac{1}{x^2} \quad \underbrace{\frac{2\pi}{3} \frac{1}{x}}_{\text{lunghezza intervallo}} \\
&= \frac{\pi}{6} \int_{a_k}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \\
&= \frac{\pi}{6} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{x=a_k}^{x=\infty} \\
&= \frac{\pi}{12} \frac{1}{a_k^2}
\end{aligned}$$

Da questo concludiamo che

$$\iint_{\text{parte positiva}} \dots \geq \frac{\pi}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}$$

Ora $a_k^2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, quindi $\sum \frac{1}{a_k^2} = \sum \frac{1}{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi} = +\infty$

[Alternativa: dimostrare una stima dal basso per $\iint S_k$ usando le coord. polari]

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 56

Note Title

12/12/2022

[VF1] Esiste $\max\{x \cos(x+y) : x \geq 0\} \rightarrow \sup = +\infty$, max N.E.

[VF2] La forma quadratica $4x^2 + 2y^2 - 8xy$ è definita positiva $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \det = 8 - 16 < 0 \quad + -$

[VF3] La funzione $f(x, y) = e^{xy}$ è una primitiva della forma $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy \quad \checkmark$

[VF4] L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{|x| + y^2} \leq 4, |z| \leq 1\}$ è un solido di rotazione N

[VF5] La curva $(\cos^2 t, \sin^4 t)$ con $0 \leq t \leq \pi$ è semplice $\gamma(\frac{\pi}{2} + t) = \gamma(\frac{\pi}{2} - t) \quad N$

[VF6] $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(1, \lambda, 1)$ ha norma 4 $1 + \lambda^2 + 1 = 16 \quad \underline{8!}$

[VF7] La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (t^2, t - t^2)$ nel punto $t = 0$ è la retta $y = 1$

[VF8] $x^2 + y^4 = o((x^2 + y^2)^{1/2})$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \checkmark$

$$x^2 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\downarrow$
0

$$\dot{\gamma} = (2t, 1-2t)$$

$$\gamma(0) + t \dot{\gamma}(0)$$

$$(0, 0) \quad (0, 1)$$

$x=0$

[MC1] Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ allora $\int_B 7x \, dx \, dy = \dots$

- (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{7\pi}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{7\pi}{2}$ (E) $\frac{7}{2}$

$$7 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cos \theta \, d\rho$$

$$7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

[MC2] Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B x \, dx \, dy, \quad \int_B y \, dx \, dy, \quad \int_B \sin x \, dx \, dy, \quad \int_B \sin y \, dx \, dy$$

$ok \quad > 0 \quad ok \quad > 0$

- (A) 3 (~~B~~) 2 (C) 4 (D) 1 (E) 0



[MC4] Sia $f(x, y, z) = 6xy + y^4 + e^z$. Allora $\nabla f(1, 1, 0) =$

- (A) 10 (~~B~~) (6, 10, 1) (C) (6, 4, 0) (D) (6, 4, 1) (E) 17

$$(6y, 6x + 4y^3, e^z)$$

$$6, 10, 1$$

[MC5] Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} \, dx \, dy < +\infty$$

- (A) Se e solo se $\alpha > 1$ (B) Mai (~~C~~) Se e solo se $\alpha > 0$ (D) Se e solo se $\alpha > 2$
(E) Se e solo se $0 < \alpha < 1$

$$\frac{\rho^{2\alpha}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^{2-2\alpha}}$$

$$2 - 2\alpha < 2$$

$$2\alpha > 0$$

$$\alpha > 0$$

MC3 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$ definita per $0 \leq t \leq 4\pi$. Allora $\text{Lunghezza}(\gamma) =$

- (A) 0 (B) 2π (C) $\int_0^{4\pi} \sqrt{|\sin t + \cos t|} dt$ ~~(D) 4π~~ (E) $\int_0^{4\pi} (|\sin t| + |\cos t|) dt$

MC6 Sia $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Allora $\min_D 4x - y^2 =$

- (A) Non esiste (B) 0 (C) -5 (D) -4 (E) -3

MC7 Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - xy, \quad g(x, y) = |x|^3 + |y|^3, \quad h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2).$$

- (A) Solo g e h (B) Nessuna (C) Tutte (D) Solo g (E) Solo f

MC8 Sia $D = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$. Allora $\int_D 5y \, dx \, dy \, dz = \dots$

- ~~(A) 10~~ (B) 20 (C) 0 (D) 15 (E) 5

$$5 \iiint y = 5 \int_0^1 y \, dy \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 - xy = \rho^4 - \rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\geq \underline{\rho^4 - 327 \rho^2}$$

$$\rightarrow +\infty$$

$$|x|^3 + |y|^3 = \rho^3 (|\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3) \geq \underline{m \rho^3} \quad \text{con } m > 0$$

$$\downarrow$$

$$+\infty$$

$$m = \min \{ |\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3 : \theta \in [0, 2\pi] \}$$

Per m il min. esiste ed è il valore per un certo θ_0 , quindi

$$m = |\cos \theta_0|^3 + |\sin \theta_0|^3$$

Può essere $m = 0$? Dovrebbe essere allo stesso tempo

$$\cos \theta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \sin \theta_0 = 0$$

ma questo non è possibile, quindi $m > 0$.

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} |x|^3 + y^3 \quad \text{n.e.}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 = -\infty$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty}$$

$$x^2+y^2-xy$$

$$x^2+y^2-xy \geq v(x^2+y^2) \text{ con } v > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} > 0$$

$$\text{Det} > 0$$

$\Rightarrow$ autovalori $++ \Rightarrow$ definita positiva
 $\Rightarrow$ coerciva

$$\rho^2 (1 - \cos \theta \sin \theta) \geq \rho^2 (1 - \underbrace{\mu}_{\uparrow \text{max} < 1})$$

[VF1] La funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ è una primitiva della forma $e^y dx + e^x dy$ **F**

[VF2] L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4, z \leq 0\}$ è limitato $(-n, 0, 0)$ ci sta $\neq$
 $(0, 0, -n)$

[VF3] La funzione $f(x, y) = \sin(xy)$ NON ha punti stazionari **F**

[VF4] $(x^2 - y^4)^2 = o((x^2 + y^2)^{5/2})$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ **F**

[VF5] La curva $(\sin^2 t, t^2)$ con $-1 \leq t \leq 1$ è semplice **F** $\gamma(t) = \gamma(-t)$

[VF6] L'estremo inferiore su $\mathbb{R}^2$ della funzione xy^2 è $-\infty$ $f(t, 1)$ $f(-t, t)$ **V**

[VF7] Il vettore (y^2, y, x^2) è un rotore $\text{div} = 1$ **F**

[VF8] La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (2t, (t-1)^2)$ nel punto $t=1$ è la retta $y=0$ **V**

$$\gamma(1) = (2, 0)$$

$$\dot{\gamma}(1) = (2, 0)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (2, 2(t-1))$$

$$(2, 0) + t(2, 0)$$



[MC1] Sia $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Allora $\max_D 4x - y^2 =$ $x=1, y=0$

(A) Non esiste (B) 4 (C) 0 (D) 3 (E) 5

[MC2] Sia $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Allora $\int_B 7z \, dx \, dy \, dz = \dots$

$$7 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \, \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$(A) 7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$$

$$(B) 0$$

$$(C) 14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

$$(D) 7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$$

$$(E) 14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha$$

[MC3] Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$. Allora $\int_D 4y \, dx \, dy \, dz = \dots$

- (A) 1 (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) 0

[MC4] Sia $f(x, y) = e^{2xy} + 3y^5$. Allora $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0, 2) =$ $f_x = e^{2xy} \cdot 2y$ $f_{xx} = 4y^2 e^{2xy}$

- (A) 16 (B) 4 (C) 8 (D) 1 (E) 0

[MC5] Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

$$f(x, y) = \frac{x}{1+x^4+y^4}, \quad g(x, y) = \frac{x^3}{1+x^4+y^4}, \quad h(x, y) = \frac{x^5}{1+x^4+y^4}.$$

$R(t, t)$
 $R(0, t)$

- (A) Tutte (B) Solo f (C) Solo g e h (D) Solo f e g (E) Solo h

$$4 \int_0^2 dx \int_0^x y \, dy \int_0^y dz = 4 \int_0^2 dx \int_0^x y^2 \, dy = \frac{4}{3} \int_0^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} [x^4]_0^2 = \frac{16}{3}$$

[MC7] Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B (x-y) \, dx \, dy, \quad \int_B (x+y) \, dx \, dy, \quad \int_B (x^3 - y^3) \, dx \, dy, \quad \int_B (x^3 + y^3) \, dx \, dy$$

- (A) 1 (B) 4 (C) 0 (D) 3 (E) 2

[MC8] Consideriamo la curva $\gamma(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$ definita per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora $\int_{\gamma} x \, ds =$

- (A) 0 (B) $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt$ (C) 2π (D) -2π (E) $\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^2 t |\sin t \cos t| \, dt$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{4 \sin^4 t \cos^4 t + 4 \cos^4 t \sin^4 t} \, dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t |\sin t \cos t| \, dt$$

ANALISI 2

—

LEZIONE 57

Note Title

12/12/2022

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^3 = 4, x \geq 0, z \geq 0\}$$

$(2, 1, 1) \rightsquigarrow y$ negative

$$\vec{F} = (xy, e^x + \sin^3 z, y^3)$$

$$\int \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^4 z^2 + 2z^2 = 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$(1, 0, 0) \rightsquigarrow x$ negative

$$\vec{F} = (xy, -y^2, yz + e^{x^2})$$

$$\int \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$\partial\Omega = \{x + y + 3z = 1, x, y, z \geq 0\} \cup \{x=1\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

$$\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz$$

Esercizio 1 (a) $\exists C$ reale tale che

$$xy^2 \leq C(1 + x^4 + y^3) \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

(b) $\exists C$ reale tale che

$$|xy^2| \leq C|1 + x^4 + y^3| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$x=1, y=-\sqrt[3]{2} \quad \text{così a } sx > 0 \text{ e } a \, dx = 0$$

$$(a) \frac{xy^2}{1 + x^4 + y^3} \leq C, \text{ cioè se } f(x, y) \text{ è limitata dall'alto}$$

Quindi bisogna fare max/min su $x \geq 0, y \geq 0$.

$$x = u^3, y = v^4 \rightsquigarrow \frac{u^3 v^8}{1 + u^{12} + v^{12}} \rightarrow 0 \quad \text{w gen.} \Rightarrow \text{max esiste}$$

Con qualche calcolo il max lo trovo davvero.

Esercizio 2

$$\partial\Omega = \{x+2y+3z=1, x,y,z \geq 0\} \cup \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

Calcolane

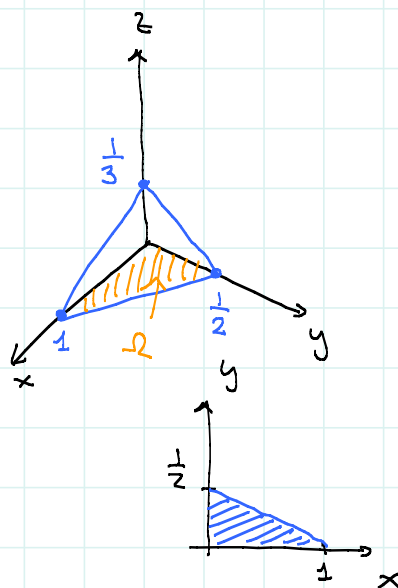
$$\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz$$

$$\iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{\frac{1-x-2y}{3}} y \, dz$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{1}{3} y (1-x-2y) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \, y (1-x-2y) = \text{si fa} \dots$$

— 0 — 0 —



Esercizio 3 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^4 z^2 + 2z^2 = 1, 0 \leq y \leq 1\}$

vettore normale $(1,0,0) \rightsquigarrow x$ negative

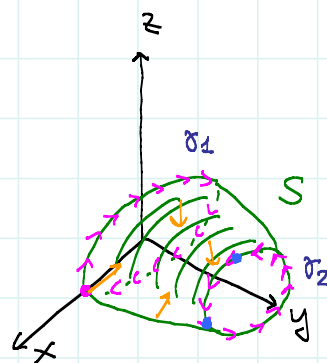
$$F = (xy, -y^2, yz + e^{x^2})$$

$$\int \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Come è fatta S?

 $\rightarrow y$ varia in $[0,1]$

$\rightarrow$ fissato y diventa $x^2 + (2-y^4)z^2 = 1$
quindi sono ellissi



Normale verso il dentro.

div $F = 0 \rightsquigarrow F =$ rotore di qualcosa

Parametrizzazione coerente del bordo

$$\gamma_1(t) = (\cos \theta, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi] \text{ con verso ok}$$

$$\gamma_2(t) = (\cos \theta, 1, \sin \theta) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi] \text{ al contrario}$$

S è un pezzo del bordo di

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in \Omega, 0 \leq x \leq 4 - y^2 - z^2\}$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\partial V} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
 normale esterna,
 opposta risp. alla nostra

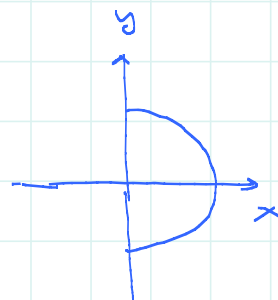
$$= - \text{quello che vogliamo} + \int_{\substack{\text{Base } x=0 \\ \text{O}}} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$$

$$+ \int_{\substack{\text{Punte } z=0 \\ \uparrow}} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

O per
 simmetria

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z=0, 0 \leq x \leq 4 - y^2\}$$

— o — o —



ANALISI 2

-

LEZIONE 58

Note Title

13/12/2022

① $A = [0, +\infty) \times [0, 1]$ $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ iuf/sup/
max/min

② $\gamma(t) = (t+t^2, t-t^2)$ $t \in [0, 2]$

D = dominio racchiuso da sostegno γ + retta per $(0,0)$ e $(6,-2)$

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

③ $E = (x, xy, -xz)$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

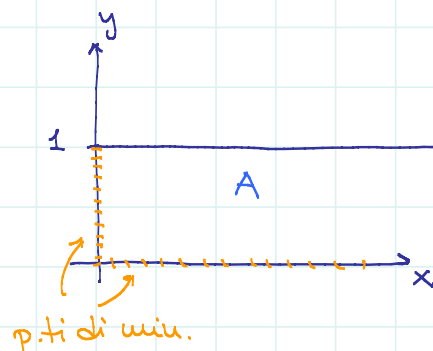
Orientazione uscente

① $\min = \max = 0$ perché $f(x, y) \geq 0$
sempre in A e $f(0,0) = 0$.

P.ti di min: $xy = 0 \leadsto$ assi

$$0 \leq f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2} \stackrel{y \leq 1}{\leq} \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$\downarrow$ su $\mathbb{R}^2$ e quindi a maggior ragione in A



Quindi $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = 0$

Inoltre esiste $(x_0, y_0) \in A$ t.c. $f(x_0, y_0) > 0$, quindi per w. generalizzato Max esiste.

Dove trovo i candidati p.ti max?

$\rightarrow$ sulla retta $y=1 \leadsto$ studio $\frac{x}{2+x^2}$

$\rightarrow$ p.ti stat. interni $\leadsto$ studio $\nabla f(x, y) = (0, 0)$.

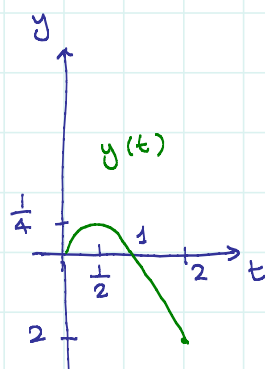
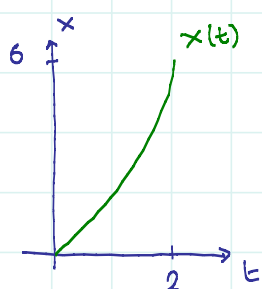
② $\gamma(t) = (t+t^2, t-t^2) \quad t \in [0, 2]$

D = dominio racchiuso da sostegno γ + retta per $(0,0)$ e $(6,-2)$

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

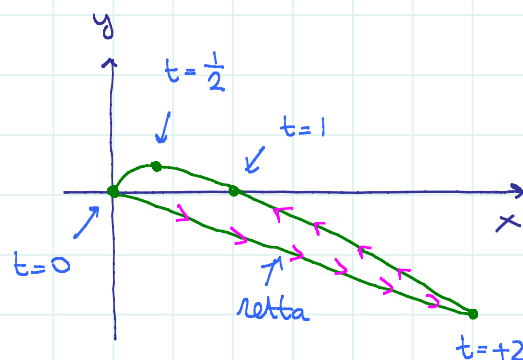
(2.1) La curva è semplice? Sì, perché $x(t) = t+t^2$ è strett. cresc. per $t \geq 0$

(2.2) Disegno appross della curva.



• $t \in [0, \frac{1}{2}]$ $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$

• $t \in [\frac{1}{2}, 2]$ $x(t) \nearrow$ e $y(t) \searrow$



[Non serve, ma volendo potrei scrivere

la curva come $y = f(x)$

$$\begin{cases} t-t^2 = y \\ t+t^2 = x \end{cases} \quad t^2+t-x=0 \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \quad \leftarrow \text{scelgo quella con segno perché } t \geq 0$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} - \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} \right)^2 = \dots \quad]$$

(2.3) Dimostro che il sostegno della curva sta sopra la retta $y = -\frac{1}{3}x$ quindi $y(t) \geq -\frac{1}{3}x(t)$

$$\begin{aligned} t-t^2 &\stackrel{?}{\geq} -\frac{1}{3}(t+t^2) &\Leftrightarrow 3t-3t^2 &\stackrel{?}{\geq} -t-t^2 &\Leftrightarrow 2t^2-4t \leq 0 \\ &&\Leftrightarrow t^2-2t &\leq 0 &\Leftrightarrow t(t-2) \leq 0 \\ &&&&\Leftrightarrow \text{valori interni } t \in [0, 2] \end{aligned}$$

(2.4) Per calcolare $\iint_D y \, dx \, dy$ uso teo. div. con $E = (xy, 0)$
oppure $(0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\begin{aligned}\iint_D y \, dx \, dy &= \iint_D \operatorname{div} E \, dx \, dy = \int_{\partial D} A \, dy - B \, dx \\ &= \int_{\partial D} xy \, dy\end{aligned}$$

Dove ∂D è fatto da due curve

- $\gamma_1(t) = (t, -\frac{1}{3}t)$ con $t \in [0, 6]$ (segmento)
- $\gamma_2(t) =$ curva data percorsa al contrario

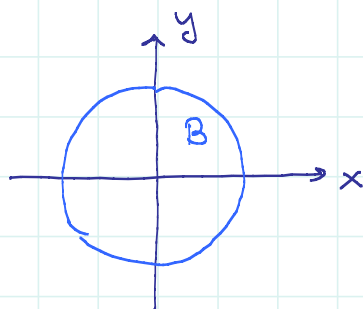
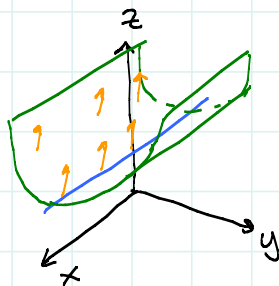
$$= \int_0^6 \underbrace{t}_x \underbrace{\left(-\frac{1}{3}t\right)}_y \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)}_{dy} dt - \int_0^2 \underbrace{(t+t^2)}_x \underbrace{(t-t^2)}_y \underbrace{(1-2t)}_{\dot{y}(t)} dt$$

Oss. È importante porsi il problema 2.3.

Eserc. 3 $E = (x, xy, -xz)$
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$
 Orientazione uscente $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$\operatorname{div} E = 1 + x - x = 1 \rightsquigarrow$ o definizione o teo. divergenza

Questa è una sup. cartesiana $z = 1 + y^2$ con base
il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$



Sembra complicato descrivere il bordo laterale di
 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + y^2\}$

Uso la definizione parametrizzando la superficie

$$(p \cos \theta, p \sin \theta, \underbrace{1 + p^2 \sin^2 \theta}_{z = 1 + y^2}) \quad p \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

$\uparrow$
 param. della
 base

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 2p \sin^2 \theta \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & 2p^2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (0, \underbrace{-2p^2 \cos^2 \theta \sin \theta - 2p^2 \sin^3 \theta}_{-2p^2 \sin \theta}, p)$$

A questo punto si calcola

$\uparrow$
 $\rightarrow$ orientazione giusta

$$\int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \{ p^2 \cos \theta \sin \theta (-2p^2 \sin \theta) - p \cos \theta (1 + p^2 \sin^2 \theta) \cdot p \}$$

- si fa.

— 0 — 0 —