

A.A. 2025/2026
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Logica elementare (a livello intuitivo). Proposizioni e operazioni sulle proposizioni: negazione, and e vel, implicazione, doppia implicazione. Tavole di verità. Modi equivalenti di scrivere una implicazione e legami con le dimostrazioni per assurdo.	7
Lezione 002. Predicati e quantificatori. Negazione di una proposizione con uno o più quantificatori. Insiemi e notazioni insiemistiche. Insieme delle parti. Prodotto cartesiano.	11
Lezione 003. Funzioni tra insiemi: definizione operativa e formale. Grafico, composizione, iniettività, surgettività, funzione inversa. Immagine e controimmagine. . . .	15
Lezione 004. Principio di induzione. Dimostrazione di uguaglianze e disuguaglianze mediante il principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli.	19
Lezione 005. Insiemi numerici. Definizione assiomatica dei numeri reali (assiomi algebrici, di ordinamento, di continuità). Enunciato dei teoremi di esistenza ed unicità dei reali.	24
Lezione 006. Maggioranti, minoranti, massimo, minimo, estremo inferiore e superiore. Dimostrazione dell'esistenza di inf e sup. Caratterizzazione di inf e sup. Dimostrazione che l'insieme dei naturali non è superiormente limitato.	28
Lezione 007. Funzioni reali: proprietà di simmetria (funzioni pari/dispari/periodiche) e di monotonia. Minimo periodo. Funzioni elementari: potenze a esponente intero positivo e loro inverse. Valore assoluto.	32
Lezione 008. Funzioni elementari: esponenziali e logaritmi. Accenno ad una possibile definizione rigorosa via equazione funzionale. Funzioni elementari: funzioni trigonometriche e relative inverse (definizione geometrica, grafici, interpretazione nella circonferenza trigonometrica).	37
Lezione 009. Operazioni sui grafici. Iniettività ed equazioni. Monotonia e disequazioni.	42
Lezione 010. Esercizi riassuntivi sulle funzioni elementari.	46
Lezione 011. Significato dei termini 'definitivamente' e 'frequentemente'. Definizione di successione e metodi per visualizzarla. Definizioni di limite per successioni. Primi esempi e controesempi.	50

Lezione 012. Altri esempi e primi risultati sui limiti di successione: legami tra esistenza del limite e limitatezza, permanenza del segno, teorema di confronto a 2 (con avvertenza su possibili abusi), teorema di confronto a 3 (teorema dei carabinieri).	55
Lezione 013. Definizioni di limitatezza e monotonia per successioni. Teorema delle successioni monotone. Il numero e (monotonia e limitatezza della successione che lo definisce).	59
Lezione 014. Retta reale estesa. Enunciato del teorema algebrico sui limiti di successione. Dimostrazione di alcuni casi del teorema sul limite della somma e del prodotto. Primi esempi di calcolo di limiti di successioni.	64
Lezione 015. Limiti dell'esponenziale e della radice n -esima di una costante. Criterio della radice, del rapporto e rapporto $\sqrt[n]{n}$ radice per limiti di successione: enunciati e dimostrazioni.	69
Lezione 016. Confronto tra ordini di infinito. Esercizi sui limiti che sfruttano le tecniche viste finora.	74
Lezione 017. Limiti di funzioni: definizioni. Definizione di funzione continua in un punto ed in un insieme.	78
Lezione 018. Enunciato della continuità delle funzioni ottenute a partire da quelle elementari. Dimostrazione della continuità di una funzione esponenziale. Dimostrazione della continuità della composizione di due funzioni continue in un caso semplice. Enunciato dei limiti notevoli. Primi esempi di limiti calcolati mediante cambi di variabili e limiti notevoli.	82
Lezione 019. Criterio successioni $\sqrt[n]{n}$ funzioni. Dimostrazione dei limiti notevoli classici.	87
Lezione 020. Criterio funzioni $\sqrt[n]{n}$ successioni. Trucco del passaggio all'esponenziale e del valore assoluto. Esempi di limiti calcolati sfruttando i limiti notevoli.	92
Lezione 021. Sottosuccessioni e loro limiti. Utilizzo di successioni e sottosuccessioni per mostrare la non esistenza di limiti di funzioni e successioni.	97
Lezione 022. Esercizi misti sui limiti: razionalizzazioni di radici, limiti in punti diversi da zero/infinito, limiti di sommatorie, limiti delle medie p -esime.	102
Lezione 023. Definizione di o piccolo e di equivalenza asintotica. Principali proprietà di o piccolo.	107
Lezione 024. Svilupppini delle funzioni elementari. Utilizzo degli svilupppini per il calcolo di limiti.	112
Lezione 025. Rapporto incrementale, derivata e differenziale. Retta tangente ad un grafico. Equivalenza tra le definizioni e interpretazione geometrica. Limiti notevoli vs svilupppini vs derivate delle funzioni elementari. Continuità delle funzioni derivabili.	116
Lezione 026. Teoremi algebrici sulle derivate. Derivata della composizione e dell'inversa (enunciati). Derivata delle funzioni elementari e delle relative inverse.	122

Lezione 027. Enunciato del teorema di De L'Hôpital. Esempi in cui si può e non si può applicare. Pericoli del "fare i limiti metà per volta" o mediante equivalenza asintotica.	127
Lezione 028. Enunciato della formula di Taylor con resto di Peano e centro in 0. Unicità del polinomio di Taylor. Dimostrazione degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari.	132
Lezione 029. Formula di Taylor con resto di Peano e centro in un punto qualunque: enunciato e deduzione dal caso con centro in 0. Operazioni con i polinomi di Taylor: polinomio di Taylor della somma/differenza, del prodotto e della composizione. . .	137
Lezione 030. Definizione di ordine di infinitesimo e parte principale. Esempi di calcolo di polinomi di Taylor.	141
Lezione 031. Funzioni iperboliche.	146
Lezione 032. Esercizi misti sui limiti, sviluppi di Taylor, parti principali.	151
Lezione 033. Serie numeriche: definizione come limite delle somme parziali. Serie telescopiche e geometriche. Proprietà algebriche.	155
Lezione 034. Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica. Serie a termini di segno costante. Criteri di convergenza: confronto, radice, rapporto. Primi esempi di studio della convergenza.	160
Lezione 035. Criteri di convergenza per serie numeriche: confronto asintotico (casi standard e casi limite). Serie armonica generalizzata: dimostrazione via criterio di condensazione di Cauchy e via disuguaglianze elementari.	165
Lezione 036. Esempi di studio della convergenza di serie numeriche a termini di segno costante, anche parametriche.	170
Lezione 037. Criterio di Leibniz per le serie a segno alternato. Assoluta convergenza. Teorema dei carabinieri per le serie. Esempi di serie convergenti ma non assolutamente convergenti.	174
Lezione 038. Esercizi riassuntivi sulle serie, anche parametriche.	178
Lezione 039. Teorema di esistenza degli zeri: enunciato e tre possibili dimostrazioni. Teorema dei valori intermedi. Sottoinsiemi connessi/convessi dei reali. Le funzioni continue assumono tutti i valori tra inf e sup in un insieme connesso.	182
Lezione 040. Teoremi che legano la monotonia di una funzione al segno della sua derivata prima. Primi esempi di applicazione allo studio di equazioni o della surgettività di una funzione.	186
Lezione 041. Definizioni di max/min e di punti di max/min. Teorema di Weierstrass in un intervallo: enunciato e dimostrazione via ordinamento. Ricerca dei punti di max/min: punti stazionari interni, singolari interni, bordo.	190

Lezione 042. Varianti del teorema di Weierstrass: funzioni periodiche, funzioni definite su tutta la retta con condizioni all'infinito. Studio locale di una funzione nell'intorno di un punto stazionario: criterio delle derivate successive e sua interpretazione in termini di polinomi di Taylor.	194
Lezione 043. Schema classico per lo studio di funzioni: simmetrie, continuità, limiti agli estremi, zeri e segno, derivata prima e monotonia, punti di massimo/minimo locale/globale. Definizione di asintoti orizzontali, verticali, obliqui.	199
Lezione 044. Calcolo dei coefficienti degli asintoti obliqui e loro interpretazione come sviluppi di Taylor all'infinito. Definizione geometrica di convessità/concavità. Legami tra convessità e derivata seconda. Punti di flesso.	204
Lezione 045. Enunciato della Formula di Taylor con resto di Lagrange. Applicazioni classiche: approssimazione di funzioni, dimostrazione di disuguaglianze, convergenza di serie di Taylor. Classi di regolarità e accenno alle funzioni analitiche.	208
Lezione 046. Funzioni lipschitziane. Legami tra lipschitzianità e limitatezza della derivata prima.	213
Lezione 047. Esempi di utilizzo dello studio di funzione: calcolo di inf/sup/min/max di funzioni su insiemi, studio di iniettività e surgettività.	218
Lezione 048. Esempi di utilizzo dello studio di funzione: dimostrazione delle disuguaglianze che legano seno e coseno ai rispettivi polinomi di Taylor; studio di disequazioni ed equazioni con parametro.	222
Lezione 049. Esercizi misti sullo studio di funzioni.	226
Lezione 050. Esercizi misti sullo studio di funzioni.	230

ANALISI 1

-

LEZIONE 01

Note Title

24/09/2025

- ① Preliminari → prime 10 ore
- ② Limiti e questioni collegate (calcolo infinitesimale)
- ③ Calcolo diff. (studio di funzione)
- ④ Calcolo integrale e questioni collegate

1.1 Logica elementare, insiemi, funzione

1.2 Inclusione

1.3 Numeri reali $\approx$ inf e sup

1.4 Funzioni elementari e grafici

LOGICA ELEMENTARE

PROPOSIZIONE Frase di cui ha senso chiedersi se è vera o falsa

Esempi Oggi è mercoledì V
 Il docente di AM1 è giovane F } sono proposizioni

Che ora è ?
 Dimmi che ora è ! } Non sono proposizioni

Occhio: non devo necessariamente essere in grado di stabilire se è vera o falsa affinché sia una proposizione. Deve aver senso porsi la domanda.

Operazioni tra proposizioni

- negazione
- AUT, VEL, AND
- implicazione

Negazione Dire il contrario

P : oggi è mercoledì

NOT P : oggi non è mercoledì (si indica anche con $\neg P$)

AND Date due prop. P e Q , si indica con $P \wedge Q$ la prop. che è vera se e solo se entrambe sono vere

Es.

Oggi è mer.	e	$7 \geq 3$	$\vee$
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_P$	$\wedge$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_Q$	
Oggi è mer.	e	docente AM1 giovane	F
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_P$	$\wedge$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_Q$	

VEL $P \vee Q$ è vera se è vera almeno una delle due (o entrambe)

AUT $P \text{ AUT } Q$ è vera se è vera esattamente una delle due

Come si negano?

$$\begin{aligned}\text{NOT } (P \wedge Q) &= (\text{NOT } P) \vee (\text{NOT } Q) \\ \text{NOT } (P \vee Q) &= (\text{NOT } P) \wedge (\text{NOT } Q)\end{aligned}$$

Tavole di verità

		Q	
		V	F
P	V	V	F
	F	F	F

$P \wedge Q$

		Q	
		V	F
P	V	V	V
	F	V	F

$P \vee Q$

Esercizio Scrivere $P \wedge Q$ usando solo $\vee$ e NOT

$$\text{NOT}(P \wedge Q) = (\text{NOT} P) \vee (\text{NOT} Q)$$

$$P \wedge Q = \text{NOT}(\text{NOT}(P \wedge Q)) = \text{e così sono da capo } \cup$$

$$P \wedge Q = \text{NOT}((\text{NOT} P) \vee (\text{NOT} Q))$$

cosa vuol dire? Che le prop. a dx e sx hanno la stessa tavola di verità

		Q	
		V	F
P	V	V	F
	F	F	F

Implicazione

$$P \Rightarrow Q$$

		Q	
		V	F
P	V	V	F
	F	V	V

$$P \Leftrightarrow Q$$

		Q	
		V	F
P	V	V	F
	F	F	V

$$P \Leftrightarrow Q$$

← sono entrambe vere oppure entrambe false

$$P \Rightarrow Q$$

Se P è vera, Q deve essere vera per forza

Se P è falsa, Q può fare quello che vuole

(Da una premessa falsa, posso dedurre quello che mi pare)

<u>Esempi</u>	$7 > 3 \Rightarrow 7 > 5$	✓
	$7 < 3 \Rightarrow 7 > 5$	✓
	$7 < 3 \Rightarrow 7 < 5$	✓

Studio tutti i giorni $\Rightarrow$ supero AM 1

Se uno studia tutti i giorni, allora supera

Se uno non studia tutti i giorni, allora BOH (restano aperti i due scenari)

Oss. fondamentale $P \Rightarrow Q$ ha la stessa tavola di verità di
 $\text{NOT } Q \Rightarrow \text{NOT } P$

Questo è il principio alla base delle dimostrazioni per assurdo.

Esercizio Calcolare formalmente la tavola di verità di

$$\text{NOT } Q \Rightarrow \text{NOT } P$$

e di

$$\text{NOT } P \vee Q$$

ANALISI 1

—

LEZIONE 02

Note Title

24/09/2025

PREDICATO Frase che contiene al suo interno dei parametri e a seconda del valore dei parametri può essere vera o falsa (proposizione parametrica)

Esempi

- 1: Lo studente s studia matematica
- 2: Il docente d insegna la materia m
- 3: $a^2 \geq b$

QUANTIFICATORI

- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste ALMENO UN
- $\exists!$ esiste ed è unico

Quando in un predicato quantifico tutte le variabili ottengo una proposizione

Esempio 1 $\forall s \in \text{Studenti}$ "s studia matematica" F
 $\exists s \in \text{Studenti}$ "s studia matematica" V

Esempio 2 $P(s,b) = \text{"allo studente } s \text{ piace la birra } b\text{"}$

$\forall s \exists b$ tale che $P(s,b)$ "A ogni studente piace almeno una birra"
 $\exists b \forall s P(s,b)$ "Esiste una birra che piace a tutti gli stud."
 $\forall b \forall s P(s,b)$ "A tutti piacciono tutte le birre"

Domanda In quanti modi posso quantificare un predicato con k parametri?

Esempio 3 $P(a,b) = "a^2 \geq b"$ Con a e b interi positivi

$\forall a \exists b P(a,b)$	$\checkmark$ "una volta visto a posso trovare b "
$\forall b \exists a P(a,b)$	$\checkmark$
$\exists a \exists b P(a,b)$	$\checkmark$ (quasi ovvia)
$\exists a \forall b P(a,b)$	F (a^2 dovrebbe essere più grande di ogni b)
$\exists b \forall a P(a,b)$	$\checkmark$ (basta prendere $b=1$)

NEGARE IN PRESENZA DI QUANTIFICATORI

Sia $P(x)$ un predicato con parametro x

$\text{NOT} (\forall x P(x))$ è come dire $\exists x \text{ NOT } P(x)$

$\text{NOT} (\exists x P(x))$ è come dire $\forall x \text{ NOT } P(x)$

Esempio 1 Tutte le pecore sono nere
 $\forall x \in \text{Pecore}$ vale che $\text{Nera}(x)$
 Esiste almeno una pecora che non è nera
 $\exists x \in \text{Pecore}$ tale che $\text{NOT Nera}(x)$

Esempio 2 "Ogni anno c'è almeno uno studente che passa tutti gli esami"

Qual è la negazione?

$\forall a \exists s \forall e \text{ KANNA}(a,s,e)$

$\exists a \forall s \exists e \text{ NOT KANNA}(a,s,e)$

"Almeno in un anno tutti gli studenti passano almeno un esame"

Esempi di implicazioni a è sempre un intero positivo

$$\forall a \quad a > 5 \Rightarrow a^2 \geq 16 \quad \text{Vera}$$

$$\forall a \quad a > 5 \Leftrightarrow a^2 \geq 16 \quad \text{Falsa (basta prendere } a = 4)$$

$$\forall a \quad a > 2a+1 \Rightarrow a < 27 \quad \text{Vera per vuotezza della premessa}$$

INSIEMI Cos'è un insieme? Non lo diremo!

Un insieme lo possiamo presentare

→ per elenco

$$A = \{2, 5, \square, \frac{9}{2}\}$$

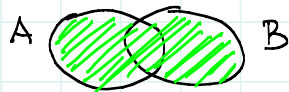
→ per proprietà

$$A = \{s : "s \text{ è studente di matematica}"\}$$

↑
variabile

↑
predicato che parla di
quella variabile

Operazioni tra insiemi



$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ VEL } x \in B\} \quad \text{unione}$$



$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ AND } x \in B\} \quad \text{intersezione}$$



$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ AND } \underline{x \notin B}\} \quad \text{differenza}$$

NOT ($x \in B$)

Prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ AND } b \in B\}$

Sottoinsiemi $A \subseteq B$ vuol dire $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

Occhio al simbolo $A \subset B$ perché non c'è un accordo assoluto

sul suo significato (in alcuni testi è usato al posto di $A \subseteq B$)

Se vogliamo stressare la non uguaglianza scriviamo $A \subsetneq B$

Insieme delle parti Se A è un insieme

$\mathcal{P}(A)$ = insieme dei sottoinsiemi di A

Tra questi c'è sempre anche il vuoto $\emptyset$, cioè $\emptyset \subseteq A$

$$\forall x \quad x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

Esempio $A = \{2, \square\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{\square\}, A\}$

$$A \times A = \{(2, 2), (2, \square), (\square, 2), (\square, \square)\}$$

Occhio : nelle presentazioni per elenco gli elementi ripetuti contano una volta sola, cioè

$$\{2, \square, 2\} = A$$

Esempio Quanti elementi ha $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$? 2!

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Esempio $\mathbb{Z}$ = interi relativi

$$A = \{m^2 : m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{sono i quadrati } 0, 1, 4, 9, \dots$$

↑ per elenco !!!!

"Fai variare m in $\mathbb{Z}$ e scrivi m^2 : così avrai l'elenco di A "

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } m = a^2\}$$

m è il $\square$ di qualcosa

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 03

Note Title

29/09/2025

FUNZIONI TRA INSIEMIDefinizione operativa Una funzione $f: A \rightarrow B$ sono 3 cose

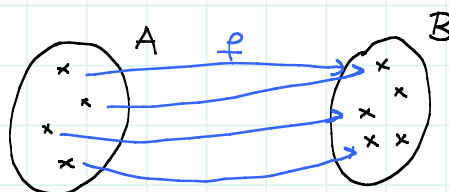
- un insieme di partenza A ,
- un insieme di arrivo B ,
- una legge (procedura) che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $b \in B$, che indichiamo con $f(a)$.

Grafico di una funzione È il sottoinsieme del prod. cart. $A \times B$ def. da

$$\text{Grafico}(f) = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

Def. rigorosa di funzione Dati due insiemi A e B , una funzione è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

$$\forall a \in A \exists ! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G$$

Moralmente: $b = f(a)$ e "una funzione è il suo grafico"Conseguenza Due funzioni $f_1: A \rightarrow B$ e $f_2: A \rightarrow B$ sono uguali se e solo se $f_1(a) = f_2(a) \quad \forall a \in A$.Ad esempio: $f_1(x) = 2x$ e $f_2(x) = 4(x+1) - 2x - 4$ sono la stessa funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.Visualizzazione grafica

Composizione di funzioni Data $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ si definisce $g \circ f: A \rightarrow C$ la funzione ottenuta facendo prima f e poi g , quindi

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

Importante: l'insieme di arrivo della f deve essere l'insieme di partenza della g .

Più rigorosamente: dati $G_f \subseteq A \times B$ e $G_g \subseteq B \times C$
 $\uparrow$ grafico di f $\uparrow$ grafico di g

si definisce

$$G_{g \circ f} = \{ (a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in G_f \wedge (b, c) \in G_g \}$$

FUNZIONI INIETTIVE, SURGETTIVE, BIGETTIVE

Def. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice

- **INIETTIVA** se manda elementi diversi di A in elem. diversi di B cioè

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$P \rightarrow Q$$

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\text{NOT } Q \Rightarrow \text{NOT } P$$

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad (f(a_1) \neq f(a_2)) \vee (a_1 = a_2)$$

$$Q \vee (\text{NOT } P)$$

- **SURGETTIVA** se ogni $b \in B$ è f di qualcosa cioè

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{tale che } b = f(a)$$

- **BIGETTIVA** se è iniettiva e surgettiva

Iniettività, surgettività ed equazioni Sia $f: A \rightarrow B$

- f è iniettiva se, $\forall b \in B$, l'equazione $f(a) = b$ ha **al massimo** una soluzione
- f è surg. se ... $f(a) = b$ ha **almeno** una soluzione
- f è bigettiva ... **esattamente** una soluzione

FUNZIONE INVERSA Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

Si dice che f è **INVERTIBILE** se esiste $g: B \rightarrow A$ (l'inversa di f) tale che

$$\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \quad \leftarrow \text{inversa sinistra} \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \quad \leftarrow \text{inversa destra} \end{array}$$

Teorema Una funzione $f: A \rightarrow B$ è invertibile se e solo se è bigettiva. L'inversa in tal caso è unica.

Più precisamente

→ esiste almeno una inversa sinistra se e solo se f INIETTIVA
 → " " " destra " f SURGETTIVA

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

- Per ogni sottoinsieme $D \subseteq A$ si definisce

$$f(D) = \{ f(a) : a \in D \} \subseteq B$$

(tutte le punte di frecce che partono da D)

- Per ogni sottoinsieme $E \subseteq B$ si definisce

$$f^{-1}(E) = \{ a \in A : f(a) \in E \} \subseteq A$$

(tutti gli inizi di freccia che arrivano in E)

Oss. La def. di $f(D)$ è per elenco. Per proprietà sarebbe

$$f(D) = \{b \in B : \exists a \in D \text{ t.c. } f(a) = b\}$$

Achtung! Occhio al simbolo f^{-1} che, a seconda del contesto, ha almeno 3 significati diversi:

- la controimmagine
- la funzione inversa
- la funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$

Iniettività e surg. nelle composizioni

Solito setting...

- (1) Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva
- (2) " " surgettive " " surgettiva
- (3) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f (la più interna) è iniettiva
- (4) Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g (la più esterna) è surgettiva

Oss. f è surgettiva se e solo se $\underline{f(A)} = B$
immagine di f

— o — o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 004

Note Title

29/09/2025

PRINCIPIO DI INDUZIONE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = numeri naturali
↑ c'è anche lei

Sia $P(m)$ un predicato che parla di numeri naturali.

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera *(passo base)*

(ii) $\forall m$, se $P(m)$ è vera, allora anche $P(m+1)$ è vera

$\forall m \in \mathbb{N} \quad P(m) \Rightarrow P(m+1)$ *(passo induttivo)*

Allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$

Variaute : se in (i) metto $P(127)$ è vera, allora la tesi diventa
 $P(m)$ è vera per ogni $m \geq 127$.

Perché funziona? $P(0)$ è vera per la (i)

Se $P(0)$ è vera, allora $P(1)$ è vera [(ii) con $m=0$]

Se $P(1)$ è vera, allora $P(2)$ è vera [(ii) con $m=1$]

... e così via

[visualizzazione con le tessere del domino]

Esempi classici $\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Per ogni $a \neq 1$ vale

$$\sum_{k=0}^m a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^m = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$$

Per $a=1$ viene

$$\sum_{k=0}^m a^k = m+1$$

occhio all' off-by-one

Dim Passo base $m=0$ $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ☺

Passo induttivo Hp: $\sum_{k=0}^m a^k = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}$

Th: $\sum_{k=0}^{m+1} a^k = \frac{a^{m+2}-1}{a-1}$

Dim Catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} a^k &= \sum_{k=0}^m a^k + a^{m+1} = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} + a^{m+1} = \\ &\quad \uparrow \text{separo termine (m+1)} \quad \uparrow \text{uso Hp induttiva} \\ &= \frac{\cancel{a^{m+1}} - 1 + a^{m+2} - \cancel{a^{m+1}}}{a-1} = \frac{a^{m+2}-1}{a-1} \quad \text{☺} \\ &\quad \uparrow \text{precorso} \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Esempio 2 Determinare per quali $m \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$m! \geq 2^m$$

Esplorazione:

$m=0$	$\rightsquigarrow$	$0! \geq 2^0$	☺
$m=1$	$\rightsquigarrow$	$1! \geq 2^1$	☹
$m=2$	$\rightsquigarrow$	$2! \geq 2^2 \rightsquigarrow 2 \geq 4$	☹
$m=3$	$\rightsquigarrow$	$3! \geq 2^3 \rightsquigarrow 6 \geq 8$	☹
$m=4$	$\rightsquigarrow$	$4! \geq 2^4 \rightsquigarrow 24 \geq 16$	☺
$m=5$	$\rightsquigarrow$	$5! \geq 2^5 \rightsquigarrow 120 \geq 32$	☺

Da qui in poi sembra abbondante.

Congettura: vera per $m=0$ e per $m \geq 4$. Per induzione

Passo base: $m=4 \rightsquigarrow$ fatto sopra

Passo induttivo Hp: $n! \geq 2^n$ Th: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

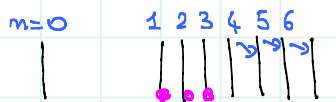
Dim: organizzo catena di disuguaglianze

$$(n+1)! = (n+1) n! \geq (n+1) 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\uparrow$ separo l'ultimo $\uparrow$ Hp uolt. per (n+1) (posso perché $n+1 \geq 0$) $\uparrow$ spero $\uparrow$ percorso

La speranza è verificata per ogni $n \geq 1$, e quindi $\checkmark$ (mi bastava per $n \geq 4$).

Disegno con i dominos



→ La tessera con $n=0$ casca, ma è lontana dalle altre

→ Da $n=1$ in poi c'è il meccanismo di caduta, ma $n=1, 2, 3$ sono incollate e non cascano

→ $n=4$ casca e da lì in poi è fatta.

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Per ogni numero reale $x > -1$ vale la disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim Per induzione

Passo base $(1+x)^0 \geq 1 \rightsquigarrow 1 \geq 1 \quad \checkmark$

Passo induttivo Hp: $(1+x)^n \geq 1+nx$
Th: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim Catena di disug:

$$(1+x)^{m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pecorso}}}{=} (1+x) \cdot (1+x)^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp. uolt} \\ \text{per } (1+x)}}{\geq} (1+x)(1+mx)$$

$$\begin{aligned} (\text{conti}) \quad &= 1+mx+x+mx^2 = 1+(m+1)x + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(m+1)x \quad \smile \\ &\quad \uparrow \\ &\text{sacrificio addendo } \geq 0 \end{aligned}$$

Oss. Ho usato l'ipotesi $x > -1$ nel momento in cui ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando i versi. Qui serve $1+x > 0$, cioè $x > -1$.

Esempio $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq 2 \quad \forall m \geq 1$

Se provo subito per induzione fallisco...

$$\dots \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{Hp}}}{\leq} 2 + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Me lo ricordo}}}{\leq} 2$$

NO!
↓↓

Provo a dimostrare una cosa più difficile, cioè

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{m}}_{\substack{\text{più piccolo di prima}}} \quad \forall m \geq 1$$

Questo per induzione riesce!

Passo base : OK $1 \leq 2 - 1$

Passo induttivo : ...

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso Hp}}}{\leq} 2 - \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} \overset{\substack{\text{Spero} \\ \downarrow}}{\leq} \underbrace{2 - \frac{1}{m+1}}_{\substack{\text{Tesi passo} \\ \text{induttivo}}}$$

Controllo da speranza:

$$\cancel{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} \cancel{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n(n+1)} &\leadsto n(n+1) \stackrel{?}{\leq} (n+1)^2 \\ &\leadsto n^2 + n \stackrel{?}{\geq} n^2 + 2n + 1 \\ &\leadsto n+1 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio finale $5^n \geq 3^n + 4^n$

Dopo un po' inizia ad essere vera, diciamo per $n \geq 2$.

Passo base: $25 \geq 25$ ☺

Passo induttivo: saltati i convenendi...

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5 \cdot 5^n \geq 5(3^n + 4^n) = 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n \\ &\geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

↑
sacrifico
un po' del 5

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 005

Note Title

30/09/2025

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$$

Interi (in tedesco ZAHLEN = numeri)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Razionali (quozienti)

$$\mathbb{R} = \text{reali}$$

Reali

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Complessi

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DEI REALI

I numeri reali sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ dove $\mathbb{R}$ è un insieme e sono verificati 3 tipi di assioma:

- assiomi ALGEBRICI
- assiomi di ORDINAMENTO
- assioma di CONTINUITÀ

ASSIOMI ALGEBRICI $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO con almeno due elementi

Un campo è un ambiente con due operazioni $+$ e $\cdot$ con le usuali proprietà.

Nota bene: $+$ è "syntactic sugar" per scrivere

$$a + b$$

$$\text{add}(a, b)$$

$$\text{add} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La proprietà associativa della somma sarebbe

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{add}(\text{add}(a, b), c) = \text{add}(a, \text{add}(b, c))$$

ASSIOMI DI ORDINAMENTO $\geq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{R}$
cioè

- (ord-1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \text{ VEL } y \geq x$ (totale)
 (ord-2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq x$ (riflessiva)
 (ord-3) se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (transitiva)
 (ord-4) se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (antisimmetrica)

Due proprietà legano l'ordinamento alle operazioni

(O-S) Se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} \quad x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z$

(O-P) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $xy \geq 0$

Dalla (O-P) seguono le seguenti due utilissime proprietà

(OP1) Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $xz \geq yz$
 (OP2) Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$
 $\uparrow$
 $0 \geq z$

Oss. Molte delle usuali proprietà non sono scritte negli assiomi, ma si deducono (utili esercizi)

(i) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $(-1) \cdot (-1) = 1$

$\uparrow$
 l' inverso additivo di 1

$\uparrow$
 andrebbe dimostrato che è unico ...

(iii) $1 > 0 \leftarrow$ (SEMI HARD)

(iv) Se $a > 0$, allora $-a < 0$

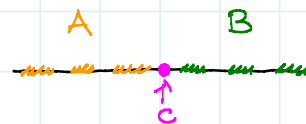
Oss. importante Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti.

Diciamo che A sta a sinistra di B se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$



Assioma di continuità Se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ con A a sinistra di B , allora (esiste un tizio in mezzo)

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \quad \forall a \in A \quad \text{AND} \quad c \leq b \quad \forall b \in B$$

Oss. A e B possono anche avere un elemento in comune (ma solo uno!). In questo caso lui è l'unico c possibile

Se $A \cap B = \emptyset$, c può comunque essere unico

$$(A = (-\infty, 12), \quad B = (12, +\infty))$$

Ci sono vari casi in cui c non è unico.

Fatto L'assioma di continuità non vale in $\mathbb{Q}$.

La dim. non è ovvia. L'esempio classico è

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2, q > 0\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2, q > 0\}$$

Si verifica facilmente che A è a sinistra di B .

Con più difficoltà, si verifica che

- un eventuale c in mezzo verificherebbe $c^2 = 2$
- non esiste $c \in \mathbb{Q}$ t.c. $c^2 = 2$.

TEOREMA (Misterioso) $\mathbb{R}$ esiste ed è "unico".

L'unicità va intesa nel senso che due strutture

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ e $(\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{\geq})$ che verificano gli assiomi sono "isomorfe", cioè esiste una funzione bigettiva

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

che commuta con le operazioni e con l'ordinamento, cioè

$$f(x+y) = f(x) \boxed{+} f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \boxed{\cdot} f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \boxed{\leq} f(y)$$

Esercizio (Hard) Provare a dimostrare la parte unicità.

Oss. Quando risolviamo equazioni o disequazioni, siamo autorizzati ad usare solo gli assiomi

$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Quali sono i veri passaggi?

$$3x - 2 = 0 \quad \text{aggiungo } 2 \text{ a dx e sx}$$

$$(3x - 2) + 2 = 0 + 2$$

$$3x + (-2 + 2) = 0 + 2$$

$$3x + 0 = 2$$

$$3x = 2$$

Moltiplico per l'inverso moltip. di 3

e dopo un po' si finisce.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 006

Note Title

30/09/2025

MAGGIORANTI E MINORANTI

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme **NON VUOTO**.

- Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$

(M è una barriera dall'alto)

- Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \geq M$$

Oss. → Maggioranti e minoranti NON sono obbligati ad esistere
 → Se esistono, di sicuro non sono unici (se M è maggiorante, anche $M + 2025$ lo è)

MASSIMO E MINIMO

Def. Sempre $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Si dice che M è il massimo di A , e si scrive $M = \max A$ se

- (i) $a \leq M$ per ogni $a \in A$ (M è un maggiorante)
- (ii) $M \in A$

Analogamente, $m = \min A$ se

- (i) $a \geq m \quad \forall a \in A$
- (ii) $m \in A$

- Oss. $\rightarrow$ Max e min NON sono obbligati ad esistere
 $\rightarrow$ Se esistono, sono per forza unici (segue dalla ord-4)
 $\rightarrow$ Il max, se esiste, è il più piccolo fra i maggioranti (idem per il minimo).

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE

Def. di sup Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

(i) Se non esistono maggioranti, diciamo che

$$\sup A = +\infty$$

(ii) Se esiste almeno un maggiorante (dunque ne esistono infiniti) allora si pone

$$\sup A = \min \{ \text{maggioranti di } A \}$$

$$\min \{ x \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq x \}$$

Def. di inf Sia A come sopra.

(i) Se non esistono minoranti, diciamo che

$$\inf A = -\infty$$

(ii) Se esiste almeno un minorante si pone

$$\inf A = \max \{ x \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \geq x \}$$

Esempio Sia $A = \{ x \in \mathbb{R} : x < 1 \}$

Allora $\inf A = -\infty$ (avrebbe dimostrato)

I maggioranti di A sono tutti i reali ≥ 1 , quindi il loro minimo è 1, quindi $\sup A = 1$.

FATTO FONDAMENTALE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (possono essere reali oppure $+\infty$ e $-\infty$) e sono unici.

Brutalmente: $\sup$ e $\inf$ sono coloro che vorrebbero essere $\max$ e $\min$, ma magari non possono.

Dim dell'esistenza del $\sup$ (per l' $\inf$ si fa uguale)

(i) se non esistono maggioranti, l'esistenza del $\sup$ è grottesca

(ii) Supponiamo che esista almeno un maggiorante

Chiamiamo B l'insieme dei maggioranti di A .

È evidente che A sta a sx di B (per def. di maggiorante)

Per l'assioma di continuità esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$\rightarrow a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è maggiorante, quindi $c \in B$)

$\rightarrow c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è $\leq$ di tutti gli elementi di B)

Quindi per definizione

$$c = \min B$$

ed è lui il $\sup$!

Oss. Può accadere che $c \in A$ ed in tal caso è $\max A$.

Quando esiste $\max A$, quello è automaticamente anche $\sup$.

Oss. ($\sup$ e $\inf$ di $\emptyset$) Due scuole di pensiero

(1) Non se ne parla nemmeno (ma allora occorre sempre verificare che $A \neq \emptyset$ quando si scrive $\sup$ o $\inf$)

(2) Chi sono i maggioranti di $\emptyset$? Tutti i reali!

Potiamo allora $\sup \emptyset = -\infty$ e per lo stesso prezzo

$\inf \emptyset = +\infty$ (però allora dobbiamo accettare $\sup < \inf$)

Qualunque cosa che riguarda davvero i reali si dimostra usando $\sup$ e $\inf$.

Esempio Voglio dimostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ e $c^2 = 2$
Cosa faccio?

Prendo $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$

Dimostro che $B \neq \emptyset$

Prendo $c = \inf B$

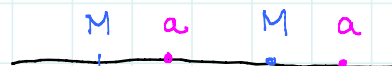
Con fatica dimostro che $c^2 = 2$.

Caratterizzazione di SUP

(1) Si ha che $\sup A = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ t.c. } a \geq M$$

↑ ogni $M \in \mathbb{R}$ non è maggiorante



anche stretta

(2) Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

• $a \leq L \quad \forall a \in A$ (cioè L è un maggiorante)

• $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.c. } L - \varepsilon \leq a$

↑ se non ci fosse, allora

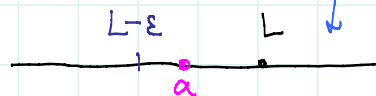
$L - \varepsilon$ sarebbe maggiorante

e quindi L non sarebbe

il minimo dei maggioranti

↑ anche stretta

nessuno di A a dx



Esercizio Discorso analogo per l'inf. [a voce nel video]

Domanda $\sup \mathbb{N}$ (nota $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme $\neq \emptyset$)

Forse $\sup \mathbb{N} = +\infty$?



Devo dimostrare che non esistono maggioranti di $\mathbb{N}$.

Se ce ne fosse uno, avremmo $\sup \mathbb{N} = L \in \mathbb{R}$. Ora prendo

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Per caratterizzazione esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c. $L - \frac{1}{2} \leq m$

Ma allora $m+1 \geq L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L$ assurdo.

↑
05

Ho usato che $\frac{1}{2} > 0$ e che $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. Non sono scritti negli assiomi...

ANALISI 1 - LEZIONE 007

Note Title

01/10/2025

FUNZIONI REALI E LORO GRAFICI

Setting. Funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o più in generale $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

Def. La funzione f si dice

• PARI se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• DISPARI se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• PERIODICA se

$\exists p > 0$ ^{periodo} t.c. $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Oss. Se f è periodica con periodo p , allora è anche periodica con periodo $2p, 3p, \dots$

Se esiste un minimo p per cui vale la proprietà, allora quello si chiama periodo minimo.

Patologie ① Non è detto che esista un periodo minimo!

Esempio classico

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si verifica che ogni $p \in \mathbb{Q}$ con $p > 0$ è un periodo!

② (Hard) Esistono due funzioni periodiche

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che

$$f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Interpretazione con i grafici

- f pari $\leadsto$ grafico simm. risp. asse y
- f dispari $\leadsto$ " " " all'origine
- f periodica di periodo p $\leadsto$ il pezzo di grafico con $x \in [0, p]$ si ripete per traslazioni prima e dopo

Oss. Se f è periodica o pari, diciamo addio all'injectività.

PROPRIETÀ DI MONOTONIA

Solito setting $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice che f è

- Strettamente crescente $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- Debolmente crescente $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- Strett. decrescente $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- Debolm. decrescente $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

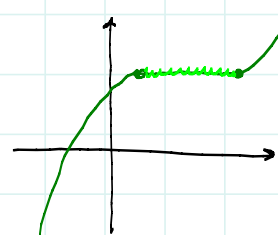
(è sottolineato ovunque $\forall x \in D \forall y \in D$)

In tutti questi casi la funzione si dice **monotona**.

Oss. La monotonia stretta (strett. cresc. o strett. decr.)

implica l'INJECTIVITÀ (è cond. suff., ma non necessaria)

Oss. In termini di grafico una funz. debolm. crescente può avere dei tratti piatti



Oss. f strett. cresc. $\Rightarrow f$ debolm. cresc.
 f " decr. $\Rightarrow f$ " decr.
 — o — o —

PRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- $\rightarrow$ potenze (x alla base)
- $\rightarrow$ esponenziali (x all'esponente o entrambi)
- $\rightarrow$ valore assoluto
- $\rightarrow$ funzioni trigonometriche

POTENZE $f(x) = x^k$ con k intero positivo

k PARI Per ogni k positivo pari, la funzione $f(x) = x^k$,
 vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è

- $\rightarrow$ pari
- $\rightarrow$ non iniettiva (pari) e non surgettiva (non prende i negat.)
- Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è
- $\rightarrow$ strett. cresc., quindi iniettiva
- $\rightarrow$ surgettiva.

Di conseguenza, esiste la funzione inversa

$$g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

e si chiama radice k -esima $g(x) = \sqrt[k]{x}$

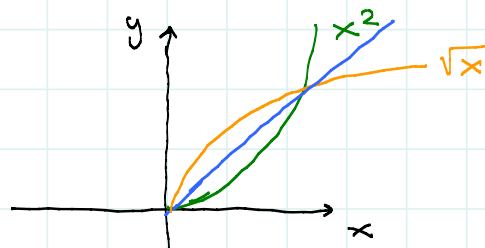
Oss. Le radici di ordine k pari hanno
 INPUT $\rightsquigarrow$ reale ≥ 0
 OUTPUT $\rightsquigarrow$ reale ≥ 0 .

Oss. Vedi grafici comparati a lato



Fatto generale Se $(a, b) \in \text{grafico di } f$, allora
 $(b, a) \in \text{grafico dell' inversa di } f$
 e viceversa.

Quando siamo su $\mathbb{R}$ vuol dire che i grafici di f e dell' inversa sono simm. risp. bisettrice $y = x$

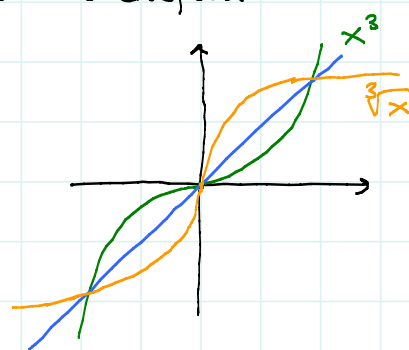


K DISPARI In questo caso $f(x) = x^k$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strett. cresc., iniettiva, surgettiva, quindi invertibile. È anche dispari.

Quindi l' inversa è una $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(quindi ora in input va bene un reale qualunque)

Anche l' inversa è una funzione dispari



Cosa ci sarebbe da dimostrare ?

- Le proprietà di simmetria seguono dagli assiemi di campo
- Le proprietà di monotonia in $[0, +\infty)$ seguono dagli assiemi di ordinamento

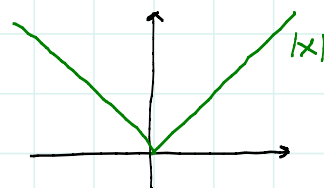
(se $x > y > 0$, allora $x^2 > xy > y^2$)
 $\uparrow$ ho monot. per x $\uparrow$ ho monot. per y

- L' iniettività segue dalla stretta monotonia.
- La surgettività non è per nulla ovvia, e utilizza profondamente le propr. dei numeri reali (serve assioma di continuità, come per dimostrare che $\sqrt{2}$ esiste)

VALORE ASSOLUTO

La funzione $f(x) = |x|$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Quindi è una funzione **PARI**, quindi pensata come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniett., né surg.

Proprietà chiave è la **DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE** cioè

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

e la sua amica

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Dim. amica Supponiamo $|x| \geq |y|$ (altrimenti cambio i nomi)

Uso la triangolare con $a = x - y$ e $b = y$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{cioè}$$

$$|x| \leq |x-y| + |y| \quad \text{cioè}$$

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

e abbiamo finito perché

$$||x| - |y|| = |x| - |y| \quad \text{essendo } |x| \geq |y|.$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 008

Note Title

01/10/2025

FUNZIONI ESPONENZIALI

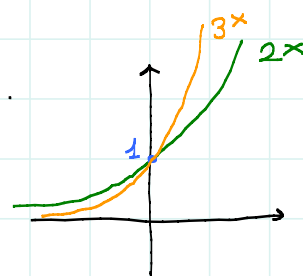
 $f(x) = a^x$ con a fissatoCASO $a > 1$

Sia a un numero reale > 1 . Allora l'esponenziale, come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è
strett. cresc., iniettiva e surgettiva.

La funzione inversa

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{è } g(x) = \log_a x.$$

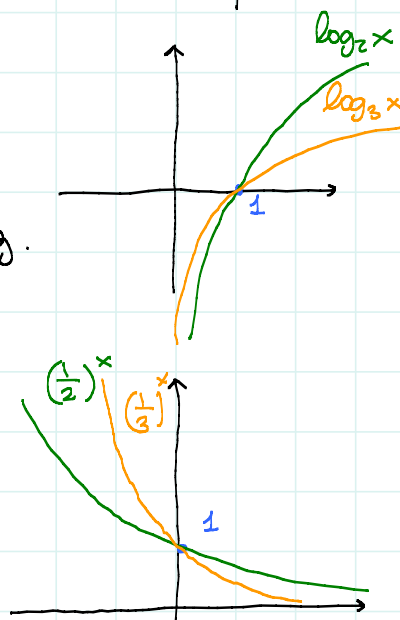
CASO $0 < a < 1$

Ora l'esponenziale, visto come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è
strett. decr., iniettiva e surg.

Come prima l'inversa è

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{è } g(x) = \log_a x$$



Nota bene : $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, quindi

il grafico di $(\frac{1}{2})^x$ è il simm. risp.
asse y di quello di 2^x .

Come si definisce l'esponenziale?

Ci sono vari modi, quello più elementare passa attraverso una eq. funzionale

Teorema (Misterioso) Sia $a > 0$ un numero reale.

Allora esiste un'unica funzione $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

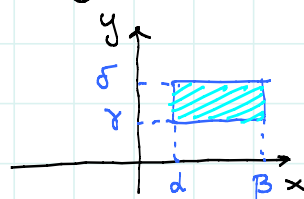
$$(P1) \quad f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(P2) \quad f_a(1) = a$$

Le prime due proprietà bastano per definire un'unica funzione $f_a : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, ma non bastano per estenderla ad $\mathbb{R}$

(P3) Qualcosa che impedisca patologie estreme, tipo che esiste un rettangolo $[d, \beta] \times [\gamma, \delta]$ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ che non contiene p.ti del grafico di f_a

Quest'unica funzione ha le proprietà di monotonia, iniettività e surgettività descritte prima.

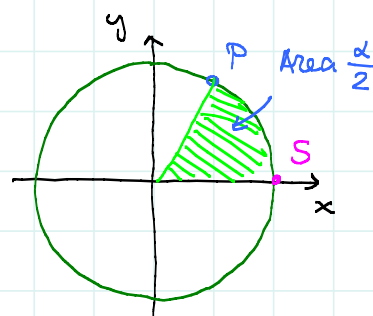
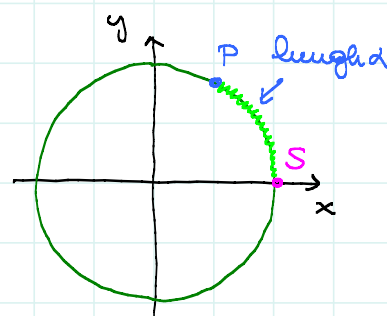


FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo la circ. trigo. $x^2 + y^2 = 1$.

Un p.to P della circ. lo possiamo descrivere

- mediante la lunghezza dell'arco da S a P
- mediante l'area del settore in figura



[Solite convenzioni per α negativi o fuori da $[0, 2\pi]$]

A questo punto

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$\sin \alpha$ e $\cos \alpha$
definite per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

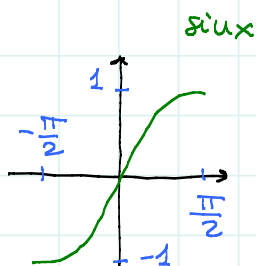
$\tan \alpha$ definita solo
quando $\cos \alpha \neq 0$.

SENO La funzione $f(x) = \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari e periodica con periodo minimo 2π

Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$
è strett. cresc., iniettiva e surg.

Quindi ha un' inversa

$$g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



che si indica con $g(x) = \arcsin x$

COSENO ... $f(x) = \cos x$... $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari e periodica ... 2π .

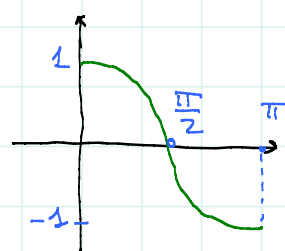
Vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$
è strett. decr., iniettiva e surg.

La sua inversa è

$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

e si indica con

$$g(x) = \arccos x$$



TANGENTE Definita quando $\cos \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Funzione dispari e periodica di periodo minimo π (senza il 2)

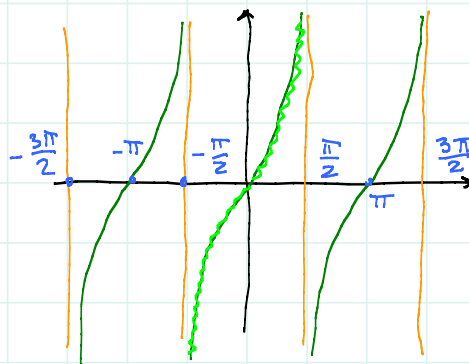
Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
è strett. cresc., iniettiva e surgettiva, quindi invertibile.

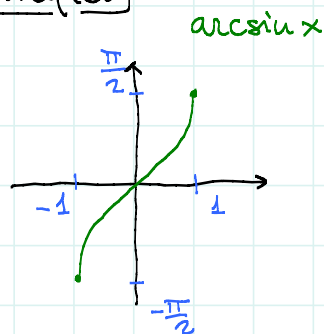
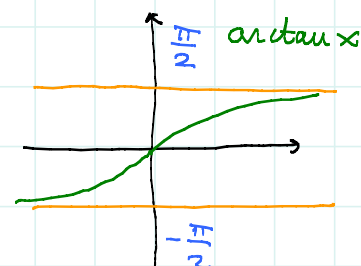
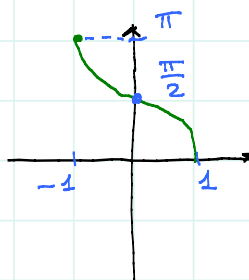
L' inversa è una

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

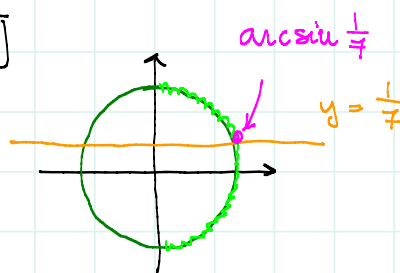
e si indica con

$$g(x) = \arctan x$$



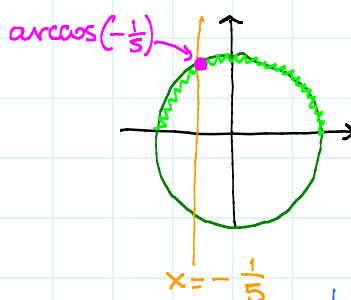
Grafici $\arccos$ **Interpretazione nel cerchio**

$$\arcsin \frac{1}{7}$$



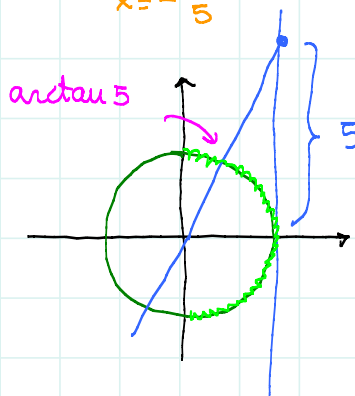
In generale traccio la
retta $y = \dots$ e prendo l'intersezione a dx.

$$\arccos(-\frac{1}{5})$$



$x = \dots$ e prendo
l'intersezione in alto

$$\arctan(5)$$

**ACHTUNG**

Occhio a semplificare le funzioni con le loro
inverse!

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow A \text{ inversa}$$

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Quindi

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\forall x \in [0, +\infty)$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\forall x \in [0, +\infty)$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio Quanto vale $\arccos(\cos 4)$?

Di sicuro non è 4...

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 009

Note Title

06/10/2025

OPERAZIONI SUI GRAFICI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a > 0$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}$$

$f(x) \pm a \rightsquigarrow$ traslazione verticale (in alto se $a > 0$)

$f(x \pm a) \rightsquigarrow$ traslazione orizzontale (sx se $a > 0$)

$-f(x) \rightsquigarrow$ ribalto alto basso

$f(-x) \rightsquigarrow$ ribalto dx/sx

$-f(-x) \rightsquigarrow$ ribalto risp. origine

$|f(x)| \rightsquigarrow$ ribalto parti sotto asse x (parti negative)

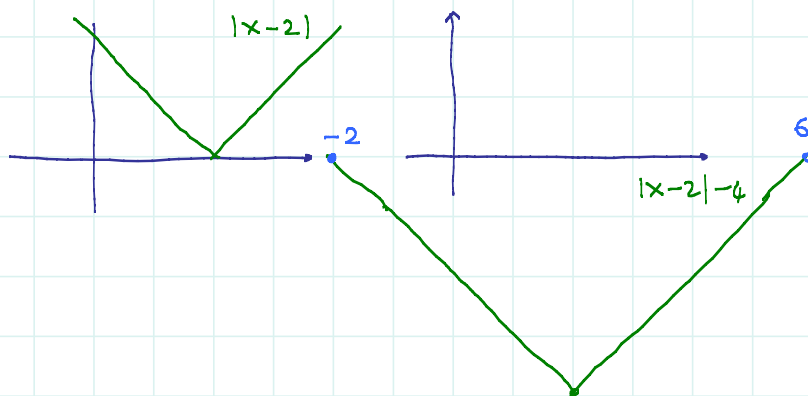
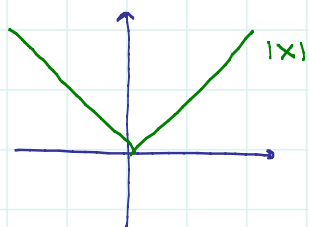
$f(|x|) \rightsquigarrow$ per $x \geq 0$ non succede nulla e poi è diventata pari

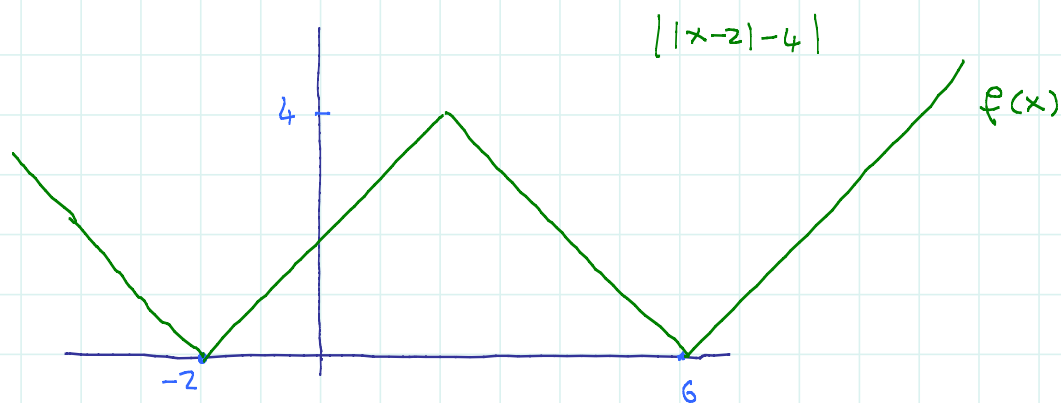
Oss. Risolvere $f(x) = \lambda \leftarrow$ numero dato vuol dire intersecare il grafico di $f(x)$ con la retta $y = \lambda$ e prendere le coord. x dei p.ti di intersezione

Esercizio Determinare, al variare di λ , il numero di soluzioni dell'equazione

$$\underbrace{||x-2|-4|}_{f(x)} = \lambda$$

Trovo il grafico di $f(x)$.

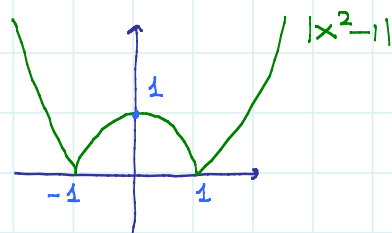
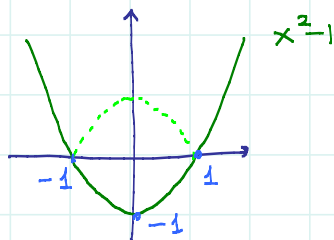
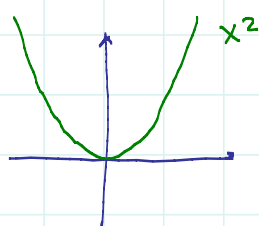




Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare ...

- se $\lambda < 0 \rightsquigarrow 0$ sol.
- se $\lambda = 0 \rightsquigarrow 2$ sol. ($x = -2$ e $x = 6$)
- se $0 < \lambda < 4 \rightsquigarrow 4$ sol.
- se $\lambda = 4 \rightsquigarrow 3$ sol. ($x = 2, -6, 10$)
- se $\lambda > 4 \rightsquigarrow 2$ sol.

Esercizio 2 $|x^2 - 1| = \lambda$

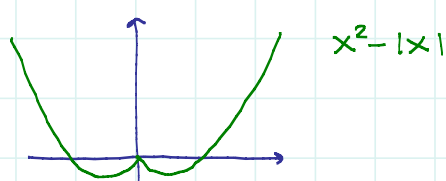
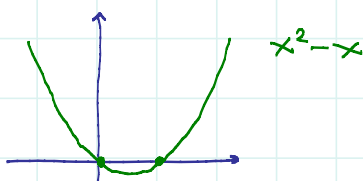


- 0 soluzioni se $\lambda < 0$
- 2 soluzioni se $\lambda \in \{0\} \cup (1, +\infty)$
- 3 sol. se $\lambda = 1$
- 4 sol. se $\lambda \in (0, 1)$

Esercizio 3 Disegnare $f(x) = x^2 - |x|$

$$f(x) = |x|^2 - |x|$$

Per $x \geq 0$ è $f(x) = x^2 - x$



GRANDI TENTAZIONI

$$\cancel{3}^{2x+1} = \cancel{3}^{x+4}$$

SI

$$\leadsto 2x+1 = x+4 \leadsto x=3$$

$$\cancel{\log}_5(3x+1) = \cancel{\log}_5(x+4)$$

NO

← posso eliminare ma devo verificare che la soluzione rientri nella zona di esistenza

$$\cancel{\cos}(3x+1) = \cancel{\cos}(x+4)$$

NO

In generale

$$f(\text{CANE}) = f(\text{GATTO}) \Leftrightarrow \text{CANE} = \text{GATTO} \quad \text{è ok}$$

Se f è INIETTIVA e CANE e GATTO stanno nella zona di def'n.

Con le disuguaglianze, il passaggio

$$\cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Rightarrow A > B \quad \text{è ok se } f \text{ è debolmente crescente}$$

(se per assurdo fosse $A \leq B$, allora sarebbe $f(A) \leq f(B)$ per deb. decr.)

Serve anche che A e B siano nella zona di definizione

$$\cancel{f}(A) \geq \cancel{f}(B) \Rightarrow A \geq B \quad \text{è ok se } f \text{ è strett. crescente}$$

(se per assurdo fosse $A < B$, allora sarebbe $f(A) < f(B)$)

(nota bene: in un tratto piatto del grafico abbiamo $f(A) = f(B)$ ma possiamo scambiare A e B e quindi non sappiamo il più grande)

Quindi: se f è strett. cresc. allora $f(A) > f(B) \Leftrightarrow A > B$

$$f(A) \geq f(B) \Leftrightarrow A \geq B$$

quindi possiamo sempre eliminare f (se A e B stanno nella zona...)

Con le strett. decr. è analogo, ma si invertono le disuguaglianze.

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Esercizio $f(x) = x^2$. Calcolare $f([-1, 2])$ e $f^{-1}([-1, 2])$

Ricordiamo le definizioni

$$f([-1, 2]) = \{x^2 : x \in [-1, 2]\}$$

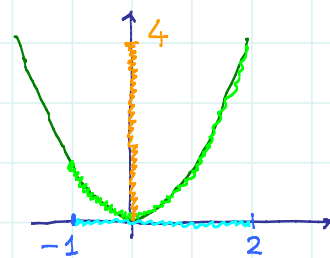
$$f^{-1}([-1, 2]) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1, 2]\}$$

$f([-1, 2]) \rightsquigarrow$ IMMAGINE

→ Disegno $[-1, 2]$ sull'asse x

→ Lo porto sul grafico

→ Proietto il risultato sull'asse y

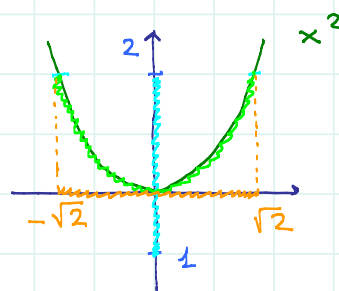


$f^{-1}([-1, 2]) \rightsquigarrow$ CONTROIMMAGINE

→ Disegno $[-1, 2]$ sull'asse y

→ Lo porto sul grafico

→ Proietto sull'asse x



Quindi $f([-1, 2]) = [0, 4]$ e $f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Analogamente: $f([-2, -1]) = [1, 4]$ e $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$

INIETTIVITÀ E SURG. DAL GRAFICO

Supponiamo di avere $f: A \rightarrow B$
con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$

- f è surgettiva se, per ogni $\lambda \in B$, il grafico interseca la retta $y = \lambda$ (le altre non mi interessano)
- f è iniettiva se, per ogni $\lambda \in B$, il grafico interseca la retta $y = \lambda$ al massimo una volta con $x \in A$ (le altre intersezioni non ci interessano).

— o — o —

ANALISI 1 -

LEZIONE 010

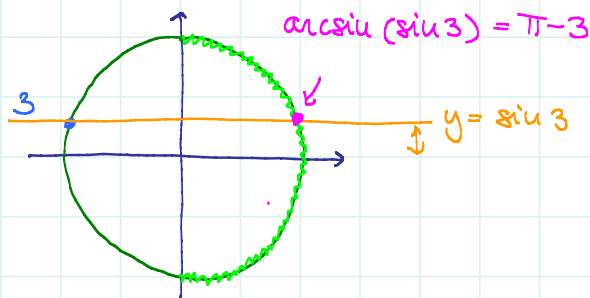
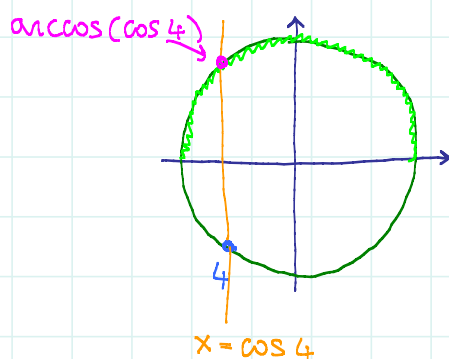
Note Title

06/10/2025

Esercizio 1 Calcolare $\arccos(\cos 4)$ e $\arcsin(\sin 3)$

Sicuramente non sono 4 e 3, perché fuori range.

Sicuramente hanno senso perché $\cos 4$ e $\sin 3$ stanno in $[-1, 1]$



Conclusione :

$$\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$$

$$\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$$

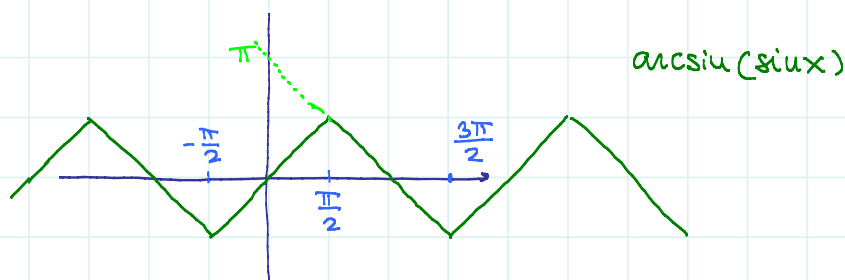
Esercizio 2 Disegnare il grafico di $f(x) = \arcsin(\sin x)$

Fatto 1 : è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Fatto 2 : è periodica di periodo 2π (in generale Mostro $(\sin x)$ o anche Mostro $(\cos x)$ sono periodiche di periodo 2π , ma ovviamente il periodo minimo potrebbe essere più piccolo)

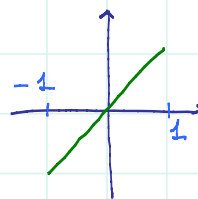
Fatto 3 : $f(x) = x$ per ogni $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (def. di funz. inversa)

Fatto 4 : $f(x) = \pi - x$ per ogni $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (stesso discorso del 3 fatto sopra)



Esercizio 3 Disegnare $\sin(\arcsin x) = f(x)$

Ha senso solo per $x \in [-1, 1]$ e in quel caso vale x .



FORMULE UTILI

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

(e $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$)

Poniamo $\alpha = \arctan x$. Allora $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\tan \alpha = x$

Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$$

Il che è come dire che $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha$
questo sta in $(0, \frac{\pi}{2})$ pure lui

Ma allora abbiamo finito:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \ddot{\smile}$$

[Estendere al caso $x < 0$].

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Come prima sia $\alpha = \arcsin x$, quindi $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\sin \alpha = x$
Per archi associati

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x$$

$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_{\text{sta in } [0, \pi]}$

Questo ci dice che $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$, ma allora

$$\arcsin x + \arccos x = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \ddot{\smile}$$

Esercizio 4 Quanto fa $\arccos(\sin x)$?

Intanto ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$. Possiamo usare gli archi associati

$$\arccos(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

quando $\frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$

A quel punto poi si estende per periodicità dopo aver capito cosa fa in $[\pi, 2\pi]$

Esercizio 5 Quanto fa $\sin(\arccos x)$?

Intanto ha senso per $x \in [-1, 1]$ e sarà ≥ 0 (sin di roba in $[0, \pi]$)
Allora

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

↑
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
con il segno + se $\alpha \in [0, \pi]$

Esercizio 6 $f(x) = x + 2 \arctan(x^3)$ è una funzione DISPARI

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) + 2 \arctan((-x)^3) = -x + 2 \arctan(-x^3) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{cubo è dispari} \\ &= -x - 2 \arctan(x^3) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{arctan è dispari} \\ &= -f(x) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$f(x) = x^4 + x^3$ non è né pari né dispari

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x^3) = x^4 - x^3 \quad \text{non è } x^4 + x^3$$

non è $-x^4 - x^3$

Per vedere che sono davvero diversi, sostituisco dei valori

$$f(1) = 2 \quad f(-1) = 0 \quad \text{ed è "chiaro" che } 0 \text{ non è } \pm 2$$

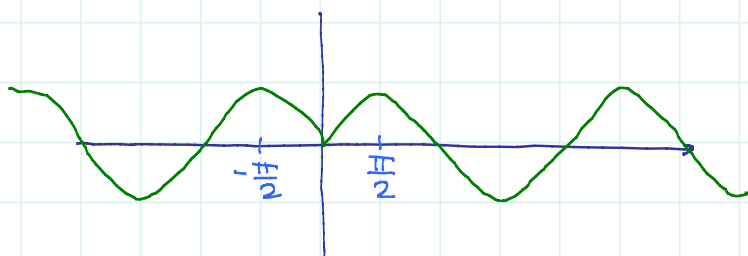
Esercizio 7 Dimostrare che $|\sin x|$ è periodica

Banale! $|\sin(x+2\pi)| = |\sin x|$
 $\uparrow$
 $\sin$ è periodica

In realtà è anche π -periodica, in quanto

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f}}{f(x+\pi)} = |\sin(x+\pi)| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anti assoc.}}}{|- \sin x|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{val. ass.} \\ \text{periodico}}}{|\sin x|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f}}{f(x)}$$

Dimostrare che $\sin |x|$ NON è periodica



Esistono due soluzioni di $f(x) = 1$ che distano π

Se fosse periodica, esisterebbero infinite coppie di soluzioni di $f(x) = 1$ che distano π , ma queste si scrivono.

— 0 — 0 —

ANALISI 1

- LEZIONE 11

Note Title

07/10/2025

FREQUENTEMENTE - DEFINITIVAMENTE Sia $P(n)$ un predicato con $n \in \mathbb{N}$

Si dice che $P(n)$ vale definitivamente se vale da un certo punto in poi, cioè

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero } \forall n \geq m_0$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 P(n)$$

(Prima di m_0 può essere vero o no)

Si dice che $P(n)$ vale frequentemente se vale per infiniti valori di n .
Stessa cosa è dire che

$$\forall m_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq m_0 \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero}$$

Nota: le "infinito volte" possono anche essere "molto rare"

SUCCESIONE

Def. rigida Una succ. è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Notazione Di solito, invece che $f(n)$, si usa come notazione
 x_n, y_n, a_n

Def. più elastica Non si chiede che sia definita per ogni $n \in \mathbb{N}$,
ma solo definitivamente

Esempi

$$a_n = \frac{1}{n-4}$$

↑
ok, definita
 $\forall n \geq 5$

$$b_n = \sqrt{n-2025}$$

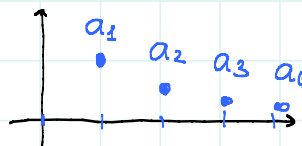
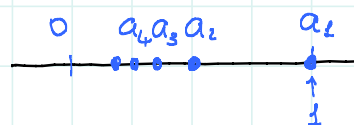
↑
ok, definita
 $\forall n \geq 2025$

$$c_n = \sqrt{2025-n}$$

↑
NON è una
successione

COME VISUALIZZARE UNA SUCCESSIONE

Almeno tre modi.

Pensiamo $a_n = \frac{1}{n}$ (1) Come grafico: disegno nel piano i punti (n, a_n) (2) Come foto: disegno su una retta i punti a_n e gli metto il nome vicino(3) Come video: prendo la retta e considero delle lampadine che restano accese 1 secondo, prima in a_1 , poi in a_2 , poi in a_3 , e così via.
— o — o —**LIMITE DI UNA SUCCESSIONE**Setting: a_n succ. di numeri reali

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTE} & \textcircled{4} \end{cases}$$

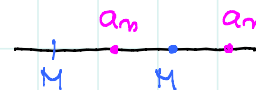
Def. di $\textcircled{4}$ Nessuno dei precedentiDef. di $\textcircled{2}$ Si dice che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ (o equiv. $a_n \rightarrow +\infty$) se(si legge: il limite di a_n è $+\infty$ oppure a_n tende a $+\infty$)NON si legge: il limite tende a $+\infty$)

$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ definitivamente

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad a_n \geq M$

↑
anche enorme

↑
dipende da M
(più M è grande e più m_0 dovrà essere grande)



Def. di ③ Si dice che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ($a_n \rightarrow -\infty$) se

$$\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}}_{\substack{\uparrow \\ \text{anche molto} \\ \text{negativo}}} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente}$$

Parentesi: la definizione si può dare in maniera barocca dicendo
 $a_n \rightarrow -\infty$ se esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \geq g(M)$

(Moralmente: g associa ad ogni $M \in \mathbb{R}$ l'inizio del definitivamente per cui $a_n \leq M$)

Def. di ④ Si dice che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$) se

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\substack{\uparrow \\ \text{anche molto} \\ \text{vicini a } 0}} \quad \underbrace{l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon}_{\substack{\text{equivalente a} \\ |a_n - l| \leq \varepsilon}} \text{ definitivamente}$$

$\uparrow$ distanza tra a_n ed l

Varianti di ④ $a_n \rightarrow l^+$ $a_n \rightarrow l^-$

Si dice che $a_n \rightarrow l^+$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitiv.
 $\uparrow$
STRETTO

Si dice che $a_n \rightarrow l^-$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \leq a_n < l$ definitiv.
 $\uparrow$
STRETTO

Oss. In tutte le def. finora dove ho $a_n \geq M$ o $a_n \leq M$
 o $a_n \leq l + \varepsilon$ o $a_n \geq l - \varepsilon$ posso mettere disug.
 strette e non cambia nulla.

Esempi a livello intuitivo

$$n^2 + 27 \rightarrow +\infty$$

$$3 - n^3 \rightarrow -\infty$$

$$\frac{1}{n-5} \rightarrow 0$$

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots \quad \text{NON HA LIMITE}$$

Leggende metropolitane

LM1 Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora a_n cresce definitivamente

(FALSO: $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, \dots$ su di 2, giù di 1...
"Penelope")

LM2 Se $a_n \rightarrow 0$, allora $a_n \rightarrow 0^+$ oppure $a_n \rightarrow 0^-$

(FALSO: $a_n \equiv 0$ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$)

LM3 Se $a_n \rightarrow 0^+$, allora decresce definitivamente

(FALSO: $\frac{1}{\text{Penelope}}$)

LM4 Se a_n è limitata, diciamo assume valori in $[0, 1]$, allora ha limite

(FALSO: $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$)

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Devo dimostrare che, per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $n^2 \geq M$ definitivamente.

- Se $M \leq 0$, allora $n^2 \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $n_0 = 0$)
- Se $M > 0$, allora $n^2 \geq M$ per ogni $n \geq \sqrt{M}$, e questo è vero definitivamente (quindi basta scegliere $n_0 \geq \sqrt{M}$)
 $\uparrow$
 intero

Occhio: abbiamo usato questo per definire la radice

Più pulito: Se $M > 0$ prendo un intero $m_0 \geq M$ (questo esiste perché $\sup N = +\infty$) e già che ci sono anche $m_0 \geq 1$.

A questo punto

$$a_n = n^2 \geq m_0^2 \geq m_0 \geq M \quad \forall n \geq m_0$$

$\uparrow$
 $n \geq m_0$ e

$\uparrow$
 $m_0 \geq 1$

$\square$ cresc. sui
positivi

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 12

Note Title

07/10/2025

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ anzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0^+$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ defiu.
 $\uparrow$
 gratis
 per $n \geq 1$

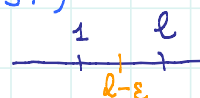
Quando succede che $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$? Se e solo se $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ e questo è vero definitivamente

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ NON ESISTE

Non tende a $+\infty$ (definitiv. dovrebbe essere $a_n \geq 2023$)

" $-\infty$ (" " " $a_n \leq -37$)

Non tende a $l > 1$ (definitiv. dovrebbe stare sopra $l - \varepsilon$ come in figura)



Allo stesso modo si escludano tutti gli $l \neq \pm 1$



Non può essere $l = 1$ (defiu. dovrebbe stare tra 0 e 2, uso $\varepsilon = 1$)

Idem per $l = -1$.

CONSEQUENZE DELLA DEF. DI LIMITE

① Sia a_n una succ. t.c. $a_n \rightarrow +\infty$. Allora a_n è limitata dal basso, cioè

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim Uso la def. di limite con $M = 2023$ e ottengo n_0 t.c.
 $a_n \geq 2023 \quad \forall n \geq n_0$

Adesso pongo $L := \min \{ 2025, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m_0-1} \}$

Claim $a_m \geq L \quad \forall m \in \mathbb{N}$

- se $m \leq m_0 - 1$, allora è proprio la def. di L
- se $m \geq m_0$, allora $a_m \geq 2025 \geq L$

② Sia $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora a_n è limitata dall'alto e dal basso, cioè

$$\exists A \in \mathbb{R} \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad A \leq a_m \leq B$$

Dim. Uso la def. di limite con $\varepsilon = 5$. Trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$l - 5 \leq a_m \leq l + 5 \quad \forall m \geq m_0$$

Adesso pongo

$$A := \min \{ l - 5, a_0, a_1, \dots, a_{m_0} \}$$

$$B := \max \{ l + 5, a_0, a_1, \dots, a_{m_0} \}$$

e concludo come prima

Oss. La limitatezza si può anche definire dicendo

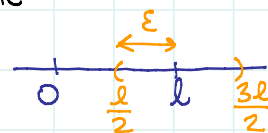
$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a_m| \leq L \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

è come la precedente con $A = -L$ e $B = L$.

PERMANENZA DEL SEGNO E SIMILI

Se $a_n \rightarrow l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente

Dim. Prendo $\varepsilon = \frac{l}{2}$ nella def. e ho che



$$\frac{l}{2} \leq a_n \leq \frac{3l}{2} \quad \text{definitiv.}$$

↑

Da questa deduco che

$$a_n \geq \frac{l}{2} > 0 \quad \text{defin.}$$

Se $a_n \rightarrow \sqrt{17}$, allora $4 \leq a_n \leq 5$ definitivamente.

Dim. Basta scegliere ε abbastanza piccolo, tale che

$$4 \leq \sqrt{17} - \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{17} + \varepsilon \leq 5$$



CONFRONTO A 2 Siano a_n e b_n due succ. tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

(1) Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$

(2) Se $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$

Dim (1) Per ipotesi $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m_0$

Poiché $a_n \rightarrow +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists m_1 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_n \geq M \quad \forall n \geq m_1$$

Pongo $m_2 := \max\{m_0, m_1\}$ e sono sicuro che

$$b_n \geq a_n \geq M \quad \text{quindi} \quad b_n \geq M \quad \forall n \geq m_2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
vera vera
dopo m_0 dopo m_1

La dim. di (2) è analoga.

Achtung! Ogni altra deduzione è ABUSIVA e prob. FALSA

Se $b_n \rightarrow 5$, allora a_n può scegliere tra

- $a_n \rightarrow l$ con $l \leq 5$
- $a_n \rightarrow -\infty$
- a_n può non avere limite

Doppio achtung! Se $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \rightarrow 5^-$, allora a_n può tendere a 5 pure lei

$$a_n = 5 - \frac{3}{n}$$

$$b_n = 5 - \frac{1}{n}$$

SLOGAN: Le disug. strette non pensano al limite

CONFRONTO A 3 (teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre succ. Supponiamo che

(1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ defiu. $\forall n \geq n_0$

(2) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(3) $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

} stesso l REALE

Allora anche $b_n \rightarrow l$

Dim Devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che

$$l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.}$$

Per ipotesi (2) sappiamo che

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \forall n \geq n_a$$

Per ipotesi (3) sappiamo che

$$l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \forall n \geq n_c$$

Ma allora

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$$

cioè

$$l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \because \forall n \geq \max\{n_a, n_c, n_0\}$$

Oss. Nella dimostrazione abbiamo usato solo due delle 4 disug. che avevamo.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 013

Note Title

08/10/2025

LIMITATEZZADef. Una succ. a_n si dice

- limitata superiormente se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- limitata inferiormente " " " " $a_n \geq L$ " "
- limitata se è lim. sup. e inf., o equivalentemente

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq L$$

compresa tra $-L$ e L MONOTONIADef. Una succ. a_n si dice

- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- debolm. cresc. se $a_{n+1} \geq a_n$ " "
- strett. decr. se $a_{n+1} < a_n$ " "
- debolm. decr. se $a_{n+1} \leq a_n$ " "

Conseguenze o def. equivalente

Def. Una succ. si dice

- strett. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m > a_n$
- debolm. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- strett. decr. se $m > n \Rightarrow a_m < a_n$
- debolm. decr. se $m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$

Oss. Nei debolmente possiamo anche mettere $m \geq n$ Oss. Debolm. cresc. $\Rightarrow$ limitata inferiormenteDebolm. decr. $\Rightarrow$ limitata superiormente

TEOREMA SUCC. MONOTONE

Morale: le succ. monotone hanno solo 2 possibili tipi di comportamento

Teorema (Versione crescente)

Sia a_n una succ. debolmente crescente (se strett., ancora meglio)

Allora

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Inoltre

$$l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dim. Ci sono due casi.

Caso 1: $l = +\infty$ Ipotesi : a_n deb. cresc. $\sup = +\infty$

Tesi : $a_n \rightarrow +\infty$

Devo dim. che

$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ si ha } a_n \geq M \text{ definitiv.}$$

Perché è vero?

→ prendo $M \in \mathbb{R}$

→ poiché $\sup = +\infty$, per caratt. $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{m_0} \geq M$

→ per monotonia $a_n \geq a_{m_0} \geq M$ per ogni $n \geq m_0$

Caso 2: $l \in \mathbb{R}$ Ipotesi : a_n deb. cresc. $\sup = l \in \mathbb{R}$

Tesi : $a_n \rightarrow l$

Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ si ha } l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon \text{ definitiv.}$$

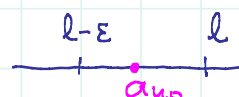
Perché è vero?

→ prendo $\varepsilon > 0$

→ per caratt. di $\sup$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{m_0} \geq l - \varepsilon$

→ per monotonia $a_n \geq a_{m_0} \geq l - \varepsilon$ per ogni $n \geq m_0$ (disug. sx)

La disug. $a_n \leq l + \varepsilon$ è vera, e anzi $a_n \leq l$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, poiché l è un maggiorante.



Versione decrescente : Se a_n è deb. decr., allora

$$a_n \rightarrow l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

[Dim. per esercizio]

Corollario Se a_n è deb. cresc. e limitata superiormente, allora

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

Analogo con deb. decr. + lim. inf.

Oss. Supponiamo a_n deb. cresc. e limitata sup.

Posso dire che $a_n \rightarrow l^-$?

[NO! Se $a_n \equiv l$ definitivamente non è vero.

Se una volta vale l , poi è l per sempre]

Se invece a_n è STRETT. cresc. e lim. sup., allora davvero

$$a_n \rightarrow l^-$$

NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

Teorema Consideriamo la succ.

$$e_m := \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \forall m \geq 1$$

Allora e_m è deb. cres. (pure strett.) e limitata sup.

Quindi ha un limite, che indichiamo con e .

Inoltre

$$2 < e < 3 \quad (e = 2,71828\dots)$$

Dim.Fatto 1 (non serve a nulla) $e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \text{Bernoulli con } x = \frac{1}{n}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Fatto 2 : e_n è debol. cresc. (a quel pto $e_n \geq e_1 = 2 \quad \forall$)[Dimostriamo che $e_n \geq e_{n-1}$]

$$e_n \geq e_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \quad \text{[Tenere } n \text{ come esponente comune]}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

L'ultima è vera perché è la Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$ che è > -1 abbastanza presto (il nostro n è almeno 2)

Fatto 3 : $e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$.

Inizio brutta copia: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k}$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

≤ 1 ≤ 1

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1 + 1 + 1 = 3$$

Cosa abbiamo usato ?

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \text{per ogni } 1 \leq k \leq n$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\text{cioè } k! \geq 2^{k-1} \text{ no facile induzione})$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\text{facile induzione})$$

Mettendo tutto insieme (BELLA COPIA)

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$\uparrow$ Binomio Newton $\uparrow$ separo $k=0$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

$\uparrow$ uso $\textcircled{1}$ $\uparrow$ uso $\textcircled{2}$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$ SHIFT degli indici

Chi esclude che tenda proprio a 3? Basta tenersi un piccolo avanzo nelle stime abbondanti che abbiamo fatto.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 014

Note Title

08/10/2025

RETTEA REALE ESTESA

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Prima comodità Quando scrivo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$ intendo che siamo nei primi 3 casi, cioè il limite esiste, finito o infinito.

Seconda comodità Le usuali 4 operazioni si estendono abbastanza bene a $\bar{\mathbb{R}}$, nel modo usuale

Esempi

$$\begin{array}{lll} 7 + \infty = +\infty & 7 - \infty = -\infty & +\infty + \infty = +\infty \\ 5 \cdot +\infty = +\infty & -7 \cdot (-\infty) = +\infty & \frac{18}{+\infty} = 0 \quad (0^+) \end{array}$$

Casi problematici

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm \infty)$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{7}{0}$$

$$\frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{7}{0^-} = -\infty$$

↑
Questi volevo ok

TEOREMI ALGEBRICI SUI LIMITI

Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

$$a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

TRANNE nei casi problematici (le operazioni si intendono in $\bar{\mathbb{R}}$).

Achtung! Achtung! Nei casi problematici (AKA forme indeterminate) si deve intendere che "il limite della somma o diff... non è deducibile solo dai limiti dei due pezzi"

Non vuol dire che il limite non esiste.

<u>Esempi</u>	$a_n = 2n$	$b_n = n$	$a_n - b_n \rightarrow +\infty$
	$a_n = 2n$	$b_n = 3n$	$a_n - b_n \rightarrow -\infty$
	$a_n = 2n$	$b_n = 2n - 42 + \frac{1}{n}$	$a_n - b_n \rightarrow 42$
	$a_n = 2n$	$b_n = 2n + (-1)^n$	$a_n - b_n$ non ha limite

Da cui somma nel caso finito Ipotesi $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$
Terzi $a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$

Brutta copia $|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)|$ lo voglio $\leq \varepsilon$ definitivamente.

$$\begin{aligned}
 |(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| &= |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| \\
 &\leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Bella copia

→ Ti viene dato $\varepsilon > 0$

→ Uso la def. di limite per a_n e b_n con $\frac{\varepsilon}{2}$. Ottengo

$$|a_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_a \quad |b_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_b$$

→ Ma allora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ funziona il conto della brutta.

— o — o —

Supponiamo $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n limitata inferiormente
(se b_n ha limite reale o anche $+\infty$, questa condizione è verificata)

Allora $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Dim. Ipotesi : $a_n \rightarrow +\infty$ $b_n \geq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
Tesi : $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Brutta $a_n + b_n \geq M + B$ definitivamente, ma io voglio
 $a_n + b_n \geq M$ definitivamente.

Bella:

→ prendo $M \in \mathbb{R}$

→ uso la def. di $a_n \rightarrow +\infty$ con $M - B$, quindi trovo n_0 t.c.

$$a_n \geq M - B \quad \forall n \geq n_0$$

→ ora per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$a_n + b_n \geq M - B + B = M \quad \square$$

Dim. prodotto nel caso finito Ipotesi : $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$
Tesi : $a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$

Brutta : $|a_n b_n - l_1 l_2|$ [Termine misto!]

$$= |a_n b_n - a_n l_2 + a_n l_2 - l_1 l_2|$$

$$= |a_n (b_n - l_2) + l_2 (a_n - l_1)|$$

$$\leq |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1|$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 non può essere piccolo fisso piccolo
 enorme perché
 a_n è limitata

Punto ad avere $\frac{\varepsilon}{2}$ ed $\frac{\varepsilon}{2}$.

Bella→ prendo $\varepsilon > 0$ → osservo che a_n è limitata (avendo limite), quindi esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ uso la def. di limite

per b_n con $\frac{\varepsilon}{2A}$

$$|b_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \quad \forall n \geq m_b$$

per a_n con $\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|l_2|}$

$$|a_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \quad \forall n \geq m_a$$

→ A questo punto per il conto fatto in brutta

$$\begin{aligned} |a_n b_n - l_1 l_2| &\leq |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1| \\ &\leq A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + |l_2| \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni $n \geq \max \{m_a, m_b\}$ ↑ due definitivamente per a_n e b_n

N1: potevi aver diviso per 0. Come ne usciamo?

Dovemo usare le due def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2A+25}$ e $\frac{\varepsilon}{2|l_2|+37}$
 Il resto funzionava uguale!

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \cos n = +\infty$

$$\underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{(n - \cos n)}_{\downarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

$$\underbrace{(n - \cos n)}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{(n - 1)}_{\downarrow +\infty}$$

per confronto a 2

Esercizio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^2 - 7} = \frac{1}{2}$

SLOGAN: chi comanda si raccoglie!

$$\frac{\cancel{n^2} \left(1 + \boxed{\frac{3}{n}} + \boxed{\frac{1}{n^2}} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 - \boxed{\frac{7}{n^2}} \right)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{teorema algebrico})$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Più in generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\theta_0)}{n} = 0$

$$-1 \leq \sin(n\theta_0) \leq 1$$

Divido per n

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin(n\theta_0)}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
 (Carabinieri)

Esempio 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \arctan n}{n + \arctan(n^2)} = +\infty$

$$\frac{\boxed{n^2} \left(1 + \boxed{\frac{\arctan n}{n^2}} \right)}{\cancel{n} \left(1 + \boxed{\frac{\arctan(n^2)}{n}} \right)}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ +\infty & 0 \end{matrix}$

Basta $0 \leq \arctan(m) \leq \frac{\pi}{2}$

Divido e uso
i carabinieri

ANALISI 1

LEZIONE 15

Note Title

13/10/2025

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ Dim. voglio $2^n \geq M$ defn. $\rightarrow$ Se $M \leq 0$ vera $\forall n \geq 0$ $\rightarrow$ Se $M > 0$ vera $\forall n \geq n_0$ purché $n_0 \geq \log_2 M$

occhio: questo è circular reasoning: per definire $\log_2 M$ serve sapere che 2^n può diventare grande a piacere

Per dim DAVVERO posso usare

$$\underbrace{2^n}_{+\infty} \geq \underbrace{1+n}_{+\infty}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{con } x=1$$

Esempio 1 bis $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$ Uso Bernoulli con $x = a-1$. Otengo

$$\underbrace{a^n}_{+\infty} \geq \underbrace{1+n(a-1)}_{+\infty}$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ [Brutal mode: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$]

Qui serve teo. alg.
per l'esponenziale
per dim. il quale
serve già il limite

Pseudo Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$

Faccio radice n-esima

$$1+x \geq \sqrt[n]{1+nx}$$

Uso $x = \frac{1}{n}$ e otengo

facile

$$\underbrace{1}_{1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{1} \leq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}$$

Esempio 2-bis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$

Uso $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo $\boxed{1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \boxed{1 + \frac{a-1}{n}}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Questo funziona se $a \geq 1$. Se $a \in (0,1)$ osservo che $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \quad \because$$

Tabellina di limiti

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \forall a > 0$$

$$a^n \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a > 1 \\ \rightarrow 1 & \text{se } a = 1 \\ \searrow 0 & \text{se } a \in [0,1) \end{cases}$$

$a^n \rightarrow 0$ per $0 \leq a < 1$. Se $a=0$ è ovvio. Se $a \in (0,1)$ lo scrivo come $\frac{1}{b}$ e allora

$$a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0$$

Se $a=1$ la succ. a^n vale sempre 1, quindi tende a 1.

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \rightarrow$ Tabellina

Bernoulli modificata

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x \geq 0$$

Faccio radice n -esima:

$$\sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2} x^2} \leq 1+x$$

Scelgo $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e ottengo

$$\boxed{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \boxed{1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

— 0 — 0 —

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio rapporto → radice

CRITERIO RADICE Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definitivamente.
Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $l > 1 \rightsquigarrow a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1 \rightsquigarrow a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOH

CRITERIO RAPPORTO Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ def'n.
Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora stessa conclusione della radice.

CRITERIO RAPPORTO → RADICE Sia a_n succ. con $a_n > 0$ def'n.
Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso l)

Utilizzo operativo Devo fare il lim. di a_n e non sono capace.
Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ che magari sono capace.

Se esiste e viene $\neq 1$, allora i

Se il limite della radice viene 1, allora con il rapporto non ho speranza, perché può o non esistere, ma se esiste è 1.

Dim. radice Caso $l > 1$.

Per ipotesi sappiamo $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, quindi defiu.

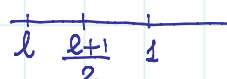
$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}, \text{ quindi}$$

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

(se $l = +\infty$ uso 2025 invece di $\frac{l+1}{2}$)

Caso $l < 1$



ora $\frac{l+1}{2} \in (0, 1)$

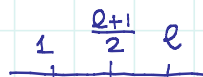
Ora

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ definitiv. quindi}$$

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Dim. rapporto Caso $l > 1$



Definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$, avremo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$

Quindi $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq \frac{l+1}{2}$ cioè $a_{n_0+1} \geq \frac{l+1}{2} \cdot a_{n_0}$ (ho molt. perché $a_{n_0} > 0$)

Allo stesso modo $a_{n_0+2} \geq \frac{l+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$

e quindi per induzione ... $a_{n_0+k} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^k a_{n_0}$

cioè $a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

e quindi $a_n \geq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{l+1}\right)^{n_0} a_{n_0}}_{\text{numero positivo}}$

Caso $l < 1$ Allo stesso modo arrivo a (però ora $\frac{l+1}{2} \in (0, 1)$)

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{l+1}\right)^{n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

Dim. rapporto $\rightarrow$ radice Dimostrazione in due fasi

Supponiamo che il rapporto tenda ad $l \in \mathbb{R}$ (l'altro caso è più semplice).

$$\begin{array}{ccc} l - \frac{\varepsilon}{2} & l & l + \frac{\varepsilon}{2} \\ | & | & | \end{array}$$

Definitiv., diciamo per $n \geq n_0$, avremo che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui per induzione come prima

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

Ora faccio la radice n -esima di tutto

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) \underbrace{\sqrt[n]{\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}}_{\downarrow 1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underbrace{\sqrt[n]{\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}}}_{\downarrow 1}$$

Poiché RHS (right-hand side) $\rightarrow l + \frac{\varepsilon}{2}$, definit. $\text{RHS} \leq l + \varepsilon$ ↑↑

Poiché LHS $\rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2}$, definit. $\text{LHS} \geq l - \varepsilon$

Quindi definitiv. $l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon$
che è quello che volevamo.

— o — o —

ANALISI 1

LEZIONE 16

Note Title

13/10/2025

Oss. (su lezione precedente)

Nella dimostrazione della radice e del rapporto abbiamo usato una sola delle disug. nella def. di limite (dall'alto o dal basso a seconda dei due casi).

Un enunciato con ipotesi più deboli è il seguente

- Se esiste $L > 1$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq L$ defiu., allora $a_n \rightarrow +\infty$
- Se esiste $L \in (0, 1)$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq L$ defiu., allora $a_n \rightarrow 0$

Idem per il rapporto.

Oss. (su rapporto $\rightarrow$ radice)

Intanto vale anche se $L = 1$.

Può succedere che il rapporto NON ha limite, ma la radice sì.

Esempio

$$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

I rapporti diventano $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$ quindi non hanno limite.

D'altra parte

$$\boxed{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \boxed{\sqrt[n]{2}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad 1 \quad \quad 1$

GERARCHIA DEGLI INFINITI

Esempio 1

$$\frac{3^n}{n^{78}} \rightarrow +\infty$$

(esponenziale batte potenza)

Rapporto:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{78}} \cdot \frac{n^{78}}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{78} \rightarrow 3 > 1$$

$\downarrow$
 1

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 3$, di sicuro $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 2 $\frac{n!}{3^n} \rightarrow +\infty$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{3 \cdot \cancel{3^n}} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{n!}} \rightarrow +\infty$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$, anche $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 3 $\frac{n^n}{n!}$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)} (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} n!} \frac{\cancel{n!}}{n^n}$
 $= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow e > 1$, avremo che $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 4 $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$

Basta osservare che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Il rapporto tende a $\frac{1}{e}$, come nell'esempio 3, quindi anche la radice tende a $\frac{1}{e}$

Esempio 5 $\boxed{\frac{3^{n^2}}{n^n}}$
 a_n

Uso radice $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3^n}{n} \rightarrow +\infty$ (visto prima), quindi $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 6 $\frac{(2n)!}{n^n}$

Rapporto :
$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(2m+2)!}{(m+1)^{m+1}} \frac{n^m}{(2m)!}$$

$$= \frac{(2m+2)(2m+1)(2m)!}{(m+1)^m (m+1)} \frac{n^m}{(2m)!}$$

$$= \frac{2(2m+1)}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \rightarrow +\infty$$

Quindi $\frac{(2m)!}{n^m} \rightarrow +\infty$

Oss. Potero anche dim. che $(2m)! \geq n^m \cdot m!$

Esempio 7 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{\binom{3m}{m}} = \frac{27}{4}$

Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_m = \binom{3m}{m} = \frac{(3m)!}{(2m)! m!}$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(3m+3)!}{(2m+2)! (m+1)!} \frac{(2m)! m!}{(3m)!}$$

$$= \frac{(3m+3)(3m+2)(3m+1)(3m)!}{(2m+2)(2m+1)(2m)! (m+1)m!} \frac{(2m)! m!}{(3m)!} \rightarrow \frac{27}{4}$$

↑
polinomio su polinomio, raccordo n^3

Quindi $\sqrt[m]{a_m} \rightarrow \frac{27}{4}$

Esempio 8 $\sqrt[m]{m} \rightarrow 1$

$\sqrt[m]{m!} \rightarrow +\infty$

$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{m+1}{m} \rightarrow 1$

$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(m+1)!}{m!} = (m+1) \rightarrow +\infty$

Oss. $\sqrt[2]{2}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice con $a_m = 2$: $\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{2}{2} \rightarrow 1$, quindi...

NO! CIRCULAR REASONING : nella dim. di rapporto $\rightarrow$ radice abbiamo usato che $\sqrt[n]{\text{numero}} \rightarrow 1$

Esempio 9 $\sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$

In pratica: $\sqrt[n]{n^4 + 3n^3 - 7n + 25}$. Raccolgo n^4

$$\boxed{\sqrt[n]{n^4}} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3} + \frac{25}{n^4}}$$

↓
1

$$\text{Ora } \sqrt[n]{n^4} = (\sqrt[n]{n})^4 \rightarrow 1$$

Per il resto, osserviamo che

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{3}{n} + \dots \leq 27 \quad \text{definitiv.}$$

quindi

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \leq \boxed{\sqrt[n]{1 + \dots}} \leq \boxed{\sqrt[n]{27}}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

defin.

Esempio 10 $\sqrt[n]{7^n - n^7 + n^5 \cos(n!)} \rightarrow 7$

Raccolgo 7^n dentro la radice

$$\sqrt[n]{7^n} \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{n^7}{7^n} + \frac{n^5 \cos(n!)}{7^n}}$$

↓ ↓
7 0 0

$$-\frac{n^5}{7^n} \leq \frac{n^5 \cos(n!)}{7^n} \leq \frac{n^5}{7^n}$$

Poi con la radice concludo come prima

ANALISI 1

-

LEZIONE 017

Note Title

14/10/2025

LIMITI DI FUNZIONISetting : $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Andremo a definire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

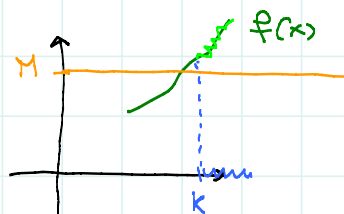
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ognuno di questi ha 4 opzioni : $l \in \mathbb{R}$, $+\infty$, $-\infty$, **N.E.** $\uparrow$ Nessuno dei precedenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Prerequisito : D deve essere non limitato superiormente.
cioè $\sup D = +\infty$

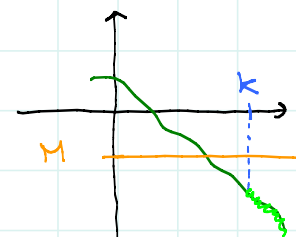
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{R} f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap [K, +\infty)$$

 $\uparrow$ anche enorme $\uparrow$ dipende da M : più alto M più k va a dx

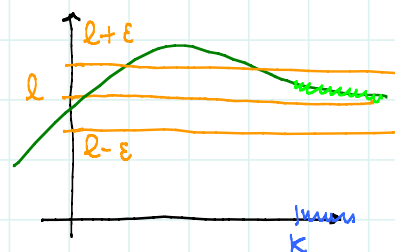
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ se}$$



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap [K, +\infty)$$

 $\uparrow$ anche molto negativo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ se}$$



$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x) - l| < \epsilon$$

 $\uparrow$ anche molto vicino a l

$$\forall x \in D \cap [K, +\infty)$$

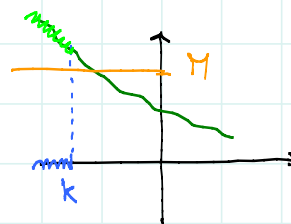
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$

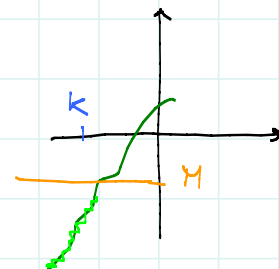
↑ anche e minori

↑ se also M, un aspetto che k vada verso sx.



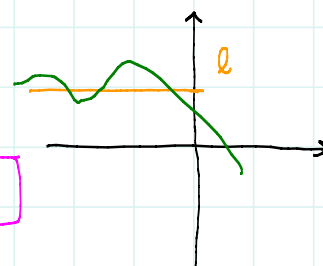
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$



Solite varianti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+ \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in D \cap (-\infty, k] \quad l < f(x) \leq l + \varepsilon$$

↑ = obbligatorie

↑ = trattabili

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^- \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in D \cap (-\infty, k] \quad l - \varepsilon \leq f(x) < l$$

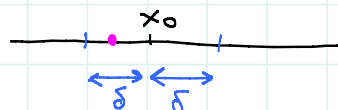
Prerequisito per fare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $\inf D = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Prerequisito su D : x_0 p.to di accumulazione di D
cioè

$$\forall \delta > 0 \quad (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Brutale: in ogni intervallo centrato in x_0 c'è almeno un p.to di D diverso da x_0 stesso.

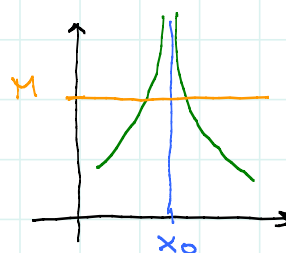


Achtung! La condizione NON è " $x_0 \in D$ " e non è " x_0 nella chiusura di D "

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M$$

$$\forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$



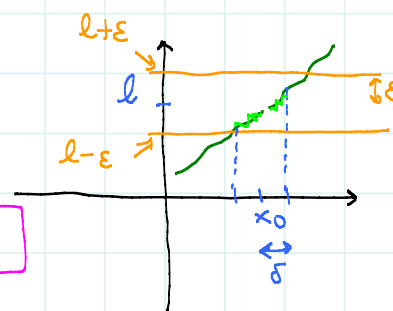
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$



Brutale: gli ε interessanti sono quelli vicini a 0

Più ε diventa piccolo, più δ diventa piccolo (vicino a 0)

Quanto vale $f(x_0)$? **CHI SE NE FREGA!** Il limite è una previsione di quello che dovrebbe succedere in x_0 sulla base di quello che è successo lì vicino.

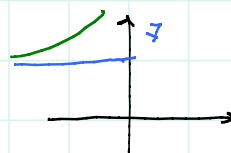
Varianti Cosa vuol dire che $\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f(x) = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta] \quad f(x) \leq M$$



Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \gamma^+$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in D \cap (-\infty, K] \quad \gamma < f(x) \leq \gamma + \varepsilon$$



Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 10^+$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap [8 - \delta, 8) \quad 10 < f(x) \leq 10 + \varepsilon$$

Def. Solito setting : $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo ora che $x_0 \in D$

• Se accade che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, allora f si dice **CONTINUA** in x_0 .

• f si dice continua in D se è continua in ogni p.to di D .

• Nota burocratica : se x_0 è isolato in D ($\exists \delta > 0 \quad D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = \{x_0\}$) allora per definizione f è continua gratis in x_0

— o — o —

ANALISI 1

-

LEZIONE 018

Note Title

14/10/2025

Strumenti BASIC per il calcolo di limiti di funzioni

- teo. confronto a 2 e a 3 (esatt. come con le succ.)
- teo. algebrici (" ")
- funzioni continue (se f è cont. in x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)
- limiti notevoli
- cambi di variabili

METATEOREMA MISTERIOSO Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni sono continue nei pti in cui non hanno problemi burocratici (tipo denom. che si annullano, log di roba ≤ 0 , ...)

Cosa bisognerebbe dimostrare:

- ① che le funzioni elementari sono continue (dim. diversa a seconda delle funzioni)
- ② teo. algebrici
- ③ la composizione di funzioni continue è continua

Esempio 1 La funzione 2^x è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} 2^x = 2^{x_0}$.

$$|2^x - 2^{x_0}| = 2^{x_0} |2^{x-x_0} - 1|$$

Questo deve essere piccolo quando $x - x_0$ è piccolo

Prendiamo il caso $x > x_0$. Dato $\varepsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c.

$$2^{x-x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$$

Ponendo $x - x_0 = h$, vogliamo trovare δ t.c.

$$2^h - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall h \in [0, \delta]$$

Noi sappiamo dalle successioni che $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, quindi

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 2^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall m \geq m_0$$

Ma allora uso $\delta = \frac{1}{m_0}$ e così ho che

$$2^h - 1 < 2^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall h \in [0, \frac{1}{m_0}]$$

$\uparrow$
 monotonia
 di 2^x

Il caso $x < x_0$ si tratta ponendo $x - x_0 = -h$, e poi in maniera analoga.

Esempio 2 Dim. continuità della composizione in un caso semplice.

Ipotesi: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in x_0

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ g continua in $f(x_0)$

Tesi: $g(f(x))$ è continua in x_0

Brutale: quando x è vicino a x_0 si ha $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$
 ma allora $g(f(x))$ è vicino a $g(f(x_0))$

Dim Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon$$

→ Mi viene dato $\varepsilon > 0$

→ Per la continuità di g esiste $\delta_1 > 0$ t.c.

$$|g(y) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1]$$

→ Uso la continuità di f con δ_1 al posto di ε .

Otengo $\delta_2 > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \delta_1 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$$

Questo δ_2 è il δ che cercavo.

Infatti per ogni $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$ abbiamo che

$$f(x) \in [f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1]$$

Ma allora

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon \quad (\text{cont. di } g \text{ con } y = f(x))$$

— 0 — 0 —

Interpretazione brutale della composizione

→ Devo calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$

→ Pongo $y = f(x)$. Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $y \rightarrow f(x_0)$

→ Quindi il limite è diventato $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$

LIMITI NOTEVOLI

Padri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Figli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Nipoti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0$$

↗ in base e

LIMITE DIMENTICATO $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$

Oss. Sono tutti del tipo $\frac{0}{0}$, tranne quello che viene e.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x} \quad \frac{0}{0}$

$$\frac{e^{3x} - 1}{\sin x} = \boxed{\frac{e^{3x} - 1}{3x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \rightarrow 3$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

(Pongo $y = 3x$
e osservo che $y \rightarrow 0$)

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{\sin^2 x} \quad \frac{0}{0}$

$$\frac{\arctan(x^2)}{\sin^2 x} = \boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^2}} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \rightarrow 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1²

(Pongo $y = x^2$)

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\sin x}$

$$f(x) = \boxed{\frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x}} \cdot \boxed{\frac{\tan x}{x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

(Pongo $y = \tan x$)

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$ (è una funzione continua tranquilla)

Alternativa: Pongo $y = \cos x$ e osservo che $y \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$.
Quindi diventa

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} \quad \text{☺}$$

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

$$\frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Forma indeterminata}$$

$$f(x) = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Pongo $y = \cos x - 1$
e diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 — LEZIONE 019

Note Title

15/10/2025

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

"Dim" Essendo funz. PARI, basta fare lim per $x \rightarrow 0^+$.
Supponiamo di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Allora posso dividere per $\sin x$ (che è > 0 nella zona) e ottengo

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Ma allora anche $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

"Dim" geometrica della disuguaglianza

Sia P' il simmetrico di P wrt asse x
with respect to

Lunghezza segmento $PP' = 2 \sin x$

Lunghezza arco $PP' = 2x$

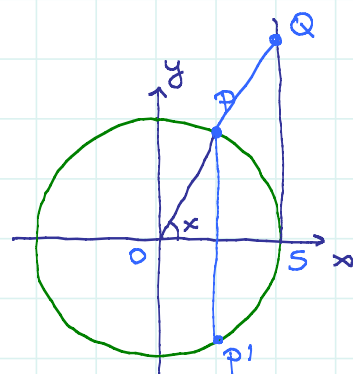
$$\text{segmento} \leq \text{arco} \Rightarrow 2 \sin x \leq 2x \Rightarrow \sin x \leq x$$

$$\text{Area (OSQ)} = \frac{1}{2} \cdot OS \cdot QS = \frac{1}{2} \tan x$$

$$\text{Area settore (OSP)} : \text{Area cerchio} = x : 2\pi$$

$$\text{Area settore} = \frac{x \pi}{2\pi} = \frac{1}{2} x$$

$$\text{Area settore} \leq \text{Area triangolo} \Rightarrow x \leq \tan x$$



Da questo segue (tutti i limiti sono per $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\tan x}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow 1} \rightarrow 1$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\arctan x}{x} \quad \text{Pongo } y = \arctan x \text{ da cui } x = \tan y$$

Quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$, quindi

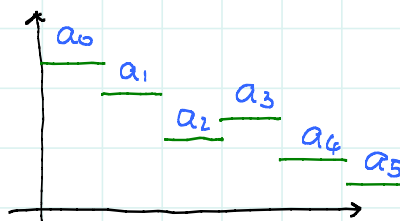
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \text{con lo stesso metodo } (y = \arcsin x)$$

CRITERIO SUCC. $\rightarrow$ FUNZIONI

(I limiti di succ. aiutano a fare i limiti di funzioni)

Brutalmente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$



Lemma Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup D = +\infty$

Sia a_n una succ. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che, definitivamente in n , si abbia

$$f(x) = a_n \quad \forall x \in D \cap [n, n+1)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \leftarrow \text{posto che questo esista in } \overline{\mathbb{R}}$$

Dim Quello che succede ad an definitivamente in n , succede a $f(x)$ per x grandi abbastanza

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^{27}}$

Per $x \in [n, n+1)$ abbiamo

$$\frac{3^x}{x^{27}} \geq \frac{3^n}{(n+1)^{27}}$$

$\uparrow$
 Num. + piccolo
 Den. + grande

Ora RHS $\rightarrow +\infty$ (come funzione costante a tratti)
 quindi per confronto a 2 anche LHS $\rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Punto ai carabinieri. Per $x \in [n, n+1)$:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Ora $\text{RHS} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow e$

$$\text{LHS} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1} \rightarrow e$$

(se $e_n \rightarrow e$, anche $e_{n+1} \rightarrow e$)

Quindi per i carabinieri $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Prima conseguenza $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Pongo $y = -x$ (da cui $x = -y$) in modo che $y \rightarrow +\infty$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\substack{\downarrow \\ e \\ \text{(volendo } z = y-1)}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_{\downarrow 1}$$

Seconda conseguenza: ora sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ora pongo $\frac{1}{x} = y$. I due limiti diventano

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Quindi alla fine

$$\boxed{\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e}$$

Ora il $\log$ è una funzione continua. Facendo il $\log$ (sostituendo di $\ln$ e di $\log_e$) a dx e ex si ottiene che

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \log(1+y) = \log e = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Adesso pongo $y = \log(1+x)$, da cui $1+x = e^y$ e quindi $x = e^y - 1$. Osservo che, quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Se uso base $a \neq e$ viene

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{\log(a^x)} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}} \quad \log a \rightarrow \log a$$

↓
1
($y = x \log a$)

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0}$$

LIMITE DIMENTICATO $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x \quad [0 \cdot (-\infty)]$

Pongo $y = \log x$ e viene ($y \rightarrow -\infty$ e $x = e^y$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y \stackrel{\substack{\uparrow \\ z = -y}}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \quad (\text{esponenziale batte potenza})$$

Oss. Più in generale $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\log x|^b = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 020

Note Title

15/10/2025

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ Succ

(I limiti di funzione aiutano i lim. di succ.)

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ $(+\infty \cdot 0)$

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{con } x \rightarrow 0 \text{ e quindi fa 1}$$

$\uparrow$
 pongo
 $x = \frac{1}{n}$

Lemma Sia a_n una successioneSia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che

(i) $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ definitivamente(ii) $a_n \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ Allora $f(a_n) \rightarrow l$ (stesso l).Dim. nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $l \in \mathbb{R}$ Devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, definitiv. si ha che $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon$ $\rightarrow$ Mi viene dato $\varepsilon > 0$ $\rightarrow$ Per l'ipotesi (iii) sappiamo che

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

 $\rightarrow$ Ora sappiamo che definitiv. si ha che

$$a_n \in D \setminus \{x_0\} \quad (\text{per l'ipotesi (i)})$$

$$a_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad (\text{per l'ipotesi (ii)})$$

 $\rightarrow$ Quindi definitiv. $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon \quad \ddot{\smile}$

Esercizio 1 $n^2 \left(\cos \frac{2}{n} - 1 \right) \rightarrow -2$

$\frac{\cos\left(\frac{2}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}}$ Pongo $x = \frac{1}{n}$ e diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\cos(2x) - 1}{(2x)^2}} \cdot 4 = -2$$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{2} \quad (y=2x)$

Esercizio 2 $n [\log(m+33) - \log(m+7)] \rightarrow +\infty \quad (+\infty - \infty)$

$$= n \log\left(\frac{m+33}{m+7}\right) = n \log\left(1 + \frac{26}{m+7}\right)$$

$$= n \frac{\log\left(1 + \frac{26}{m+7}\right)}{\frac{26}{m+7}} \cdot \frac{26}{m+7} \rightarrow 26$$

$\downarrow$
 $1 \quad x = \frac{26}{m+7} \rightarrow 0$

Esercizio 3 $n (\sqrt[n]{20} - 1) \rightarrow \log 20$

$$n (\sqrt[n]{20} - 1) = n (20^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{20^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \log 20 \quad \left(x = \frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 4 $n (\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{5}) \rightarrow \log \frac{7}{5}$

$$n (\sqrt[n]{7} - 1) - n (\sqrt[n]{5} - 1) \rightarrow \log 7 - \log 5 = \log \frac{7}{5}$$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+x^2) + e^x - \cos x}{\arctan(3x) + \arcsin(x^2)} = 1$

Faccio $+1-1$ al numeratore e raccolgo x

$$\frac{\frac{\sin(2x+x^2)}{x} + \frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\arctan(3x)}{x} + \frac{\arcsin(x^2)}{x}} \rightarrow \frac{3}{3} = 1$$

$\begin{matrix} \uparrow 2 & \uparrow 1 & \uparrow 0 \\ \downarrow 3 & \downarrow 0 \end{matrix}$

Esaminio separatamente i 5 limiti

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\arcsin(x^2)}{x} = \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \cdot x \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\sin(2x+x^2)}{x} = \frac{\sin(2x+x^2)}{2x+x^2} \cdot \frac{2x+x^2}{x} \rightarrow 1 \cdot 2 = 2$$

$\downarrow 1$

Esempio 6 $\frac{n}{\log n} (\sqrt[n]{n} - 1)$ $\frac{\infty}{\infty} \cdot (1-1)$

BASI ED ESPONENTI STRANI = e ALLA

CANE GATTO = $e^{\text{GATTO} \cdot \log \text{CANE}}$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$$

$$\frac{n}{\log n} (e^{\frac{1}{n} \log n} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log n} - 1}{\frac{\log n}{n}} \rightarrow 1 \quad (x = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0)$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ $1^{+\infty}$

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{\sin^2 x} \log(\cos x)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Quindi basta fare il limite dell'esponente

$$\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$\downarrow$
 1
 $y = \cos x - 1 \rightarrow 0$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{2}$

$\downarrow$
 1

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} = 0$

$$\frac{1 - \cos^2(x^3)}{1 - \cos^3(x^2)} = \frac{1 - \cos(x^3)}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{1 + \cos(x^3)}{1 + \cos(x^2) + \cos^2(x^2)}$$

$\downarrow$
 0

$\downarrow$
 $\frac{2}{3}$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

In un angolo faccio il primo pezzo

$$\frac{1 - \cos(x^3)}{1 - \cos(x^2)} = \frac{1 - \cos(x^3)}{x^6} \times 6 \cdot \frac{x^4}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{1}{x^4} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{2}$

$\downarrow$
 2

Esempio 9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO : $f(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |f(x)| \rightarrow 0$
 $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$

Esempio 10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{x}$

$$\frac{\log(1 + 3^x)}{x} = \frac{\log(1 + 3^x)}{3^x} \cdot \frac{3^x}{x}$$

$\downarrow$
 1

NO!! $y = 3^x$ NON TENDE A 0!

Brutal mode: $\log(1+3^x) \sim \log(3^x) \sim x \log 3$

Rigorous:
$$\frac{\log(3^x(1+\frac{1}{3^x}))}{x} = \frac{\log(3^x) + \log(1+\frac{1}{3^x})}{x}$$

$$= \frac{x \log 3 + \log(1+\frac{1}{3^x})}{x} = \log 3 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\log(1+\frac{1}{3^x})}_{\substack{\uparrow 0 \\ +\frac{0}{+\infty}}} \rightarrow \log 3$$

— 0 — 0 —

.....
Note Title

20/10/2025

Sottosucc = prendere solo alcuni termini della succ.

Più formalmente: sia π_k una succ. strett. cresc. di num. naturali
Una sottosucc. è sempl. l'applicazione $k \rightarrow a_{\pi_k}$

Esempi

a_{2k} = s.succ. termini di indice pari : $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

a_{2k+1} = " dispari : $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$

a_{k^2} = termini il cui indice è un $\square$: $a_0, a_1, a_4, a_9, \dots$

Teorema Sia a_n una succ.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (primi 3 tipi)

Allora ogni sua s. succ. tende allo stesso l.

Dim Qualunque cosa faccia a_n definitivamente ($a_n \geq M, a_n \leq M, |a_n - l| \leq \varepsilon$) lo fa definitivamente pure la s. succ.

Oss. Se m_k è una succ. strett. cresc. di naturali, allora

$$m_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{facile induzione})$$

Di conseguenza, se $a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$, allora anche

$$a_{m_k} \geq M \quad \forall k \geq m_0$$

(se $k \geq m_0$, anche $m_k \geq m_0$)

Oss. Se a_n non ha limite (tipo ④), le sue s.succ. possono o no avere limite.

Esempio classico

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_{2k} \rightarrow 1$$

$$a_{2k+1} \rightarrow -1$$

a_k non ha limite

$$a_{k!} \rightarrow 1$$

Come dimostro che a_n non ha limite?

(Questo è in realtà
un se e solo se)

Basta trovare due sottosuccessioni che hanno due limiti diversi!

Dim. Se per assurdo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le s.succ. avrebbero lo stesso limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$.

Oss. Questo è comodo rispetto a negare la definizione.

Cosa vuol dire che a_n ha limite reale?

$$\exists l \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad |l - a_n| \leq \varepsilon$$

La negazione sarebbe

$$\forall l \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\forall m_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq m_0}_{\text{frequentemente}} \quad |l - a_n| > \varepsilon$$

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + (-1)^n n^5$ NON ha limite

$$a_{2k} = (2k)^3 + (2k)^5 \rightarrow +\infty$$

(raccolgo k^5)

$$a_{2k+1} = (2k+1)^3 - (2k+1)^5 \rightarrow -\infty$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 + (-1)^n n^3 = +\infty$

$$n^5 + (-1)^n n^3 = \underbrace{n^5}_{\rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$\boxed{-\frac{1}{n^2}} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{7} n\right)$

Brutta copia: faccio in modo che $\sin = 0 \leadsto \frac{\pi}{7} n = 2k\pi \leadsto n = 14k$

faccio in modo che $\sin = 1$

$$\leadsto \frac{\pi}{7} n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leadsto 2\pi n = 7\pi + 14k\pi$$

$$\leadsto 2n = 14k + 7$$

e questo non è possibile

faccio in modo che $\sin = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$\frac{\pi}{7} n = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \leadsto n = 1 + 14k$$

Bella copia: $a_{14k} = \sin\left(\frac{\pi}{7} \cdot 14k\right) = \sin(2\pi k) = 0 \rightarrow 0$

$$a_{14k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{7} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \neq 0$$

Come dimostrare che $\lim_{x \rightarrow \text{CANE}} f(x)$ non esiste?

CANE: $+\infty, -\infty$
 x_0, x_0^+, x_0^-

Basta che trovi (per ora è conol. suff., ma in realtà è $\Leftrightarrow$)
 due succ.

$$a_n \rightarrow \text{CANE}$$

$$b_n \rightarrow \text{CANE}$$

tali che

$$f(a_n) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$f(b_n) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$l_1 \neq l_2$$

Dim. Se per assurdo $\lim_{x \rightarrow \text{CANE}} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $f(a_n)$ e

$f(b_n)$ tenderebbero a quello stesso l (è il criterio
 funzioni $\rightarrow$ succ. ponendo $x = a_n$ e $x = b_n$)

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ non esiste

$$\text{Usa } a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty \text{ e } \sin(a_n) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow +\infty \text{ e } \sin(b_n) = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ non esiste

Brutta: posso avere $\cos = 1$? $\frac{1}{x^2} = 2k\pi \rightsquigarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \rightarrow 0^+$

Posso avere $\cos = 0$? $\frac{1}{x^2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}} \rightarrow 0^+$

Bella copia: considero le due succ.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0^+ \quad \cos\left(\frac{1}{a_n^2}\right) = \cos(2\pi n) \rightarrow 1$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \rightarrow 0^+ \quad \cos\left(\frac{1}{b_n^2}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x) = +\infty$

$$\boxed{x(2 + \sin x)} \geq \boxed{x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \sin x)}{f(x)}$ non esiste

$$a_n = \pi n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(a_n) = a_n = \pi n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) = 0 \rightarrow 0$$

Se il limite fosse stato per $x \rightarrow -\infty$ avrei usato

$$a_n = -\pi n \rightarrow -\infty \quad b_n = \frac{3\pi}{2} - 2n\pi \rightarrow -\infty$$

Esempio 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{22} n\right)\right)^n$ non esiste

$$a_{44k} = \left(2 + \cos(2k\pi)\right)^{44k} = 3^{44k} \rightarrow +\infty$$

Vorrei tanto $\cos = -1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{22} n = \pi + 2k\pi \rightsquigarrow n = 22 + 44k$

$$a_{44k+22} = (2 + \cos(\pi + 2k\pi))^{44k+22} = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\underbrace{-\sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} \leq \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0}$$

Ho usato che $\sin \frac{1}{x} > 0$ quando x è abbastanza grande.
 $\quad \quad \quad - \quad 0 \quad - \quad 0 \quad -$

ANALISI 1 - LEZIONE 022

Note Title

20/10/2025

RAZIONALIZZAZIONI

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+7} - \sqrt{n+4} = 0 \quad [+ \infty - \infty]$

Trucco: razionalizzare. Moltiplico e divido per $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$\frac{n+7 - n-4}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n+4}} \rightarrow \frac{3}{+\infty} = 0$$

Cosa ho usato: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Non pensare nemmeno di fare $\sqrt{n+7} - \sqrt{n+4} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+7n+4} - n = \frac{7}{2}$

Non pensare nemmeno che $\dots = \sqrt{n^2} - n = n - n = 0$.

Moltiplico e divido per $\sqrt{\dots} + n$:

$$\frac{n^2+7n+4 - n^2}{\sqrt{n^2+7n+4} + n} = \frac{7 + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{7}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{7}{2}$$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3+7n^2+4} - n$

Come razionalizzo le radici cubiche? $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La uso con $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B} \rightsquigarrow$

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) (\underbrace{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}_{\text{coso per cui moltip. e dividere}})$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$$

$$A - B$$

$$\sqrt[3]{m^3 + 7m^2 + 4} - m = \frac{m^3 + 7m^2 + 4 - m^3}{\sqrt[3]{(m^3 + 7m^2 + 4)^2} + \sqrt[3]{m^3(m^3 + 7m^2 + 4)} + m^2}$$

$\sqrt[3]{A^2}$ $\sqrt[3]{AB}$ $\sqrt[3]{B^2}$

Raccordo m^2 sopra e sotto ... $\rightarrow \frac{7}{3}$

Esempio 4 $\sqrt{m+5} - \sqrt[3]{2m+7} \rightarrow +\infty$

Raccordo $\sqrt{m}$ che comanda:

$$\begin{aligned} \sqrt{m} \left\{ \sqrt{1 + \frac{5}{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt[3]{2m+7} \right\} &= \sqrt{m} \left\{ \sqrt{1 + \frac{5}{m}} - \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt{m}} \sqrt[3]{2 + \frac{7}{m}} \right\} \\ &= \sqrt{m} \left\{ \underbrace{\sqrt{1 + \frac{5}{m}}}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m}}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sqrt[3]{2 + \frac{7}{m}}}_{\rightarrow \sqrt[3]{2}} \right\} \end{aligned}$$

Esempio 5 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

$$a_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$

$$a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \dots$$

Dico che $a_n \rightarrow 0$.

Non pensare nemmeno che segua dal fatto che tutti i termini tendono a 0.

Dim $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} (n+1)$

$\uparrow$ termine più grande $\uparrow$ numero dei termini

Ora basta osservare che $RHS \rightarrow 0$ e $LHS \rightarrow 0$.

Esempio 6 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ora però $a_n \rightarrow +\infty$. Perché?

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)$$

$\uparrow$ termine + piccolo $\uparrow$ # termini

Ora RHS $\rightarrow +\infty$, quindi per confronto a 2 anche $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ Tende ad un limite $l \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{2n} (n+1) \leq a_n \leq \frac{1}{n} (n+1)$$

Quindi l , se esiste, sta in $[\frac{1}{2}, 1]$. Perché l esiste?

Proviamo a sperare nella monotonia...

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$$

Quindi per monotonia a_n ha limite.

Oss. Vedremo un giorno che $l = \log 2$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n^a + 5}{n^5 + n^3 + 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 5 \\ 1 & \text{se } a = 5 \\ 0 & \text{se } a < 5 \end{cases}$

Come lo dimostro? Raccolgo n^5 sopra e sotto e concludo

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ e & \text{se } a = 1 \\ 1 & \text{se } a < 1 \end{cases}$

$n^a \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Lo scrivo come e

e faccio il limite dell'esponente

$$n^a \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n^a}{n} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = n^{a-1} \boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

dipende facilmente da $x = \frac{1}{n} \rightarrow 1$

Esempio 10 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 2} + x$ $[-\infty - \infty]$

Brutale: $\sqrt{\dots} + x = x + x \rightarrow -\infty$ TERRIBILE !!
 $\sqrt{x^2} = x$ va bene per $x > 0$, ma qui $x \rightarrow -\infty$

Pongo $y = -x$ e diventa $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - 7y + 2} - y = -\frac{7}{2}$
↑
razionalizzo

Esempio 11 $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - 3\pi}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

Lo riporto in 0 ponendo $y = x - \frac{3\pi}{2}$ in modo che $y \rightarrow 0$

Ricavo $x = y + \frac{3\pi}{2}$ e quindi il limite è diventato

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + y\right)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}$$

↑
precorso

Esempio 12 Sia $a > 0$ e $b > 0$. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}}$ $[1^{+\infty}]$

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}$$

Faccio l'esponente

$$\frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = \frac{1}{x} \boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)$$

↓
1

In un angolo mi calcolò

$$\frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right) = \frac{1}{x} \frac{a^x + b^x - 2}{2} = \frac{a^x - 1}{2x} + \frac{b^x - 1}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \downarrow \log a + \frac{1}{2} \downarrow \log b = \log \sqrt{ab}$$

Quindi il limite originario è $\sqrt{ab}$

Esempio 13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \max\{a, b\}$

Chi comanda si raccoglie!

— o — o —

ANALISI 1

-

LEZIONE 023

Note Title

21/10/2025

Linguaggio degli infinitesimi: SIMBOLI DI LANDAU

- o piccolo utilissimo per fare i limiti
- O grande poco utile per i limiti
- $\sim$ equivalenza asintotica pericolosissima per i limiti

Def. di o piccolo Setting: $D \subseteq \mathbb{R}$ x_0 p.to in cui fare i limiti
(può essere $\pm \infty$, 5 , 7^- , 8^+)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $\omega: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x)\omega(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$$

Brutalmente: $f = g$ per qualcosa che tende a 0 .

Ancora meglio: se g tende a 0 , allora f tende a 0 "di più",
cioè " f batte g nella velocità con cui tende a 0 "

Def. quasi equivalente Supponiamo di poter dividere per $g(x)$
(cioè $g(x) \neq 0$ almeno vicino a x_0).

Allora $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Def. di equivalenza asintotica Si dice che

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se ... tutto come sopra ... e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Brutale: f e g
"parruggiano"

Def. di O grande ... tutto come sopra... $w(x)$ limitata in un intorno di x_0 (Brutale: f non perde da g)

Esempio 1 $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

1° modo: $x^3 = x \cdot x^2$ e $x^2 \rightarrow 0$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g w

2° modo: def. quasi equiv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 $\uparrow$ $\downarrow$
 f g

Fatto generale $x^a = o(x^b)$ per $x \rightarrow 0$ se e solo se $a > b$

$$x^a = x^b \cdot x^{a-b}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g $w \leftarrow \text{tende a } 0 \Leftrightarrow a > b$

Oss. $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \rightarrow 0$ ma nessuno dei due tende a 0.

Esempio 2 $\sin(x^2) \cdot \arctan x = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Posso usare def. quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \arctan x}{x^2} = 0$$

$\downarrow$
 $\rightarrow 1$

$$w(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \arctan x$$

PROPRIETÀ DI O PICCOLOSetting come sopra. Tutto per $x \rightarrow x_0$.

Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x))$$

$$f_2(x) = o(g(x))$$

SOMMA/DIFFERENZA

$$f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dim $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$

$$f_1(x) \pm f_2(x) = g(x) [w_1(x) \pm w_2(x)]$$

 $w_3(x) \rightarrow 0$ per somma/diff.**MULTIPLO**

$$\lambda f_1(x) = o(g(x))$$

Dim $\lambda f_1(x) = \lambda g(x) \cdot w_1(x) = g(x) \cdot \lambda w_1(x)$

 $w_3(x) \rightarrow 0$ Voleudo è vero pure che $\lambda f_1(x) = o(\lambda g(x))$.**PRODOTTO**

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)$$

Dim $f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x) w_1(x) \cdot g(x) w_2(x)$

$$= g(x)^2 \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}$$

 $w_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$ **QUOZIENTE**

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{NULLA DI FURBO}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g(x) w_1(x)}{g(x) w_2(x)} \quad \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{BOH} \right]$$

Brutale: f_1 batte g , f_2 batte g , ma non so nulla di come finisce tra f_1 e f_2 .

TRANSITIVITÀ

Se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora
 $f(x) = o(h(x))$

Dim

$$f(x) = g(x) \cdot w_1(x)$$

$$g(x) = h(x) \cdot w_2(x)$$

Quindi

$$f(x) = h(x) \cdot \underbrace{w_2(x) \cdot w_1(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0}$$

Riassunto

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

$$\lambda o(g) = o(g)$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{nulla di furbo}$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

Esempio

$$\sin(2x) \cdot \arctan x = o(x) \quad (\text{tutto per } x \rightarrow 0)$$

$$\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x)$$

$$\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x^2)$$

$$\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x^3)$$

ok entrambe: se divido,
il limite viene 0

NO (se divido e faccio
il limite viene 2)

più forte della seconda, cioè

la implica (battere x^2 è più difficile
che battere x)

COMPOSIZIONI

Per $x \rightarrow 0$.

Supponiamo

$$f(x) = o(x^a) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (a > 0)$$

Allora

$$f(x^3) = o(x^{3a}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Dim

$$f(x) = x^a \cdot w(x) \quad \text{con } w(x) \rightarrow 0$$

$$f(x^3) = x^{3a} \cdot \underbrace{w(x^3)}_{w_1(x)}$$

$w_1(x) \rightarrow 0$ per cambio variabili $y = x^3$

$$[f(x)]^3 = O(x^{3a}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad [f(x)]^3 = [x^a \cdot \omega(x)]^3 = x^{3a} \cdot \underbrace{\omega(x)^3}_{\omega_1(x) \rightarrow 0} \quad \ddot{\smile}$$

$$f(\arctan x) = O(x^a) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad f(\arctan x) &= (\arctan x)^a \omega(\arctan x) \\ &= x^a \underbrace{\frac{(\arctan x)^a}{x^a}}_{\omega_1(x) \rightarrow 1 \cdot 0} \cdot \omega(\arctan x) \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

$$\arctan(f(x)) = O(x^a) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \arctan(f(x)) = x^a \underbrace{\frac{\arctan(f(x))}{x^a}}_{\omega_1(x)}$$

$$\omega_1(x) = \underbrace{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{x^a}}_{\downarrow 0 \text{ perché è l' } \omega \text{ di } f!!} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Oss. La dim. di sopra funziona se posso dividere per f .

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 024

Note Title

21/10/2025

SVILUPPI/N Limiti notevoli detti con o piccolo (sempre per $x \rightarrow 0$)

$$\sin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + o(x) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x = o(x) \quad \text{Con la def. quasi equiv.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\cos x - 1 = o(x) \quad \dots \text{quasi equiv.} \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{0} \right] = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2) \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Oss. Posso usare o piccolo per la succ., ovviamente per $n \rightarrow +\infty$,
cioè $a_n = o(b_n)$ se e solo se $a_n = b_n \cdot w_n$
con $w_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

LIMITI NOTEVOLI E EQUIVALENZA ASINTOTICA

Per $x \rightarrow 0$

$\sin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$\tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\log(1+x) \sim x$

$e^x \sim 1+x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$\cos x \sim 1$

$(1+x)^a \sim 1+ax$

$(1+x)^a = 1+ax+o(x)$

(include a frazionario o negativo)

Devo dim. che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1 - ax}{x} = 0$

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} - a = \frac{e^{a \log(1+x)} - 1}{x} - a$$

$$= \frac{e^{a \log(1+x)} - 1}{a \log(1+x)} \cdot \frac{a \log(1+x)}{x} - a \rightarrow a - a = 0 \quad \ddot{\smile}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
1 $(y = a \log(1+x) \rightarrow 0)$ 1

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + e^{3x} - \cos x}{\arctan x + \tan^2(x)} = 5$

All'antica: divido sopra e sotto per x e aggiungo e tolgo 1 sopra

$$\frac{\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{e^{3x} - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\arctan x}{x} + \frac{\tan^2 x}{x^2}} \rightarrow \frac{2 + 3 + \frac{1}{2} \cdot 0}{1 + 1 \cdot 0} = 5$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
1 1 0

Oggi leuto: sviluppo tutto

$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x)$

$e^{3x} = 1 + 3x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$

$\tan^2 x = o(x)$

Sostituisco

$$\begin{aligned} \text{Frazione} &= \frac{2x + \cancel{1} + 3x - \cancel{1} + o(x)}{x + o(x)} = \frac{5x + o(x)}{x + o(x)} \\ &\quad \uparrow \text{uso tante volte che } o(x) + o(x) = o(x) \\ &= \frac{5 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} \xrightarrow{\substack{\uparrow 0 \\ \downarrow 0}} 5 \end{aligned}$$

Morale: le funzioni strane sono polinomi + spazzatura e la spazzatura è raccolta da o piccolo

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{ord}(2x)} - \sqrt[3]{1+x}}{\sin(5x) + \log(1-x)} = \frac{5}{12}$

Brutal mode: $\sin(5x) \sim 5x$ $\log(1-x) \sim -x$
Denominatore $\sim 4x$

$$e^{\text{ord}(2x)} \sim e^{2x} \sim 1 + 2x$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \sim 1 + \frac{1}{3}x$$

$$\text{Frazione} \sim \frac{1+2x - 1 - \frac{1}{3}x}{5x - x} \sim \frac{\frac{5}{3}x}{4x} \sim \frac{5}{12}$$

Esempio 3 $\sqrt{n^2 + 7n - 4} \sim n$ Troppo brutale: $\sim n - n = 0$

Occhio: è vero che $\sqrt{n^2 + 7n - 4} \sim n$ (se divido per n tende a 1)

Raccogliamo n^2 dentro la radice:

$$\begin{aligned}
 n \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - n &= n \left\{ \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \\
 &\quad \quad \quad +\infty \cdot 0 \quad \quad \quad \uparrow o\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &= n \left\{ \left(1 + \frac{7}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} = n \left\{ \cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{7}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1} \right\} \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \\
 &= \frac{7}{2} + o(1) \rightarrow \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Oss. $n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = \underline{o(1)}$
 $\uparrow$ sinonimo di "roba che tende a 0"

$$n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \omega_n$$

$\downarrow$
0

Oss. Le parti principali n si sono semplificate, e in quel caso entrano in gioco le "secondo linee".

$$\sqrt{n^2 + 7n - 4} = n + o(n) \leftarrow \text{questa è vera}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n^2 + 7n - 4} - n &= \cancel{n} + o(n) - \cancel{n} = o(n) = n \cdot \omega_n = \text{boh} \\
 &\quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &\quad \quad \quad +\infty \quad 0
 \end{aligned}$$

Tenendo conto delle seconde linee

$$\sqrt{n^2 + 7n - 4} = n + \frac{7}{2} + o(1)$$

ANALISI 1

LEZIONE 025

Note Title

22/10/2025

DERIVATE Setting : $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Supporremo sempre x_0 interno a D cioè

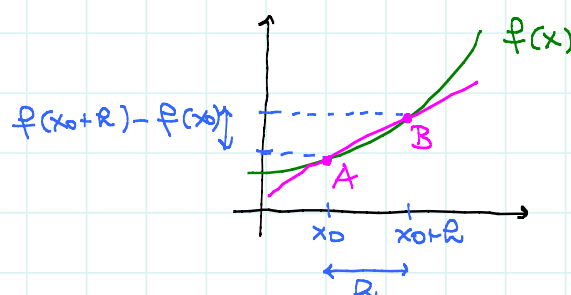
$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$$

(oggi basterebbe $x_0 \in D$ e p.to di accumulazione)

Def. (RAPPORTO INCREMENTALE : DIFFERENCE QUOTIENT)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{definito almeno } \forall h \in (-r, r) \setminus \{0\}$$

Geometricamente è il rapporto tra l'incremento della x ($x_0 + h - x_0$) e il corrispondente incremento della y



Coincide con il coeff. angolare della retta AB.

Def. (Derivata) Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è reale il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In tal caso il limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con una notazione a scelta tra

$$f'(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

Geometricamente : $f'(x_0)$ è il coeff. ang. della retta tangente al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$.

Tale retta ha equas.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Def. (Differenziabile) Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un numero reale α tale

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Prop. Se f è diff. in x_0 , allora α è unico.

Dim Supponiamo ce ne siano 2, cioè α_1 e α_2 . Allora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha_1 h + o(h)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha_2 h + o(h)$$

Sottraendo ottengo

$$\cancel{f(x_0)} + \alpha_1 h + o(h) = \cancel{f(x_0)} + \alpha_2 h + o(h)$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) h = o(h) \quad \text{Ho usato che } o(h) - o(h) = o(h)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{o(h)}{h}$$

↓
0

Ma allora $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Teorema Solito setting.

Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è diff. in x_0

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim Derivabile $\Rightarrow$ Differenziabile

H_p: esiste $f'(x_0)$ come limite del rapp. incr.

Th: vale la def. di diff. con $\alpha = f'(x_0)$, cioè

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

il che è equiv. a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \rightarrow 0$$

↓
 $f'(x_0) - f'(x_0)$

Diff. $\Rightarrow$ Deriv

H_p: $f(x_0+h) = f(x_0) + d h + o(h)$

Th: $f'(x_0) = d$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d h + o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} d + \frac{o(h)}{h} = d.$$

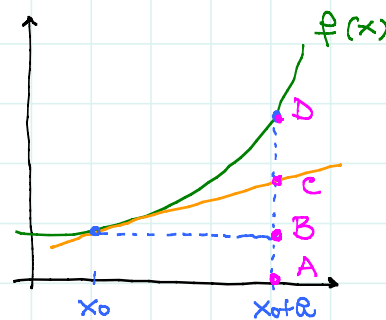
↑
uso
H_p
— o — o —

Finestra sul futuro Da AM2 in poi, le due definizioni non sono più equivalenti, e per molte cose il differenziale è meglio.

Interpretazione geometrica

$$f(x_0+h) = f(x_0) + d h + o(h)$$

$$AD = AB + BC + CD$$



Questo ci dice che $f(x_0+h)$ è somma di

- un termine costante $f(x_0)$
- un termine lineare in h BC (se dimezzo h , dimezzo BC)
- un termine che tende a 0 per $h \rightarrow 0$, ma più velocemente.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^2$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

2° modo $f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = x_0^2 + \boxed{2x_0}h + h^2$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x_0)$ $2x_0$ $o(h)$

Esempio 2 $f(x) = x^3$

2° modo $f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + \boxed{3x_0^2}h + 3x_0h^2 + h^3$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x_0)$ $3x_0^2$ $o(h)$ $o(h)$

Oss. Allo stesso modo faccio $f(x) = x^n$ con $n \geq 1$ interoEsempio 3 $f(x) = e^x$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} = e^{x_0}$$

$\downarrow$
 1

2° modo $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h$ uso sviluppo

$$= e^{x_0} (1 + h + o(h))$$

$$= e^{x_0} + \boxed{e^{x_0}}h + o(h)$$

$\uparrow$
 $2x_0$

Esempio 4 $f(x) = \log x$

2° modo $f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right]$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \\ \text{con } t = \frac{h}{x_0}$$

$$= \log x_0 + \frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)$$

$\uparrow$ $\frac{1}{x_0} \cdot h$ $\uparrow o(h)$
 $f(x_0)$

Esempio 5 $f(x) = \sin x$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$

$\nearrow \sin \alpha - \sin \beta = \dots$
 $\searrow \sin(x_0+h) = \dots$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_1 + \sin x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h^2}}_{-\frac{1}{2}} h \right\} = \cos x_0$$

2° modo $f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$

$$= \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \underbrace{\cos x_0}_{\uparrow x} \cdot h + o(h)$$

Morale Alla fine

- limiti notevoli
 - sviluppi
 - derivate delle funzioni elementari
- Sono 3 facce della stessa medaglia.

Teorema f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

Dim $f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_0$

Quindi $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Con il cambio di variabili $x = x_0+h$ diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{v}$$

— o — o —

ANALISI

1

-

LEZIONE 026

Note Title

22/10/2025

Strumenti per il calcolo di derivate :

- uso della definizione (con esemmi)
- tabellina di derivate funzioni elementari (dim. con definizione)
- teo. algebrici
- Derivata composizione
- Derivata funzione inversa

TEO. ALGEBRICI

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Derivata somma

solito setting per f e g

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in x_0 .

Allora la somma $s(x) = f(x) + g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim

1° modo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2° modo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Sommo:

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{S(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{S(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]h}_{S'(x_0)} + o(h)$$

Derivata prodotto ...Allora il prodotto $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ è deriv. in x_0 e

$$p'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Dim **1° modo**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

Termine misto! Uno qualunque!

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{f(x_0+h)}_{\substack{\downarrow \\ f(x_0) \\ \uparrow \\ \text{Qui ho usato la continuità in } x_0.}} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}} + g(x_0) \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}} \right\}$$

$$\text{2° modo} \quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Moltiplico:

$$\begin{aligned} f(x_0+h)g(x_0+h) &= f(x_0)g(x_0) \leftarrow p(x_0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad p(x_0+h) \\ &\quad + (f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0))h \leftarrow h \cdot p'(x_0) \\ &\quad + o(h) \leftarrow \text{tutti gli altri 6 termini} \\ &\quad \text{finiscono qui} \end{aligned}$$

Derivata del reciproco ...

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$.

Allora $q(x) = \frac{1}{f(x)}$ è definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 e vale

$$q'(x_0) = - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Dim Se $f(x_0) \neq 0$, allora per permanenza del segno $f(x) \neq 0$ almeno in un piccolo intorno di x_0 , quindi $q(x)$ ha senso. A quel p.to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h}}_{-f'(x_0)} \underbrace{\frac{1}{f(x_0+h)f(x_0)}}_{\frac{1}{f(x_0)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Corollario} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' \\ &= f' \cdot \frac{1}{g} - f \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

$$\text{Esempio} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{Esempio} \quad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = - \frac{n x^{n-1}}{(x^n)^2} = - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}}$$

FUNZIONE COMPOSTA

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

... saltati un po' di preliminari...

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e g sia derivabile in $f(x_0)$. Allora $c(x) = g(f(x))$ è deriv. in x_0 e vale la formula di sopra

Quasi dimostrazione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0+h) - c(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

" $\downarrow f'(x_0)$

$$\frac{g(f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

chiamo k il denominatore e osservo che $k \rightarrow 0$ e la frazione è

$$\frac{g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))}{k} \rightarrow g'(f(x_0))$$

Il problema è che c'è una potenziale divisione per 0.

Due vie d'uscita in futuro

→ estensione del rapp. increment.

→ lemma della SOTTO-SOTTO.

FUNZIONE INVERSA

Sia g l'inversa di f .

Allora sotto certe ipotesi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

NON DIMOSTRAZIONE

$$f(g(x)) = x$$

Derivo:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \rightsquigarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Oss. Anchebbe bene **SE** sapessi che g è derivabile.

Esempio 1 $g(x) = \log x$ $f(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 $g(x) = \arctan x$ $f(x) = \tan x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$\uparrow$
 $\arctan$

Esempio 3 $g(x) = \arcsin x$ $f(x) = \sin x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\uparrow$
lez. sulle funz. trigo inverse

Esempio 4 $\cos(x^3) = f(x)$ $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$
 $\cos^3(x) = f(x)$ $f'(x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \log(\sin x)}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \cdot \log(\sin x)} \cdot (\cos x \cdot \log(\sin x))'$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \left\{ -\sin x \cdot \log(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \right\}$$

Analogamente $(a^x)' = \underbrace{(e^{x \log a})'}_{\text{0}} = \underbrace{a^x}_{\text{0}} \underbrace{\log a}_{\text{0}}$ $(x^a)' = (e^{a \log x})' = a x^{a-1}$

ANALISI 1 - LEZIONE 027

Note Title

27/10/2025

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con } x_0 \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{anche } x_0^+ \text{ e } x_0^-)$$

Teorema misterioso Consideriamo un limite come sopra.

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite f e g , esistenza delle derivate, possibilità di dividere)(ii) il limite sia una forma indecisa $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *basta su reattori il denum.*
cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\text{oppure } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \quad (\text{gli eventuali segni - si portano fuori})$$

(iii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{prime 3 possibilità})$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \leftarrow \text{stesso } l$$

Uso operativo Devo fare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e non sono capace.Controllo che sia del tipo previsto e provo a fare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ① Se questo esiste in $\bar{\mathbb{R}}$, allora $\checkmark$

② Se questo non esiste, allora BOH

③ Se è ancora indecisa, posso iterare e calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ e così via

Non esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

NO! Non è una forma indeterminata!!

In realtà non esiste perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$

Non esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$

↑
è una forma
indet. $\frac{+\infty}{+\infty}$

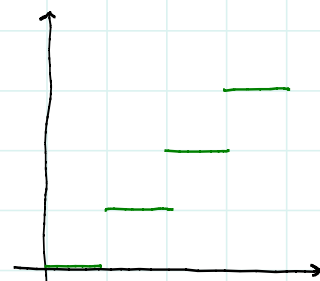
NO! Se non esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora BOH

In realtà il limite è uguale a 2 perché

$$\frac{2x-1}{x} \leq \frac{2x+\sin x}{x} \leq \frac{2x+1}{x} \quad \text{e ora carabinieri}$$

Non esempio 3 Sia $f(x)$ la parte intera di x ,
che supponiamo definita in $(0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.

Osservo che $f'(x) = 0$ in tutti i p.ti in cui
 f è definita. Allora



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = 0$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$

D'altra parte $\frac{x-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{x}$ e quindi per i Carabinieri
tende a 1.

NO! Se faccio il limite per $x \rightarrow +\infty$, f e g devono essere definite
almeno in una semiretta, se lo faccio a 0^+ devono essere definite
almeno in $(0, \delta)$ con $\delta > 0$, e così via.

Utilità pratica per il calcolo di limiti : 3%

Le funzioni derivando "peggiorano", quindi uno rischia di trovarsi limiti più complessi.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $+\infty \cdot 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[0/0] \sim \text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

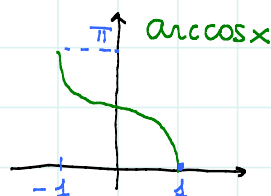
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Alternativa: Uso che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$.
Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \arctan \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ $0/0 \sim \text{H\^op}$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-x+2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$$

n.B. Questo ci dice che

$$\arccos(1-x) \sim \sqrt{2x}$$

$$\arccos(1-x) = \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$$

(per $x \rightarrow 0^+$)

Alternativa: $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

$y = \arccos(1-x) \quad y \rightarrow 0^+$
 $\cos y = 1-x \quad x = 1 - \cos y$

Diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt{1 - \cos y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{y^2}{1 - \cos y}} = \sqrt{2} \quad \text{c}$$

L'ESEMPIO $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2}$

1° modo: limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1 + 1 - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} = \frac{x \left(\overset{1}{\frac{e^x - 1}{x}} + \overset{\frac{1}{2} \cdot 0 = 0}{\frac{1 - \cos x}{x^2} x} - \overset{-1}{\frac{\sin x}{x}} \right) + x^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1$$

NO! Non si fanno i limiti metà per volta!!!

2° modo: equiv. asintotica $e^x \sim 1+x$ $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
 $\sin x \sim x$

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{OPS}$$

NO!! Non si usa l'equivalenza asintotica!!

3° modo: De L'Hôpital È del tipo $\frac{0}{0}$, quindi ok

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x + 2x}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ [\frac{0}{0}] \sim \text{Hôp}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x + \sin x + 2}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \quad \text{DOPPIO OPS}$$

Oss. Se uno metteva o piccolo, nel secondo modo se ne accorgeva

$$\frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} - o(x) + x^2}{x^2}$$

Quello che resta è $\frac{o(x)}{x^2} = \frac{o(x)}{o(x)}$ quindi BOH

Oss. Posso calcolare limiti tipo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ??$

NO! CIRCULAR REASONING!

Servirebbe che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, ma per dim. abbiamo usato il limite notevole!

ANALISI 1 - LEZIONE 028

Note Title

27/10/2025

TAYLOR - McLAURIN Setting : $f(x)$ funzione definita in un intorno di 0
 n intero positivo

Problema : trovare un polinomio $P_n(x)$, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Resto di PEANO

Brutale: voglio approssimare $f(x)$ con un polinomio pagando come resto $o(x^n)$. È inutile considerare gradi $> n$ perché quei termini sarebbero mangiati da o piccolo.

Lemma Se P_n esiste, allora è unico.

Dim Supponiamo ce ne siano due

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) = \hat{P}_n(x) + o(x^n)$$

Facciamo la differenza:

$$P_n(x) - \hat{P}_n(x) = o(x^n)$$

Supponiamo che $P_n(x) - \hat{P}_n(x)$ non sia il polinomio nullo.

Allora avrà un termine di grado minimo

$$o(x^n) = P_n(x) - \hat{P}_n(x) = a_k x^k + \dots \quad \text{con } 0 \leq k \leq n$$

Divido per x^k e passo al limite per $x \rightarrow 0$. Viene $0 = a_k$ che è assurdo.

Teorema misterioso (Taylor - Peano)

Sia $\delta > 0$ e sia $f: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) f sia derivabile almeno $n-1$ volte in $(-\delta, \delta)$

(ii) f sia derivabile n volte in $x=0$ (se è derivabile anche altrove, allora meglio)

Allora il P_n esiste ed è dato dalla seguente formula:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$f^{(k)}$ = derivata k -esima di f .

Oss. Il teorema è una condizione SUFFICIENTE ma non necessaria.

Esistono funzioni che hanno $P_0(x)$, e anzi li hanno per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma non hanno nemmeno $f''(0)$.

Oss. Nel caso $n=1$ diventa

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

cioè la def. di differenziale

Nel caso $n=0$ diventa $f(x) = f(0) + o(1)$

cioè la continuità di f in $x=0$.

Oss. Ogni $P_{n+1}(x)$ si ottiene da $P_n(x)$ aggiungendo un termine.

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (\text{senza fattoriali})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{senza fattoriali})$$

$$(1+x)^a = 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{1}}}{ax} + \frac{a(a-1)}{2!} \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{2}}} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{3}}} x^3 + \dots$$

(una specie di binomiale con a reale)

Oss. Se f è pari, lo sviluppo ha solo potenze pari
 " dispari " dispari

Dim. Basta osservare che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa, e le funzioni dispari fanno o il 0.

Esempio $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} &= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Esercizio

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

OK Taylor con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

OK Taylor con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

NO: manca $\frac{x^5}{120}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$

OK! (ma BUFFA)
(o piccolo mangia $\frac{x^3}{6}$)

$$\sin x = x - 257 x^3 + o(x^2)$$

OK come sopra

VERIFICA SVILUPPI

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \leadsto f^{(k)}(0) = 1 \leadsto \frac{1}{k!} x^k$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x$$

e così via mod 4

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

Mettendo $x=0$ trovo 0, 1, 0, -1, e così via(0 sui k pari, e ± 1 alternati sui k dispari)

$$f(x) = \cos x$$

Stessa cosa

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Sembra ragionevole che

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

(no facile induzione)

Quindi in $x=0$ $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$
e quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$f(x) = (1+x)^a$$

$$f^{(1)}(x) = a(1+x)^{a-1}$$

$$f^{(2)}(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

$$f^{(3)}(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$$

e così via.

Casi speciali

$$a = -1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\binom{a}{1} = \frac{-1}{1} = -1, \quad \binom{a}{2} = \frac{-1 \cdot (-2)}{2!} = 1, \quad \binom{a}{3} = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)}{3!} = -1$$

Se al posto di x metto $-x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Se al posto di x metto x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

→ Da questa deduco le derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ calcolate in $x=0$

→ Da quelle deduco le derivate di $\arctan x$ in $x=0$

→ Dalle derivate trovo lo sviluppo di $\arctan x$

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 029

Note Title

28/10/2025

Taylor con centro in un p.to qualunque

Setting: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Allora sotto certe ipotesi esiste un polinomio P_n , di grado $\leq n$, t.c.

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

o equivalentemente

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Condizioni sufficienti affinché avvenga sono che

- f è derivabile $n-1$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- f è derivabile almeno n volte almeno in x_0

In tal caso il polinomio è dato da

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

da cui

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Dim. Si deduce da quello con centro $x_0 = 0$ semplicemente considerando $g(h) := f(x_0 + h)$.

Basta osservare che

$$g^{(k)}(h) = f^{(k)}(x_0 + h) \quad (\text{per induzione})$$

Lo sviluppo di $g(h)$ con centro in 0 diventa lo sviluppo di f con centro in x_0 .

— o — o —

OPERAZIONI CON I POLINOMI DI TAYLOR

Per semplicità $x_0 = 0$

SOMMA-DIFFERENZA

$$f(x) = P_m(x) + o(x^m)$$

$$g(x) = Q_m(x) + o(x^m)$$

Allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_m(x) + o(x^m)$$

Basta sommare e ricordare che $o(x^m) + o(x^m) = o(x^m)$.Achtung! $x^4 = o(x)$ $x^3 = o(x)$ ma $x^4 \neq x^3$

PRODOTTO PER UNA COSTANTE

$$\lambda f(x) = \lambda P_m(x) + o(x^m)$$

PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

$$f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_m(x) + o(x^m)$$

↑ Nel calcolare il prodotto,
posso limitarmi ai termini
di grado $\leq m$

$$\text{Dim} \quad f(x) \cdot g(x) = [P_m(x) + x^m \omega_1(x)] [Q_m(x) + x^m \omega_2(x)]$$

$$= P_m(x) \cdot Q_m(x) + P_m(x) \cdot x^m \cdot \omega_2(x) \\ + Q_m(x) \cdot x^m \omega_1(x) + x^{2m} \omega_1(x) \omega_2(x)$$

$$= P_m(x) \cdot Q_m(x) + x^m \left\{ P_m(x) \omega_2(x) + Q_m(x) \omega_1(x) \right. \\ \left. + x^m \omega_1(x) \cdot \omega_2(x) \right\}$$

$\omega_3(x) \rightarrow 0 \quad \ddot{}$

Esempio 1 Taylor di ordine 5 di $\sin x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\end{aligned}$$

volendo posso sommare i termini,

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Caso semplice 1 $f(ax) = P_n(ax) + o(x^n)$

Caso semplice 2 $f(ax^b) = P_n(ax^b) + o(x^{bm}) \quad b > 0$

Dim $f(ax^b) = P_n(ax^b) + (ax^b)^m w_1(ax^b)$
 $f(x) = P_n(x) + x^n w_1(x)$

$$\begin{aligned}&= P_n(ax^b) + x^{bm} \boxed{a^m w_1(ax^b)} \\ &= w_3(x) \rightarrow 0 \quad (\text{qui serve } b > 0)\end{aligned}$$

Esempio 2 $\sin(2x)$ con $m=5$ $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5)$

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x - \frac{1}{6} \cdot 8x^3 + \frac{1}{120} 32x^5 + o(x^5) \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \quad (\text{deve essere il doppio dell'esempio 1})\end{aligned}$$

↑
posso mettere
 $o(x^6)$

Esempio 3 $\sin(x^3)$ con $m=14$ 1° modo: 14 derivate

2° modo: $\sin(x^3) = x^3 - \frac{1}{6}x^9 + o(x^{14})$
 $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3$ ↑ il termine succ. è x^{15}

COMPOSIZIONE VERASe $f(0)=0$, allora

$$g(f(x)) = Q_m(P_m(x)) + o(x^m)$$

Avrebbe grado m^2 , ma
posso limitarmi ai
termini di grado $\leq m$

Dim

$$g(f(x)) = Q_m(f(x)) + (f(x))^m \omega_2(f(x))$$

$$g(y) = Q_m(y) + y^m \omega_2(y)$$

Spero 2 cose: $(f(x))^m \omega_2(f(x)) = o(x^m)$

$$Q_m(f(x)) = Q_m(P_m(x)) + o(x^m)$$

Prima speranza:

$$x \cdot R_m(x) \text{ perché } f(0)=0$$

$$(f(x))^m \omega_2(f(x)) = [P_m(x) + x^m \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))$$

$$= [x R_m(x) + x^m \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))$$

$$= x^m [R_m(x) + x^{m-1} \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))$$

$\omega_3(x) \rightarrow 0$

Seconda speranza: è vera e basta dimostrarla usando il binomio di Newton.

$$[f(x)]^k \stackrel{?}{=} [P_m(x)]^k + o(x^m)$$

$$[f(x)]^k = [P_m(x) + x^m \omega_1(x)]^k \quad \leadsto \text{binomio di Newton}$$

$$= [P_m(x)]^k + x^m \cdot \underbrace{\text{roba}}_{\hookrightarrow 0 \text{ perché ha dentro } \omega_1(x)}$$

$$= [P_m(x)]^k + o(x^m)$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 030

Note Title

28/10/2025

Def. (Parte principale) Se accade che, per $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \sim ax^b$$

o equiv.

$$f(x) = ax^b + o(x^b)$$

se $b > 0$, si dice ordine di infinitesimo

si dice che ax^b è la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Moralmente: la parte principale è "chi comanda"

Esempio 1 $f(x) = \sin x - \arctan x$

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

parte principale

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{e^{x^3} - 1}$

$$\text{Num} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\text{Den} = x + x^3 + o(x^3) - x = x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \text{raccolgo } x^3 \dots \rightarrow \frac{1}{6}$$

Oss. Sono entrati in gioco i termini cubici di $\sin x$ e $\arctan x$ quindi

→ non si poteva fare con i limiti notevoli

→ con Hôp servivano 3 passaggi.

Esempio 2 bis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{e^{x^3} - 1 + \underbrace{\sqrt{x} \log(1 + x^3 \sqrt{x})}_{o(x^4)}}$

Non è cambiato nulla rispetto a prima ☺

Esempio 3 $(\sin x)^3$ ordine $n = 5$

$$\begin{aligned} (\sin x)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^3 \\ &= x^3 + \underbrace{3 \cdot x^2 \left(-\frac{x^3}{6} \right)}_{\text{unico triplo prodotto che si salva}} + o(x^5) = x^3 - \frac{1}{2} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Esempio 4 $f(x) = (\sin x)^3$. Calcolare $f^{(5)}(0)$.

1° modo: farlo

2° modo: $P_5(x) = \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 - \frac{1}{2} x^5 \quad \leadsto \quad f^{(5)}(0) = -\frac{1}{2} \cdot 5! = -60$

Esempio 5 (Occhio a questo) $\sin(x+x^3)$ con $n=3$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \dots \quad \sin(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3)$$

no!!! Ho sostituito $x+x^3$ solo alla prima t e non a t^3

$$\begin{aligned} \sin(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{6} (x+x^3)^3 + o(x^3) \\ &= x+x^3 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{5}{6} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Esempio 6 $f(x) = \cos(\sin x)$ $n=4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + \underbrace{o((\sin x)^4)}_{o(x^4)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \dots$$

$$\uparrow$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2(x) \left(-\frac{x^3}{6}\right)$$

Doppio prodotto

Esempio 7 $\sin(\cos x)$ $n=3$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \quad \sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + o((\cos x)^3)$$

NO!!! Cioè sì, quello che ho scritto è giusto, ma non è vero che $o((\cos x)^3) = o(x^3)$. Posso solo dire che è $o(1)$, ma così serve a poco.

Il problema è che la funzione dentro NON tende a 0.

Esempio 8 $f(x) = e^x$ $n=3$ $x_0 = 2$ ← p.to staz.

1° modo: calcolo le derivate

2° modo $e^{2+h} = e^2 \cdot e^h = e^2 \cdot \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right) = \dots$

Esempio 9 $f(x) = \log x$ $n=3$ $x_0=2$

Non fare cose creative tipo

$$\log x = \log(1+(x-1)) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \dots$$

No! $x-1$ NON sta tendendo a 0 !!!

$$\log(2+h) = \log\left[2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= \log 2 + \log\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

sta tendendo a 0 :)

$$= \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)$$

Back to esempio 7 $f(x) = \sin(\cos x)$ $n=3$

Devo sviluppare $\sin x$ con $x_0=1$

$$\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2}h^2\right) + \cos 1 \left(h - \frac{1}{6}h^3\right) + o(h^3)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot h - \frac{1}{2} \sin 1 \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cos 1 \cdot h^3 + o(h^3)$$

$$\sin(\cos x) = \sin\left(\underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}_{h \rightarrow 0}\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3)$$

(quando calcolo h^2 e h^3 vengono tutti terminati da x^4 in poi)

Oss. Nello sviluppare $\sin(1+h)$ potevo fermarmi al termine in h

Esempio 10 $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ Come si comporta per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x \sin x} \\ &= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{6}x + o(x) \end{aligned}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3 \omega_1(x)}{x^2 + x^3 \omega_2(x)} &= \frac{x^3}{x^2} \frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} \\ &= x \frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} \\ &= \frac{1}{6}x + x \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} - \frac{1}{6} \right]}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Esempio 11 $f(x) = (1 + \sin x)^x$ $n=3$

$$\begin{aligned} (1 + \sin x)^x &= e^{x \log(1 + \sin x)} = e^{x \log\left(1 + \overbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}^{t \rightarrow 0}\right)} \\ &= e^{x \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \dots \right]} \\ &= e^{x \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) + \dots} = e^{x^2 - \frac{1}{2}x^3} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ANALISI 1

-

LEZIONE 31

Note Title

29/10/2025

FUNZIONI IPERBOLICHEPer ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

↑
sempre $\neq 0$

Simmetria

$\sinh$ è DISPARI così come $\tanh x$
 $\cosh$ è PARI

Nessuna di queste funzioni è PERIODICA

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

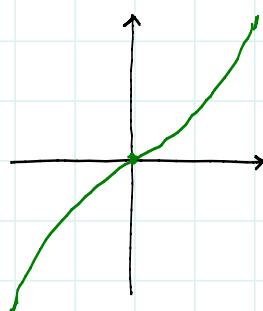
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$$

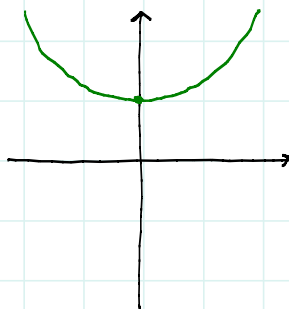
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$

↑
è come fosse
 $\frac{e^x}{e^x}$

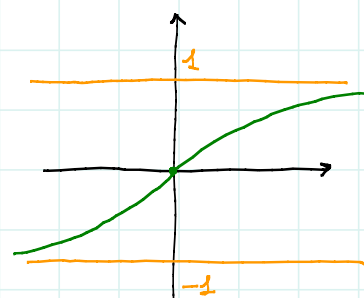
Grafici $\sinh x$

(strett. cresc.)

↑
 e^x cresce
 e^{-x} decresce

 $\cosh x$

strett. cresc. sui
positivi

 $\tanh x$

strett. cresc.
ovunque

Quadrati

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Se le sommo :

$$\sinh^2 x + \cosh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Forme duplicazione
della trigonometria
iperbolica

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

Sottraendo i quadrati :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Relazione fondamentale

Oss. Si possono fare allo stesso modo

- le formule di addizione / sottrazione
- le formule product to sum
- le formule sum to product

Derivate

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

↑
segno +

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Taylor $\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Oss. $\sin x$ si prende la parte dispari di e^x
 $\cos x$ " " pari "

Ovviamente

$$\sin x + \cos x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Due possibili d'iu. del Taylor

① Calcolo le derivate in 0 e scopro che sono 0-1 alternati

② Lo deduco da e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

poi sommo o sottraggo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

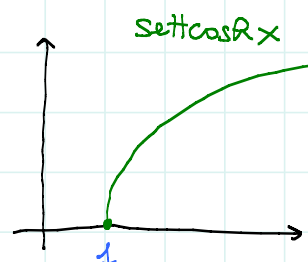
Funzioni inverse

① $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva, quindi ha inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che si chiama

Sett $\sin x$
 $\uparrow$
 settore

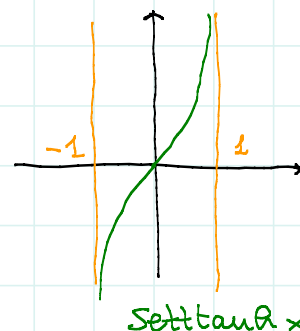
② $\cos : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è bigettiva, quindi

Sett $\cos : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



[3] $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ è bigettiva, quindi

$$\operatorname{Settanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$



Esercizio Trovare formula esplicita per $\operatorname{Settcosh}$

Devo risolvere $\cosh x = y$, cioè dato $y \geq 1$ devo trovare l'unico $x \geq 0$ che risolve l'equazione

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \leadsto e^x + e^{-x} = 2y \leadsto \text{pongo } e^x = z \text{ e diventa}$$

$$z + \frac{1}{z} = 2y, \text{ cioè } z^2 - 2yz + 1 = 0 \leadsto \text{risolvo in } z$$

$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Questo è ≥ 0 perché $y \geq 1$:

Osservo che i due valori di z sono positivi, e sono uno ≥ 1 e uno ≤ 1 (il loro prodotto è = al termine noto dell'eq., cioè 1).

Dovendo essere $z = e^x$ con $x \geq 0$, prendo lo z più grande, quindi

$$y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Per trovare x basta fare il logaritmo.

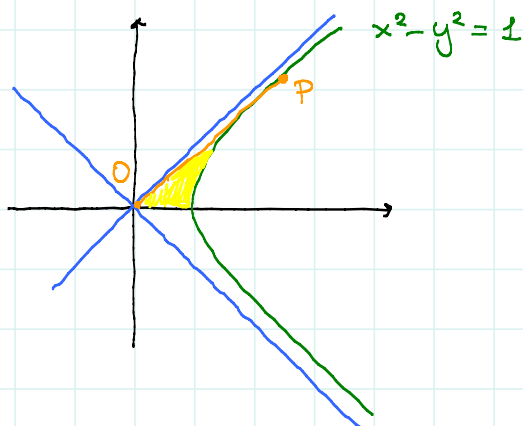
Conclusione:

$$\operatorname{Settcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Oss. Se usavo l'altro z , cioè $z = y - \sqrt{y^2 - 1}$, veniva la stessa cosa con il segno cambiato.

Questo perché il prodotto dei due z è 1, e quindi la somma dei loro log è 0.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Fatto misterioso : per ogni $\alpha \geq 0$ esiste un pto P sulla parte alta dell'iperbole tale che il settore compreso tra la retta OP e il ramo di iperbole abbia area $\frac{\alpha}{2}$

Allora le coordinate di P sono

$$(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

Oss. La relazione fondamentale è l'appartenenza all'iperbole

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

Finestra sul futuro

Le rotazioni iperboliche saranno tra le trasformazioni ortogonali rispetto ad un prodotto scalare di segnatura $(1,1)$.

Seconda finestra

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh x$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos(ix) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \cosh(x)$$

ANALISI 1

-

LEZIONE 32

Note Title

29/10/2025

Esercizio 1 $f(x) = \tan x$ Taylor con $n=5$ ($n=6$)

1° modo: simpatiche derivate

$$\begin{aligned} \text{2° modo: } \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^{-1}}_{(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots} \end{aligned}$$

$$= \left(\dots \right) \left(\underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}_{-t} + \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{+t^2} + o(x^5) \right)$$

ora moltiplico e salvo i termini di grado ≤ 6 .

3° modo: lo sviluppo sarà $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$

Ora sappiamo che $\arctan(\tan x) = x$

Sviluppo a sx

$$\arctan(\tan x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + o(x^5)$$

$$= x + ax^3 + bx^5 - \frac{1}{3} (\dots)^3 + \frac{1}{5} (\dots)^5 + o(x^5)$$

$$= \cancel{x} + ax^3 + bx^5 - \frac{1}{3} (x^3 + 3ax^5) + \frac{1}{5} x^5 + o(x^5) = \cancel{x}$$

Impongo che i coeff. di x^3 e x^5 se ne vadano

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b - a + \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Esercizio 2 Ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di

$$\begin{aligned}
 & (1+x)^{\frac{1}{x}} - e \\
 & e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} - e = e^{\frac{1}{x} (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} - e \\
 & = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e \\
 & = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} - e = e \left(e^{\overbrace{-\frac{x}{2} + o(x)}^{t \rightarrow 0}} - 1 \right) \\
 & = e \left(\cancel{1} - \frac{x}{2} + o(x) - \cancel{1} \right) = -\frac{e}{2} x + o(x)
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 $n^2 \left(1 - \operatorname{arctan} \frac{1}{n} \right) \quad + \infty \quad (1-1)$

Posso porre $x = \frac{1}{n}$ e passare alle funzioni. In alternativa sviluppo subito

$$\begin{aligned}
 n^2 \left(1 - \operatorname{arctan} \frac{1}{n} \right) &= n^2 \left(1 - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \right) \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad t \rightarrow 0 \quad \quad \quad t - \frac{1}{3} t^3 + o(t^4) \\
 &= n^2 \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \quad \ddot{}
 \end{aligned}$$

Esercizio 3 $\frac{2 \cos n - 2 + n^2}{n^4} \quad [\text{Il limite fa banalmente } 0]$

$$\frac{2 \left(1 - \frac{n^2}{2} + \frac{n^4}{24} \right) - 2 + n^2}{n^4} = \frac{\cancel{2} - \cancel{n^2} + \frac{n^4}{12} - \cancel{2} + \cancel{n^2}}{n^4} \rightarrow \frac{1}{12}$$

NO!! NO!! $n \rightarrow +\infty$, quindi NON posso sviluppare

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2 x) - x^2}{\sin^2(\tan^2 x) - x^5} = -\frac{5}{6}$

Vedo che al denomi. $\sin^2(\tan^2 x) \sim x^4$, e $x^5 = o(x^4)$

Denominatore = $x^4 + o(x^4)$ (qui basta sapere gli sviluppi)

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) &= \underbrace{x^2 - \frac{1}{3}x^4}_t - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ \log(1+t) &\quad -\frac{1}{2}t^2 \\ &= x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Numeratore: $-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$.

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}{1 - \cos x + x^4} = -\frac{4}{9}$

Denominatore = $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + o(x^2) \\ &\quad \binom{\alpha}{1} \quad \binom{\alpha}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Numeratore} = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{9}x^2 + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{9}x^2 - 2 + o(x^2) = -\frac{2}{9}x^2 + o(x^2)$$

Esercizio 6 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ parte principale per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n} &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \\ &\quad \uparrow t \rightarrow 0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 7 $f(x) = \frac{3+x^2}{2+x}$ Taylor con $x_0=1$ e $n=3$

$$f(1+t) = \frac{3+(1+t)^2}{2+1+t} = \frac{4+2t+t^2}{3+t} = \frac{1}{3} (4+2t+t^2) \left(1+\frac{t}{3}\right)^{-1}$$

$\uparrow t \rightarrow 0$

$$= \frac{1}{3} (4+2t+t^2) \left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + o(t^3)\right) = \text{moltiplico e salvo solo...}$$

$1 - t + t^2 - t^3$

Esercizio 8 Parte principale di $\frac{n^3+5}{n^3-2} - \sqrt[n]{4}$ $1-1=0$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{5}{n^3}\right) \left(1-\frac{2}{n^3}\right)^{-1} - e^{\frac{1}{n} \log 4} &= \cancel{1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1} - \frac{1}{n} \log 4 + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\quad \uparrow \text{solo alcuni } n^3 \\ &= -\frac{\log 4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1

-

LEZIONE 033

Note Title

03/11/2025

SERIE NUMERICHE (come sommare infiniti numeri)

Setting: succ. a_n $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = somma degli infiniti termini della successione

Def. Si introducono le somme parziali, definite da

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

↑ sommatoria finita

Per definizione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{(la serie converge ad } l \text{)} \\ +\infty & \text{(la serie diverge a } +\infty \text{)} \\ -\infty & \text{" " " } -\infty \\ \text{N.E.} & \text{(la serie è indeterminata)} \end{cases}$$

Esempi banali

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \quad a_n \equiv 0 \quad S_n \equiv 0 \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty \quad a_n \equiv 1 \quad S_n = \underbrace{n+1}_{\text{occhio che c'è anche } a_0} \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad a_n = (-1)^n \quad \text{Le somme parziali sono } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Quindi $S_n = 1$ se n è pari
 $S_n = 0$ se n è dispari

Quindi S_n non ha limite e la serie è indeterminata.

Oss 1 In maniera analoga si definisce $\sum_{n=35}^{+\infty} a_n$

L'unica variante è che $S_m = \sum_{k=35}^m a_k$ definita per $m \geq 35$

Oss 2 Siano a_n e $\hat{a}_n$ due successioni tali che

$$a_n = \hat{a}_n \text{ definitivamente}$$

Allora le due serie corrispondenti hanno lo stesso tipo di comportamento (se convergono, possono convergere a numeri diversi)

Dim Siano S_m e $\hat{S}_m$ le due somme parziali.

Se $a_n = \hat{a}_n$ per ogni $n \geq n_0$, allora esiste una costante M_0 tale che

$$S_m = \hat{S}_m + M_0 \quad \forall m \geq n_0$$

(da n_0 in poi la differenza rimane costante)

Quindi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \text{ si comporta come } \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{S}_m.$$

— o — o —

Due classi speciali di serie : $\rightarrow$ serie TELESOPICHE

$\rightarrow$ serie GEOMETRICHE

SERIE TELESOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Esperimenti: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Sembra ragionevole : $S_m = \frac{m}{m+1} \rightsquigarrow$ dim. per induzione
 $\rightsquigarrow$ la serie converge a 1

Oss. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{a_3} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{a_4} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$$

$$S_1 = a_1 = \log 2 - \log 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1 = \log 3 - \log 2 + \log 2 - \log 1$$

$$S_3 = a_3 + a_2 + a_1 = \log 4 - \log 3 + \log 3 - \log 2 + \log 2 - \log 1 = \log 4$$

Sembra ragionevole: $S_n = \log(n+1) \rightsquigarrow$ div. per involuzione
 $\rightsquigarrow$ la serie diverge a $+\infty$.

SERIE GEOMETRICHE $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$

A suo tempo abbiamo visto che

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{almeno se } a \neq 1)$$

$a > 1 \rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

$a = 1 \rightarrow$ è la somma di 1 $\rightsquigarrow$ diverge a $+\infty$

$-1 < a < 1 \rightarrow a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi la serie converge a $\frac{1}{1-a}$

$a = -1 \rightarrow$ la serie è indeterminata ($S_{2n} \rightarrow 1, S_{2n+1} \rightarrow 0$)

$a < -1 \rightarrow$ la serie è indeterminata ($S_{2n} \rightarrow +\infty, S_{2n+1} \rightarrow -\infty$)
 $\uparrow$
 num. $\rightarrow -\infty$ e denom. neg.

Riassunto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{converge} & \text{se } -1 < a < 1 \text{ e fa } \frac{1}{1-a} \\ \searrow \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Oss. Quanto fa $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$?

Pongo $a = 1+x$ e diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + (n+1)x + o(x) - \cancel{1}}{x} = n+1$$

che è la somma parziale nel caso $a = 1$.

Oss. Telescopiche e geometriche sono quasi le uniche serie per cui è possibile avere una formula esplicita per S_n .

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

SOMMA $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ QUASI

PRODOTTO PER COSTANTE $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SI

PRODOTTO $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ NULLA DI FURBO!!
 Nemmeno se ho solo due termini
 $a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

Dim somma Poniamo $c_n = a_n + b_n$. Chiamiamo S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle 3 serie.

Allora

$$S_m^c = S_m^a + S_m^b \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (\text{inclusione})$$

A questo punto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^c = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^a + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^b$$

con tutte le cautele del limite della somma

(va male il $+\infty - \infty$, e ci sono problemi quando i limiti non esistono)

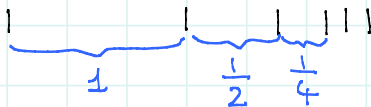
— o — o —

ANALISI 1

LEZIONE 034

Note Title

03/11/2025

Serie vs Zenone

Il tempo totale è $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ $\leadsto$ geometrica con $a = \frac{1}{2}$

$\leadsto$ converge a $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Come studio una serie senza una formula esplicita per S_n

CONDIZIONE NECESSARIASEGNO DEFIN. COSTANTE

- criterio della radice
- criterio del rapporto
- criterio del confronto
- criterio confronto asintotico
- * casi standard
- * casi limite

SEGNO VARIABILE

- LEIBNIZ
- Assoluta convergenza
- DIRICHLET

Condizione necessaria

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim Osservo che

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow l - l = 0$$

$\downarrow$
 l

$\downarrow$
 l

$\uparrow$
 qui serve che
 l sia reale

$- 0 - 0 -$

Oss. * Se a_n NON tende a 0 (cioè tende ad altro oppure non ha limite), allora la serie non può convergere.

Restano aperte 3 possibilità

* Se $a_n \rightarrow 0$, allora la serie può convergere, ma non è obbligata.

Restano aperte 4 possibilità

Prop Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora ci sono solo 2 possibilità per la serie

→ converge

→ diverge a $+\infty$

Dim La succ. S_n delle somme parziali è definitiv. debol. crescente, quindi per il teo. delle succ. monotone può solo tendere ad $l \in \mathbb{R}$ oppure a $+\infty$.

Esempio
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^3 + 4n - 1}{2n^3 - 75}}_{a_n} = +\infty$$

Basta osservare che $a_n \geq 0$ definitiv. e $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Perché $a_n \geq 0 \dots$ può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Manca la cond. nec., quindi non può convergere.

CRITERIO CONFRONTO Supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora valgono queste implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

Dim. Siano S_n^a e S_n^b le due somme parziali.

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ sia vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (posso farlo perché il comportamento non dipende da un numero finito di termini). Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \xRightarrow{\text{def.}} S_n^a \rightarrow +\infty \xRightarrow{\text{confronto per i limiti}} S_n^b \rightarrow +\infty \xRightarrow{\text{def.}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

(Finora non ho usato il segno costante)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \xRightarrow{\text{def.}} S_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{confronto già sapendo che } S_n^a \text{ ha limite, finito o infinito}} S_n^a \rightarrow l_1 \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{def.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

↑ Qui uso che $a_n \geq 0$

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definit. e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$.

Allora

- * se $l > 1$ la serie diverge
- * se $l < 1$ la serie converge
- * se $l = 1$, allora BOM.

Dim. Se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$, quindi addiz. cond. nec. quindi per forza diverge.

Se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi BOM per ora...

Come nella dim. del criterio della radice per i limiti, abbiamo che

$$\begin{array}{c} l \quad \frac{l+1}{2} \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ defiu.} \quad \text{cioè} \quad a_n \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

Osservo che b_n è una geom. con parametro $\in (0,1)$, quindi $\sum b_n$ converge.

Ma allora per confronto anche $\sum a_n$ conv.

CRITERIO RAPPORTO

... $a_n > 0$ definit. e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Allora ... stessa conclusione di prima.

Dim Se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ e quindi NO COND. NEC.

Se $l < 1$, allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ defiu.} \dots$$

$$a_{n+1} \leq \frac{l+1}{2} a_n \text{ defiu.}$$

diciamo per ogni $n \geq n_0$

$$\dots \quad a_n \leq a_{n_0} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} = \underbrace{a_{n_0} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}}_{\text{costante}} \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\substack{\text{geometrica} \\ \text{con parametro} \in (0,1)}}$$

Esercizio 1
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{25}}{2^n}$$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^{25}}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n + 6^n} = +\infty$$

$$a_n \sim \frac{7^n}{6^n} = \left(\frac{7}{6}\right)^n \rightarrow +\infty \text{ e quindi manca cond. nec.}$$

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$$

$a_n \rightarrow e$, quindi niente cond. nec. $\leadsto$ la serie diverge

Esercizio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \leadsto$ la serie converge

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{n \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1 + o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

[Un po' di esercizi veloci nel video]

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 035

Note Title

04/11/2025

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ defiu.(ii) $b_n > 0$ defiu.

(iii) esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} l \neq 0 \\ l \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora le due serie si comportano allo stesso modo, cioè

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum b_n \text{ converge} \quad (\text{il valore della somma può essere diverso})$$

Dim Dall'ipotesi (iii) segue che

$$\frac{l}{4} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 4l \quad \text{definitivamente}$$

Moltiplico per b_n (grazie a (ii)) e ottengo

$$\frac{l}{4} b_n \leq a_n \leq 4l b_n$$

① Se $\sum b_n$ converge, allora $\sum (4l b_n)$ converge, e per la disug. di dx e il confronto, anche $\sum a_n$ converge② Se $\sum b_n$ diverge, allora $\sum (\frac{l}{4} b_n)$ diverge, e per la disug. sx anche $\sum a_n$ diverge.

— o — o —

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$ e spero di trovare una $\sum b_n$ nota per cui $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0$ e $\neq +\infty$.

CASI LIMITE Ipotesi (i) e (ii) come sopra

① Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

Allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ defiu., cioè $a_n \geq b_n$ defiu., quindi

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

② Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

Allora $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defiu., cioè $a_n \leq b_n$ defiu., quindi

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

— o — o —

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro

(armonica vera
è con $a=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$

La sua amica è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} = \text{stessa cosa} = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$

Ci sono almeno 3 dimostrazioni

- via condensazione di CAUCHY
- via disuguaglianze AD HOC
- via confronto serie-integrali

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ defn.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ defn. (debolm. dec.)

(iii) $a_n \rightarrow 0$ (civtile)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

↑
solo i termini il cui
indice è una potenza di 2

Applicazione Caso in cui $a_n = \frac{1}{n^a}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n \text{ converge}$$

L'ultima è una geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{2}{2^a} < 1$, il che accade se e solo se $a > 1$.

(Posso sostituire 2 con qualunque numero > 1)

Esercizio Provare a fare lo stesso con l'armonica, e generalizzare ad armoniche di ordine superiore.

Dim. condensazione L'idea è questa

$$\begin{array}{l} a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | a_7 | a_8 | a_9 | \dots | a_{16} | \dots \leftarrow \text{MIA SERIE} \\ a_0 | a_1 | a_2 | a_4 | a_4 | a_8 | a_8 | a_8 | a_8 | a_{16} | \dots | a_{16} | \leftarrow \text{PIÙ PICCOLA} \\ a_0 | a_1 | a_2 | a_2 | a_2 | a_4 | a_4 | a_4 | a_4 | a_8 | \dots | a_8 | \leftarrow \text{PIÙ GRANDE} \end{array}$$

Da questo segue che

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^m} a_k \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{m-1} 2^k a_{2^k}$$

si dim.
volendo per
inclusione

① Se $\sum 2^k a_{2^k}$ converge, quando $a \rightarrow \infty$ e allora $\sum a_k$ converge

② Se $\sum 2^k a_{2^k}$ diverge, quando $a \rightarrow \infty$ e allora $\sum a_k$ diverge.

— 0 — 0 —

Alternativa

Fatto 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ diverge

Faccio conf. asint. con $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log(1+\frac{1}{n})}_{b_n} \leftarrow$ telescopica e diverge

lim $\frac{a_n}{b_n} = 1$ (solito lim. notevole) $\neq 0$
 $\neq \infty$

Quindi si comportano allo stesso modo.

Subalternativa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_1 + \frac{1}{8} + \dots$$

Fatto 2 $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ se $a \leq 1$. Quindi $\sum \frac{1}{n^a}$ con $a < 1$ diverge per confronto.

Fatto 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{b_n}$ converge perché telescopica

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}$ la posso confrontare asintotico con la precedente.

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$, quindi si comportano allo stesso modo, quindi $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Fatto 4 Visto che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, allora converge pure

$$\sum \frac{1}{n^a} \text{ con } a \geq 2 \text{ perché } \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^2}$$

Resta scoperto il range $a \in (1, 2)$

Esercizio Idea $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ (esercizio per induzione)

Più in generale vale che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Dimostrarlo per induzione è quasi un esercizio

Domanda: come farsi venire in mente la stima $\frac{a}{a-1}$
che implica la conv. per ogni $a > 1$
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 036

Note Title

04/11/2025

Esercizio 1 $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2n^2-3}$

Brutale: $a_n \sim \frac{1}{n}$ quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$. Mi riduco a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0 \neq \infty$

NOTA BENE: $\frac{1}{n}$ è la parte principale di a_n

Esercizio 2 $\sum_{n=14}^{\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge

Brutale: $a_n \sim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ $3/2 > 1 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{a_n}$

Brutale: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} \Rightarrow a_n$ è a termini definitivamente ≤ 0 e converge come $\sum \frac{1}{n^3}$

Rigoroso: considero $b_n = \frac{1}{n^3}$. Faccio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$\uparrow$ $x = \frac{1}{n}$ $\uparrow$ Taylor

Questo mi dice che $\frac{a_n}{b_n} < 0$ definitivamente. Essendo $b_n > 0$ questo ci dice che $a_n < 0$ definitivamente. Porto il segno - fuori e concludo con il C.A. con $\frac{1}{n^3}$ ($\frac{1}{6} \neq 0$ e $\neq \pm \infty$)

Esercizio 4 $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(n^{\frac{1}{3}} - 1)}_{a_n \rightarrow 0^+}$

Brutale: $a_n \sim n^{\frac{1}{3}} - 1 = e^{\frac{1}{3} \log n} - 1 \sim \boxed{\frac{\log n}{n}}$ $\uparrow$ parte principale

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{\log n}{n}$. Faccio $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$

Quindi si comporta come $\sum \frac{\log n}{n}$ e questa diverge perché

$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$ defiu. (volendo è l'unica con $a = -1$)

Esercizio 5 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

Definitivamente $\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^5}$, quindi converge per confronto

Esercizio 6 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$

Precorso: $2^{\log n} = e^{\log n \cdot \log 2} = (e^{\log n})^{\log 2} = n^{\log 2}$

Più in generale: $\boxed{A^{\log B} = B^{\log A}}$

Quindi $\sum \frac{1}{2^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log 2}}$ e diverge perché $\log 2 \in (0, 1)$

(se c'era $3^{\log n}$ convergerebbe)

Esercizio 7 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

$\log$ qui è amico, perché $\frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2}$ defiu.

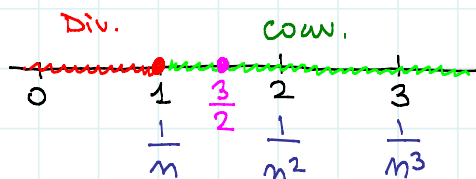
Quindi converge per confronto.

L'ESERCIZIO (#8)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{7/2}}{n^2}$$

→ esponenti

Ora log è amico!

Domanda: $(\log n)^{7/2}$ sposta $\frac{1}{n^2}$ abbastanza a dx oppure no?

I log sono deboli, quindi prob. NO. Come lo dimostro?

Faccio c.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Otengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{7/2}}{\sqrt{n}} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(potenza batte log)} \\ \uparrow \\ \text{caso limite} \end{array}$$

... quindi $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defiu... quindi $a_n \leq b_n$... $\sum b_n$ converge, quindi $\sum a_n$ converge.(invece di $3/2$ posso usare un esponente $a \in (1, 2)$)Fatto generale $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^b}{n^a}$ converge $\forall a > 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$ Oss. L'amica dell'armonica è un leggero spostamento a dx rispetto a $\frac{1}{n}$

Esercizio 9 $\sum_{n=5}^{\infty} \underbrace{[\log(n^4 - 5) - 4 \log n]}_{a_n}$

Brutale: $a_n = \log \left[n^4 \left(1 - \frac{5}{n^4} \right) \right] - 4 \log n$

$$= \cancel{\log(n^4)} + \log \left(1 - \frac{5}{n^4} \right) - \cancel{\log(n^4)} \sim -\frac{5}{n^4}$$

parte principale

↓

Quindi a_n è defn. negativa e (messo il $-$ fuori) la serie converge per C.A. con $\frac{1}{n^4}$

Esercizio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{n^{3a} + 5}{n + 7} \right)$

Brutale: $a_n \sim \sin^2 \left(\frac{1}{n^{1-3a}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ a > 0}}{\sim} \frac{1}{n^{2-6a}} \underset{\substack{\uparrow \\ a < \frac{1}{3}}}{\sim} \frac{1}{n^{2-6a}}$

Quindi converge $\Leftrightarrow 2-6a > 1 \Leftrightarrow 6a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{6}$

Oss. La cond. nec. è verificata $\Leftrightarrow 3a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3}$
 $\quad \quad \quad - \circ - \circ -$

ANALISI 1 -

LEZIONE 037

Note Title

05/11/2025

Serie a termini di segno variabile : $\rightarrow$ Leibnitz
 $\rightarrow$ Assoluta convergenza

CRITERIO DI LEIBNIZ (Aka serie a segno alterno)

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n$$

Supponiamo che

(i) $d_n \geq 0$ definitiv. (cioè la serie è a segni alterni)

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ definit. (deb. decr.)

(iii) $d_n \rightarrow 0$ (cond. nec.)

Allora la serie converge.

Oss. Se non sono verificate (i) e/o (ii), allora BOH

Se non è verificata (iii), allora di sicuro non converge (e restano aperte 3 possibilità)

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ è convergente}$$

CRITERIO ASSOLUTA CONV. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

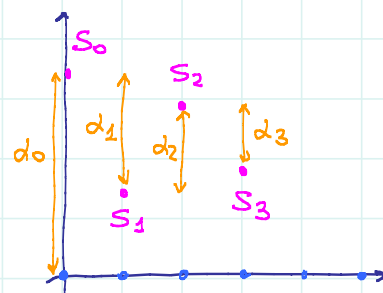
Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$. Provo a studiare $\sum |a_n|$.

$\rightarrow$ se converge, allora converge anche quella iniziale $\therefore$

$\rightarrow$ se diverge (e non può fare altro) allora BOH.

Per $\sum |a_n|$ ho a disposizione molti strumenti

Dim. Leibniz Idea: rappresentiamo le somme parziali nel piano cartesiano



Step 1 $S_{2m+2} \leq S_{2m}$ perché

$$S_{2m+2} = S_{2m} - \underbrace{d_{2m+1} + d_{2m+2}}_{\leq 0 \text{ per Hp 2}} \leq S_{2m}$$

Analogamente $S_{2m+3} \geq S_{2m+1}$ (sto assumendo wlog che (i) e (ii) valgano sempre e non solo defiu.)

Step 2 $S_{2m} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ ed $m \in \mathbb{N}$
(tutte le pari sono maggiori di tutte le dispari)

Caso 1: $m \geq n$ Allora $S_{2m} \geq S_{2m} \geq S_{2m+1}$
 $\uparrow$ step 1 $\uparrow$ $S_{2m+1} = S_{2m} - d_{2m+1}$

Caso 2: $m < n$ Allora $S_{2m+1} \leq S_{2m-1} \leq S_{2m}$
 $\uparrow$ "suddispari sale" $\uparrow$ " $S_{2m-1} + d_{2m}$ "

Step 3 La succ. S_{2m} è debolm. decr. e limitata inferiormente (perché $S_{2m} \geq S_1$). Per il teo. succ. monotone

$$S_{2m} \rightarrow l_1$$

Analog. S_{2m+1} è debolm. cresc. e limitata sup. ($S_{2m+1} \leq S_0$)

Per il teo. succ. monotone $S_{2m+1} \rightarrow l_2$ ($\leq l_1$)

Step 4 $l_1 = l_2$. Infatti

$$\begin{array}{ccc} S_{2m+1} = S_{2m} - d_{2m+1} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ l_2 \quad \quad l_1 \quad \quad 0 \end{array}$$

Questo basta per concludere che $S_m \rightarrow l_1 = l_2$
 $\uparrow$ tutta.

Lema delle 2 sottosucc. Se a_n ha due sottosucc. che

→ esauriscono tutti i termini

→ hanno lo stesso limite $l \in \mathbb{R}$

allora tutta la succ. tende allo stesso l .

Dim Basta prendere un "definitivamente comune"

Oss. → Vale anche con 2025 s. succ.

→ Vale se sono infinite (esercizio molto interessante) ?
— o — o —

Dim assoluta convergenza : sono possibili due strategie

→ usare la completezza dei numeri reali (vedi secondo semestre)

→ usare l'ordinamento (carabinieri per serie)

Lema (Carabinieri per serie) Siano a_n, b_n, c_n tre succ. tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{def.} \quad (\text{nessuna ipotesi di segno})$$

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano.

Allora $\sum b_n$ converge.

Dim **Step 1** $\sum (c_n - a_n)$ converge (differenza di due serie convergenti)

Step 2 $\sum (b_n - a_n)$ converge

Infatti

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

e quindi la conv. segue dal confronto a 2 tra serie a termini ≥ 0

Step 3 $\sum b_n$ converge

$$\sum b_n = \sum [a_n + (b_n - a_n)] \quad \text{quindi è somma di due serie convergenti} \quad \text{c}$$

Dim. assoluta convergenza Basta osservare che

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

e le due laterali convergono.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ (un giorno la somma sarà $-\log 2$)

Non converge assolutamente perché con i val. assol. diventa $\sum \frac{1}{n}$

Però converge per Leibnitz con

$$d_n = \frac{1}{n} \quad (d_n \geq 0, \text{decresc.}, d_n \rightarrow 0).$$

Allo stesso modo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$

→ converge assolutamente $\Leftrightarrow a > 1$

→ converge $\Leftrightarrow a > 0$ (Leibniz con $d_n = \frac{1}{n^a}$)

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+5}{n^4-3n+8}$

Volendo usare Leibniz occorre dimostrare la decrescenza 😞

Più comodo è usare l'assol. conv., che è vera per confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

— o — o —

ANALISI 1

LEZIONE 038

Note Title

05/11/2025

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

$\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ Quella a dx conv., quindi converge anche la vostra

NO!!! Il confronto vale solo tra serie a termini ≥ 0 , e la vostra non lo è.

La soluzione corretta è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

$\uparrow$ $0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\uparrow$ assoluta convergenza

e quindi posso usare il confronto

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + 2}{n}$ diverge

$\frac{\cos n + 2}{n} \geq \frac{1}{n}$ e quindi la vostra diverge per confronto.

Esercizio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8}$

Non converge assolutamente perché $|...| \sim \frac{1}{n}$

1° modo Leibnitz diretto. Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente, cioè

$$\frac{(n+1)^3 + 5}{(n+1)^4 - 3(n+1) + 8} \leq \frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8}$$

$$[(n+1)^3 + 5](n^4 - 3n + 8) \leq (n^3 + 5)[(n+1)^4 - 3(n+1) + 8]$$

Basta portare tutto a dx e sperare che la pot. + grande ha coeff. > 0 .

Calcolo solo i termini di grado ≥ 6 :

$$[n^3 + 3n^2 + \dots][n^4 + \dots] \leq (n^3 + \dots)(n^4 + 4n^3 + \dots)$$

$$n^7 + 3n^6 + o(n^6) \leq n^7 + 4n^6 + o(n^6)$$

resta $n^6 + o(n^6) \geq 0$ che è vero definitivamente

2° modo Brutale: frazione $\sim \frac{1}{n}$

Rigoroso: aggiungo e tolgo!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8} - \frac{1}{n} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

spero che converga assolut.
converge per Leibnitz

$$\frac{\cancel{n^4} + 5n - \cancel{n^4} + 3n - 8}{n(n^4 - 3n + 8)} \sim \frac{8n}{n^5} \sim \frac{8}{n^4} \quad \ddot{\smile}$$

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 2}{n^2 + 7}$

Niente convol. nec. $\rightarrow$ addio convergenza

Però cosa fa delle altre 3 possibilità?

Brutale: $\dots \sim \sum (-1)^n$ quindi è indet.

1° modo Entro nella dim. di Leibnitz e arrivo fino a

$$S_{2m} \rightarrow l_1 \quad \text{e} \quad S_{2m+1} \rightarrow l_2 \quad (\text{a patto di verificare l'ipotesi di monotonia})$$

Nello step 4 deduco che $l_1 - l_2 = 1$, quindi $l_1 \neq l_2$

2° modo Aggiungo e tolgo 1 alla frazione. Diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2 + 2}{n^2 + 7} - 1 \right]$$

Ora $\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 = \frac{n^2+2-n^2-7}{n^2+7} = -\frac{5}{n^2+7}$

e quindi la seconda serie converge assol., ma la prima è indeterminata, quindi la somma è indet.

— 0 — 0 —

Esercizio 5 Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\arctan(a^n)}{n^a}}_{a_n}$$

$a > 1$ $0 \leq a_n \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^a}$
 $\uparrow$ questa converge

$a = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1)}{n} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e diverge

$0 < a < 1$ Ora l'argomento di $\arctan$ tende a 0

Brutale: $a_n \sim \frac{a^n}{n^a}$ che converge per la radice

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{a^n}{n^a} \dots \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(a^n)}{a^n} = 1 \neq 0 \neq +\infty$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$

Per quest'ultima uso la radice

$$\sqrt[n]{b_n} \rightarrow a \in (0,1), \text{ quindi } \sum b_n \text{ converge}$$

$a = 0$ Sono tutti 0.

$-1 < a < 0$ Assoluta convergenza

$$|a_n| = \frac{\arctan(|a|^n)}{n^a} \text{ e come prima C.A. con } b_n = \frac{|a|^n}{n^a}$$

e quindi converge

$a = -1$ Diventa $\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

e questa non converge. Volendo si può capire cosa fa.
(Basta scrivere le somme parziali)

$a < -1$ $|a_n| \rightarrow +\infty$, quindi la serie non converge.

Conclusione: converge $\Leftrightarrow a \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Esercizio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^{2025}}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n}$

Si vede che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ quindi BOH 😞

Provo confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^7}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2032}}{2^{\sqrt{n}}} = e^{2032 \log n - \sqrt{n} \log 2} \rightarrow 0 \quad (\text{caso limite!})$$

$\leadsto a_n \leq b_n$ definitivamente $\therefore$

Esercizio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \arcsin\left(\frac{n^3}{3^n}\right)$

Per quali $a \in \mathbb{R}$ converge?

Brutale: $\sim a^n \frac{n^3}{3^n}$ radice $\rightarrow \frac{a}{3} < 1 \quad a < 3$

Rigoroso: per $|a| < 3$ uso assol. conv. + C.A. con $\left(\frac{|a|}{3}\right)^n n^3$
+ criterio della radice

Per $|a| \geq 3$ manca cond. nec.
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 039

Note Title

10/11/2025

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Teorema Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, b]$,

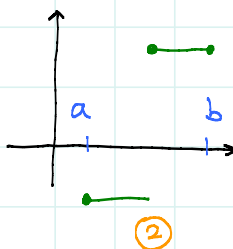
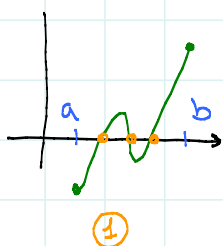
(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè f ha segno diverso agli estremi)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Oss. ① Il p.to c non è obbligato ad essere unico.

② La continuità in tutto $[a, b]$ è fondamentale.

③ I numeri reali sono fondamentali



$f(x) = x^2 - 2$ in $[0, 2]$
in $\mathbb{Q}$ non ha radici

③

Dim 1 (inf + assurdo) Assumo wlog $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Poniamo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

$\neq \emptyset$ perché almeno contiene b

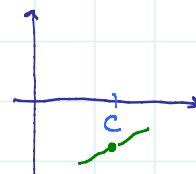
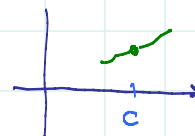
Claim: $f(c) = 0$.

Supponiamo $f(c) > 0$. Allora c'è un assurdo a sx. Essendo f continua, esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in (c - \delta, c)$, e quindi c non può essere l'inf.

Supponiamo $f(c) < 0$. Allora c'è un assurdo a dx.

Essendo f continua, esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x) < 0$ per ogni $x \in (c, c + \delta)$. Ma per caratterizzazione di inf dovrebbe esistere $x \in (c, c + \delta)$ t.c. $f(x) > 0$. Quindi assurdo. $\square$



Oss. Se volevo usare il sup, potevo porre

$$c := \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

Potevo anche porre

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \}$$

$$c := \sup \{ x \in [a, b] : f(x) \leq 0 \}$$

Esercizio 1 - Rifare la dim con ciascuna delle quattro definizioni

2 - Trovare un esempio in cui le 4 def. producano 4 c diversi.

Dim 2 (inf + diretta) Come prima poniamo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Osservo che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, c)$. (altrimenti $\inf < c$)

Quindi

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq 0.$$

D'altra parte, per caratterizzazione di inf, per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in [c, c + \delta]$ t.c. $f(x) > 0$. Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e trovo x_n tale che $c \leq x_n \leq c + \frac{1}{n}$ t.c. $f(x_n) > 0$.

Per i carabinieri $x_n \rightarrow c$ e quindi per continuità

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_n)}_{>0} \geq 0$$

Mettendo insieme le due disug. abbiamo la tesi.
— 0 — 0 —

Dim 3 (Bisezione) Costruisco una succ. di intervalli $[a_n, b_n]$ in questo modo.

• Pongo $[a_0, b_0] = [a, b]$

• Quando il p.to medio: se lì $f = 0$

abbiamo finito, altrimenti abbiamo un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ t.c.



f assume valori di segno diverso agli estremi, cioè

$$f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0$$

- Procedendo in modo analogo trovo una succ. $[a_n, b_n]$ t.c.

$$f(a_n) < 0 \quad f(b_n) > 0$$

e

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{la lunghezza si dimezza a ogni passaggio}$$

Ora la succ. a_n è debolm. cresc. e $a_n \leq b$ sempre

" " b_n è debolm. decr. e $b_n \geq a$ sempre

Quindi

$$a_n \rightarrow a_\infty \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow b_\infty$$

Si vuole

$$\begin{array}{ccc} b_n - a_n & = & \frac{b-a}{2^n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_\infty - a_\infty & = & 0 \end{array}$$

Quindi $a_\infty = b_\infty$ e questo è il c che ci interessa. Infatti

$$f(c) = f(a_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(a_n)}_{< 0} \leq 0$$

$$f(c) = f(b_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(b_n)}_{> 0} \geq 0$$

Teorema (INTERMEDIATE VALUE THEOREM)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$f(a) < \lambda \quad \text{e} \quad f(b) > \lambda \quad (\text{o viceversa})$$

Allora esiste almeno un $c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = \lambda$.

Dim. Applico il teo. di esistenza degli zeri a $g(x) = f(x) - \lambda$. $\square$

EFFETTO OTTICO DI ANALISI 1

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **convesso** se, per ogni coppia di elementi P e Q di A , anche tutto il segmento PQ è contenuto in A .

Def. (Brutale) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **Connesso** se è fatto "da un pezzo solo".

Effetto ottico Per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ vale che
convesso $\Leftrightarrow$ connesso

I sottoinsiemi convessi/connessi di $\mathbb{R}$ sono solo

- $\emptyset$
- p.ti singoli $\{a\}$
- gli intervalli con o senza estremi (a,b) $(a,b]$ $[a,b)$ $[a,b]$
- semirette $[a, +\infty)$ $(a, +\infty)$ $(-\infty, a)$ $(-\infty, a]$
- tutto $\mathbb{R}$

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e connesso.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f assume in A tutti i valori strettamente compresi tra $\inf$ e $\sup$ ($\inf$ e $\sup$ li può assumere o no a seconda dei casi).

Dim Sia $\inf < \lambda < \sup$.

Per caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) < \lambda$

Per lo stesso motivo esiste $b \in A$ t.c. $f(b) > \lambda$.

Ora uso il teorema dei valori intermedi in $[a,b]$, che per connettività/connessità è $\subseteq A$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 040

Note Title

10/11/2025

LEGAMI TRA MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

MONOTONIA 1 Segno della derivata in un p.to

Setting: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ (f definita dalle parti di x_0)

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$.

Allora (un po' a dx vale di più, un po' a sx vale di meno)

esiste $\delta \in (0, \varepsilon)$ t.c.

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Achtung! La tesi NON è che f è monotona in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dim Ricordiamo la def. di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Se $f'(x_0) > 0$, allora per permanenza del segno esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

• Per $h > 0$ il denominatore è > 0 , quindi anche numeratore > 0 , cioè

$$f(x_0 + \delta) > f(x_0) \quad \forall h \in (0, \delta)$$

• Per $h < 0$ allo stesso modo

$$f(x_0 + \delta) < f(x_0)$$

Oss. Discorso analogo con l'ipotesi $f'(x_0) < 0$.

MONOTONIA 2 Segno della derivata in un intervallo

Setting : $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in tutto (a,b) .

Allora valgono le seguenti implicazioni

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ debolm. cresc. in (a,b)

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett. cresc. in (a,b)

(iii) f deb. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(iv) f strett. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

*↑
guai a pensare che sia stretta.*

Esempio $f(x) = x^3$ è strett. cresc. in $(-1,1)$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$.

Teorema misterioso (LAGRANGE)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$ (*estremi compresi*)

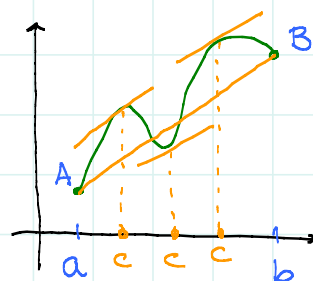
(ii) f derivabile in (a,b) (*se lo è pure in $[a,b]$, ancora meglio*)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

Interpretazione geometrica Lo scrivo come

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\substack{\text{"} \\ \text{coeff. angolare} \\ \text{retta AB}}} = \underbrace{f'(c)}_{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. angolare} \\ \text{retta tangente} \\ \text{nel p.to corr.} \\ a \quad c}}$$



Lagrange: esiste almeno un p.to in cui
la retta tangente è $\parallel$ ad AB.

Dim monotonia 2

(i) + (ii) Siano $a < x_1 < x_2 < b$. Allora per Lagrange in $[x_1, x_2]$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{misterioso in } (x_1, x_2)}}{f'(c)}$$

Se $f' \geq 0$ sempre, allora $f(x_2) \geq f(x_1)$ sempre

Se $f' > 0$ sempre, allora $f(x_2) > f(x_1)$ sempre

(iii) + (iv) Sia $x_0 \in (a, b)$. Per monotonia $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ per $h > 0$ e abbastanza piccolo. Ma allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

Oss. Se facevo $h \rightarrow 0^-$ la frazione era comunque ≥ 0
Se avevo la stretta crescente, avevo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per } h > 0 \text{ piccolo}$$

ma le disuguaglianze strette non passano al limite.

MONOTONIA 3 (Annullamento sporadico)

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni p.to.

Supponiamo che

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

(ii) $f'(x)$ non sia nulla in un intero intervallo (annullamento sporadico)

Allora f è strett. cresc. in (a, b) (e non solo debolm.)

Dim Già sappiamo che f è debolm. cresc.

Se non lo fosse strettamente, ci sarebbe almeno un tratto piatto, nel quale $f'(x)$ sarebbe $= 0$ sempre.

— 0 — 0 —

Esercizio 1 Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log x - \arctan(e^x + x^2) + x^3$$

Dimostrare che f è surgettiva.

Basta osservare che f è continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Essendo $(0, +\infty)$ connesso, da f assume tutti i valori tra inf e sup.

Esercizio 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x + \sin x$

Dimostrare che è bigettiva

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, di sicuro è surg.

Ora $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$$

quindi f' ha annullamento sporadico

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. cresc. $\Rightarrow f$ iniettiva.

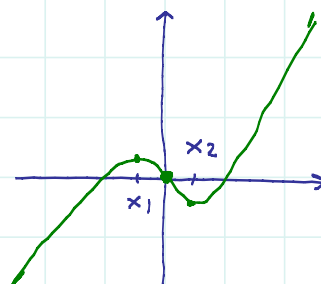
Esercizio 3 $x^5 - \arctan x + \log(1+x^{20}) = 0$

ha almeno tre soluz. reali.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad f(x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\leadsto f'(0) = -1$$

Monotonia 1: $\exists x_1 < 0$ t.c. $f(x_1) > 0$
 $\exists x_2 > 0$ t.c. $f(x_2) > 0$



ANALISI 1 - LEZIONE 041

Note Title

11/11/2025

MAX E MIN IN UNA VARIABILESetting: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} = \text{immagine di } A$$

Def. Si dice che

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

se

$$(i) f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$

$$(ii) \exists x_0 \in A \text{ t.c. } f(x_0) = M$$

In tal caso tutti gli $x_0 \in A$ per cui vale la (ii) si chiamano
p.ti di max

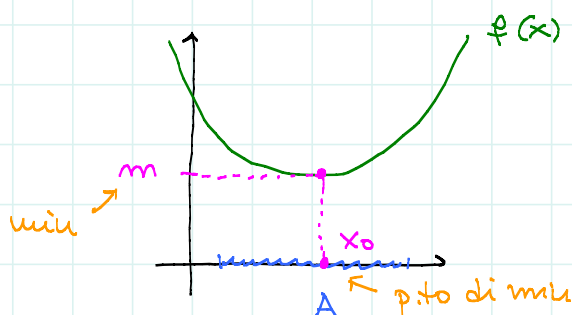
Discorso analogo per

$$m = \min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. ① Max e min non sono obbligati ad esistere

② Se esistono, sono per forza unici

③ I p.ti di max esistono se e solo se esiste il max, e non sono obbligati ad essere unici

④ Max e min sono valori assunti dalla funzione (delle y) mentre i p.ti di max/min stanno in A (delle x)

Teorema (WEIERSTRASS BABY)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

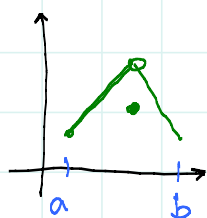
Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

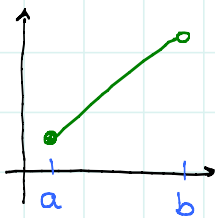
Oss. Le ipotesi fondamentali sono tre

- ① La funzione è continua ovunque
- ② L'intervallo ha gli estremi
- ③ L'intervallo è limitato



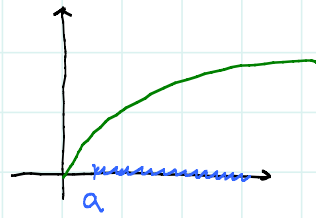
Non continua
in un solo pto
e manca max

①



Manca estremo b
e manca il max

②



Definita su una
semiretta e manca
il max

③

Esercizio È possibile trovare

- ① $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua senza né max né min?
- ② $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ " " "
- ③ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tranne in $\frac{1}{2}$ senza né max né min?

Achtung! Se falliscono tutte o alcune delle ipotesi di Weierstrass, allora BOH, cioè max / min possono esistere lo stesso.

Esempio $f(x) = \sin x$, $A = \mathbb{R}$

Max e min esistono e ci sono infiniti pti di max/min.

Analogo $f(x) = \cos x$ $A = (0, 100)$

Una via ordinamento Dimostriamo che esiste il minimo.

Di sicuro esiste

$$I = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \} \quad (\text{per ora potrebbe essere pure } -\infty)$$

Poi ci sono

$$x_0 = \inf \{ x \in [a, b] : \inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} = I \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{non vuoto} \\ \text{perché c'è } b \end{array}$$

Claim: $f(x_0) = I \leftarrow$ a questo p.to sarà reale

Di sicuro $f(x_0) \geq I$, perché I è l'inf su tutto.

Supponiamo per assurdo che $f(x_0) > I$.

Ci sono due casi

- $x_0 = a$. Prendiamo un reale c tale che $f(x_0) > c > I$

Allora per continuità esiste $\delta > 0$ t.c.

$$f(x) \geq c \quad \forall x \in [a, a+\delta]$$

Questo ci dice che

$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} \geq c$$

per ogni $x \in [a, a+\delta]$ il che ci dice che

x_0 non è l'inf.

- $x_0 > a$. Prendiamo c come sopra.

Come sopra

$$f(x) \geq c \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Osserviamo inoltre che

$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x_0 - \delta] \} = c_1 > I$$

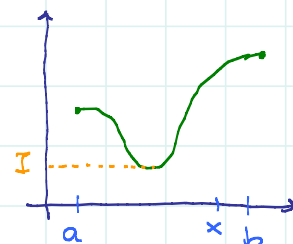
perché altrimenti x_0 non sarebbe l'inf.

Ma allora per ogni $x \in [a, x_0 + \delta]$ avremmo che

$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} \geq \min \{ c_1, c \} > I$$

e non va bene

— o — o —



Domanda : come trovare p.ti di max/min, e quindi anche M e m?

Risposta : i p.ti stanno in una di queste 3 categorie

- ① P.ti STAZIONARI interni : p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- ② P.ti SINGOLARI interni : p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- ③ P.ti del BORDO : $x = a$ e $x = b$.

Operativamente : calcolo tutti i p.ti del tipo ①, ②, ③, li sostituisco nella funzione e vedo dove vale di più o di meno. Se sono indeciso su un p.to, ce lo metto e non perdo nulla.

Dim Max e min esistono per W. Prendiamo un qualunque p.to x_0 di max/min.

- Se sta sul bordo, allora è di tipo ③
- Se sta in (a, b) e $f'(x_0)$ non esiste, allora è di tipo ②
- Se sta in (a, b) e $f'(x_0)$ esiste, quanto può valere $f'(x_0)$?
 → se fosse $f'(x_0) > 0$, allora per monotonia $f(x)$ vale più di $f(x_0)$ un po' a dx e vale meno di $f(x_0)$ un po' a sx, quindi $f(x_0)$ non può essere max/min.
 → se fosse $f'(x_0) < 0$, allora idem scambiando dx e sx.
 Quindi l'unica possibilità è che $f'(x_0) = 0$ e allora è di tipo ①.

Oss. Abbiamo usato che x_0 è interno nel finale per poterlo spostare a dx/sx.

Piccola Variante : Se $x_0 = a$ è p.to di min. e $f'(x_0)$ esiste, allora $f'(a) \geq 0$

(se fosse $f'(a) < 0$, allora un po' a dx $f(x)$ varrebbe meno di $f(a)$).

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 042

Note Title

11/11/2025

Varianti di Weierstrass

VARIANTE 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e **PERIODICA**.

Allora max e min esistono per forza.

Dim. Sia T un periodo. Per W. classico esiste max e min in $[0, T]$.

Claim: gli stessi sono max e min ovunque.

Prendiamo un qualunque $x \in \mathbb{R}$. Allora per periodicità esiste $\hat{x} \in [0, T]$ tale che $f(x) = f(\hat{x})$ (è così ovvio che esiste?) e quindi $f(x)$ è compreso tra max e min in $[0, T]$.**VARIANTE 2** Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Dim. Consideriamo un valore a caso, tipo $f(0)$.

Dalle definizioni di limite segue che

$$\exists A < 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \leq A$$

$$\exists B > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \geq B$$

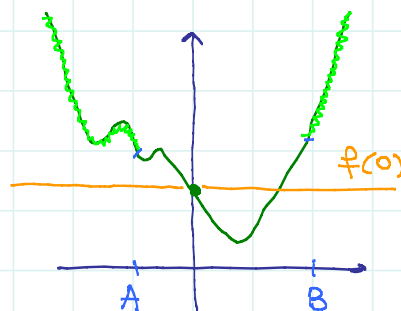
Pongo

$$m := \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

e questo esiste per W. classico.

Claim:

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



Basta dim. che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Questo è vero

→ se $x \in [A, B]$ per def. stessa di m

→ se $x \geq B$, allora $f(x) \geq f(0) \geq m$
 $\uparrow$ def. di B $\uparrow$ perché $0 \in [A, B]$ e m è il min in $[A, B]$

→ se $x \leq A$, allora $f(x) \geq f(0) \geq m$
 $\uparrow$ def. di A $\uparrow$ come prima

— o — o —

VARIANTE 3 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste per forza $\min \{f(x) : x \in (0, +\infty)\}$

Inizio dim. Considero $f(7)$ e dalle def. di limite ottengo che

$$\exists A \in (0, 7) \text{ t.c. } f(x) \geq f(7) \quad \forall x \in (0, A]$$

$$\exists B > 7 \text{ t.c. } f(x) \geq f(7) \quad \forall x \geq B$$

Claim:

$$\min \{f(x) : x \in [A, B]\} = \min \{f(x) : x \in (0, +\infty)\}.$$

— o — o —



META VARIANTE $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se esiste un intervallo $[A, B] \subseteq D$ t.c.

$$\sup \{f(x) : x \in [A, B]\} = \sup \{f(x) : x \in D\}$$

allora il min in $[A, B]$, che esiste per forza, è anche min in tutto D .

— o — o —

STUDIO LOCALE DI FUNZIONE

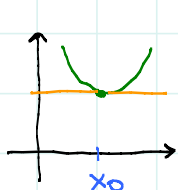
Obiettivo: capire come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0 dato.

Monotonia $\uparrow$ risponde alla domanda quando $f'(x_0) \neq 0$.

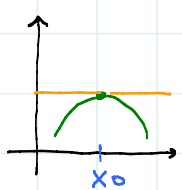
Cosa può succedere quando $f'(x_0) = 0$?

$\uparrow$ p.ti stazionari

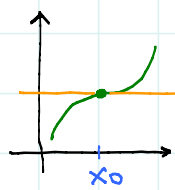
Ci sono 5 possibili scenari (il quinto è nessuno dei precedenti)



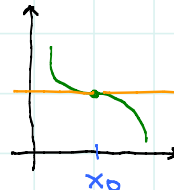
min. loc.



max. loc.



flesso a tang.
orizz. ascendente



flesso a tang.
orizz. disc.

Le definizioni sono

- x_0 p.to di min. locale se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

- x_0 p.to di flesso a tang. orizz. discendente se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Idem gli altri.

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo che

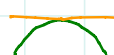
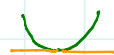
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

e

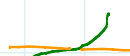
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

$$\begin{array}{l} k \text{ pari} \rightarrow f^{(k)}(x_0) > 0 \\ \quad \quad \quad \searrow f^{(k)}(x_0) < 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} k \text{ dispari} \rightarrow f^{(k)}(x_0) > 0 \\ \quad \quad \quad \searrow f^{(k)}(x_0) < 0 \end{array}$$

**Dim TAYLOR !!!**

ma allora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Da qui segue tutto. Vediamo un paio di casi.

$$k \text{ pari e } f^{(k)}(x_0) < 0$$

Il limite sopra è negativo, quindi
 $\exists \delta > 0$ t.c. la frazione è negativa
 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

Essendo k pari il denom. è > 0 , quindi num < 0 , cioè

$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow \text{p.to min.}$$

$$k \text{ dispari e } f^{(k)}(x_0) > 0$$

Come sopra la frazione è positiva
 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

Per $h \in (0, \delta)$ abbiamo denom > 0 , quindi num > 0 , quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$ Per $h \in (-\delta, 0)$ " " < 0 " num < 0 , quindi $f(x_0 + h) < f(x_0)$

Quindi flesso ascendente.

MORALE Nelle vicinanze di un p.to stazionario x_0 si ha che $f(x_0+h) - f(x_0)$ si comporta come il primo termine nello sviluppo di Taylor.

Esempio 1 Sia $f(x) = x^{22} + x'' - \sin(x^2)$.

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva / surgettiva.

Inoltre l'eq. $f(x) = 0$ ha almeno 3 radici reali

Due osservazioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Per W. generalizzato esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

Quindi

→ non assume valori $< m$ → addio sing.

→ assume almeno due volte i valori $> m$ → addio iniettività

Vicino a $x=0$ abbiamo $f(x) = -x^2 + o(x)$, quindi l'origine è p.to di max. relativo.

A quel p.to abbiamo intersezioni con l'asse x sia per $x > 0$, sia per $x < 0$.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 043

Note Title

12/11/2025

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire l'andamento di una funzione (come è fatto il grafico) in tutto il suo insieme di definizione.

ROAD MAP

- ① Simmetrie (pari / dispari / periodica)
- ② Zona di definizione e studio della continuità
- ③ Limiti agli estremi della zona di definizione
- ④ Zeri e segno
- ⑤ Derivata prima e zone di monotonia
- ⑥ P.ti di max / min globale / relativo
- ⑦ Eventuali asintoti
- ⑧ Derivata seconda, zone di convessità / concavità, flessi
- ⑨ LIPSCHITZIANITÀ (o più in generale modulo di continuità)

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

- ① Simmetrie $\left. \begin{array}{l} \text{Num. dispari} \\ \text{Den. pari} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{funzione dispari} \quad f(-x) = -f(x)$

Già ora sappiamo che basta studiare per $x \geq 0$

- ② Continuità Deve essere $x^2 \neq 1$, quindi $x \neq \pm 1$
Per il teorema è continua in $\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

- ③ Limiti agli estremi Occorre fare 6 limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$\uparrow \frac{1}{0^+}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

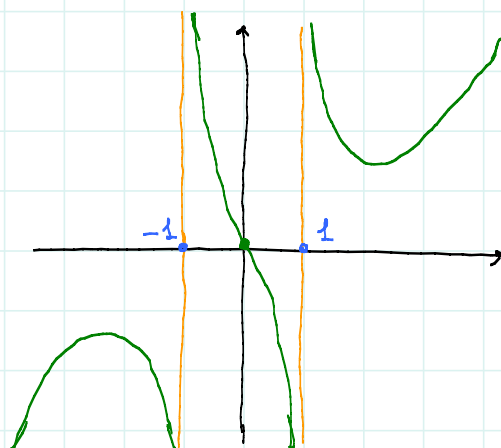
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$\uparrow \frac{1}{0^-}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Già ora provo a farmi un'idea del grafico.

Potebbero esserci però molte più oscillazioni.



④ Zeri e segno

Dividere i numeri reali in 4 gruppi

- gli x per cui $f(x) = 0$
 - " " $f(x) > 0$
 - " " $f(x) < 0$
- } risolvere sia l'eq. sia le diseq.
- gli x per cui $f(x)$ non ha senso

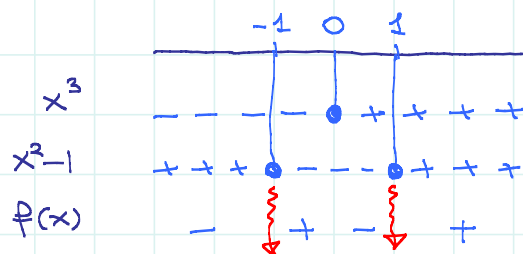
Quindi

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

Questo conferma il grafico del p.to ③



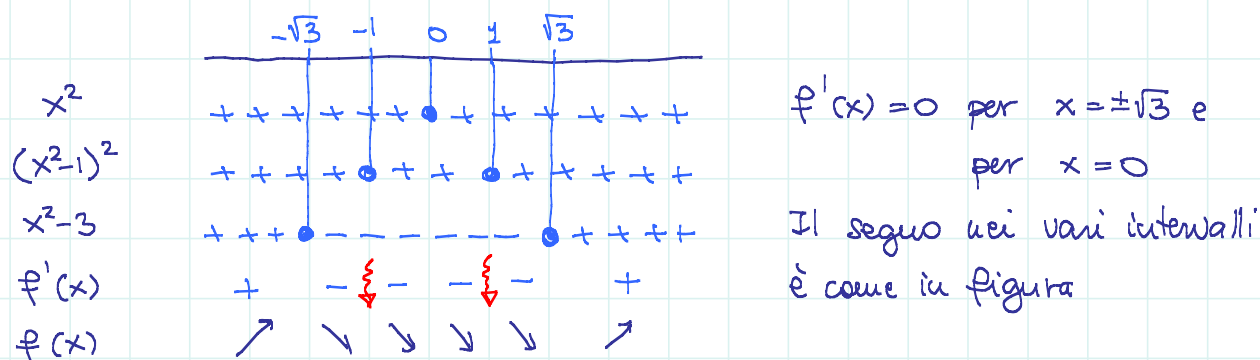
⑤ Derivata prima

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Adesso studiamo il segno di $f'(x)$



Anche questo conferma il grafico che avevamo disegnato.

Achtung! Non è vero che $f(x)$ è decrescente in $(0, \sqrt{3})$

Ad esempio $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{3}{2})$

$\uparrow$ neg. $\uparrow$ pos.

È vero che $f(x)$ è decrescente in $(0, 1)$ e in $(1, \sqrt{3})$

Il teorema monotonia 2 richiede $f(x)$ definita in tutto l'intervallo, quindi in $(0, \sqrt{3})$ non si può applicare!

⑥ Max/min loc./glob.

$\uparrow$
situation di relativo

Dallo studio di $f'(x)$ deduciamo che

- $x = \sqrt{3}$ è p.to di min. loc.
- $x = -\sqrt{3}$ " max loc.
- non esiste p.to di max/min. globale

Nota bene: $x=0$ è p.to di flesso a tang. orizz. discendente.

Taylor: $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

- ### ⑦ Asintoti
- Verticali: $x = 1$ e $x = -1$
 - Orizzontali: nulla
 - Obliqui

Def. → Una retta $x = x_0$ è asintoto verticale per $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

↑
VEL

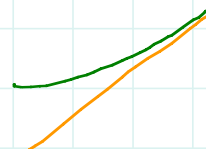
→ Una retta $y = y_0$ è asintoto orizz. per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se
per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = y_0$$

→ Una retta $y = ax + b$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$
se $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

↑
Brutalmente: la
funzione tende alla
retta



Oss. L'asintoto obliquo è equivalente a dire che

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (o \text{ per } x \rightarrow -\infty)$$

Oss. In modo analogo posso dire che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Domanda: come trovo a e b ?

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

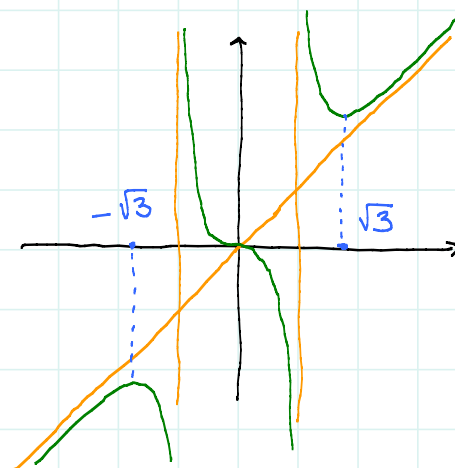
e idem a $-\infty$.

Nel vostro caso $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$

e

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = 0$$

Conseguenza: la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$
 Per disparità (o per un conto analogo) è asintoto obliquo anche per $x \rightarrow -\infty$.



Oss. Potete vedere l'asintoto obliquo da Taylor

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{raccolgo} \\ x^2 \text{ sotto} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ t \text{ che} \\ \text{tende a } 0 \end{array} = x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots \right) \\
 &\quad \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\dots \quad \text{asintoto obliquo} \\
 &= x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = x + o(1) \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{per } x \rightarrow +\infty \end{array}
 \end{aligned}$$

ANALISI 1 - LEZIONE 044

Note Title

12/11/2025

Prop (Asintoti obliqui, versione a $+\infty$)La retta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, è asintoto obliquo per $f(x)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

se e solo se

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

Dim $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = a$$

$\downarrow \frac{0}{+\infty} = 0$
 $\downarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{f(x) - ax - b}_{\downarrow 0} + b \right) = b$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{f(x) - ax - b}_{\downarrow b} \right) = b - b = 0 \quad \therefore$$

Oss. Quando posso usare De L'Hôpital, allora

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

Esempio $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 8}$

Vediamo la zona di definizione $\Delta = 9 - 32 < 0$ Quindi $x^2 + 3x + 8 > 0$, quindi è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

Analizziamo agli asintoti : orizz. e verticali : nulla

Proviamo gli obliqui

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - x) = \frac{3}{2}$$

↑
razionalizzato

Quindi $y = x + \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

Vediamo a $-\infty$:

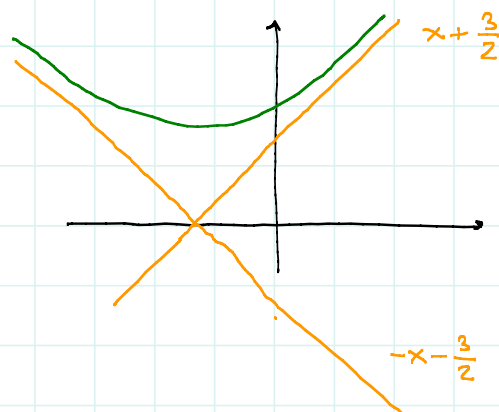
$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} + x)$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y^2 - 3y + 8} - y) = -\frac{3}{2}$$

Quindi $y = -x - \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Grafico previsto:



Finestra sul futuro:
è un'iperbole

Oss. Potrei vedere gli asintoti da Taylor?

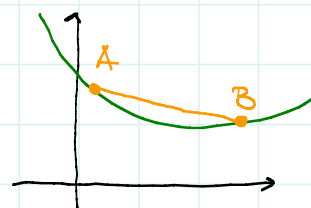
Certo! A $+\infty$ diventava

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x + 8} &= x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}} = x \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= x + \frac{3}{2} + o(1) \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{teorema 0} \end{array} \\ &\quad \text{asintoto obliquo} \end{aligned}$$

Def (geometrica di funzione convessa)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso non banale (intervallo, semiretta o tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

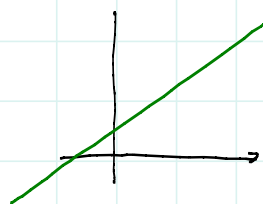
Allora f si dice convessa in D se per ogni coppia di p.ti A e B sul grafico, tutto il segmento AB sta sopra il grafico.



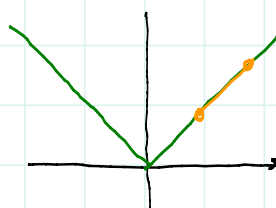
Concava: il segmento sta sotto (è come dire che $-f$ è convessa)

Strettamente convessa: il segmento tocca il grafico solo agli estremi.

Esempi



convessa } non
concava } strett.



debol. convessa
non strett. convessa

Teorema misterioso

Setting come sopra. Supponiamo che f'' esista in tutto D .

Allora

$$f \text{ debil. convessa in } D \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

$$f \text{ strett. convessa in } D \iff f''(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ in generale è falsa

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in D + f''(x) = 0 \text{ solo sporadicamente} \Rightarrow f \text{ strett. convessa in } D$$

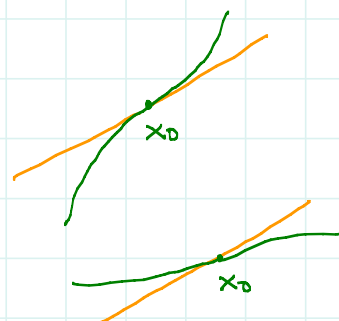
Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv., ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla per $x = 0$.

Def. (P.ti di flesso) Si dice che x_0 è un p.to di flesso per $f(x)$ se esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x)$ è convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$

$f(x)$ è concava in $(x_0 - \delta, x_0)$

o viceversa.



Moralmente: $f(x)$ cambia concavità in x_0

$f''(x)$ cambia segno

Tornando all'esempio della lezione precedente

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad \dots \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \quad (\text{COURTESY WOLFRAM})$$

Si vede che $f''(x)$ ha lo stesso segno di $f(x)$, il che trova conferma nel grafico.

Quindi l'unico p.to di flesso è l'origine.

Esempio Quante volte può annullarsi una $f(x)$ strett. convessa?

Al massimo 2. Se ce ne fossero 3, il segmento che congiunge la prima e l'ultima non potrebbe stare strett. sopra il grafico.

Due funz. strett. convesse senza tratti in comune, in quanti p.ti si possono intersecare?

Infinite! $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + \sin x \leftarrow \text{è convessa}$

$$g'(x) = 2x + \cos x \quad g''(x) = 2 - \sin x \geq 1$$

ANALISI 1 - LEZIONE 045

Note Title

18/11/2025

TAYLOR - LAGRANGETeorema misterioso (Formula di Taylor con resto di Lagrange)Setting: $r > 0$, $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.Supponiamo che f sia derivabile almeno $m+1$ volte in $(-r, r)$.Allora per ogni $x \in (-r, r)$ esiste c , compreso tra 0 e x , tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_m(x)} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1}}_{\text{resto di Lagrange: come il termine successivo solo con la derivata calcolata in } c \text{ e non in } 0}$$

Inoltre, se $x \neq 0$, allora c è strettamente tra 0 e x .Oss. C'è anche la variante con centro in $x_0 \neq 0$:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h^{m+1}$$

dove c , che dipende da h , sta tra x_0 e $x_0 + h$.Oss. Nel caso $m=0$ la formula diventa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(c) \cdot h$$

cioè

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c) \cdot h$$

derivata in un p.to misterioso intermedio
↑ lunghezza intervallo

che è il teorema di Lagrange.

Oss. Taylor - Peano è "qualitativo" (cioè il resto è piccato al limite)
 Taylor - Lagrange è "quantitativo", cioè fornisce una stima effettiva del resto.

Applicazioni : $\rightarrow$ calcolo approssimato di numeri
 $\rightarrow$ convergenza di serie di Taylor
 $\rightarrow$ dimostrazione di disuguaglianze

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin \frac{1}{10}$.

Taylor-Lagrange con $n=4$ e $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{f^{(5)}(c)}{120} x^5$$

$$\sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{f^{(5)}(c)}{120} \cdot \frac{1}{10^5}$$

$$\frac{599}{6000}$$

Se io dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$, l'errore che commetto è

$$\frac{|f^{(5)}(c)|}{12.000.000} \leftarrow \text{il valore assoluto è } \leq 1, \text{ quindi}$$

$$\text{l'errore è } \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Riprova: $\frac{599}{6000} = 0,0998333\ldots$ $\sin \frac{1}{10} = 0,0998334$

L'errore è sulla settima cifra.

Esempio 2 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

Vorrei dire che

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Taylor-Lagrange: le somme parziali della serie sono i polinomi di Taylor di e^x , quindi

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

[$n+1$ nel resto aggiunto dopo video]

Qui c dipende da x e da n , e so solo che sta tra 0 e x .

Caso $x > 0$. Allora di sicuro $e^c \leq e^x$. Ma allora

$$\text{resto}(n) \leq \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

↓
0 perché fattoriale batte potenza.

Se $x < 0$, allora $c < 0$ e quindi $e^c \leq 1$.

Oss. Allo stesso modo si dimostra che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ideali per $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 3
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Per Leibnitz converge. Dico che la somma è $\log 2$.

Taylor-Lagrange con $f(x) = \log(1+x)$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Sostituisco $x=1$:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1$$

Mi resta da stimare il resto. A suo tempo avevamo visto

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad \dots \text{ per induzione}$$

Ponendo $x=c$ e $k=n+1$ troviamo che

$$|f^{(n+1)}(c)| = \frac{n!}{(1+c)^{n+1}} \leq n!$$

$\uparrow$
 $c \in (0,1) \Rightarrow$

$$\text{Quindi } |\text{resto}| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{e}$$

— 0 — 0 —

Esempio 4 Dimostrare che

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0 \quad (\leq \text{ per ogni } x \leq 0)$$

Taylor-Lagrange :

$$e^x = 1+x + \boxed{\frac{e^c}{2} x^2}$$

≥ 0 sempre!

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{e^c}{6} x^3}$$

ha un segno che dipende da x

Oss. Analogamente

$$e^x \geq P_{2m+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \geq P_{2m}(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \leq P_{2m}(x) \quad \forall x \leq 0$$

Classi di regolarità

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso aperto (senza estremi) e sia $k \in \mathbb{N}$.

Si dice che $f \in C^k(D)$ se f è derivabile almeno k volte in D , e le sue prime k derivate sono funzioni continue.

Si dice che $f \in C^\infty(D)$ se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Si dice che $f \in C^\omega(D)$ (si legge *C-omega*) se è $C^\infty(D)$ e in D f è la somma della sua serie di Taylor.

Sinonimo: f è ANALITICA in D .

Esempi e^x , $\sin x$, $\cos x$ sono analitiche in $\mathbb{R}$

$\log(1+x)$ è analitica in $(-1, 1)$.

(dopo $x=1$ la serie numerico converge!)

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 046

Note Title

18/11/2025

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ qualunque, si dice Lipschitziana in D se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

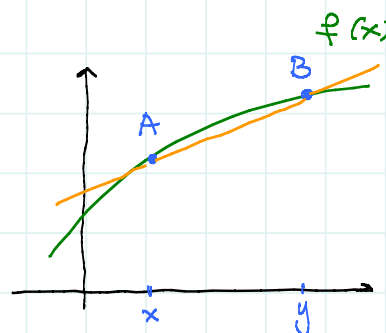
Osserviamo che, se un certo L va bene, allora vanno bene anche tutti gli $L' > L$. Il più piccolo L per cui la disuguaglianza è vera si dice costante di Lipschitz di f in D , ed è dato dalla formula

$$L := \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} : x \in D, y \in D, x \neq y \right\}$$

Interpretazione grafica Riscrivo la relazione come

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$$

↑
coeff. angolare
della retta AB



Quindi Lipschitzianità = bound sulle pendenze delle rette
= bound sulla pendenza del grafico.

Oss. Continuità: se y è vicino a x , allora $f(y)$ è vicino a $f(x)$
La Lipschitzianità rende la cosa quantitativa,

Achtung! La continuità è una proprietà locale, la Lip. è una proprietà globale.

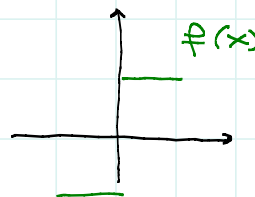
Ad esempio

f continua in A + f continua in $B \Rightarrow f$ continua in $A \cup B$

" deriv. " " deriv. " $\Rightarrow f$ derivabile in $A \cup B$

f Lip. in A + f Lip. in $B \not\Rightarrow f$ Lip. in $A \cup B$

Esempio $A = (-1, 0)$ $B = (0, 1)$



Esempio 1 $f(x) = x^2$ è Lip. ? Risposta: DOVE ?
È Lip. in $\mathbb{R}$?

NO! Suppongo che lo sia: allora $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$
Uso $x=0$ e $y=n$. Viene $n^2 \leq Ln$, cioè $n \leq L$
che è impossibile per n grande.

È Lip. in $[0, 100]$?

SÌ! Con costante $L=200$. Infatti

$$|y^2 - x^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 200 \text{ se } x \text{ e } y \text{ sono in } [0, 100]} |y-x| \leq 200 |y-x|$$

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[0, 1]$?

NO! $|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$ Uso $x=0$, $y=\frac{1}{n}$ Viene
 $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq L \frac{1}{n}$, cioè $\sqrt{n} \leq L$ che per n grande non
va bene

$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$?

Brutta copia: $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \stackrel{?}{\leq} L |y - x|$, cioè

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \stackrel{?}{\leq} L |\sqrt{y} + \sqrt{x}| \cdot |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \quad 1 \stackrel{?}{\leq} L |\sqrt{y} + \sqrt{x}|$$

$$\frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \stackrel{?}{\leq} L \quad \text{ok perché} \quad \frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Bella copia: $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$

$$\leq |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} |y - x|.$$

denom.
+ piccolo
— 0 — 0 —

Prop. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme **CONVESSO**.

Supponiamo che f sia derivabile in D .

Allora

$$f \text{ è lip. in } D \iff f' \text{ è limitata in } D$$

e inoltre

$$\text{cost. di lip. di } f \text{ in } D = \sup \{ |f'(x)| : x \in D \}$$

Oss. Con il senso di poi

- $f(x) = x^2$ in $[0, 100]$ $\rightsquigarrow f'(x) = 2x \rightsquigarrow \text{cost. di lip.} = 200$
- $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ $\rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightsquigarrow \text{cost. di lip.} = \frac{1}{2}$

Dim $\Leftarrow$ Ipotesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in D$

tesi: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|$ per ogni...

Lagrange! $|f(x_2) - f(x_1)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq L} \cdot |x_2 - x_1|$

$\Rightarrow$ Ipotesi: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ per ogni...

Tesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in D$

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|}_{\leq L \text{ (Lip. con } x_1 = x_0 \text{ e } x_2 = x_0+h)} \leq L$$

Resta da dimostrare per bene che

costante di Lip = bound. sulla derivata

Nella prima parte abbiamo che

costante di Lip $\leq$ bound su f'

Nella seconda parte abbiamo che

bound su $f' \leq$ costante di Lip

Quindi sono uguali $\hat{=}$.

Achtung! Una funzione può essere Lip. senza essere derivabile.

Esempio canonico: $f(x) = |x|$ che è Lip. su tutto $\mathbb{R}$, ma non derivabile in $x=0$.

Serve che $||y| - |x|| \leq |y - x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Segue da

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

che a sua volta si dimostra con tanti casi.

Poniamo $a = x$ e $b = y - x$ e troviamo

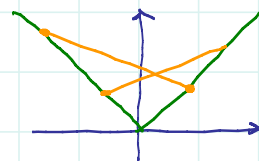
$$|y| \leq |x| + |y - x|$$

cioè

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

che dimostra la tesi quando $|y| \geq |x|$.

Il caso in cui $|y| \leq |x|$ si dimostra scambiando x e y



Disuguaglianze classiche di Lip.Per ogni x e y in $\mathbb{R}$:

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x|$$

$$|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$$

$$|\arctan y - \arctan x| \leq |y - x|$$

Le derivate sono $\cos x$, $\sin x$, $\frac{1}{1+x^2}$ (tutta roba ≤ 1) $\arcsin x$ è Lip. in $[-1, 1]$?

NO! La derivata è $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e non è limitata nemmeno
in $(-1, 1)$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 047

Note Title

19/11/2025

Motivi per fare uno studio di funzioni

- stabile iniettività e/o surgettività
- determinare $\inf/\sup/\min/\max$ in un insieme
- risolvere equazioni tipo $f(x) = 0$ o anche $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni tipo $f(x) > 0$ oppure $f(x) \geq 0$.

Achtung! È pericoloso risolvere $f(x) = g(x)$ oppure $f(x) > g(x)$ confrontando i grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

Molto meglio passare nella forma

$$f(x) - g(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad f(x) - g(x) > 0$$

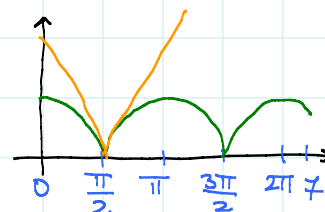
e studiare $f(x) - g(x)$.

Esempio 1 Max / min $\{ |\cos x| : x \in [0, 7] \}$

Esistono per Weierstrass

Dal grafico segue che

- $\max = 1$. p.ti max : $x = 0$ $x = \pi$ $x = 2\pi$
↑ ↑ ↑
bordo staz. interni
- $\min = 0$. p.ti min : $x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$
↑ ↑
p.ti singolari interni



Come dimostro che $f'(\frac{\pi}{2})$ non esiste?

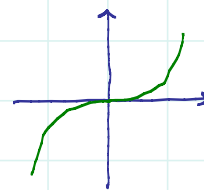
Idea: il limite del rapp. incrementale è diverso per $h \rightarrow 0^+$ e $h \rightarrow 0^-$

$$\frac{|\cos(\frac{\pi}{2} + h)| - |\cos \frac{\pi}{2}|}{h} = \frac{|-\sin h| - 0}{h} = \frac{\sin h}{h} \rightarrow 1 \quad h \rightarrow 0^+$$

$$\text{Per } h \rightarrow 0^- : \frac{|-\sin h| - 0}{h} = -\frac{\sin h}{h} \rightarrow -1$$

Achtung! $g(x) = |x| \cdot \sin x$ è derivabile in $x=0$?

$$\text{si! } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{|h|}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow 1} = 0$$



L'andamento nell'origine è di tipo x^2 per $x > 0$ e $-x^2$ per $x < 0$.

Esempio 2 Max/min $\{x^4 - x^2 : x \in [0, 1]\}$

Esistono per W. Candidati

→ bordo: $x=0$ e $x=1$

→ sing. interni: $\emptyset$

→ staz. interni: devono esserci !!

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$$

$$x=0$$

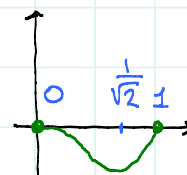
↑
non vale

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

↑
lui ok

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

↑
non vale



Sostituisco: $f(0) = 0$ ↑ Max

$$f(1) = 0 \quad \downarrow$$

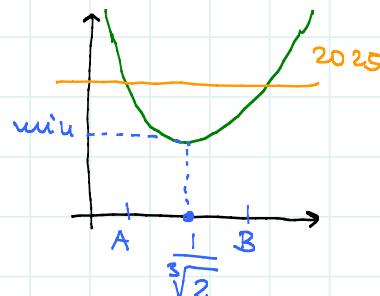
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leftarrow \text{Min}$$

Esempio 3 Inf/Sup/min/max $\left\{\frac{1}{x} + x^2 : x > 0\right\}$

Weierstrass non si applica, quindi BOH

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{Sup} = +\infty$$

Max N.E.



Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ min. esiste

Esiste un intervallo $[A, B]$ con $0 < A < B$ t.c.

$$f(x) \geq 2025 \quad \forall x \in [0, A] \quad \text{e} \quad f(x) \geq 2025 \quad \forall x \geq B$$

La gara per il min si gioca in $[A, B]$

Il min sarà in un p.to sta. interno

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Il minimo sarà $f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

Esempio 6 $f(x) = x^3 - \arctan x$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

iniettiva? surgettiva?

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surgettiva perché continua + $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
quindi assume tutti i valori intermedi

Iniettiva NO perché $f(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni

$$f(x) = -x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

quindi $f'(0) = -1$, quindi nell'origine sta scendendo

Detto più precisamente:

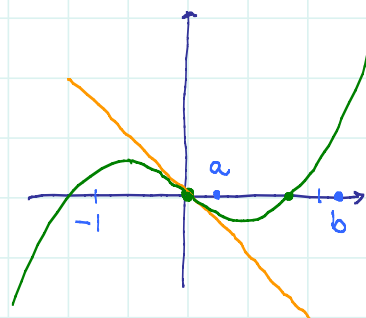
per monotonia 1 esiste $\delta > 0$ t.c.

$$f(x) < 0 = f(0) \quad \forall x \in (0, \delta)$$

Prendo $a \in (0, \delta)$ e ho $f(a) < 0$

Per il limite a $+\infty$ esiste $b > a$ t.c. $f(b) > 0$

Ora applico teo. esistenza degli zeri in $[a, b]$.



$f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ Per ora non è nemmeno chiaro che è ben definita!

Vediamo

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 1}{1+x^2}$$

Cerco i p.ti in cui si annulla
$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

Prendiamo solo quello con il segno + e otteniamo

$$x^2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} < 1$$

Di conseguenza, l'intervallo $[-1, 1]$ contiene i p.ti di max/min locali ma da solo esclude l'injectività. Andrebbe dimostrato, ma intuitivamente è chiaro.

Resta il dubbio sull'altezza dei p.ti di max/min.

Darei calcolare $f(x_{\min})$

→ se $\dot{e} < -1$ non è ben definita

→ se $\dot{e} > -1$ è ben definita ma non sing.

→ se $\dot{e} = -1$ è " e sing.

Non serve fare il conto, ma solo osservare che $0 < x_{\min} < 1$ quindi

$$f(x_{\min}) \geq -\arctan(x_{\min}) \geq -\frac{\pi}{4} > -1 \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$
 $x_{\min} \geq 0$

$\uparrow$
 $\arctan(x_{\min}) < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

ANALISI 1 - LEZIONE 048

Note Title

19/11/2025

Esempio 1 Dimostrare che $\sin x < x \quad \forall x > 0$ o più in generale
 $\sin x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $= 0$

Studio $f(x) = x - \sin x$

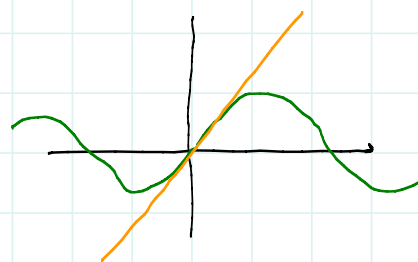
Osservo che $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

Quindi $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con annullamento sporadico.

Monotonia $\Rightarrow f$ strett. cresc.

Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.



Esempio 2 Dimostrare che $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

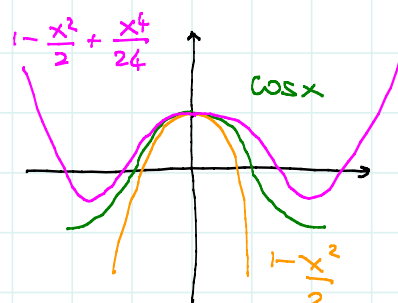
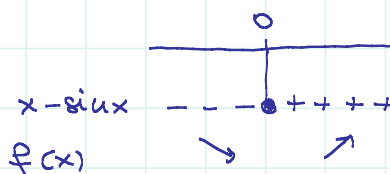
Pongo $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$

e osservo che

$$f(0) = 0$$

e

$$f'(x) = x - \sin x$$

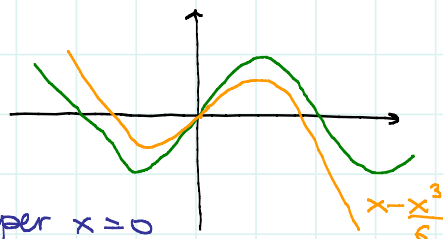


Questo basta per concludere

Esempio 3 Dimostrare che $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x \geq 0$
 con uguaglianza solo per $x = 0$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \sin x \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0 \text{ con annullamento solo per } x = 0$$



Quindi $f(x)$ è strett. cresc., da cui le conclusioni ☺

La successiva sarà $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Morale: i polinomi di Taylor di $\sin x$ e $\cos x$ approssimano alternativamente dall'alto e dal basso le funzioni stesse

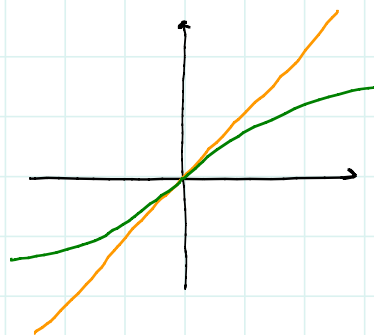
Esempio 4 Dimostrare che $\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$
 $\arctan x = x \Leftrightarrow x = 0$

Pongo $f(x) = x - \arctan x$

Anche qui $f(0) = 0$ e

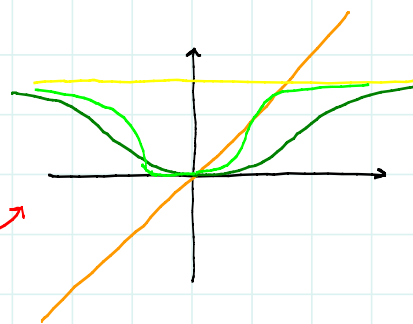
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

e si annulla solo per $x = 0$



Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. crescente.

Esempio 5 Risolve $\arctan(x^2) \leq x$



La sovrapposizione dei grafici è pericolosa $\rightarrow$

Studio $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Osservo che $f(0) = 0$. Se fosse crescente ☺

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{x^4 - 2x + 1}{1+x^4} \quad \leftarrow \text{non si trovano bene le radici}$$

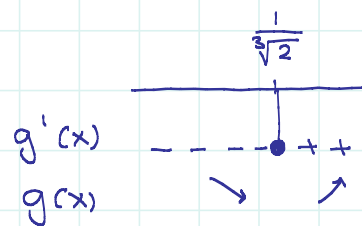
Oss. disfattista: guardo il numeratore $g(x) = x^4 - 2x + 1$.

Osservo che $g(1) = 0$ e $g'(x) = 4x^3 - 2$ da cui $g'(1) = 2$

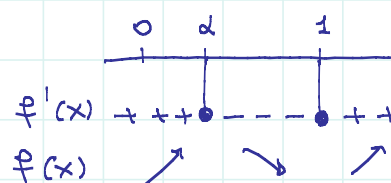
Quindi $g(x) < 0$ un po' prima di 1. Quindi $f'(x)$ non c'è speranza che sia positiva $\forall x > 0$.

Studio $g(x)$ (da cui dipende il segno di $f'(x)$)

Guardo $g'(x) = 2(2x^3 - 1)$. Di questa so studiare il segno



Quindi $g(x)$ è come in figura, quindi ora conosco il segno di $f'(x)$

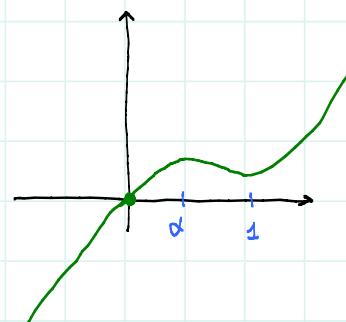


Quindi per decidere occorre vedere

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

Da questo momento sappiamo che

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$



Facile scorciatoia In questo caso

→ per $x < 0$ ovviamente $x < \arctan(x^2)$

→ per $x \in [0, 1]$ si ha $x^2 \leq x$, quindi

$$\arctan(x^2) \leq \arctan(x) \leq x$$

$\uparrow$
arctan
crescente

$\uparrow$
disug.
di prima

→ per $x \geq 1$ si ha $x^2 \geq x$, quindi

$$x^4 - 2x + 1 \geq x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$$

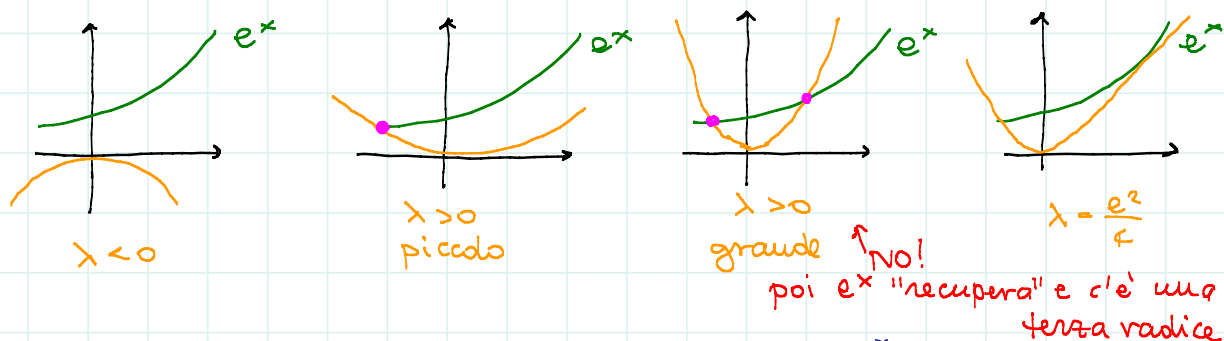
quindi $f'(x) > 0$, quindi f cresce e quindi ok.

L'ESEMPIO

Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di sol. di

$$e^x = \lambda x^2$$

Brutalmente



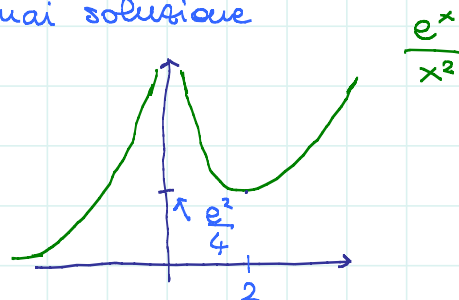
Dividendo mi trovo a studiare
(oppure $x^2 e^{-x} = \frac{1}{\lambda}$)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

↑
posso dividere per x^2
perché $x=0$ non è
mai soluzione

Studio $\frac{e^x}{x^2}$

I limiti a $\pm\infty$ e a $0^\pm$ si
calcolano facilmente



$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x}{x^3} (x-2)$$

Dallo studio del segno di f' [fare per bene] abbiamo
conferma del grafico.

Quindi le soluzioni sono

- 0 se $\lambda \leq 0$
- 1 se $0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$ (sol. neg.)
- 2 se $\lambda = \frac{e^2}{4}$
- 3 se $\lambda > \frac{e^2}{4}$ (una neg. due pos.)

ANALISI 1 - LEZIONE 049

Note Title

24/11/2025

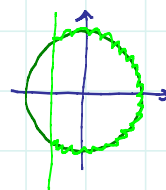
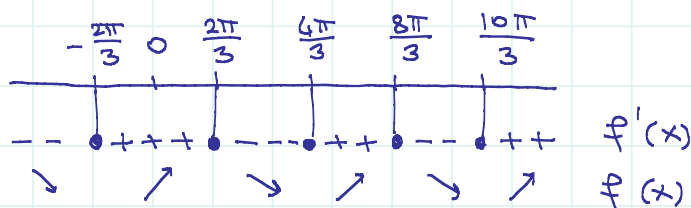
Esempio 1 Risolvere la diseq. $x + 2 \sin x \geq 0$

Oss. Sarebbe bello fosse $\underline{x + \sin x \geq 0}$
 $\uparrow f(x)$ è stretta. cresc.

Ora invece considero $f(x) = x + 2 \sin x$ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ anzi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ f dispari $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \rightsquigarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva

$$f'(x) = 1 + 2 \cos x \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq -1 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

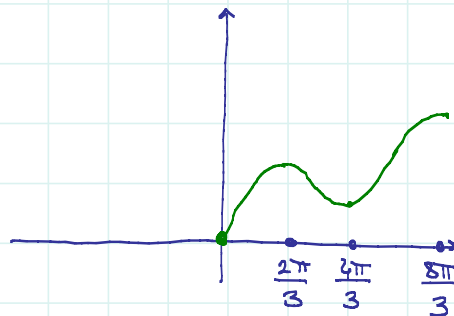
$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



Domanda: qual è il segno di $f(x)$
 in $\frac{4\pi}{3}$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0$$



A maggior ragione in tutti i p.ti di min. Loc. $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
 con $k \geq 0$ avremo che

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underbrace{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}_{\geq \frac{4\pi}{3}} + \underbrace{2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)}_{-\sqrt{3}} > 0$$

Conclusione : $x + 2 \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$$x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 Calcolare $\max \{ \sqrt[n]{n} : n \geq 1 \} = \max \{ 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots \}$

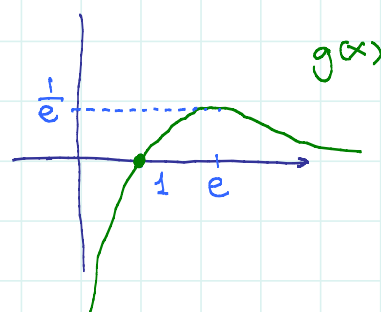
Considero la funzione $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log x}$

Conviene studiare direttamente $g(x) := \frac{\log x}{x}$

$$g \in C^\infty((0, +\infty)) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$\uparrow$
 $[-\infty, 0^+]$

zeri e segni dipendono da $\log x$

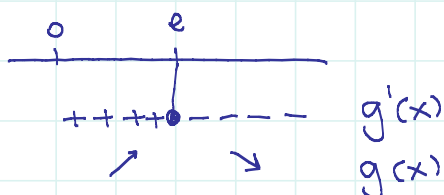


Mi aspetto un comportamento come in figura

Per avere conferma studio

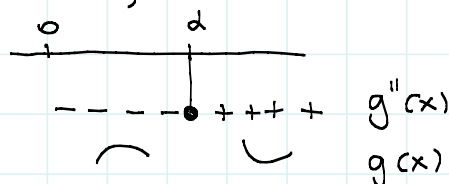
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log x \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$



↪ conferma il grafico di sopra

Oss. Dalla derivata seconda, che qui non serve, ci aspettiamo un segno del tipo in figura con $d > e$

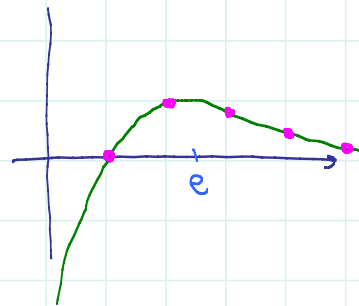


Tornando al vostro problema,
a voi interessa $x = n$ con $n \geq 1$
intero.

Qual è $\max \{g(n) : n \geq 1\}$

Se la giochiamo $n=2$ e $n=3$

(perché dopo 3 decresce e prima di 2 cresce)



Achtung! Non pensare che vince $n=3$ perché è più vicino a e !
(La funzione potrebbe precipitare di brutto dopo e)

In poche parole, se la giochiamo $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$.

Elevo alla sesta e diventano 2^3 e 3^2 $\uparrow\uparrow$ max che cercavo.

Esempio 3 Fissato $a > 0$, quante sono le soluzioni di

$$a^x = x^a ?$$

[Ad esempio con $a=2$ diventa $2^x = x^2$, che ha come soluzioni
 $x=2$ e $x=4$. Saranno le uniche?]

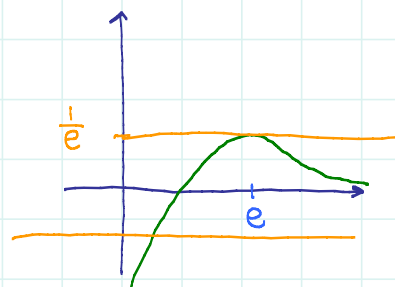
La scrivo come $e^{x \log a} = e^{a \log x}$, cioè $x \log a = a \log x$
cioè

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a} \quad \left[\text{Dividere si può perché cerco sol. con } x > 0 \right]$$

$\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{g(x)}$

Se g fosse iniettiva, l'unica soluz. sarebbe $x=a$.

Ma g non è iniettiva.



Guardando il grafico, deduciamo che

- se $a \in (0, 1]$, allora $\frac{\log a}{a} \leq 0$, allora l'eq.
 $g(x) = \frac{g(a)}{\leq 0}$ ha una sola soluzione, che è $x = a$

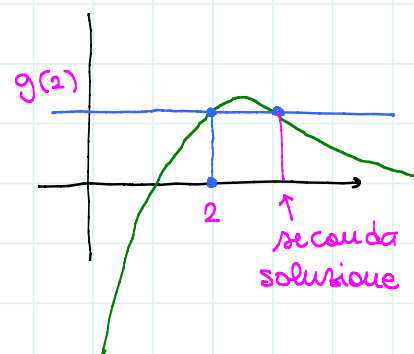
[Quindi se risolvo $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$ trovo unica sol. $x = \frac{1}{2}$]

- Se $a = e$, allora $g(a) = \frac{1}{e}$, e ancora una volta $g(x) = \frac{1}{e}$ ha come unica sol. $x = e$.

- Se $a \in (1, e) \cup (e, +\infty)$, allora $0 < g(a) < \frac{1}{e}$, e quindi dal grafico ci sono esattamente 2 sol. reali, di cui una è $x = a$.

Oss. Il secondo pallino ci dice che x^e ed e^x sono due grafici sono tangenti in $x = e$.

Oss. Risolvere $2^x = x^2$ sul grafico vuol dire come a dx



— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 50

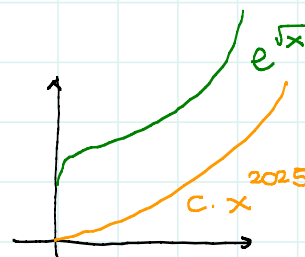
Note Title

24/11/2025

Esercizio 1 Stabilire se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$e^{\sqrt{x}} \geq c \cdot x^{2025} \quad \forall x \geq 0$$

Idea: sembra vero per c abbastanza piccolo



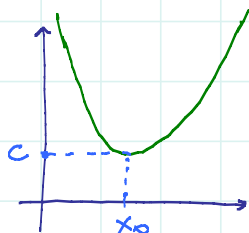
Isdo c : $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{2025}} \geq c \quad x^{2025} \cdot e^{-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{c}$
 ↑ potenzialmente pericoloso per $x=0$, ma in realtà per $x=0$ ogni c va bene, quindi basta sistemare gli $x > 0$.

Pongo $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{2025}}$ e dimostro che ha un minimo > 0 (o almeno un minorante > 0)

[Alternativa: dimostro che $g(x) = x^{2025} \cdot e^{-\sqrt{x}}$ ha massimo, o almeno un maggiorante, per $x \geq 0$]

Osservo che $f \in C^\infty((0, +\infty))$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \uparrow \left[\frac{1}{0^+} \right]$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \uparrow \sqrt{x} = y \text{ e poi esponenziale batte potenza}$$

Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ esiste il minimo
 Il minimo è il valore in un certo x_0 , e quindi per forza è > 0 .

Volevamo sì può anche calcolare c andando a studiare la derivata.

Analogamente, l'esistenza del $\max$ per la $g(x)$ segue da $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua con $g(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Esempio 2 Dimostrare che esiste $c > 0$ tale che

$$\sin^2(4x) + \cos^6(4x) \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. sbagliata: $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (i due addendi sono ≥ 0 e non si possono annullare insieme) quindi il c esiste

Oss. Anche $e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non esiste $c > 0$ t.c.

$$e^{-x^2} \geq c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[Se esistesse, facendo il limite per $x \rightarrow +\infty$ troverei $0 \geq c$, il che confligge con $c > 0$].

Dim. corretta $f(x)$ è continua e periodica (ad esempio con periodo 2π). Quindi per W. generalizzato alle periodiche esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

Ora questo $\min$ è $f(x_0)$ per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$, e questo di sicuro è positivo.

Esercizio 3

$$f(x) = x^{2025} + \sin x \cdot \sin x$$

$$g(x) = \sin x + x^{2025} \cdot \sin x$$

(a) Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'eq. $g(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale.

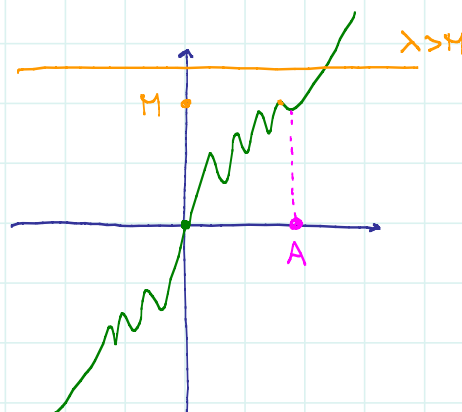
Si tratta della surg. di $g(x)$ che segue da continuità +

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = \pm \infty \quad (\text{basta raccogliere } \sin x)$$

(b) Dimostrare che, per λ abbastanza grande, la sol. è unica.

Pensiamo che il grafico sia come in figura

$$g'(x) = \cos x + 2025 x^{2024} \sin x + x^{2025} \cos x$$



Osservo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$
(grazie a $\cos x$)

Quindi esiste $A > 0$ t.c. $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva
(e quanto strettl. cresc.)

Claim: esiste $M := \max \{g(x) : x \leq A\}$
e per ogni $\lambda > M$ la soluzione di $g(x) = \lambda$ è unica

→ esistenza del max: W. generalizzato (sistemare i dettagli)

→ unicità per $\lambda > M$. Almeno una sol. esiste. Dove può stare?

Prima di A no, perché $\lambda > M$. Quindi sta dopo A. Ma dopo A la funzione g è iniettiva.

(c) Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha sempre infinite soluzioni reali.

- Basta dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste almeno una soluzione $\geq k$

[Prima trovo soluzione $x_0 \geq 0$ (uso $k=0$)

Poi trovo soluzione $x_1 \geq x_0 + 1$ (uso $k = x_0 + 1$)

Poi trovo soluzione $x_2 \geq x_1 + 1$ (uso $k = x_1 + 1$)
e così via]

- Basta dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esistono $k \leq A < B$ tali che $f(A) > \lambda$ e $f(B) < \lambda$.

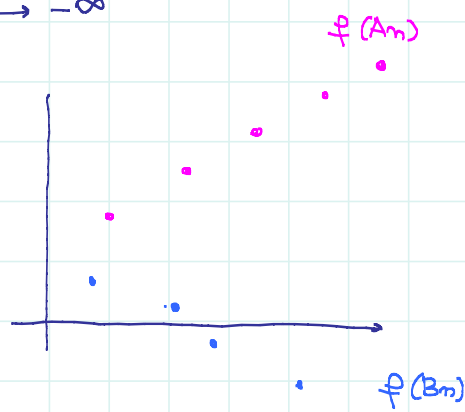
[Poi uso tes. valori intermedi tra A e B]

- Basta dimostrare che esistono due successioni A_n e B_n t.c.

$$A_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(A_n) \rightarrow +\infty$$

$$B_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(B_n) \rightarrow -\infty$$

[Fissato k e λ trovo p.ti
 $> k$ in cui f vale di più e
di meno di λ]



- Li esibisco

$$A_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{così sin } A_n = 1)$$

$$B_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{così sin } B_n = -1 \text{ e sin } B_n \text{ vince})$$

— o — o —

