

A.A. 2025/2026
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 051. Introduzione agli integrali: notazioni, significato geometrico, funzioni a gradino, definizione di integrale inferiore e superiore. Funzione di Dirichlet.	5
Lezione 052. Criterio di integrabilità. Enunciato dell'integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue (con dimostrazione nel caso delle monotone). Prime proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, disuguaglianza con il valore assoluto, integrabilità del prodotto, proprietà di reticolo.	9
Lezione 053. Additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione. Primitive, funzioni integrali e loro ruolo nel calcolo degli integrali. Lipschitzianità della funzione integrale. Teorema della media integrale.	13
Lezione 054. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Due primitive in un intervallo differiscono per una costante. Primitive elementari. Discorso sul $+c$ negli integrali. Integrabilità del valore assoluto.	18
Lezione 055. Formula di integrazione per parti. Esempi classici di applicazione. Tecnica del grande ritorno e dell'1 nascosto. Esempio paradossale utilizzando la formula senza estremi.	23
Lezione 056. Formula di integrazione per sostituzione. Esempi classici di applicazione. Primitive di potenze di seno e coseno.	28
Lezione 057. Integrazione delle funzioni razionali: descrizione dell'algoritmo, integrazione dei fratti semplici.	33
Lezione 058. Precisazioni sui passi dell'algoritmo per integrare le funzioni razionali: fattorizzazione reale di polinomi, dimostrazione della decomposizione in fratti semplici, trucco per risolvere velocemente il sistema lineare.	37
Lezione 059. Sostituzioni razionalizzanti: funzioni razionali di esponenziali, radici qualunque di funzioni razionali di primo grado, radici quadrate di polinomi di secondo grado.	42
Lezione 060. Sostituzioni razionalizzanti: formule parametriche per le funzioni razionali di seno e coseno. Interpretazione delle sostituzioni razionalizzanti in termini di parametrizzazioni razionali di curve algebriche.	47
Lezione 061. Utilizzo delle simmetrie per il calcolo di integrali. Integrali del quadrato di seno e coseno tra estremi multipli di un angolo retto. Integrali di funzioni pari/dispari. Esempi finali sul calcolo di primitive.	51

Lezione 062. Introduzione agli integrali impropri: definizione nel caso monoprobema e spezzamento nel caso con più problemi. Comportamento degli integrali impropri con potenze negative della x , sia a 0 sia all'infinito. Primi esempi di calcolo. . . .	56
Lezione 063. Criteri di convergenza per integrali impropri: confronto, confronto asintotico (casi standard e casi limite), assoluta integrabilità. Primi esempi di applicazione.	61
Lezione 064. Integrali impropri con problemi in punti diversi dall'origine. Ulteriori esempi di studio della convergenza di integrali impropri. Un integrale improprio all'infinito può convergere senza che la funzione tenda a zero.	66
Lezione 065. Esempi classici di integrali oscillanti (integrali di Dirichlet e di Fresnel) trattati mediante integrazione per parti. Metodo dei triangolini (o rettangolini) per mostrare la non assoluta integrabilità degli stessi.	70
Lezione 066. Criterio di Dirichlet per la convergenza di integrali impropri e di serie. Lemma di Abel (sommazione per parti).	75
Lezione 067. Confronto serie-integrali e applicazioni (convergenza di serie, stima di sommatorie, stima delle code di serie).	79
Lezione 068. Esempi di studio di funzioni integrali.	84
Lezione 069. Il prodotto di funzioni integrabili è integrabile. Esercizi sullo studio della convergenza di integrali impropri.	89
Lezione 070. Esercizi riassuntivi su integrali impropri, confronti serie-integrali e studio di funzioni integrali.	94

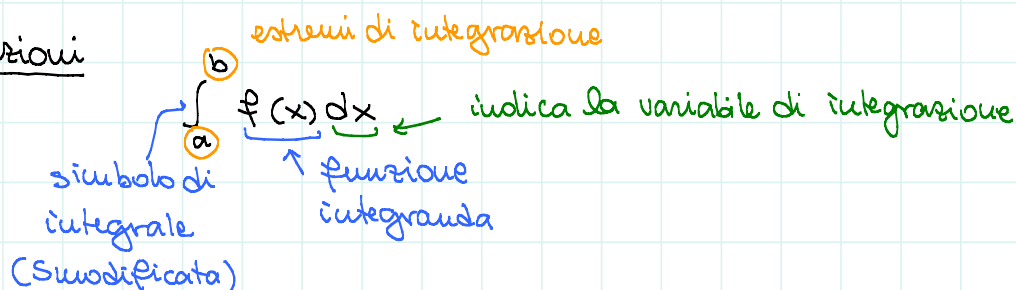
ANALISI 1 - LEZIONE 051

Note Title

25/11/2025

INTEGRALI PROPRI (Integrale di RIEMANN)

- Come si indicano
- Significato geometrico
- Come si definiscono
- Come si calcolano

1 Notazioni

Ingredienti fondamentali

- ① zona di integrazione $[a, b]$ limitata
 - ② $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata
- } se almeno uno manca l'integrale è improprio

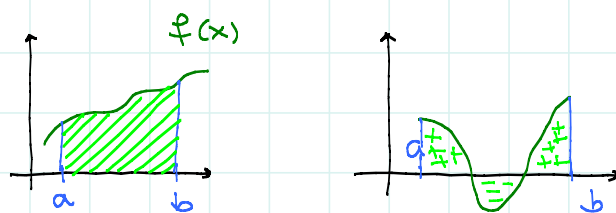
Estensioni della notazione: $\int_D f(x) dx$ $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{estremi uguali})$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{estremi invertiti})$$

Le ultime due sono definizioni per cui in seguito consideriamo solo $a < b$.

2 Significato geometrico



$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno}$ della parte di piano compresa tra asse x e il grafico di f .

Con segno: parti sopra asse x contano con il segno $+$, quelle sotto con il segno $-$.

3 Definizione Si può dare in tanti modi equivalenti

- DARBOUX *avanzata* (questa lezione)
- " *ortodossa*
- RIEMANN

Tre fasi: → caso banale
→ caso semibanale
→ caso generale

Caso banale $f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$
↑
costante



Si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda \underbrace{(b-a)}_{\substack{\text{lunghezza} \\ \text{base}}} = \text{area rettangolo}$$

↑
altezza con segno

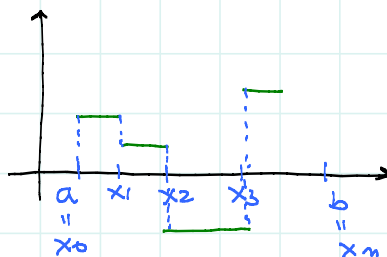
Caso semibanale Esiste una suddivisione di $[a, b]$
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

ed esistono costanti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(negli estremi si può decidere a piacere)

In questo caso si pone



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \text{somma algebrica delle aree dei vari rettangoli.}$$

Queste funzioni si chiamano

FUNZIONI A GRADINO (STEP FUNCTION)

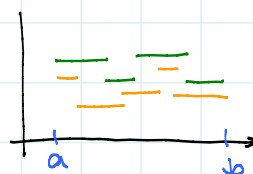
Oss. Una step function è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli

La funzione caratteristica di un intervallo vale 1 nell'intervallo e 0 fuori (agli estremi si può decidere)

Lemma non ovvio

- ① Se due comb. lineari di caratt. danno la stessa step function, allora l'integrale è lo stesso.
- ② Se una step function è $\geq$ di un'altra per ogni $x \in [a, b]$, allora il suo integrale è $\geq$ dell'altro

[Sotto a tutto serve un sotto-lemma che dice che due step function si possono sempre definire a partire dalla stessa partizione]



Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata qualunque
Si definisce

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ è una step. fund.} \right. \\ \left. \psi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

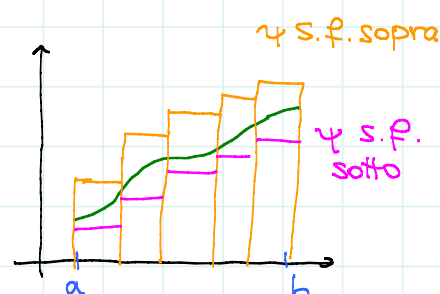
↙ somme superiori

↑ integrale superiore

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ è una step fund.} \right. \\ \left. \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

↘ somme inferiori

↑ integrale inferiore



Lemma $I^-(f) \leq I^+(f)$

Dim tutte le somme inferiori sono $\leq$ tutte le somme superiori

Def. Se per caso $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo RIEMANN) in $[a, b]$ e il valore comune è indicato con

$$\int_a^b f(x) dx$$

Oss. L'ipotesi che f è limitata garantisce l'esistenza di step $f \geq$ e $\leq$.

Esempio in cui $I^- < I^+$ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

In questo caso $I^+ = 1$ e $I^- = 0$

FUNZIONE DI
DIRICHLET.

ANALISI 1 - LEZIONE 52

Note Title

25/11/2025

Auerebbe dimostrato che l'integrale definito come $I^-(f) = I^+(f)$ coincide con quello che ci aspettavamo per funzioni costanti e step.f.

Teorema misterioso

Almeno le seguenti funzioni sono integrabili

→ quelle monotone → ora

→ quelle continue → secondo semestre

→ quelle continue tranne un numero finito di p.ti → esercizio

Criterio di integrabilità $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due step funct.

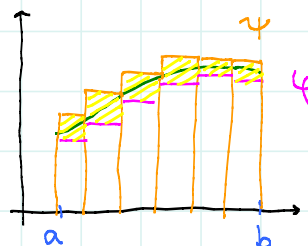
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

tali che

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

[Posso sempre supporre φ e ψ ottenute dalla stessa partizione di $[a, b]$]

Moralmente: area tra φ e ψ è $\leq \varepsilon$.



Dim. criterio: quasi ovvia.

Segue dalla caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$

Più in generale, dati due insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ con

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

allora $\sup A = \inf B$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{t.c.} \quad b - a < \varepsilon.$$

A B

Dim (che le f monotone sono integrabili)

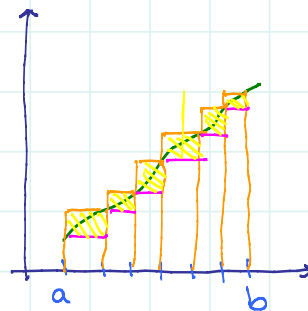
Facciamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. cresc.

(l'altro caso è analogo).

Dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$



Definisco $\psi(x) = f(x_i) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

Per deb. cresc.

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \right) (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &\quad \uparrow \text{base} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \quad \leftarrow \text{Questa è} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \quad \text{telescopica} \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere n grande e diventa $\leq \varepsilon$.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

① Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili, allora $f+g$ è integrabile e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Dim Per il criterio di integrabilità esistono s.f. tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi_2(x) \leq g(x) \leq \psi_2(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora basta osservare che

$$\underbrace{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}_{\varphi_3(x)} \leq f(x) + g(x) \leq \underbrace{\psi_1(x) + \psi_2(x)}_{\psi_3(x)} \\ \forall x \in [a, b]$$

e

$$\int_a^b (\psi_3(x) - \varphi_3(x)) dx = \int_a^b [(\psi_2(x) - \varphi_2(x)) + (\psi_1(x) - \varphi_1(x))] dx$$

Qui sto usando la tesi: me solo per step. functions per le quali è più semplice da dimostrare

$$\Rightarrow \int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx + \int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

② Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λf è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Dim Ancora criterio di integrabilità (occhio ai λ negativi)

② + ② L'insieme delle funzioni integrabili in $[a, b]$ è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lin. da questo spazio in $\mathbb{R}$.

③ (Monotonia dell'integrale) Se f e g sono int. in $[a, b]$ e

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

[Basta considerare le somme superiori]

Oss. (wokista) Cosa si salva di ①, ②, ③ senza assumere l'integrabilità

④ (Int. e valore assoluto) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, allora $|f|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

È unica di $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

Morale: al RHS tutte le aree contano con il +, al LHS c'è una somma algebrica

Oss. Se $|f|$ è integrabile, possiamo dire che f è integrabile?

NO! $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in ogni $[a, b]$

⑤ (Prodotto) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integr. ma in generale

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Domanda: cosa si può dire quando sono uguali?

Dim. delicata per la gestione dei segni

⑥ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

Dim. $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

— 0 — 0 —

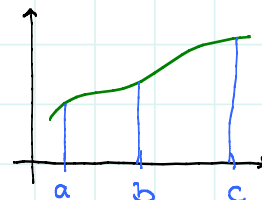
ANALISI 1 - LEZIONE 053

Note Title

26/11/2025

Additività rispetto alla zona di integrazione

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



Siano $a < b < c$ e sia $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

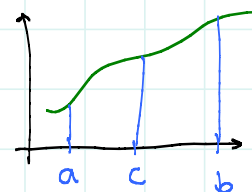
Supponiamo che f sia integrabile in $[a, b]$ e in $[b, c]$.

Allora f è integrabile in $[a, c]$ e vale la formula di sopra.

Oss. Un enunciato analogo vale anche se $a < c < b$

Il punto fondamentale è che ora

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$$



Vale in realtà per ogni ordinamento di a, b, c .

Idea della dim. Prendo step. f. sopra e sotto in $[a, b]$ e $[b, c]$ e le riunisco per avere quelle in $[a, c]$.

Idea per dim. alternativa: si definisce l'integrale solo per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ purché

- limitata
- nulle fuori da un intervallo.

A quel p.to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx$$

↑ f estesa a 0 fuori di $[a, b]$

A quel p.to l'additività rispetto alla zona di integrazione segue dall'additività semplice.

Domanda / esercizio : cosa diventa la proprietà senza assumere l'integrabilità.

COME SI CALCOLANO

Setting : data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, voglio calcolare

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Procedura Cerco UNA funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in $[a, b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

(basta F continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b))

A quel pto

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

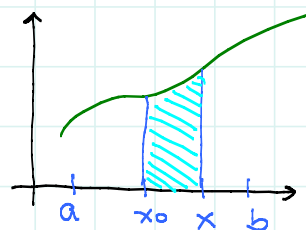
Ogni F con questa proprietà si dice PRIMITIVA di $f(x)$ (ANTIDERIVATIVE in inglese).

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Fisso $x_0 \in [a, b]$.

Si dice funzione integrale la funzione definita da

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$\uparrow$ usare un nome diverso da x



Proprietà semplici della funzione integrale

① $F(x_0) = 0$

② Se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora F è M -lipschitziana, e quindi in particolare continua, cioè

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M |x_2 - x_1| \quad \forall x_1 \in [a, b] \quad \forall x_2 \in [a, b]$$

Dim Assumiamo wlog che $x_1 \leq x_2$. Allora

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &\quad \uparrow \\ &\text{additività zona integr.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \\ &\stackrel{\text{val. assoluto}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \\ &\stackrel{\text{monotonia dell' integrale}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} M dx \\ &\stackrel{\text{caso banale}}{=} M(x_2 - x_1) \\ &\stackrel{x_2 \geq x_1}{=} M |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

③ Per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ vale la formula

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Dim $\int_c^d f(x) dx = \int_{x_0}^d f(x) dx - \int_{x_0}^c f(x) dx$ additività risp. alla zona di integr.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora per ogni scelta di x_0 la funzione integrale F è derivabile e soddisfa

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

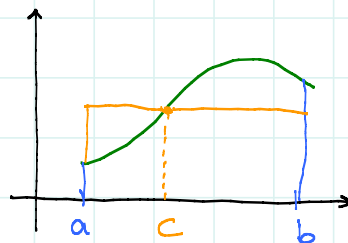
Teorema (della media integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Interpretazione geometrica Possiamo scriverlo come

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{area sotto il} \\ \text{grafico}}} = \underbrace{f(c)(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area di un} \\ \text{rettangolo con} \\ \text{base } [a, b] \text{ e} \\ \text{altezza } c}}$$



Dim Per w. f ammette in $[a, b]$ un minimo m e un massimo M , cioè

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Per monotonia dell'integrale

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

Dividendo per $b-a$ trovo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda} \leq M$$

" λ = numero compreso
tra min e max

[Fin qui andava bene
anche senza continuità
usando $m = \inf$
e $M = \sup$]

Essendo f continua, per forza assume tutti i valori tra m e M .

— o — o —

Oss. Con il senso di poi il teo. della media integrale
è Lagrange applicato a F .

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 054

Note Title

26/11/2025

Dim. teo. fondamentale Prendiamo una funzione integrale

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Prendiamo $x_1 \in (a, b)$ e proviamo a calcolare $F'(x_1)$.

Per $R > 0$ piccolo a sufficienza

$$\frac{F(x_1+R) - F(x_1)}{R} = \frac{1}{R} \left\{ \int_{x_0}^{x_1+R} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \right\}$$

add. zona integr. $\rightarrow$

$$= \frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1+R} f(t) dt$$

$\uparrow$ lunghez. intervallo su cui integro

teo. media integrale $\rightarrow$

$$= f(c(R))$$

$\uparrow$ p.to misterioso compreso tra x_1 e x_1+R

Quando $R \rightarrow 0$ abbiamo che

$c(R) \rightarrow x_1$ per carabinieri,

quindi per continuità

$$f(c(R)) \rightarrow f(x_1)$$

cioè

$$F'(x_1) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{F(x_1+R) - F(x_1)}{R} = f(x_1).$$

Per $R < 0$ quando arrivo a

$$\frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1+R} f(t) dt$$

ho estremi invertiti e $R < 0$, quindi i due segni - si annullano e posso continuare con il teo. della media integrale.

Oss. Se $x_1 \in \{a, b\}$, allora abbiamo solo $R \rightarrow 0^+$ o $R \rightarrow 0^-$.

1 - se usiamo una qualunque funzione integrale, allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (*)$$

2 - tutte le funzioni integrali sono primitive, cioè $F' = f$

Resta il dubbio che esistano primitive per cui non vale (*).

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

(cioè due qualunque primitive IN UN INTERVALLO differiscono per una costante)

dunque in particolare

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

Dim Pongo $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Allora

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e quindi $G(x)$ è costante. Perché?

Lagrange!

range:

$$G(x) - G(a) = (x-a) G'(c) = 0$$

↑
compresso tra
 a e x

Quindi $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a, b]$.

A questo punto

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + \cancel{c} - (F_2(a) + \cancel{c}) = F_2(b) - F_2(a)$$

Tecniche di integrazione : data f , trovare una qualunque F con $F' = f$.

Così banali: leggere al contrario la tabellina delle derivate.

Notazione $\int f(x) dx$ = una qualunque primitiva di f
 $\uparrow$
 integrale senza
 estremi

Esempi $\int x dx = \frac{1}{2} x^2$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{per } x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

Discorso del +c Mania strana

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$
 rappresenta l'insieme
 di tutte le primitive di
 $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad \leftarrow \text{Questo non è l'insieme di tutte le funzioni } +c. F'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

In questo secondo caso posso usare 2 valori di c diversi per $x > 0$ e per $x < 0$

Morale: $\rightarrow$ il $+c$ non serve nel calcolo di $\int_a^b f(x) dx$ perché si semplifica

$\rightarrow$ non basta per descrivere tutte le primitive.

Quindi non serve a molto.

Tesi : f integr. in $[a, b]$

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 step. funct. step. funct.

$$\int_a^b (\hat{\psi}(x) - \tilde{\psi}(x)) dx \leq \varepsilon.$$
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Suppongo wlog che φ e ψ arrivino da una stessa partizione di $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$$

→ se $f(x) \geq 0$ sempre, allora uso $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ e $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$
e allora gratis

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

→ Se $f(x)$ cambia segno in (x_{i-1}, x_i) , osservo che $\varphi(x) \leq 0$ e $\varphi(x) \geq 0$ nell'intervallo epongo

$$\hat{\varphi}(x) = 0$$

e osservo che

$$\hat{\psi}(x) = \max \{ \psi(x), |\varphi(x)| \}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{\max \{ \psi(x), |\varphi(x)| \}}_{\geq 0} dx$$

$$\max \{ A, B \} \leq A + B$$

se $A \geq 0$ e $B \geq 0$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) + |\varphi(x)|) dx$$

$$\underbrace{|\varphi| = -\varphi}_{\text{essendo } \leq 0} \rightarrow = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quindi in ogni intervallo vale che

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quando sommo ottengo la tesi.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 055

Note Title

01/12/2025

Domanda: data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, come trovo $\overset{\text{UNA primitiva}}{F}: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

Tecniche di integrazione:

- primitive elementari (tabella di derivate al contrario)
- int. per parti
- int. per sostituzione
- int. funzioni razionali
- sostituzioni razionalizzanti.

Base di tutto: se $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e $\varphi = \Phi'$, allora

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

INTEGRAZIONE PER PARTI Siano $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Poniamo

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) \quad \text{deriv. prodotto}$$

Applichiamo la base di tutto

$$\int_a^b (f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

e quindi, riorganizzando,

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

Formula di int. per parti UFFICIALE

Più brevemente

$$\boxed{\int f G = F G - \int F g} \quad \text{Formula int. per parti} \\ \text{ABUSIVA}$$

Operativamente: $\rightarrow$ cerco di vedere la φ da integrare come prodotto di due funzioni f e G

$\rightarrow$ di f devo saper fare la primitiva

$\rightarrow$ di G spero che derivando migliori.

Esempio 1

$$\int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{e^{2x}} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \rightarrow \text{fare sempre la verifica}$$

Esempio 2

$$\int \underset{G}{x^2} \cos(\underset{f}{3x}) dx = \underset{G}{x^2} \underset{F}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{g}{2x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \left\{ \underset{G}{x} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) - \int \underset{g}{1} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{9} \int \cos(3x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{27} \sin(3x) \leftarrow \text{verifica}$$

FATTO GENERALE Così si fanno le primitive del tipo

$$\int p(x) \cdot e^{ax} dx$$

$$\int p(x) \cos(ax) dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) dx$$

con $p(x)$ polinomio

Utilizzi SMART dell'integrazione per parti:

→ grande ritorno

→ l'1 nascosto

$$\text{Esempio 3} \quad \int \underbrace{\cos x}_{\neq G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad G} dx = \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad G} - \int \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{g} dx$$

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \int \underbrace{\sin x}_{\neq G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad g} dx$$

$\rightarrow$ torna indietro !!

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \left\{ \underbrace{-\cos x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad g} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{F \quad g} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{g} dx \right\}$$

$$= \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x} - 4 \int \cos x \cdot e^{2x} dx$$

grande ritorno!

Portando a sx il ritornato, troviamo

$$5 \int \cos x \cdot e^{2x} dx = \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x}$$

Dividendo per 5 ho la primitiva voluta!

$$\text{Esempio 4} \quad \int \cos^3 x dx$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \underbrace{\cos x}_{\neq G} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{G} dx = \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{F \quad G} - \int \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{2 \cos x}_{F \quad g} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{g} dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x dx - 2 \int \cos^3 x dx$$

$\rightarrow$ grande ritorno!

Portando a sx:

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x$$

e dividendo per 3 ho finito.

Esempio 5 $\int \log x \, dx$

$$\int \log x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\log x} \, dx = \underset{f}{x} \log x - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x \quad \leftarrow \text{verifica}$$

Esempio 6 $\int \arctan x \, dx$

$$\int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\arctan x} \, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\arctan x} - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \quad \leftarrow \text{verifica!}$$

FATTO GENERALE Le funzioni $\log$ e $\arctan$ tendono a "migliorare" quando si derivano.

FATTO GENERALE Come l'esempio 3 si fanno le primitive di

$$\int \cos(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

$$\int \sin(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

(se la base è diversa da e non cambia nulla)

IL NON ESEMPIO

$$\int \tan x \, dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} \, dx$$

$$= \underset{F}{-\cos x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \left(\underset{g}{-\frac{1}{\cos^2 x}} \right) (-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Periamo ritorno!

Semplificando viene $0 = -1$!!

Oss. Questo succede quando si usano le formule abusive.
Con gli estremi verrebbe

$$[0]_a^b = [-1]_a^b \quad \text{che è vera !!}$$

Esempio ancora più evidente:

$$\int 1 \, dx = \int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{G}{e^{-x}} \, dx = \underset{F \cdot G}{e^x \cdot e^{-x}} - \int \underset{F \cdot g}{e^x (-e^{-x})} \, dx$$

$$= 1 + \int 1 \, dx$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 056

Note Title

01/12/2025

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE Ripartiamo dalla base di tutto

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Poniamo $\Phi(x) = F(G(x))$ (estremamente impreciso: dovrei mettere ipotesi su F e G)

Osserviamo che

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(G(x)) \cdot g(x) \quad (\text{solito } F' = f, G' = g)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Formula int. per sostituzione **SEMI-UFFICIALE**

Oss. Se uno guarda LHS e RHS non sembrano esserci ipotesi su f , nemmeno la continuità.

Interpretazione **BRUTAL MODE**

→ Devo calcolare $\int_a^b f(G(x)) g(x) dx$

→ Pongo $y = G(x)$

→ Quando $x = a \rightsquigarrow y = G(a)$, quando $x = b \rightsquigarrow y = G(b)$

→ $\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x) \rightsquigarrow dy = g(x) dx$

In questo modo

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

che è la formula ottenuta sopra rigorosamente.

Esempio 1 $\int x^8 \cdot \sin(x^9) dx$

Idea: pongo $y = x^9 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = 9x^8 \rightsquigarrow dy = 9x^8 dx$

$$\frac{1}{9} \int \underbrace{\sin(x^9)}_{\sin y} \cdot \underbrace{9x^8 dx}_{dy} = \frac{1}{9} \int \sin y dy = -\frac{1}{9} \cos y = -\frac{1}{9} \cos(x^9)$$

↑
verifica :)

Esempio 2 $\int x \cdot e^{-x^2} dx$

Pongo $y = x^2 \rightsquigarrow dy = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{e^{-x^2}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Esempio 3 $\int \frac{\log x}{x} dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \rightsquigarrow dy = \frac{dx}{x}$

$$\int \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \log^2 x$$

Esempio 4 $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\log x}_{G} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_F \underbrace{\log x}_G - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_g dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

Si poteva fare per sostituzione?

$$y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx \quad \text{quindi}$$

$$\int x \log x \, dx = \int \underbrace{x^2}_{e^{2y}} \cdot \underbrace{\log x}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y e^{2y} dy$$

da qui procedo per parti

Esempio 5 $\int \tan x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{Pongo } y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} dy$$

$$= -\log |y| = -\log |\cos x|$$

o volendo

$$\int \tan x \, dx = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Entrambe le funzioni sono definite per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\cos x \neq 0$)

Esempio 6 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$

↑
metà dell'area del
cerchio



Facciamo comunque UNA primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \text{Pongo } x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y \, dy$$

quindi

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy = \int \cos^2 y \, dy$$

Ora quest'ultimo lo facciamo con il grande ritorno:

$$\int \cos^2 y \, dy = \int \underset{\neq}{\cos y} \cdot \underset{G}{\cos y} \, dy = \underset{F}{\sin y} \cos y - \int \underset{F}{\sin y} \underset{g}{(-\sin y)} \, dy$$

$$= \sin y \cos y + \int \underset{1-\cos^2 y}{\sin^2 y} \, dy = \sin y \cos y + y - \int \cos^2 y \, dy$$

↑
grande ritorno

da cui

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{1}{2} y$$

Tornando in x :

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \underbrace{\cos(\arcsin x)}_{\substack{= \\ \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}}} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

Una verifica è il condono di tutti i passaggi "strani" fatti.

PRIMITIVE DI POTENZE DI $\sin x$ E $\cos x$

1° modo Con il grande ritorno il grado scende di due

$$\int \cos^{2025} x \, dx = \int \underset{\neq}{\cos x} \cdot \underset{G}{(\cos x)^{2024}} \, dx$$

$$= \sin x \cdot (\cos x)^{2024} - \int \sin x \cdot 2024 (\cos x)^{2023} (-\sin x) \, dx$$

$$= \sin x (\cos x)^{2024} + 2024 \int (\cos x)^{2023} (1 - \cos^2 x) \, dx$$

grande ritorno

ANALISI 1 - LEZIONE 057

Note Title

02/12/2025

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P e Q in $\mathbb{R}[x]$

wlog possiamo supporre $Q(x)$ monico

Teorema Ogni funzione razionale ammette una primitiva che è comb. lin. di funzioni razionali e nda del tipo $\log(ax^2+bx+c)$ e $\arctan(ax+b)$.

Procedura: ① Divisione

② Fattorizzazione ← collo di bottiglia

③ Decomposizione

④ Integrazione

① **DIVISIONE** Se $\deg(P) < \deg(Q)$ non c'è nulla da fare
Se $\deg(P) \geq \deg(Q)$, allora faccio la div. di pol.

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{\uparrow \deg(R) < \deg(Q)}$$

Da qui segue

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$\uparrow$ di questo so fare la primitiva $\uparrow$ Nuova funz. raz. con $\deg(R) < \deg(Q)$

Conclusione: basta saper fare la primitiva quando $\deg(\text{num}) < \deg(\text{den.})$

2 FATTORIZZAZIONE Scomporgo il denominatore $Q(x)$.

Fatto generale: ogni polinomio a coeff. reali si può scrivere come prodotto di polinomi a coeff. reali di grado 1 o 2 (con quelli di grado 2 non ulteriormente scomponibili). Alcuni fattori possono essere ripetuti in molteplicità.

Al termine della fase 2 abbiamo

$$Q(x) = \prod_{i=1}^k (x + a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^R (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{n_j}$$

$\uparrow$
 corrispondono
 alle radici $-a_i$
 di $Q(x)$ che
 sono reali

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 polinomio che ha
 radici $\alpha_j \pm i\beta_j$

3 DECOMPOSIZIONE Si scrive la funzione razionale come comb. di funzioni razionali più semplici

Due metodi: $\rightarrow$ decomposizione in fratti semplici
 $\rightarrow$ decomposizione di HERMITE $\leftarrow$ più comoda

Fratti semplici Caso base: tutti i fattori di $Q(x)$ hanno molteplicità 1

$$\frac{x^3 + x + 7}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+9}$$

Sopra i fattori di grado 1 $\leadsto$ costante

" 2 $\leadsto$ generico pol. di grado 1

Facendo i conti ottengo

$$x^3 + x + 7 = \underbrace{A(x-2)(x^2+3x+9) + B(x+1)(x^2+3x+9) + (Cx+D)(x+1)(x-2)}_{\text{pol. di grado 3 cui coeff. dipendono da } A, B, C, D}$$

Uguagliando ho un sistema lin. di 4 eq. in 4 incognite

Quando alcuni fattori hanno molteplicità, allora devo usare come denominatore tutte le potenze fino alla molteplicità

$$\frac{\dots}{(x+1)^3(x^2+5)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+5} + \frac{Fx+G}{(x^2+5)^2}$$

Anche in questo caso $\neq$ incognite, e $\neq$ equazioni (il numeratore ha grado ≤ 6 , quindi $\neq$ coeff.)

Teorema (per ora misterioso) Posso sempre trovare in maniera unica i coeff.

Decomposizione di Hermite Se non ci sono molteplicità, coincide con la precedente.

Se ci sono molteplicità diventa

$$\frac{\dots}{(x+1)^3(x^2+5)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{d}{dx} \frac{Dx^3+Ex^2+Fx+G}{(x+1)^2(x^2+5)}$$

$\uparrow$
 tutti i fattori usati solo una volta

$\uparrow$
 generico pol. con grado $\leq$ in meno risp. al denom.
 stessi fattori di $Q(x)$, con molteplicità diminuita di 1

Fatto misterioso: si trovano i coeff. in maniera unica

4 INTEGRAZIONE Basta integrare i fratti semplici

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \log |x+a|$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^m} dx = \frac{A}{1-m} \frac{1}{(x+a)^{m-1}}$$

Vediamo i fratti con denom. di grado 2

$$\int \frac{3x+7}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 7 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 7 \arctan x$$

$$\int \frac{3x+7}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{4}{x^2+2x+2} dx$$

"
 $1 + (x+1)^2$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + 4 \arctan(x+1)$$

Caso generale:

$$\frac{Ax+B}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{A}{2} \frac{2x-2\alpha}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{B+\alpha A}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

↓

$$\frac{A}{2} \log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)$$

$$\frac{1}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

↓ primitiva

$$\frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Esempi $\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+2)$ [$\frac{1}{2}$ aggiunto dopo video]

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Più in generale $\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ se $a > 0$

Resterebbero da fare i fratti con denom. di grado 2 e molteplicità (che con Hermite non servono :)).

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 058

Note Title

02/12/2025

Fattorizzazione di pol. reali

Step 1 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice $\alpha \in \mathbb{C}$

Dim Teo. fondamentale dell'algebra

Step 2 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado $d \geq 1$ è il prodotto di d polinomi di grado 1

Dim Teo. Ruffini + induzione dallo Step 1

Step 3 Se $P \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora $\bar{\alpha}$ è una radice

Dim $P(\alpha) = 0 \Rightarrow$ faccio il coniugato e i coeff. di P non cambiano

Step 4 Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $P \in \mathbb{R}[x]$ con mult. m , allora anche $\bar{\alpha}$ ha mult. m

Dim $P(x) = (x - \alpha)^m Q(x)$
 $\uparrow$
 coeff. in $\mathbb{C}$

Faccio il coniugato $\bar{P}(x) = (x - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(x)$

Questo dice che $\bar{\alpha}$ ha mult. $\geq m$. Poi scambio il ruolo di α e $\bar{\alpha}$.

Step 5 Fattorizz. reale

Dim Prendo la fattorizz. complessa e accoppio i termini $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ quando α non è reale.

Decomposizione in fratti semplici

Analogo aritmetico: ogni frazione è somma di frazioni i cui denominatori sono potenze di primi

Lemma Se $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, con Q_1 e Q_2 relativamente primi, cioè senza fattori in comune, allora

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

per opportuni P_1 e P_2

Dim. BEZOUT vale in $\mathbb{R}[x]$ che è un anello euclideo.

Allora esistono $M(x)$ ed $N(x)$ t.c.

$$1 = M(x) \cdot Q_1(x) + N(x) \cdot Q_2(x)$$

Ora diviso per $Q_1 \cdot Q_2$.

Per induzione sul numero di fattori vale la stessa cosa anche quando il denom. ha più fattori.

Oss. Dal lemma ottengo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P(x) \cdot P_2(x)}{Q_2(x)}$$

In generale i gradi del numeratore possono superare quelli del denominatore. Faccio la divisione e ho problema.

Tuttavia se $\deg P < \deg Q$ posso trovare una sol. in cui i gradi dei num sono $<$ gradi del denom.

Dopo la divisione avrai

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{R_2(x)}{Q_2(x)} + \underbrace{\frac{A_1(x) + A_2(x)}{Q(x)}}_{\substack{\downarrow \text{polinomio che tende} \\ \text{a 0 all'infinito} \therefore \\ \text{Quindi è il pol. nullo}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$

Usando il lemma, otteniamo una decomposizione i cui denominatori sono potenze di pol. di 1° o 2° grado

$$\frac{1}{(x+1)^{30}(x^2+5)^{20}} = \frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+5)^{20}}$$

Perché $\frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}}$ è somma di fratti semplici?

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{29}x^{29} \sim 1, x, x^2, \dots, x^{29} \text{ sono una base di } \mathbb{R}_{\leq 29}[x]$$

Ma anche $1, (x+1), (x+1)^2, \dots, (x+1)^{29}$ sono una base (sono in numero giusto e lin. indep.)

Ma allora

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + \dots + c_{29}(x+1)^{29}$$

e quando divido per $(x+1)^{30}$ ho finito.

Il caso con il denom. di grado 2 è analogo.

Esempio $\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

Decomposizione: $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$

Bonino: $1 = A(x-1) + B(x+3) = (A+B)x + (3B-A)$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. } x \\ -A+3B=1 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \text{Sommo: } 4B=1 \leadsto B=\frac{1}{4} \leadsto A=-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1}{x^2+2x-3} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log|x+3| + \frac{1}{4} \log|x-1| \end{aligned}$$

Più arduo Moltiplico la relazione per $x+3$

$$\frac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x+3})(x-1)} = A + \frac{B(x+3)}{x-1}$$

Sostituisco $x = -3$ e trovo $A = -\frac{1}{4}$

Se voglio B , moltip. per $x-1$ e sostituisco $x=1$

Oss. Con i fattori di secondo grado il metodo arduo funziona sostituendo le due radici complesse.

Esempio $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

Posso farlo alla Hermite $\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+Dx+Ex^2+Fx^3}{(x^2+1)^2}$

Alternativa:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx \\ &\quad \parallel \\ &\quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\frac{x}{(x^2+1)^3}} dx = \underset{G}{x} \left(\underset{F}{-\frac{1}{4(x^2+1)^2}} \right) + \frac{1}{4} \int \underset{G}{\frac{1}{(x^2+1)^2}} \underset{F}{dx}$$

e quindi ci si riduce al grado precedente.

Esempio $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 059

Note Title

03/12/2025

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Come trasformare integrali di funzioni "strane" in int. di funzioni razionali

Quattro scenari : ① Raz (e^x)

② Raz ($x, \sqrt{ax+b}$) Raz ($x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$)

③ Raz ($x, \sqrt{ax^2+bx+c}$)

④ Raz ($\sin x, \cos x$)

Esempio 1 (Scenario 1) $\int \frac{1}{e^x+2} dx$

Pongo $y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x+2} dx = \int \frac{1}{e^x+2} \underbrace{\frac{1}{e^x} \cdot e^x dx}_{\frac{1}{y+2} \cdot \frac{1}{y} dy} = \int \frac{1}{y(y+2)} dy = \text{si fa}$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}$$

Molt. per y e $y=0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Molt. per $y+2$ e $y=-2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{y(y+2)} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+2} dy = \frac{1}{2} \log |y| - \frac{1}{2} \log |y+2|$$

Torno in x e ottengo $\int \frac{1}{e^x+2} dx = \frac{1}{2} \log(e^x) - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$

↑
positivi, quindi inutile

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$$

↳ Verifica

Alternativa per il cambio: $y = e^x \rightsquigarrow x = \log y \rightsquigarrow dx = \frac{1}{y} dy$

$$\int \frac{1}{e^x + 2} dx = \int \frac{1}{y+2} \frac{1}{y} dy = \text{come prima}$$

Esempio 2 (Scenario 1) $\int \frac{8^x}{4^x + 1} dx$

Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \cdot \log 2 \cdot dx$

$$\int \frac{8^x}{4^x + 1} dx = \int \underbrace{\frac{4^x}{4^x + 1}}_{\frac{y^2}{y^2 + 1}} \frac{1}{\log 2} \cdot \underbrace{\log 2 \cdot 2^x dx}_{dy}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{y^2 + 1} dy \quad \begin{matrix} \uparrow \\ +1-1 \\ \text{al num} \end{matrix} = \frac{1}{\log 2} \int \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy$$

$$= \frac{1}{\log 2} (y - \arctan y) = \frac{1}{\log 2} (2^x - \arctan(2^x))$$

Esempio 3 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx$ Raz ($x, \sqrt{x+1}$)

Pongo $y = \sqrt{x+1} \rightsquigarrow y^2 = x+1 \rightsquigarrow x = y^2 - 1 \rightsquigarrow dx = 2y dy$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx = \int \frac{y}{y^2 + 2} \cdot 2y dy = \text{si fa}$$

Esempio 4 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx$ Poteva essere $\int \frac{x^2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}} dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \rightsquigarrow y^2 = \frac{x+1}{x+3} \rightsquigarrow \boxed{y^2 x + 3y^2 = x+1}$

$$\rightsquigarrow x(y^2 - 1) = 1 - 3y^2 \rightsquigarrow x = \frac{1 - 3y^2}{y^2 - 1}$$

$\uparrow$ eq. di primo grado in x

$$\rightsquigarrow dx = \left(\frac{1 - 3y^2}{y^2 - 1} \right)' dy$$

Quindi

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx = \int \underset{G}{y} \left(\underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} \right)' dy =$$

$$= \underset{G}{y} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{4} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} dy = \text{si fa}$$

Esempio 5 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ Radici diverse della stessa roba

Pongo $y = \sqrt[6]{x}$ (in generale uso minimo comune multiplo)

$$\leadsto x = y^6 \leadsto dx = 6y^5 dy$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{y^3}{y^2+1} \cdot 6y^5 dy = \text{si fa}$$

Esempio 6 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2+3x+4} dx$

Pongo $\sqrt{x^2+3x+4} = x+y \leadsto \boxed{x^2+3x+4 = \cancel{x^2} + 2xy + y^2}$
è di primo grado in x

$$x(2y-3) = 4-y^2 \leadsto x = \frac{4-y^2}{2y-3} \leadsto dx = \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+3x+4} dx = \int \left(\underset{x}{\frac{4-y^2}{2y-3}} + \underset{+y}{y} \right) \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy = \text{razionale}$$

Esempio 7 (Scenario 3) $\int \sqrt{2x^2+5} dx$

Pongo $\sqrt{2x^2+5} = \sqrt{2}x+y \leadsto \cancel{2x^2}+5 = \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}xy + y^2$
è di primo grado in x, e quindi concludo

Fatto generale : se abbiamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ si pone $= \sqrt{a}x + y$
e funziona purché $a > 0$

Esempio 8 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2-5x+6} dx$

Potei farlo come prima, ma cerco alternativa.

Osservo che $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ e pongo

$$\sqrt{x^2-5x+6} = y(x-2) \quad [\text{oppure } y(x-3)]$$

$$(x-2)(x-3) = y^2(x-2)^2 \quad \text{no è di primo grado in } x!$$

$$x(1-y^2) = 3-2y^2 \quad \text{no } x = \frac{3-2y^2}{1-y^2} \quad \text{no } dx = (\dots)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2-5x+6} dx = \int y \underbrace{\left(\frac{3-2y^2}{1-y^2} - 2 \right)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3-2y^2}{1-y^2} \right)' dy}_{dx} = \text{si fa}$$

Fatto generale Se ax^2+bx+c si fattorizza come $(x-\lambda)(x-\mu)$ allora posso porre

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure } y(x-\mu).$$

Riassunto $\sqrt{ax^2+bx+c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	1° modo 2° modo	1° modo
$a < 0$	2° modo	☹ ↑ ↑

in questo caso ho $\sqrt{a} < 0$
quindi non ha senso integrare!

3° modo Ogni pd. di secondo grado si può scrivere come

$$d + (ax+b)^2 \quad \rightsquigarrow \quad 1+x^2 \quad \text{oppure} \quad -1+x^2$$

$$d - (ax+b)^2 \quad \rightsquigarrow \quad 1-x^2 \quad \text{oppure} \quad -1-x^2$$

Quindi basta saper fare $\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{x^2-1}$ $\sqrt{1-x^2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{si fa con} \quad x = \sin y$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{si fa con} \quad x = \sinh y$$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 x} \cdot \cosh y dy = \int \cosh^2 y dy$$

e questo si fa in almeno 3 modi

→ grande ritorno

→ formula per $\cosh(2y)$

→ usando formula esplicita per $\cosh y$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \quad \text{si fa con} \quad x = \cosh y$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1} \sinh y dy = \int \sinh^2 y dy = \text{come prima}$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 060

Note Title

03/12/2025

Scenario 4: formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$ (ultima spiaggia: se le conosci le eviti)

Precorso: pongo $t = \tan \frac{x}{2}$ e ho che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t \leadsto x = 2 \arctan t \leadsto dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Esempio 1 (Scenario 4) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Uso le formule parametriche: $\int \frac{\cancel{1+t^2}}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Alternativa $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$

Pongo $y = \cos x$ e diventa $-\int \frac{dy}{1-y^2} =$ si fa
(controllare che venga uguale)

Esempio 2 (Ripasso lezione precedente)

Tanti modi per fare $\int \sqrt{x^2-1} dx$

1° modo: $\sqrt{x^2-1} = x+iy$

2° modo: $\sqrt{x^2-1} = y(x+1)$ oppure $\sqrt{x^2-1} = y(x-1)$

3° modo: $x = \cos^2 y$ ~ viene $\int \sin^2 y \, dy$

4° modo: $x = \frac{1}{\cos y}$ (oppure $x = \frac{1}{\sin y}$)

$$\text{Viene } \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$= \int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y \cos y}{\cos^4 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y}{(1 - \sin^2 y)^2} \cdot \cos y \, dy$$

Pongo $\sin y = t$ e diventa $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \, dt$ che è razionale

[Controllare che venga lo stesso in tutti i modi]

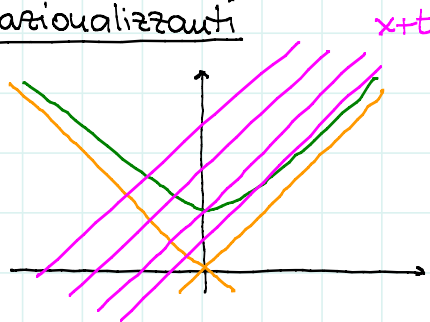
Interpretazione di alcune sostituzioni razionalizzanti

$$\sqrt{x^2+1} = x+t$$

$f(x)$

$$y = \sqrt{x^2+1} \text{ è come dire}$$

$$y^2 = x^2+1 \text{ cioè } y^2 - x^2 = 1$$



Ora $x+t$, al variare di t , è una famiglia di rette // alla bisettrice. Tutte queste rette intersecano una volta sola l'iperbole.

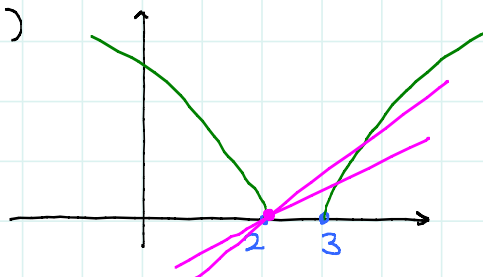
Quindi posso parametrizzare l'iperbole con due funzioni razionali della t

$$\begin{cases} y = x+t \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Secondo caso: $\sqrt{x^2-5x+6} = t(x-2)$

Il grafico è circa come in figura

$y = t(x-2)$ è la generica retta che passa per $(2,0)$



Ciascuna di queste rette interseca l'iperbole in 2 pt (quando messo a sistema è di 2° grado), ma uno lo conosco perché è $(2,0)$ quindi l'altro sarà per forza razionale come funzione di t (perché il prodotto delle due radici è razionale)

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 5x + 6 \\ y = t(x-2) \end{cases} \quad t^2(x-2)^2 = x^2 - 5x + 6 \quad \text{ma una radice so essere } x=2.$$

Esempio creativo $\int \sqrt{x^2 + 7x + 1} \, dx$

Vedo che magicamente per $x=1$ viene 3. Quindi il grafico passa per $(1,3)$. Ma allora pongo

$$\sqrt{x^2 + 7x + 1} = \underline{3 + t(x-1)}$$

generica retta per $(1,3)$

$$x^2 + 7x + 1 = 9 + t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

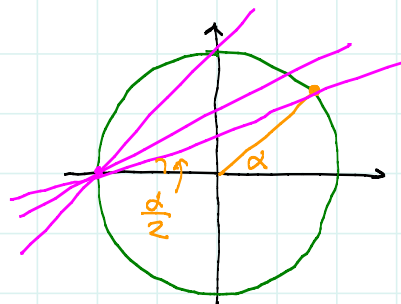
$$x^2 + 7x - 8 = t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

$$(x+8)(x-1) \quad \leadsto \text{ è di primo grado in } x !!$$

Finestra sul futuro: anche le rette $y = x+t$ passano per uno stesso "punto all'infinito" nel piano proiettivo.

Torniamo alla circonferenza

Di sicuro si parametrizza come $(\cos d, \sin d)$ con $d \in [0, 2\pi]$



Consideriamo tutte le rette che passano per $(-1, 0)$.

Tutte queste intersecano una sola volta la circ. oltre a $(-1, 0)$

Le rette sono $y = t(x+1)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x+1) \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + t^2(x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow (t^2+1)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

Una radice è $x = -1$, il prodotto è $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, quindi l'altra

radice è $\frac{1-t^2}{1+t^2} \rightsquigarrow$ il corrispondente $y = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2}$

Così abbiamo ottenuto le formule parametriche

Se il p.to P della circ. corrisponde ad un angolo α , il suo t corrispondente è il coeff. ang. della retta per P e $(-1, 0)$ e questo è $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Fatto generale Riesco a trovare una sostituzione razionalizzante per $\int f(x) dx$ tutte le volte che riesco a parametrizzare il grafico di f con funzioni razionali di t .

ANALISI 1 - LEZIONE 061

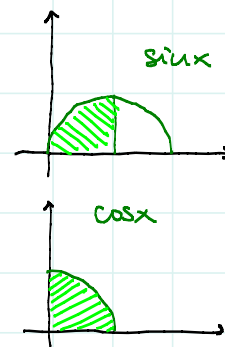
Note Title

09/12/2025

UTILIZZO DELLE SIMMETRIE

Esempio 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$



Come evidenza della simmetria: nel 2° integrale

pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ $x = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow dx = -dy$

Quando $x = 0$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$

" $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = 1$$

FATTO GENERALE

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \pm 1$$

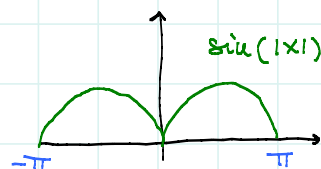
$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \pm 1$$

a seconda di k

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|) \, dx = 4$$

↑
funzione pari



$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = -1 \quad \text{sfruttando il fatto generale}$$

Esempio 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

1° modo: faccio la primitiva (per parti o sfruttando $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$)

2° modo: pongo $C := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ $S := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

Con il cambio $x = \frac{\pi}{2} - y$ si dimostra come nell'esempio 1 che $C = S$. D'altra parte

$$C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

↑
Dough. aten.

Quindi $C = S = \frac{\pi}{4}$.

FATTO GENERALE

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx = \frac{b-a}{2}$$

SE a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$

↑ ↑
serve per avere la
simmetria

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx$

Pongo $y = 2025x \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2025} dy$

$x=0 \rightsquigarrow y=0$, $x=\pi \rightsquigarrow y=2025\pi$. Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx = \int_0^{2025\pi} \sin^2 y \frac{1}{2025} dy = \frac{1}{2025} \int_0^{2025\pi} \sin^2 y \, dy = \frac{\pi}{2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{2025\pi}{2}}$

Stessa cosa se al posto di 2025 c'è $\frac{k}{2}$ con k intero.

Esempio 5 (truccoso)

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx$$

La primitiva mette male ☹️

Pongo $x = -y$ da cui $dx = -dy$

$$\underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx}_A = \int_{5\pi}^{-5\pi} \frac{\cos^5(-y)}{5^{-y} + 1} (-dy) = \underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 y}{5^{-y} + 1} dy}_B$$

$$A + B = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x \underbrace{\left\{ \frac{1}{5^x + 1} + \frac{1}{5^{-x} + 1} \right\}}_{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1} dx = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x dx$$

$$= \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos x (1 - \sin^2 x)^2 dx = \int_0^0 (1 - t^2)^2 dt = 0$$

$\uparrow$
 $\sin x = t$
 $dt = \cos x dx$

FATTI GENERALI

Se $f(x)$ è pari, allora $\int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$

" dispari, " $\int_{-A}^0 f(x) dx = - \int_0^A f(x) dx$

Si dimostrano con la sostituzione $y = -x$, il che però richiede un minimo di ipotesi su f .

In alternativa, possiamo sfruttare la def. di integrale e ottenere

$$I^+(f, [0, A]) = I^+(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = I^-(f, [-A, 0])$$

se f è pari

Per f dispari:

$$I^+(f, [0, A]) = -I^-(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = -I^+(f, [-A, 0])$$

... caso f pari ... prendo $\psi(x)$ s.f. con $\psi(x) \geq f(x)$ in $[0, A]$.

Allora $\psi(-x)$ è s.f. con $\psi(-x) \geq f(x)$ in $[-A, 0]$ e

l'integrale in $[0, A]$ di $\psi(x)$ coincide con l'integrale in $[-A, 0]$ di $\psi(-x)$.

Esempio 6 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

1° modo : formule parametriche

2° modo : $\frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \text{dato} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan x - \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

↑ con la sostituzione $\cos x = y$ diventa $\pm \int \frac{dy}{y^2}$

verifica

Esempio 7 $\int \sin(\log x) dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow x = e^y \rightsquigarrow dx = e^y dy$

$$\int \sin(\log x) dx = \int e^y \sin(y) dy = \dots \text{grande ritorno}$$

Esempio 8 $\int \arcsin x dx$

1° modo $\int 1 \cdot \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

1° modo $x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y dy$

$$\int \arcsin x dx = \int \arcsin(\sin y) \cdot \cos y dy = \int y \cos y dy = \dots \text{ parti}$$

Esempio 9 $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

1° modo : parametriche

2° modo : precorso $\int \frac{8}{\sin^3(2x)} dx \dots y = 2x \rightsquigarrow dy = 2dx$

$$\int \frac{4}{\sin^3 y} dy = 4 \int \frac{\sin y}{(1 - \cos^2 y)^2} dy \dots t = \cos y$$

3° modo : $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{\sin^3 x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos^3 x}$

$$\int \frac{\sin x}{\sin^4 x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2 \cos x} dx \quad \cos x = t \dots$$

4° modo $\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{\sin x \cdot \cos x}$

$$2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

— o — o —

☺

ANALISI 1 - LEZIONE 062

Note Title

09/12/2025

INTEGRALI IMPROPRI

Quando manca almeno uno degli ingredienti degli integrali propri:

→ zona di integrazione illimitata

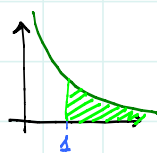
→ funzione illimitata

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



FUNZ. NON
LIMITATA

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA INT.
NON LIMITATA

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA E FUNZIONE
NON LIMITATE

INTEGRALI MONOPROBLEMA

Scenario 1 $\int_a^b f(x) dx$



Supponiamo che $f(x)$ abbia problemi

solo in a , cioè $\forall \epsilon > 0$ si ha che (basta $0 < \epsilon < b-a$)

$f(x)$ è integrabile in $[a+\epsilon, b]$. In questo caso per definizione

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

Il discorso è del tutto analogo se il problema è solo in b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Scenario 2

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$



Supponiamo che, per ogni $A > a$, si abbia che $f(x)$ è integrabile in $[a, A]$. Allora si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Discorso analogo per $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$

E se i problemi sono tanti?

Si spezza in tanti integrali con un problema solo

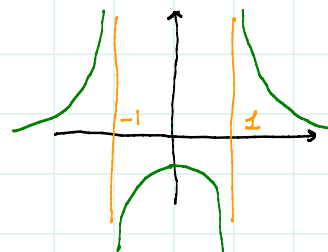
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^{16} \frac{1}{x} dx + \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑ ↑
hanno un problema solo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{-25} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-25}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{-1} \dots + \int_{-1}^0 \dots + \int_0^1 \dots + \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots$$



Essendo un limite un integrale improprio un problema ha 4 possibilità:

- converge
- diverge a $+\infty$
- " " $-\infty$
- è indeterminato

Se i problemi sono più di uno, si spezza e poi si procede come nel limite della somma, con l'accordo che se almeno un pezzo diverge a $+\infty$ e almeno un pezzo diverge a $-\infty$, allora quello globale è INDETERMINATO per definizione.

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ [deve venire positivo]



$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-A} + e^{-1}] = \frac{1}{e}$$

$\downarrow$
0

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ [unico pbm. a $+\infty$: deve venire > 0]

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan A - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}$$

Quindi per simmetria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Esempio 3 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ [Unico pbm. in $x=0$: deve venire > 0]

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2\sqrt{2}$$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A = \text{NON ESISTE (indet.)}$

Esempio 5 $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty$

Esempi classici

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

↑
qualunque
cosa > 0

Più a è grande,
più $f(x)$ è piccola
più è facile che
l'integrale
converga

$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^a} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{A^{a-1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Se $a > 1$ il limite è $\frac{1}{a-1}$. Se $a < 1$ il limite è $+\infty$.

Se $a = 1$ la primitiva è $\log x$, quindi viene

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \log A = +\infty$$

qualunque cosa > 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

se a diventa
grande, il denom.
diventa piccolo,
quindi la funzione
è grande

La dim è come prima

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{a-1}} \right]$$

↑
 $a \neq 1$

Se $a > 1$ il limite è $-(-\infty) = +\infty$

Se $a < 1$ il limite è $\frac{1}{1-a}$

Se $a = 1$ è l'esempio 5 di sopra.

Oss. Se l'unico problema è a $+\infty$, allora "il primo estremo non conta". Ad esempio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_{22}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx$$

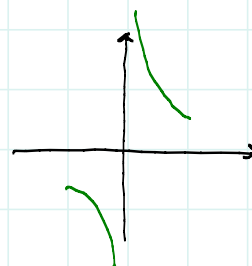
Infatti

$$\int_2^A \dots = \int_2^{22} \dots + \int_{22}^A \dots$$

quindi i due limiti differiscono per una costante.

L'ESEMPIO $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$



NO!!! Si tratta di un integrale improprio. Bisogna spezzare!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

Quindi è indeterminato

Ad esempio

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx$$



Il buco è ampio 3ε , ma la somma tende a $-\infty$.

Se scelgo bene gli estremi, tende a 2025.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 063

Note Title

10/12/2025

CRITERI DI CONVERGENZA PER INTEGRALI IMPROPRI

Come stabilire se un integrale improprio (monoproblema) converge o no senza calcolarlo esplicitamente

Integrandi a segno costante

- criterio confronto
- criterio confronto asintotico
 - casi standard
 - casi limite

Integr. a segno variabile

- assoluta integrabilità

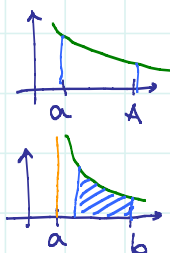
Oss. Se l'integranda $f(x)$ è ≥ 0 (vicino a dove c'è il problema) allora l'int. improprio può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Dim. basta osservare che la quantità di cui si fa il limite è monotona nel parametro

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \text{ è deb. cresc. in } A$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \text{ è deb. decr. in } \varepsilon$$

(una funzione che cresce andando indietro è decrescente)

Criterio confronto

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$

(basta $\forall x$ vicino al problema)

Allora valgono queste implicazioni (e solo queste)

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

c'è converge

Criterio confronto asintotico

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E (vicino al problema)
e

$$\lim_{x \rightarrow \text{pbm}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \neq +\infty$$

↑
p.to in cui c'è il problema

Allora i due integrali hanno lo stesso comportamento.

Dim. Per x vicino al pbm. vale che $0 < \frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l$
e quindi

$$\frac{1}{2} l g(x) \leq f(x) \leq 2l g(x)$$

Se $\int_E g(x) dx < +\infty$, quando disug. dx

Se $\int_E g(x) dx = +\infty$, quando disug. sx

Oss. Se $l = 0$ oppure $l = +\infty$, allora si salva solo una delle due implicazioni.

Absoluta integrabilità

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

Integrali da tabellina con cui confrontare

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \geq 1 \\ \searrow \text{converge se } b < 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 1)$$

↑
per evitare il
pbm di $\log \ln x = 1$

L'ultimo si dimostra facendo la primitiva, che è

$$\frac{1}{1-b} \frac{1}{(\log x)^{b-1}} \quad \text{se } b \neq 1 \quad \text{e} \quad \log(\log x) \quad \text{se } b = 1$$

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} dx$

Integranda ≥ 0 . Due problemi: in 0 e $+\infty$. $\int_0^5 \dots + \int_5^{+\infty} \dots$

Pbm. a $+\infty$ $\frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} \leq \frac{3/2}{x^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1 \leadsto \text{converge}$

Pbm. a 0 Brutale: $f(x) \sim \frac{x}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{2} < 1 \leadsto \text{converge}$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

↑
problema

Quindi $\int_0^5 f(x) dx$ si comporta come $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, cioè converge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Unico pbm. a $+\infty$, $f(x) \geq 0$ sempre. Ora

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1 \quad (\text{cioè vicino al problema})$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \quad (\text{si calcola}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

↑
confronto

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$f(x) \geq 0$. Solo problema a $+\infty$ perché in 0 la funzione è limitata

Brutale: $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ quando $x \rightarrow +\infty$, quindi diverge perché l'esponente è 1.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ (diventa il solito limite notevole)

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x| - 1}{x^2} dx$

$f(x) \leq 0$ sempre, quindi meglio studiare $\int_0^{+\infty} \frac{1 - |\cos x|}{x^2} dx$

Quanti problemi? Sicuramente $+\infty$

Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione tende a $\frac{1}{2}$, quindi in 0 non c'è nessun problema!

Per il pbm. a $+\infty$ basta osservare che $0 \leq \frac{1 - |\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Achtung! $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$, ma questo non vuol dire che anche l'altro diverge

Diverge per colpa del pbm. in 0, mentre a $+\infty$ converge, quindi il nostro per confronto converge!!

MORALE: il confronto vale solo tra integrali unoproblema

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$

Seguo variabile, problemi in $x=0$ e $x=+\infty$

pbm in $x=0$ Osservo che $0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^3 |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto tra
integrande ≥ 0
 $\uparrow$ assol.
integrabilità

Problema a $+\infty$ Osservo che $f(x) \geq 0$ per x grandi

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge

$\uparrow$
 $g(x)$ con cui
confrontare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \sim \dots$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 064

Note Title

10/12/2025

Integrali con problemi in punti strani

SLOGAN: portare il problema in zero!

Esempio 1 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$



Pongo $x = y+1 \Rightarrow dx = dy$

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \int_0^2 \frac{1}{\log(y+1)} dy \quad \text{Ora il pbm. è in 0}$$

Bruttale $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$ quando $y \rightarrow 0^+$

quindi si comporta come $\int \frac{1}{y} dy$ con pbm. in $y=0$, cioè diverge.

Oss. È lecito fare i cambi variabile sugli int. impropri?

Sì, basta farlo prima di passare al limite

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

facciamo il
cambio sull'int.
PROPRIO

$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

Esempio 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

Il pbm. è in $x = \frac{\pi}{2}^-$. Come lo porto in 0^+ ?

Pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ da cui $dy = -dx$

$$\begin{aligned} x=0 &\leadsto y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} &\leadsto y = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

precorso $\nearrow$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

$\frac{\cos x}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi diverge

Esempio 3 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\log x}}$ Due problemi, $f(x) \geq 0$

$x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \leq \frac{1}{x^2}$ per x grande ($x \geq e$)

Quindi per confronto a 2 converge

$x=1$ Brutale $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\log x}}$ e ci si riduce a $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$

Rigoroso: come prima $x = 1+y$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2 \sqrt{\log(1+y)}} \, dy$$

$\uparrow$
C.A. con $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

Esempio 4 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \, dx$ $f(x) \geq 0$ e 2 p.b.m.

$x \rightarrow +\infty$ Converge per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$x=1$ $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$

$\uparrow \uparrow$
colpevole dell'improprietà

quindi è come fosse $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ con p.b.m. in $x=1$, cioè $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$, quindi converge

Tabellina

$$\int \frac{1}{|x-a|^b} dx =$$

con pbm.
in $x=a$

converge se $b < 1$
diverge se $b \geq 1$

Dim: si riporta in 0 ponendo $x-a=y$

Esempio 5

$$\int_0^1 (\log x)^{30} dx$$



Converge! Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)^{30}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\log x)^{30} = 0 \quad (\text{limite dimenticato})$$

↑
caso limite

Quindi vicino a 0 vale

$$0 \leq (\log x)^{30} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{e si chiude per confronto}$$

Esempio 6

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^4 - 1} dx$$

$f(x) \geq 0$ sempre (i segni si compensano)

Problemi in $0, 1, +\infty$

+∞ Converge ($\log x$ rompe, un po' poco). C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \log x}{x^4 - 1} = 0 \quad \text{caso limite!}$$

quindi $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ per x grandi, e si chiude per confronto.

$x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}$$

↑
Hôp

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{(1+y)^4 - 1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{4y - 1 + o(y)} = \frac{1}{4}$$

Quindi il pbm. in $x=1$ non c'è !!!

$x > 0$ $f(x) \rightarrow +\infty$, sì ma quanto! Come $-\log x$

Quindi confronto asintotico con $g(x) = -\log x$ e $\int_0^1 (-\log x) dx$ converge (volendo si calcola, volendo si confronta con $\frac{1}{\sqrt{x}}$).

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} dx$

C'è un problema $a + \infty$ e converge per C.A. con $\frac{1}{x^{7/3}}$ e $\frac{7}{3} > 1$.

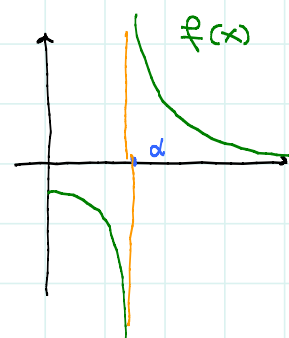
Problema più grave: il denom. si annulla da qualche parte, perché in $x=0$ vale -2 e per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$.

Si annulla in un solo p.to perché è strett. crescente:

La sua derivata è $7x^6 + 9x^2 \geq 0$ con annullamento sporadico.

Quindi c'è un unico altro p.to. in un p.to $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{\alpha} \dots + \int_{\alpha}^{\alpha+\epsilon} \dots + \underbrace{\int_{\alpha+\epsilon}^{+\infty} \dots}_{\text{c.o.}}$$



Non conosco α , ma faccio il claim che

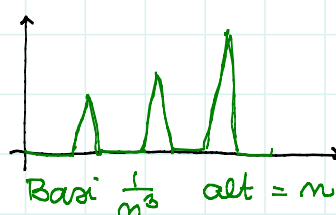
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x - \alpha}}$$

Se fosse così, convergono anche gli altri 2

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt[3]{x - \alpha}}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x - \alpha}{x^7 + 3x^3 - 2}}$$

$$\stackrel{\text{Höp}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{7x^6 + 9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7\alpha^6 + 9\alpha^2}} \neq 0 \text{ e } \neq +\infty$$

Achtung! Non c'è la cond. nec. per la conv. degli int. impropri



ANALISI 1 - LEZIONE 65

Note Title

15/12/2025

INTEGRALI OSCILLANTI (Oscillatory integrals)

Due strumenti : $\rightarrow$ trucco integrativo per parti
 $\rightarrow$ metodo dei triangolini (rettangolini)

Esempi principali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

convergono

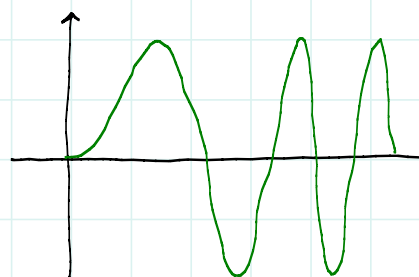
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$

Interpretazione grafica

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx =$ somma a segno
 alternata delle aree
 (converge per "effetto
 Leibniz")



$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx =$ la somma con il segno + diverge

Integrali classici

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{integrale di GAUSS})$$

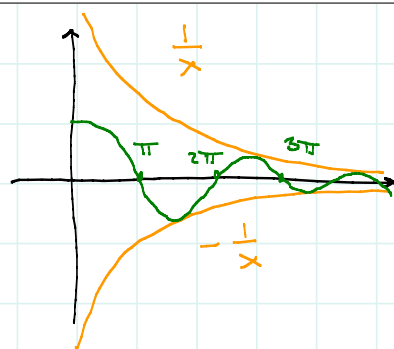
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{integrale di DIRICHLET})$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad (\text{integrale di FRESNEL})$$

AM2

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{integrale PROPRIO}} + \int_1^{+\infty} \dots$$



$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_1^A \sin x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]_1^A - \int_1^A (-\cos x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Facciamo il limite per $A \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

L'ultimo però è un integrale improprio sul quale posso usare assoluta integrabilità

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto tra integrande ≥ 0
 $\uparrow$ assol. integrab.

Oss. Allo stesso modo si dimostra che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una convergenza appena $a \geq 2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una convergenza appena $a \geq 1$)

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{PROPRIO}} + \int_1^{+\infty} \dots$$

$$\int_1^A \cos(x^2) dx = \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx$$

$$= \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\sin(x^2)}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_G dx$$

$$= \frac{\sin(A^2)}{2A} - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Passando al limite si conclude come prima.

Oss. Allo stesso modo si fa quello con $\sin(x^2)$

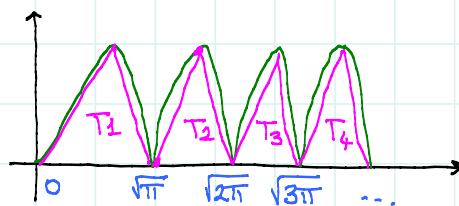
Analogamente si ottiene la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx$$

purché $a > 1$.

Nota che per $a = 1$ risultano entrambi indeterminati
— 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx = +\infty$



Idea: l'integrale improprio è
 $\geq$ della somma delle aree
 dei triangolini che stanno sotto il grafico.

Il triangolo T_k ha altezza 1 e come base l'intervallo
 $[\sqrt{(k-1)\pi}, \sqrt{k\pi}]$

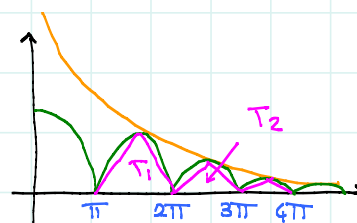
quindi la base è lunga $\sqrt{\pi} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Quindi

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \geq \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}_{\text{area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza}}$$

La serie diverge perché $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$



La base di T_k è lunga π

L'altezza è il valore della funzione

nel p.to medio della base che è $k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Quindi $\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \pi \frac{2}{\pi} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$

e come prima $\int_0^{+\infty} \dots \geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = +\infty$

Oss. lo stesso metodo mostra che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx = +\infty \quad \forall a \leq 1$

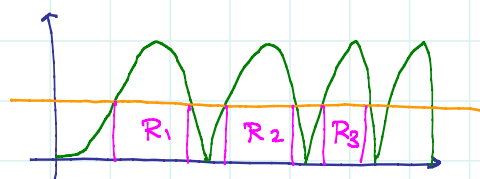
Achtung! Nei due esempi abbiamo assunto che il triangolino stia sotto la funzione, il che andrebbe dimostrato (nel caso di T_2 del primo esempio è pure falso!)

Via uscita facile: usare i rettangolini.

Nel primo esempio mi chiedo dove $|\sin(x^2)| \geq \frac{1}{2}$

L'altezza di R_k è $\frac{1}{2}$

La base è ... $|\sin(x^2)| = \frac{1}{2}$



$$x^2 = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x^2 = k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

La base è lunga $\sqrt{k\pi + \frac{5\pi}{6}} - \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{6}} \sim \frac{\text{costante}}{\sqrt{k}}$

Stesso discorso per l'esempio 4.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 66

Note Title

15/12/2025

Criterio di DIRICHLET

Consideriamo integrali con problemi all'infinito del tipo

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$$

Supponiamo che

- ① la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è limitata
 - ② la funzione g è di classe C^1 , deb. decr., e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.
- Allora l'integrale improprio converge

Dim Integro per parti:

$$\int_a^A f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^A - \int_a^A F(x) \cdot g'(x) dx$$

Vediamo i due pezzi

$$[F(x)g(x)]_a^A = \underbrace{F(A)g(A)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per le ipotesi}}} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\text{numero}}$$

Dico che $\int_a^{+\infty} F(x) \cdot g'(x) dx$ è assolutamente integrabile

$$\begin{aligned} \int_a^A \underbrace{|F(x)|}_{\leq M} \cdot |g'(x)| dx &\leq M \int_a^A |g'(x)| dx = -M \int_a^A g'(x) dx \\ &\quad \substack{\uparrow \\ \leq 0 \text{ per} \\ \text{ipotesi}} \\ &= -M (g(A) - g(a)) \\ &\quad \substack{\downarrow \\ 0} \end{aligned}$$

Quindi, mandando $A \rightarrow +\infty$, ottengo

$$\int_a^{+\infty} |F(x)| \cdot |g'(x)| dx \leq M \cdot g(a) \quad \text{☺}$$

Oss. Posso rimpiazzare la monotonia di g nell'ipotesi 2 con

$$\int_a^{+\infty} |g'(x)| dx < +\infty \quad (\text{variazione limitata})$$

— o — o —

DIRICHLET PER SERIE

Lemma di sommazione parziale (ABEL) (int. per parti con le serie)

Siano a_n e b_n due successioni.

Allora per ogni coppia di interi $0 \leq m < n$ vale la relazione

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k)$$

Dim. Considero $a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k$ (specie di derivata del prodotto) e sommiamo per $k = m, \dots, n$

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m$$

↑
telescopica

(int. derivata = differenza valori agli estremi)

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_k + a_{k+1} b_k - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Riorganizzando i termini ottengo la tesi.

Criterio di Dirichlet per le serie

Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Supponiamo che

- ① le somme parziali di A_n sono limitate
- ② b_n è deb. decr. e $b_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Oss. Dirichlet $\Rightarrow$ Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} b_n$$

Le somme parziali di A_n sono limitate (sono 0 e ± 1 alternati)
Le ipotesi su b_n sono le stesse.

Dim di DIRICHLET

Uso il lemma di sommazione con
 A_k al posto di b_k e $(A_k = a_1 + \dots + a_k)$
 b_k al posto di a_k

Il lemma diventa

$$\sum_{k=m}^n b_{k+1} (A_{k+1} - A_k) = b_{m+1} A_{m+1} - b_m A_m - \sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$$

La uso con $m = 1$ (o comunque l'indice iniziale) e $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^n b_{k+1} a_{k+1} = \underbrace{b_{m+1} A_{m+1} - b_m A_m}_{\substack{\downarrow 0 \quad \downarrow \text{limit.} \\ \downarrow 0}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)}_{\text{spesso assol. conv.}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \underbrace{|A_k|}_{\leq M} \cdot |b_{k+1} - b_k| &\leq M \sum_{k=1}^n |b_{k+1} - b_k| = -M \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) \\ &= -M (b_{m+1} - b_1) = \underbrace{Mb_1}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

tutto come nel caso degli integrali.

Oss. Come con gli integrali posso sostituire la monotonia di b_n con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| < +\infty.$$

Esempio classico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ o più in gen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^a}$ $a > 0$

Con $a > 1$ c'è assoluta convergenza. Con $a > 0$ c'è comunque convergenza per Dirichlet.

Cosa serve?

Serve che le somme parziali di $\sin n$ abbiano un bound uniforme, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n \geq 1 \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq M$$

In generale c'è una formula per le somme di $\sin(kx)$ che si dimostra per induzione.

Idea per ottenerla osservando che $\sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx})$ quindi

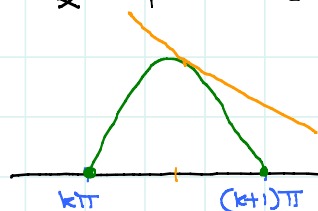
$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n e^{ikx}}_{\text{geometrica}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$$

ora basta usare le formule per le potenze dei numeri complessi. Il bound segue dal fatto che al num. ci sono solo $\sin$ e $\cos$ e il denom. non dipende da n .

Back to lezione precedente Come è fatta $\frac{|\sin x|}{x}$ per $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$

C'è un max, ma non è nel pto medio.

1° modo: derivo e vedo che $f'(\text{pto medio}) \neq 0$



2° modo: nel pto medio è tangente a $\frac{1}{x}$, quindi ha la stessa derivata che è < 0 , quindi un po' a sx del pto medio vale di più

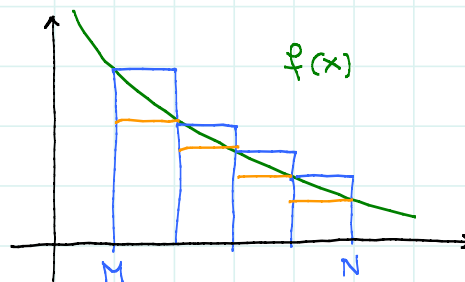
ANALISI 1 - LEZIONE 067

Note Title

16/12/2025

CONFRONTI SERIE - INTEGRALI (Gli integrali aiutano la serie)Ipotesi: $M \in \mathbb{N}$

$$f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

 f debolm. decrescente

Allora per ogni $N > M$ intero
valgono le disuguaglianze

$$\sum_{k=M+1}^N f(k) \leq \int_M^N f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{N-1} f(k)$$

Geometricamente è: aree blu $\leq$ integrale $\leq$ aree arancioni

Diciam Andrebbe fatta per induzione su N con passo base $N = M+1$.

Al passo induttivo si usa che

$$f(N+1) \leq \int_N^{N+1} f(x) dx \leq f(N)$$

per la monotonia di $f(x)$.

— o — o —

Facendo il limite per $N \rightarrow +\infty$ otteniamo che

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{+\infty} f(k)$$

Oss. Essendo $f(x)$ monotona, definitivamente ha segno costante, quindi i limiti esistono in $\overline{\mathbb{R}}$.

La cosa è più interessante quando $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ così c'è la cond. nec. per la serie

Corollario Nelle ipotesi di sopra, quindi $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. decr., vale che

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=M}^{+\infty} f(k) \text{ converge}$$

Dim Se l'int. converge, quando disug. $\sum x$
 " diverge " $\sum dx$.

In questo modo si studia facilmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\log k)^a}$$

Si riducono ai corrispondenti integrali, per cui sappiamo fare le primitive ☺

Dimostrazioni possibili : $\rightarrow$ serie - integrali
 $\rightarrow$ condensazione di Cauchy
 $\rightarrow$ disuguaglianze ad hoc

Il range più delicato è $a \in (1, 2)$. Da serie - integrali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k^a} &\leq \int_1^m \frac{1}{x^a} dx = \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^m = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{m^{a-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{m^{a-1}} \right) \end{aligned}$$

Aggiungendo il 1° termine diventa

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

$$= \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Provare a dimostrarla per induzione!

Esercizio 1 Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)}^{a_n}$$

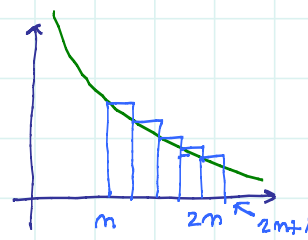
Volendo si può dim. in maniera elementare che la succ a_n è monotona e ha un limite $l \in (0, +\infty)$.

Brutal mode: $a_n \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \log(2n) - \log n = \log 2$ " "

Per renderlo rigoroso uso la disug. serie integrali

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{1}{x} dx$$

$$\underbrace{\log \frac{2n+1}{n}}_{\downarrow \log 2} \leq a_n \leq \underbrace{\log \frac{2n}{n-1}}_{\downarrow \log 2}$$



Quindi $a_n \rightarrow \log 2$ per i carabinieri.

Esercizio 2 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n$. Allora $S_n \rightarrow +\infty$. Ma come?

Risposta: $S_n \sim \log n$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$

Esercizio 4

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^5} = C_m \quad \text{Allora } C_m \rightarrow 0$$

Ma come?

Brutale: $C_m \sim \int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^4} \right]_m^{+\infty} = \frac{1}{4m^4}$

Claim: C_m ha parte principale $\frac{1}{4m^4}$.

Per dimostrarlo basta osservare che

$$\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx \leq C_m \leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$$

e i due laterali si calcolano.

— o — o —

ANALISI 1 -

LEZIONE 068

Note Title

16/12/2025

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

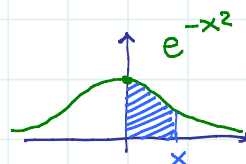
Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Simmetrie: $f(x)$ è DISPARI perché l'integranda è pari

Definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Zeri e segno: $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \text{numero} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



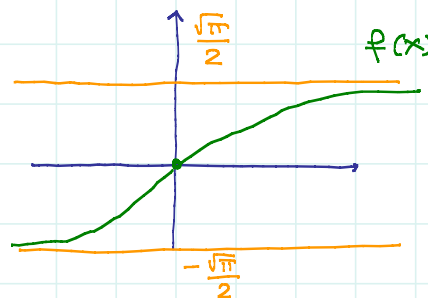
Monotonia: $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ci aspettiamo che sia

→ concava per $x \geq 0$

→ convessa per $x \leq 0$

$$f''(x) = -2x e^{-x^2} \text{ conferma}$$



Esercizio 2 Risolvere la disequazione $\arctan x > \int_0^x e^{-x^2} dx$
(per x grande è verificata perché $\frac{\pi}{2} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Studio la funzione $\varphi(x) := \arctan x - \int_0^x e^{-x^2} dx$

Dispari, definita e continua in $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$.

Sarà monotona?

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}$$

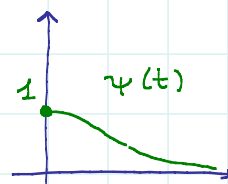
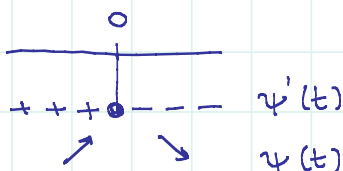
Ci piacerebbe che fosse $\varphi'(x) \geq 0$. Osservo che

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x^2)e^{-x^2} \leq 1$$

Studio $\psi(t) := (1+t)e^{-t}$

$$\psi'(t) = e^{-t} - e^{-t}(1+t) = -te^{-t}$$

$$\psi(0) = 1$$



Abbiamo dimostrato che $\psi(t) \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ con uguagl. $\Leftrightarrow t=0$

Quindi, ponendo $t = x^2$, abbiamo che

$$(1+x^2)e^{-x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con uguagl.} \Leftrightarrow x=0$$

Quindi $\varphi'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con uguagl. $\Leftrightarrow x=0$

Monotonia 3 $\Rightarrow \varphi$ strett. cresc. $\Rightarrow \varphi(x) > 0$ per ogni $x > 0$
 $\varphi(x) < 0$ " " $x < 0$.

Quindi la disug. iniziale ha come sol. $x > 0$.

Esercizio 3 Studiare $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ (Due estremi "strani")

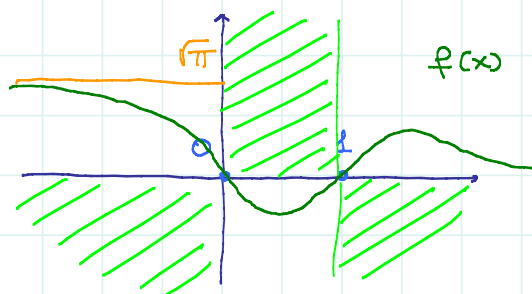
Continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Niente simmetrie.

Dove si annulla? Essendo $e^{-t^2} > 0$, può annullarsi solo quando gli estremi coincidono, cioè

$$x = x^2 \leadsto x = 0, 1$$

Per lo stesso motivo

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{coda di integrale convergente})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Continua + limiti finiti a $\pm\infty \Rightarrow$ funzione limitata

In questo caso sappiamo anche che $f(x) < \sqrt{\pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ per questioni di integrali.

Chi è $f'(x)$?

Fatto generale:
$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t) dt$$

$$\leadsto f'(x) = \varphi(b(x)) b'(x) - \varphi(a(x)) a'(x)$$

Dim Detta Φ una primitiva di φ , abbiamo che

$$f(x) = \Phi(b(x)) - \Phi(a(x))$$

quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Phi'(b(x)) b'(x) - \Phi'(a(x)) a'(x) \\ &= \varphi(b(x)) b'(x) - \varphi(a(x)) a'(x) \end{aligned}$$

Nel nostro caso
$$f'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2} \cdot 1$$

$$= e^{-x^2} \left(2x e^{x^2-x^4} - 1 \right)$$

il segno dipende da questo

e studiando questa funzione

forse si vede che si annulla 2 volte

$f(x)$ è Lipschitziana? Sì, anche su tutto $\mathbb{R}$.

Basta osservare che la derivata è limitata e lo è perché è continua e ha limiti finiti per $x \rightarrow \pm\infty$

[Provare a dim. per bene questo fatto]

Esercizio 4 Sia f quella dell'esercizio 3.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x^2}$$

1° modo: Hôpital essendo $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + \cos x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{-x^4} - e^{-x^2} + \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1 + x^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x} = 1 \end{aligned}$$

2° modo Chi è il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$?
 " 5 di $f(x)$?

$$\begin{aligned} \text{Brutal mode: } f(x) &= \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^5)\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{t^5}{10} \right]_x^{x^2} + [o(t^6)]_x^{x^2} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 + o(x^5) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pol. di Taylor di } f(x) \text{ di grado 5}} \end{aligned}$$

L'unico passaggio brutale è

$$\varphi(t) = o(t^a) \text{ per } t \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi(t) = o(t^{a+1}) \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}} \underset{\text{Hôp}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{(a+1)t^a} = 0$$

Achtung! Per le derivate NON FUNZIONA

$$f(x) = x^{11} \sin \frac{1}{x^{100}} \quad \text{Allora } f(x) = o(x^{10}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{Ma } f'(x) = \underbrace{11 \cdot x^{10} \sin \frac{1}{x^{100}}}_{o(x^9)} - \underbrace{x^{11} \cos \frac{1}{x^{100}} \cdot (100) \frac{1}{x^{101}}}_{\substack{\text{c'è } x^{80} \text{ al denominatore} \\ \Rightarrow \text{terribile}}}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 069

Note Title

17/12/2025

Integrabilità del prodottoIpotesi : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabileTesi : prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è integrabileDim Per il criterio di integrabilità, per ogni $\varepsilon > 0$ devo trovare step functions φ e ψ b.c.

$$\varphi(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \psi(x)$$

e

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

Problema date step funct. analoghe per f e g , come produrre quelle per $f \cdot g$?Scenario buono : $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ sempre. In questo caso posso supporre che le s.f. per f e g siano ≥ 0 .Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esistono

$$0 \leq \varphi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x)$$

$$0 \leq \varphi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x)$$

tali che

$$\int_a^b (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}, \quad \int_a^b (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_f}$$

Allora tutando

$$\varphi_f(x) \varphi_g(x) \leq f(x) g(x) \leq \psi_f(x) \psi_g(x)$$

(qui è fondamentale che sia roba ≥ 0)

$$\int (\psi_f(x) \psi_g(x) - \varphi_f(x) \varphi_g(x)) dx$$

$$= \int \underbrace{\psi_f(x)}_{\leq M_f} (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + \int \underbrace{\varphi_g(x)}_{\leq M_g} (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

← bound per f e g →

$$\leq M_f \int (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + M_g \int (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M_f} \qquad \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

[Bisogna osservare che i casi $M_f = 0$ oppure $M_g = 0$ sono banali]

Scenario semi-buono : f e g hanno segno costante
(eventualmente diverso) in $[a, b]$
[Basta tirare fuori i segni -]

Scenario generale : Scriviamo

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x)$$

con $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e idem per g_+ e g_-

$$f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Osserviamo che

→ f_+, f_-, g_+, g_- sono integrabili (max/min di funz. int.)

→ $f \cdot g = f_+ g_+ + f_+ g_- + f_- g_+ + f_- g_-$ è somma di quattro funz. integrabili.

Possibile scorciatoia dopo lo scenario buono:

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$$

f int. $\Rightarrow |f|$ int $\Rightarrow f^2 = |f|^2$ è int. perché prodotto di due funz. ≥ 0

Idea per g^2 e $(f+g)^2$ integrabili. Ma allora

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

è somma / diff. di funzioni integr.

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ è indeterminato

$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{x})]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{A}) + 2] \end{aligned}$$

Questo limite non esiste: basta considerare le due succ.

$$A_n = (2n\pi)^2$$

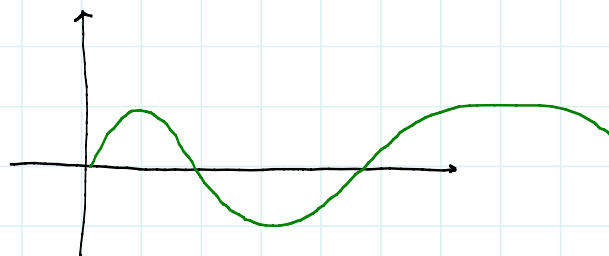
$$B_n = (2n\pi + \pi)^2$$

Graficamente: le oscillazioni sono sempre più lunghe e le aree sotto non tendono a zero



Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx$

L'idea è che sia parecchio indeterminato



Anche qui si fa la primitiva

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= \int_{\substack{y=\sqrt{x} \\ x=y^2 \\ dx=2y dy}} 2y \sin y dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y dy \\ &= -2y \cos y + 2 \sin y \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Verifica: $[-2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin \sqrt{x}]'$

$$= -2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2\sqrt{A} \cos(\sqrt{A}) + 2 \sin(\sqrt{A})] = \text{non esiste}$$

Se prendo $A_m = (2\pi m)^2$ tende a $-\infty$

$B_m = (2\pi m + \pi)^2$ tende a $+\infty$

Domanda: di che ordine sono le aree sotto le varie "colline"?

Si stimano con rettangoli / triangoli con altezza 1 e basi

$$(2\pi m + \pi)^2 - (2\pi m)^2 \sim 4\pi^2 m$$

Esempio 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x) dx$

Due problemi: $+\infty$ e $-\infty$

$$\int_{-\infty}^0 \sin(e^x) dx \text{ converge per confronto asintotico con } e^x$$

≥ 0 per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

e $\int_0^{+\infty} e^x dx$ converge (volendo usando la defn.)

$\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$ dovrebbe convergere per via delle oscillazioni forti

$$\sin(e^x) = \underbrace{e^x \sin(e^x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{la primitiva} \\ -\cos(e^x) \text{ è} \\ \text{limitata}}} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\uparrow \\ \text{decrecente} \\ \text{e tende a 0}}} \rightsquigarrow \text{DIRICHLET}$$

Esempio 5 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(e^x) dx$ diverge a $+\infty$

A $+\infty$ converge per Dirichlet

A $-\infty$ la funzione tende a 1, quindi diverge a $+\infty$

Esempio 6 $\int_{-\infty}^0 |\sin(e^x)| dx$
è quello di prima
😊

$$\int_0^{+\infty} |\sin(e^x)| dx$$

Diverge a $+\infty$ e
si dimostra con i
rettangolini / triangolini
Le basi sono
 $\sim \log(n+1) - \log n$
 $= \log \frac{n+1}{n}$
 $= \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 070

Note Title

17/12/2025

Esercizio 1 $\sum_{k=m^2}^{m^3} k^7$ ordine di infinito e parte principale

Brutal mode: $\sim \int_{m^2}^{m^3} x^7 dx = \left[\frac{1}{8} x^8 \right]_{m^2}^{m^3} \sim \frac{1}{8} m^{24}$

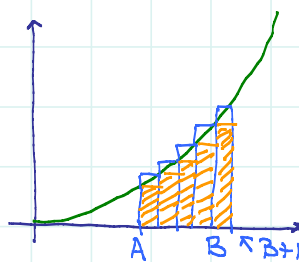
Rigoroso: confronto con l'integrale

Per $f(x)$ crescente vale che

$$\sum_{k=A}^B f(k) \leq \int_A^{B+1} f(x) dx$$

$$\sum_{k=A}^B f(k) \geq \int_{A-1}^B f(x) dx$$

↑
due manciotti traslate
a sx di 1



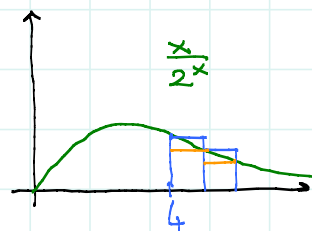
Esercizio 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ Quanti termini sommare per avere un errore $\leq \frac{1}{100}$ (fare stima)

Devo trovare $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \frac{1}{100}$

Studiando la funzione si vede che prima cresce e poi decresce

$$k=3 \rightsquigarrow \frac{3}{8}$$

$$k=4 \rightsquigarrow \frac{1}{4} < \frac{3}{8} \rightsquigarrow \text{da } 4 \text{ in poi già decresce}$$



Per la solita disug. $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq \int_n^{+\infty} x 2^{-x} dx$

e quest'ultimo si calcola per parti e quindi si riesce a stimare n

$$\int x 2^{-x} dx = -x 2^{-x} \frac{1}{\log 2} + \int 2^{-x} \frac{1}{\log 2} dx$$

$$= -x 2^{-x} \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2} 2^{-x}$$

Ora lo calcolo tra n e $+\infty$ e impongo che sia $< \frac{1}{100}$

Esempio 3 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

Dipende da n . Per $n=0$ viene $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = +1$

Chiamiamolo I_n . Allora

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \underset{G}{x^{n+1}} \underset{f}{e^{-x}} dx = \left[\underset{G}{-x^{n+1}} \underset{F}{e^{-x}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1) x^n e^{-x} dx$$

$$= (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (n+1) I_n \quad \ddot{}$$

Quindi $I_n = n!$

Oss. Posso porre $I(x) := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

Questa è definita per ogni $x > -1$ (questo garantisce la convergenza per il p.b.m. in $t=0$)

Calcolare $I(-\frac{1}{2})$

$$I(-\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \stackrel{\substack{\uparrow \\ t=y^2 \\ dt=2y dy}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} \cdot 2y dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Oss. Un giorno sarà $I(x) = \Gamma(x+1)$ (Γ di Eulero)

Esempio 4 $f(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$

↑
voglio evitare
pbm in $t=1$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Viene $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log t} dt$

e questo diverge ad esempio per confronto asint. con $\frac{1}{t}$ ($\circ \frac{1}{\sqrt{t}}$)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\log t} = +\infty$ quindi $\frac{t}{\log t} \geq 1$ per t grandi
quindi $\frac{1}{\log t} \geq \frac{1}{t}$ per t grandi

Il limite è $+\infty$. Ma quanto cresce? Cresce come $\frac{x}{\log x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{\log x}} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{\log x - 1}{\log^2 x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \frac{\log^2 x}{\log x - 1} = 1 \quad \ddot{\smile}$

Esempio 5 Come cresce $\int_0^x e^{t^2} dt$?

Provo con $\frac{e^{x^2}}{2x} = g(x)$ [La primitiva cresce meno della funzione!]

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}}$

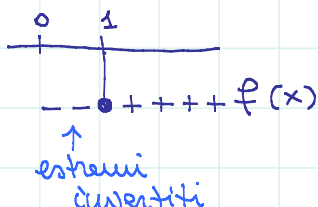
$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2x^2}} = 1 \quad \ddot{\smile}$

Esempio 6 $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$

Per quali x è definita? Per $x \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$

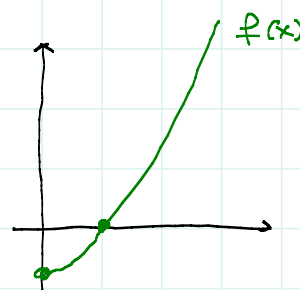
$\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$
che converge $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$

Segno?



Monotonia? $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow$ strett. crescente

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (l'integrale si diverge)



Quanto cresce a $+\infty$? Provo con $\sqrt{x} e^x = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2\sqrt{x}}{1+2x} = 0, \text{ quindi non è quello giusto}$$

Secondo tentativo $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \dots$ con questo dovrebbe venire

— 0 — 0 —