

Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 1 – A.A. 2025/26

Programma per argomenti

Aggiornato al 4 agosto 2025

Prerequisiti

- Manipolazione di espressioni algebriche (numeriche e letterali).
- Polinomi: radici, divisione con resto, fattorizzazione.
- Potenze, radici e logaritmi.
- Geometria analitica nel piano.
- Trigonometria.
- Risoluzione di equazioni e disequazioni.
- Familiarità con il concetto di dimostrazione.

Preliminari

- Logica elementare. Proposizioni, predicati, quantificatori. Implicazioni e dimostrazioni per assurdo. Negazione di una proposizione.
- Insiemi. Operazioni tra insiemi: unione, intersezione, differenza simmetrica. Prodotto cartesiano. Insieme delle parti.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Funzioni tra insiemi e loro grafico. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive, invertibili. Funzione inversa. Immagine e controimmagine di un sottoinsieme tramite una funzione.
- Funzioni e funzioni inverse elementari (valore assoluto, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro inverse).
- Funzioni iperboliche e loro inverse.
- Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone.
- Operazioni sui grafici di funzioni reali. Interpretazione grafica di equazioni e disequazioni.
- Principio di induzione. Fattoriale, coefficienti binomiali, binomio di Newton. Disuguaglianza di Bernoulli.
- Definizione assiomatica dei numeri reali. Assioma di continuità.
- Sottoinsiemi dei reali limitati inferiormente, limitati superiormente, limitati. Massimo e minimo. Maggioranti e minoranti. Estremo inferiore e superiore.

Limiti

- Limite di una successione di numeri reali.
- Teorema di unicità del limite. Teorema di permanenza del segno.
- Teorema del confronto. Teorema dei carabinieri.
- Teoremi algebrici sui limiti (limite della somma/differenza, del prodotto, del rapporto). Forme indeterminate.
- Criteri della radice e del rapporto per i limiti. Criterio rapporto $\rightarrow$ radice.
- Successioni monotone. Esistenza del limite delle successioni monotone. Successioni limitate. Il numero e .
- Sottosuccessioni. Relazioni tra il limite di una successione e delle sue sottosuccessioni. Uso di sottosuccessioni per mostrare che un certo limite non esiste.
- Definizione di limite di una funzione. Teoremi algebrici e di confronto per i limiti di funzione.
- Limiti notevoli di funzioni.
- Cambio di variabile nei limiti.
- Legami tra limiti di funzioni e limiti di successioni.
- Linguaggio degli infinitesimi: o piccolo, O grande, equivalenza asintotica.
- Utilizzo del teorema di de l'Hôpital per il calcolo dei limiti.
- Utilizzo della formula di Taylor per il calcolo dei limiti.
- Successioni per ricorrenza, autonome e non autonome.
- $\liminf$, $\limsup$, $\maxlim$, $\minlim$ per successioni e funzioni. Rivisitazione in termini di $\liminf$ e $\limsup$ dei principali teoremi sui limiti di successioni e funzioni.
- Successioni di Cauchy e completezza dei numeri reali.

Continuità per funzioni di una variabile

- Linguaggio topologico nella retta reale: intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi, frontiera, punti di accumulazione.
- Definizione di funzione continua in un punto ed in un insieme.
- Continuità delle funzioni elementari.
- Teoremi algebrici sulle funzioni continue. Continuità della composizione e dell'inversa.
- Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi.

- Massimo e minimo di una funzione su un insieme. Punti di massimo e punti di minimo.
- Compattezza per sottoinsiemi della retta (equivalenza tra varie definizioni).
- Teorema di Weierstrass e sue varianti.
- Funzioni uniformemente continue e loro proprietà. Moduli di continuità.
- Teoremi sulle funzioni uniformemente continue: teorema di Heine-Cantor e di estensione.
- Funzioni Lipschitziane ed Hölderiane.
- Funzioni semicontinue inferiormente e superiormente.

Calcolo differenziale in una variabile

- Definizione di derivata e differenziale di una funzione in un punto. Equivalenza tra le due definizioni. Interpretazione geometrica del rapporto incrementale, della derivata e del differenziale.
- Teoremi algebrici sulle derivate. Calcolo della derivata delle funzioni elementari.
- Legami tra continuità e derivabilità in un punto.
- Derivata della funzione inversa. Calcolo della derivata delle funzioni inverse elementari.
- Derivate di ordine superiore al primo.
- Relazioni tra segno della derivata prima e monotonia.
- Funzioni convesse e concave. Relazioni tra segno della derivata seconda e convessità.
- Teoremi sulle funzioni derivabili: Rolle, Cauchy, Lagrange.
- Teorema di de l'Hôpital. Equivalenti del teorema di de l'Hôpital per le successioni.
- Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange.
- Studio di funzione locale e globale, e relative applicazioni.

Calcolo integrale in una variabile

- Integrale di per funzioni di una variabile limitate su intervalli limitati. Significato geometrico. Definizione alla Darboux e alla Riemann. Partizioni di un intervallo. Integrale inferiore e superiore.
- Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue. Proprietà dell'integrale (linearità, monotonia, additività rispetto alla zona di integrazione).
- Funzione integrale. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale.
- Primitive di una funzione continua. Utilizzo di una primitiva per il calcolo di integrali definiti. Primitive delle funzioni elementari.

- Formula di integrazione per parti. Formula di integrazione per sostituzione.
- Integrazione delle funzioni razionali. Sostituzioni razionalizzanti. Accenno all'interpretazione geometrica delle sostituzioni razionalizzanti.
- Integrali impropri: definizione nei due casi di dominio di integrazione non limitato oppure integranda non limitata.
- Criterio del confronto e del confronto asintotico per integrali impropri con integranda a segno costante. Criterio dell'assoluta convergenza per integrali impropri con integranda a segno variabile.
- Criterio del confronto serie-integrali e sua giustificazione geometrica.
- Integrali oscillanti e serie numeriche che si trattano allo stesso modo.

Serie numeriche

- Definizione di serie come limite delle somme parziali.
- Condizione necessaria per la convergenza di una serie.
- Criterio di condensazione.
- Serie geometrica, serie armonica generalizzata, serie telescopiche.
- Serie a termini positivi: criterio della radice, del rapporto, del confronto, del confronto asintotico. Casi limite nel confronto asintotico.
- Criterio di Leibnitz (serie a segno alterno).
- Serie assolutamente convergenti e relative proprietà (riordinamento, raggruppamento).
- Prodotto di serie.

Equazioni differenziali

- Terminologia: ordine di un'equazione, equazioni in forma normale e/o autonome.
- Problema di Cauchy per un'equazione di ordine n . Teorema di esistenza e unicità. Intervallo massimale di esistenza, tempo di vita, blow-up, break-down.
- Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine.
- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine arbitrario omogenee.
- Equazioni lineari a coefficienti costanti non omogenee. Ricerca euristica di una soluzione "per tentativi". Metodo di variazione delle costanti.
- Sistemi di equazioni differenziali lineari.