A.A. 2024/2025
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 – LEZIONE 66

Note Title 28/02/2025

INTEGRALI Indice :
① Notazioni
② Significato geometrico
③ Definizione
④ Tecniche di calcolo

1 Notazioni

$$\int_{ⓐ}^{ⓑ} \underbrace{f(x)}\, \boxed{dx}$$

estremi di integrazione

← variabile di integrazione

simbolo di integrale (ricorda che sono parenti delle Somme)

↑ funzione da integrare (INTEGRANDA)

Notazione più estesa : $\int_{Ⓐ} f(x)\,dx$

↑ si intende che $A \subseteq \mathbb{R}$: zona di integrazione

Integrali ↗ PROPRI ↘ IMPROPRI

L'integrale si definisce $\boxed{\text{PROPRIO}}$ se succedono due cose

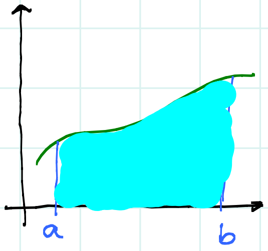
→ la zona di integrazione è un intervallo del tipo $[a,b]$ oppure un insieme limitato ($A \subseteq [a,b]$)

→ l'integranda $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, cioè

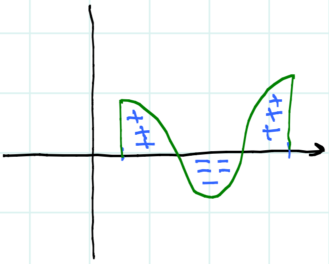
$$\exists\, M \in \mathbb{R} \quad t.c. \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$$

Se manca almeno uno dei due, l'integrale si dice $\boxed{\text{IMPROPRIO}}$

2 $\int_a^b f(x)\,dx$ = area $\boxed{\text{CON SEGNO}}$ della parte di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x.



CON SEGNO: le aree sopra asse x contano +
quelle sotto contano in negativo



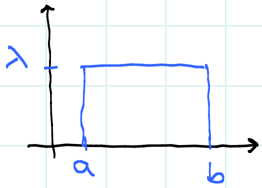
Estensione della definizione:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$ (estremi coincidenti)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$ (estremi scambiati)

$\boxed{3}$ **Definizione** Si procede in 3 passaggi

$\boxed{3.1}$ **Caso banale** $f(x) = \lambda$ costante

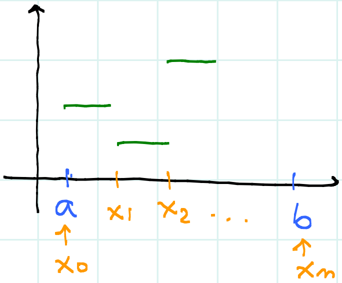


In questo caso per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda\,\underbrace{(b-a)}_{\text{base}}$$ = area con segno del rettangolo

$\uparrow$ altezza con segno

$\boxed{3.2}$ **Caso semi-banale**



Prendiamo una partizione di $[a,b]$ della forma

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

e sia

$$f(x) = \lambda_i \quad \text{per ogni } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$\uparrow$ costante in ogni sottointervallo (agli estremi non importa)

In questo caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$ = somma algebrica delle aree dei singoli rettangoli

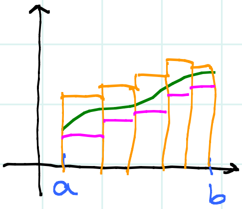
Queste speciali funzioni si chiamano

- → funzioni semplici
- → funzioni a gradino
- → STEP FUNCTION

3.3 Caso generale Sia ora $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione $\boxed{\text{LIMITATA}}$

Si definisce $\boxed{\text{INTEGRALE SUPERIORE}}$ di $f(x)$ in $[a,b]$ il numero

$$I^+(f,[a,b]) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \text{ è step. funct. e } \psi(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$



Analogamente si definisce l' $\boxed{\text{INTEGRALE INFERIORE}}$ come

$$I^-(f,[a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \text{ è una step. function e } \varphi(x) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

Fatto generale Per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si ha che

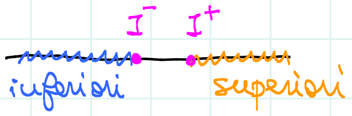
$$\boxed{I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])}$$

Oss. La limitatezza di f garantisce che esiste almeno una step function $\geq f$ e almeno una step function $\leq f$.

Nomenclatura Quelle che intervengono nella defin. di I^+ si chiamano somme di RIEMANN superiori … inferiori …

Fatto generale Ogni somma di Riemann superiore è $\geq$ di

" " " " inferiore

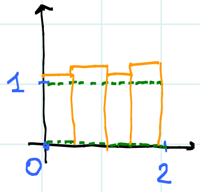


$\boxed{\text{Definizione}}$ Se accade che $I^+(f,[a,b]) = I^-(f,[a,b])$, allora si dice che f è integrabile in $[a,b]$ e il valore comune è l'integrale (INTEGRALE DI RIEMANN).

Ci sono esempi perversi in cui $I^+ > I^-$.

Esempio (Funzione di DIRICHLET) $f:[0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Si verifica che

→ tutte le somme di Riemann superiori sono ≥ 2 (le altezze sono ≥ 1)

→ " " " " " inferiori sono ≤ 0

Quindi $I^+ = 2$ e $I^- = 0$

$\boxed{\text{Criterio di integrabilità}}$ Una $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se

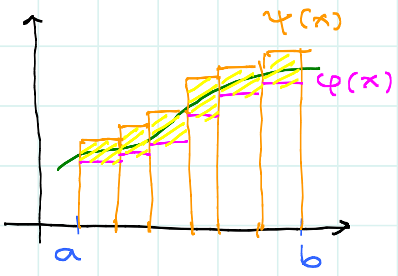
$\forall \varepsilon > 0$ esistono step functions φ e ψ, con

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

ottenute a partire dalla stessa partizione

tali che

$$\underbrace{\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx}_{\substack{\text{area intercapedine} \\ \text{tra } \varphi(x) \text{ sotto e } \psi(x) \text{ sopra}}} \leq \varepsilon$$



ANALISI 1 — LEZIONE 67

Note Title 28/02/2025

Quali funzioni sono integrabili ?

Teorema misterioso Sono integrabili

① Tutte le funzioni MONOTONE

② Tutte le funzioni CONTINUE

③ Tutte le funzioni continue a tratti (possiamo suddividere $[a,b]$ in sottointervallini in cui $f(x)$ è continua e limitata)

Proprietà degli integrali

① Se f e g sono integrabili in $[a,b]$, allora $f+g$ è int. in $[a,b]$

e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Poiché $f(x)$ è integrabile, esistono funzioni a gradino

$$\varphi^f(x) \leq f(x) \leq \psi^f(x)$$

t.c.

$$\int_a^b \psi^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi^f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Analogamente per $g(x)$, esistono $\varphi^g(x) \leq g(x) \leq \psi^g(x)$ t.c.

$$\int_a^b \psi^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi^g(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Ora osserviamo che

$$\underbrace{\boxed{\varphi^f(x)+\varphi^g(x)}}_{\text{step function}} \leq f(x)+g(x) \leq \underbrace{\boxed{\psi^f(x)+\psi^g(x)}}_{\text{step function}}$$

e
$$\int_a^b (\psi^f(x)+\psi^g(x))\,dx - \int_a^b (\varphi^f(x)+\varphi^g(x))\,dx$$

$$= \int_a^b \psi^f(x)\,dx + \int_a^b \psi^g(x)\,dx - \int_a^b \varphi^f(x)\,dx - \int_a^b \varphi^g(x)\,dx$$

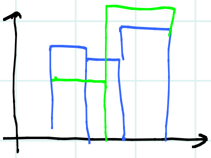
$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

e questo dimostra che $f+g$ è integrabile.

* * *

Oss. Apparentemente ho usato che l'integrale della somma è la somma degli integrali, ma l'ho fatto solo per le step function, per le quali è un fatto elementare.

Oss. Se ho due step function, le posso sempre pensare ottenute a partire da una suddivisione comune



② Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e vale

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{1+2 in maniera "colta"}}$ L'insieme delle funzioni integrabili in $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e

$$f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

è un'applicazione lineare.

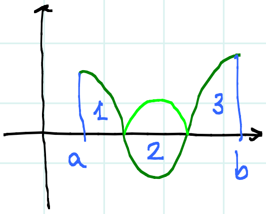
③ Il prodotto di due funzioni integrabili è integrabile, MA

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \text{nulla di furbo}$$

Domanda: Quando è vero che $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$?

④ Se $f(x)$ è integrabile, allora anche $|f(x)|$ è integrabile, e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$



Brutalmente $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = |A_1 - A_2 + A_3|$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2 + A_3$$

Quindi si tratta in fondo della solita $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$

⑤ Monotonia dell'integrale Se $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$, allora

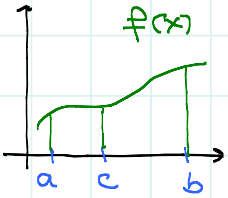
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(Basta osservare che le somme di Riemann superiori per g lo sono anche per f, e viceversa per quelle inferiori)

⑥ Additività rispetto alla zona di integrazione

Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$. Sia $c \in (a,b)$. Allora $f(x)$ è integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$ e vale

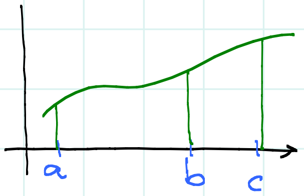
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Oss. Vale una formula analoga anche se $c > b$ pur di assumere $f(x)$ integrabile in $[a,c]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{= -\int_b^c f(x)\,dx}$$

definizione ↗



<u>Oss</u>. È possibile dedurre l'additività rispetto alla zona di integrazione a partire dall'integrale della somma. Basta considerare

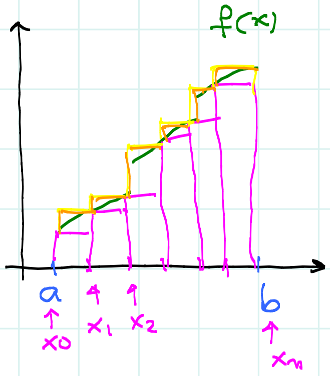
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a,c] \\ 0 & \text{se } x \in (c,b] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a,c] \\ f(x) & \text{se } x \in (c,b] \end{cases}$$

Ora sappiamo che

$$\begin{array}{ccccc} \int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx & = & \int_a^b f_1(x)\,dx & + & \int_a^b f_2(x)\,dx \\ \| & & \| & & \\ \int_a^b f(x)\,dx & = & \int_a^c f(x)\,dx & + & \int_b^c f(x)\,dx \end{array}$$

$\boxed{\text{Dim. che le funzioni debolmente crescenti sono integrabili}}$



Dato $\varepsilon > 0$, devo trovare $\varphi \le f \le \psi$

step f.

con intercapedine $\le \varepsilon$.

Divido $[a,b]$ in n parti uguali.

In ogni intervallo definisco

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = f(x_{i-1}) \\ \psi(x) = f(x_i) \end{array}\right. \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

Ma allora

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1})$$

Quindi

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{n}} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)$$

$$f\cancel{(x_1)} - f(x_0) + f(x_2) - f\cancel{(x_1)} + \dots$$

effetto telescopico ↗

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a)\big)}_{\text{piccolo a piacere per } n \text{ grande.}}$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 68

Note Title 28/02/2025

Basi teoriche per il calcolo operativo degli integrali

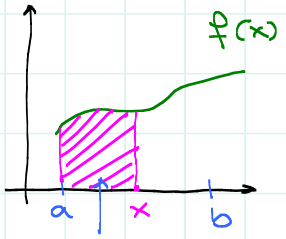
Due concetti : → FUNZIONE INTEGRALE
→ PRIMITIVA

Setting : intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile

Def. Chiamiamo $\boxed{\text{funzione integrale}}$ la funzione

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

altro nome visto che x è già un estremo

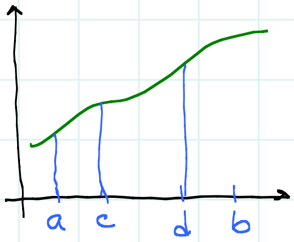


$\Phi(x)$ è l'area con segno di questa zona

Proprietà base Per ogni intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ si ha che

$$\int_c^d f(t)\,dt = \Phi(d) - \Phi(c)$$

$$\int_a^d f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt$$



Dim : Immediata conseguenza dell'additività rispetto alla zona di integrazione

Conseguenza operativa : $\boxed{\text{se}}$ conosco $\Phi(x)$, allora so calcolare l'integrale di f in ogni intervallo $\subseteq [a,b]$

Def. Supponiamo $f(x)$ continua in $[a,b]$.
Si dice PRIMITIVA di f una qualunque funzione

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Oss. Primitiva in inglese = ANTIDERIVATIVE

Oss. La primitiva, posto che esista, non è mai unica
(se $F(x)$ è primitiva, anche $F(x) + 3724$ è primitiva)

Prop. Due primitive della stessa f hanno come differenza una costante

Dim. Siano F_1 ed F_2 due primitive. Allora

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

Quindi la diff. ha derivata nulla, quindi è costante. Perché?
Lagrange! Se $g'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora

$$g(x) - g(a) = (x-a)\underbrace{g'(c)}_{=0} = 0$$

quindi $g(x) = g(a)$ sempre!

— o — o —

Anello di congiunzione: la funzione integrale è una primitiva!!
Quindi per calcolare operativamente un integrale, diciamo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

→ cerco una qualunque $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $F'(x) = f(x)$
→ calcolo $F(b) - F(a)$

Fatto importante: la differenza NON dipende da quale primitiva uso

Dim. Siano F_1 e F_2 due primitive. Allora sappiamo che

$$F_2(x) = F_1(x) + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

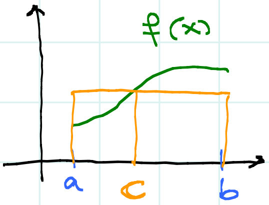
ma allora

$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + \cancel{c} - F_1(a) - \cancel{c} = F_1(b) - F_1(a)$$ ☺

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema media integrale}}$ Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Allora esiste $c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$



Brutalmente: riscrivo la tesi come

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\underset{\uparrow}{f(c)}$$

altezza di un rettangolo che
ha la stessa area dell'integrale

Dim. Siano m ed M il min e il max di $f(x)$ su $[a,b]$,
quindi

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Allora per monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}}_{\text{valore compreso tra min e max di } f} \leq M$$

essendo f continua, assume tutti i valori tra m e M.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(La funzione integrale è una primitiva)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, e sia

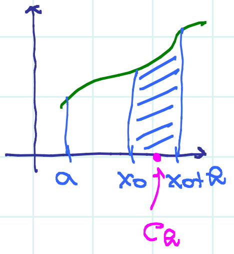
$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x\in[a,b]$$

la funzione integrale. Allora

$$\Phi'(x)=f(x) \qquad \forall\, x\in(a,b).$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $x_0\in(a,b)$ e calcolo

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\underbrace{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt}_{\Phi(x_0+h)}-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right\}$$



$$\nearrow = \frac{1}{\underset{\uparrow}{h}}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

per lo meno se $h>0$

lunghezza intervallo $[x_0,x_0+h]$

$$\nearrow = f(\underset{\uparrow}{c_h})$$

teo. media integrale in $[x_0, x_0+h]$

p.to misterioso compreso tra x_0 e x_0+h

Quando $h\to 0^+$ avremo che $c_h\to x_0$ per i carabinieri, quindi $f(c_h)\to f(x_0)$ perché f è continua.

Nel caso in cui h è negativo, è ancora vero che

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}=f(c_h) \qquad \text{con ora} \quad c_h\in[x_0+h,x_0]$$

— o — o —

$\boxed{\text{Il famigerato } +c}$ $\int f(x)\,dx$ = una qualunque primitiva di $f(x)$

$\uparrow$ senza estremi

ad esempio $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

Aggiungere $+c$ non serve a nulla per il calcolo con gli estremi (perché se ne va).

Uno vorrebbe metterlo per descrivere l'insieme di TUTTE le primitive, ma achtung!

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} \quad \leftarrow \text{ una primitiva}$$

Tutte le primitive di $\frac{1}{x^2}$ non sono $-\frac{1}{x}+c$!!!

Infatti posso usare c diversi per $x>0$ e $x<0$

Quindi per descrivere TUTTE le primitive, mettere $+c$ non basta!

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 69

Note Title 01/03/2025

Riassunto puntata precedente Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Sia $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA primitiva di φ

cioè Φ è continua in $[a,b]$ e

$$\Phi'(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

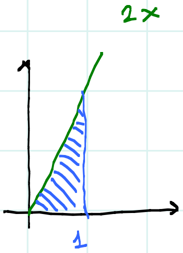
Notazione : $\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Tecniche di integrazione Come ottenere $\Phi(x)$ da $\varphi(x)$

① Primitive elementari
② Integrazione per parti
③ Integrazione per sostituzione
④ Funzioni razionali
⑤ Sostituzioni razionalizzanti

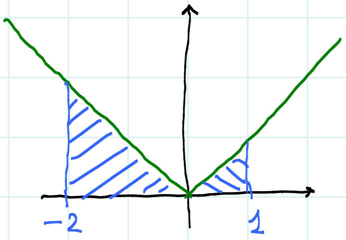
⓪ Banali considerazioni geometriche

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx$



$$= \text{area triangolo} = \frac{1}{2}\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{base}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{altezza}}}{2} = 1$$

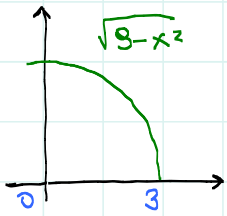
Esempio 2 $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x|\,dx$



$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2}_{sx} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}_{dx} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Achtung! Non fare cose creative, tipo valore assol. della primitiva

Esempio 3 $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$



$y=\sqrt{9-x^2} \rightsquigarrow y^2 = 9-x^2 \rightsquigarrow x^2+y^2=9$

$= \frac{1}{4}\cdot$ area cerchio di raggio 3 $= \frac{1}{4}\pi\cdot 9 = \frac{9}{4}\pi$

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Primitive elementari}}$ Leggere al contrario la tabella delle derivate

$\varphi(x) = c \qquad \Phi(x) = cx$

$\varphi(x) = x^a \qquad \Phi(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$ se $a \neq -1$

$\varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \Phi(x) = \log x$ corretta per $x>0$

$\varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \Phi(x) = \log|x|$ va bene per ogni $x \neq 0$

(se $x>0$, allora $\Phi(x) = \log x$ e quindi $\Phi'(x) = \frac{1}{x}$
se $x<0$, allora $\Phi(x) = \log(-x)$ e quindi $\Phi'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$)

$\varphi(x) = e^x \qquad \Phi(x) = e^x$

$\varphi(x) = a^x \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\log a}a^x$ se $a>0$ e $a \neq 1$

$\varphi(x) = \sin x \qquad \Phi(x) = -\cos x$

$\varphi(x) = \cos x \qquad \Phi(x) = \sin x$

$\varphi(x) = \sinh x \qquad \Phi(x) = \cosh x$

$\varphi(x) = \cosh x \qquad \Phi(x) = \sinh x$

$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Phi(x) = \arctan x$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\Phi(x) = \arcsin x$

$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\Phi(x) = \arccos x$

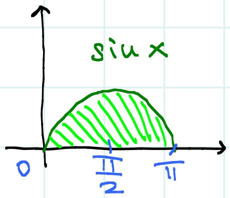
Esempio 4 $\displaystyle\int_1^3 (x^2-3x)\,dx$

Cerco una primitiva $\displaystyle\int (x^2-3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}$

Quindi $\displaystyle\int_1^3 (x^2-3x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$$= \underbrace{\frac{27}{3} - \frac{27}{2}}_{x=3} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}}_{x=1} = \dots \text{ si fa.}$$

Esempio 5 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$



Deve venire un numero > 0

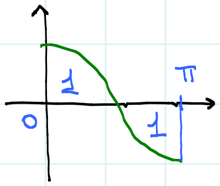
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = -0+1 = 1$$

Analogamente

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2.$$

doppio del precedente ☺

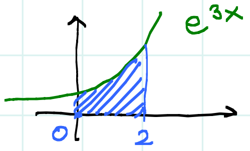
Esempio 6 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$



Per ragioni di simmetria. Per verifica

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0-0 = 0$$ ☺

Esempio 7 $\int_0^2 e^{3x}\,dx$



Deve venire positivo

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{3}e^{3x}}\Big]_0^2 = \frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}(e^6-1)$$

↑ perdere 10 secondi a verificare che la derivata sia e^{3x}

Esempio 8 $\int_0^2 \sqrt{x+3}\,dx$

Devo trovare $\Phi(x)$ t.c. $\Phi'(x) = \sqrt{x+3}$

$$\int_0^2 \sqrt{x+3}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}5^{3/2} - \frac{2}{3}3^{3/2}$$

↑ perdere 10 secondi a verificare

$$= \frac{10}{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$$

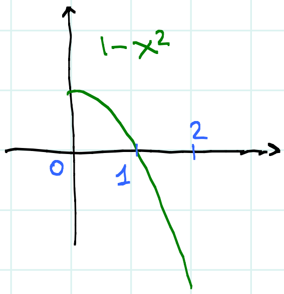
Esempio 9 $\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,dx$

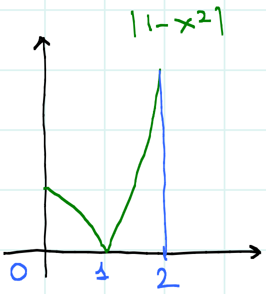
$$= \left[\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{3}9^{3/2} - \frac{1}{3}3^{3/2}$$

↑ compensa la derivata di $2x$

$$= 9 - \sqrt{3}.$$

Esempio 10 $\int_0^2 |1-x^2|\,dx$





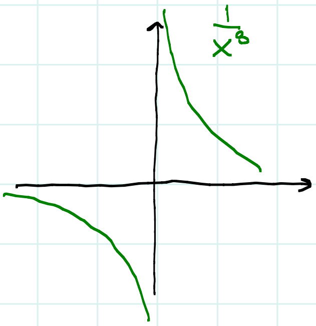
$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & x\in[0,1] \\ x^2-1 & x\in[1,2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 |1-x^2|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx$$

$$= \left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$$

$$= 1-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 \quad = \text{si fa}$$

Esempio 11 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$



$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 0$$

↑ provare a derivare

No! No! Non si tratta di un integrale PROPRIO perché $\frac{1}{x^3}$ non è limitata all'interno della zona di integrazione !!!

Oss finale Prima di partire, accertarsi di avere un integrale PROPRIO !!!

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 70

Note Title 01/03/2025

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Idea: uso la precedente con $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$$
$$= f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)$$

Sostituendo ottengo

$$\int_a^b [f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)]\,dx = F(b)\,G(b) - F(a) \cdot G(a)$$

e, aggiustando i termini

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot G(x)\,dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x)\,dx}$$

Formula di integrazione per parti "ufficiale"

Versione breve "abusiva" $\boxed{\int fG = FG - \int Fg}$

Utilizzo operativo : cerco di vedere la $\varphi(x)$ che devo integrare come prodotto di due funzioni

→ una f di cui so fare la primitiva F

→ una G che "derivando migliora"

Esempio 1 $\int \underset{\substack{\uparrow\\ G}}{x}\,\underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^{2x}}\,dx$ (cerco la primitiva)

$$\int \underset{G}{x}\cdot \underset{f}{e^{2x}}\,dx = \underset{F}{\frac{1}{2}e^{2x}}\cdot \underset{G}{x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

(fare verifica in 20 secondi)

Esempio 2 $\int x^2\cos(3x)\,dx$

$$\int \underset{G}{x^2}\,\underset{f}{\cos(3x)}\,dx = \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)}\cdot \underset{G}{x^2} - \int \underset{F}{\frac{1}{3}\sin(3x)}\cdot \underset{g}{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin(3x) - \frac{2}{3}\int x\sin(3x)\,dx$$

$$\int \underset{G}{x}\,\underset{f}{\sin(3x)}\,dx = \underset{F}{-\frac{1}{3}\cos(3x)}\;\underset{G}{x} - \int \Big(\underset{F}{-\frac{1}{3}\cos(3x)}\Big)\cdot \underset{g}{1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cdot\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)$$

Conclusione:

$$\int x^2\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}x^2\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x)$$

[Fare la verifica derivando]

Fatto generale In questo modo si fanno gli integrali del tipo

$$\boxed{\int p(x)\cdot e^{ax}\,dx \qquad \int p(x)\cdot \sin(ax)\,dx \qquad \int p(x)\cos(ax)\,dx}$$

con $p(x)$ polinomio (idea: usare $G = p(x)$ e f = resto)

Esempio 3 $\int \cos^2 x\,dx$

$$\int \underset{f}{\cos x}\cdot \underset{G}{\cos x}\,dx = \underset{F}{\sin x}\cdot \underset{G}{\cos x} - \int \underset{F}{\sin x}\,\underset{g}{(-\sin x)}\,dx$$

$$= \sin x\cdot\cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

$\sin^2 = 1-\cos^2$ ↗

$$= \sin x\cdot\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x\cdot\cos x + x - \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{\text{grande ritorno!}}$$

Portando a sx ottengo

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cdot\cos x + x$$

e quindi $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$ [Verifica!]

Metodo alternativo Precorso da subito!

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, quindi $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ e quindi

$$\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \underbrace{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)}_{\substack{\text{uguale al precedente}\\ \text{perché } \sin(2x) = 2\sin x\cos x}}$$

Esempio 4 $\int e^{2x} \cos(3x)\, dx$

$$\int \underset{f}{e^{2x}} \underset{G}{\cos(3x)}\, dx = \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{G}{\cos(3x)} - \int \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} \underset{g}{(-3\sin(3x))}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{2} \int \underset{f}{e^{2x}} \underset{G}{\sin(3x)}\, dx$$

← spero vada bene

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{2} \left\{ \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{G}{\sin(3x)} - \int \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} \cdot \underset{g}{3\cos(3x)}\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x} \sin(3x) - \underbrace{\frac{9}{4} \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\, dx}_{\text{grande ritorno!}}$$

Portando a sx concludo che

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cdot \cos(3x)\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x} \sin(3x)$$

Basta moltiplicare per $\frac{4}{13}$ e fare la verifica!

Fatto generale Con il GRANDE RITORNO si fanno integrali del tipo

$$\boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx} \qquad \boxed{\int e^{ax} \sin(bx)\, dx}$$

e anche tutte le potenze di $\boxed{\sin(ax)}$ e $\boxed{\cos(bx)}$

UTILIZZI SMART dell'integrazione per parti

→ grande ritorno

→ trucco dell'1 nascosto.

Esempio 5 $\int \log x \, dx$

$$\int \log x\,dx = \int \underset{f}{1}\cdot\underset{G}{\log x}\,dx = \underset{F}{x}\cdot\underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{x}\cdot\underset{g}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x = x(\log x - 1)$$

Esempio 6 $\int \arctan x\,dx$

$$\int \underset{f}{1}\cdot\underset{G}{\arctan x}\,dx = \underset{F}{x}\cdot\underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x}\cdot\underset{g}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

Esempio 7 $\int \tan x\,dx$

$$\int \underset{f}{\sin x}\cdot\underset{G}{\frac{1}{\cos x}}\,dx = \underset{F}{-\cos x}\cdot\underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cos x)}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\sin x)\,dx$$

$$= -1 + \int \sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx$$

Semplificando ottengo $0 = -1$!!!

Il problema nasce dalla formula abusiva, cioè senza estremi

Altro modo di ottenere il problema: scrivere

$$\int 1\,dx = \int e^{x}\cdot e^{-x}\,dx$$ e procedere per parti!

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 71

Note Title 01/03/2025

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Solita partenza : $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

Consideriamo ora $\Phi(x) = F(G(x))$. Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) \cdot g(x)$$

Sostituendo troviamo

$$\int_a^b f(G(x)) \cdot g(x)\,dx = F(G(b)) - F(G(a))$$

$$= \Big[F(x)\Big]_{G(a)}^{G(b)}$$

Concludendo

$$\boxed{\int_a^b f(G(x)) \cdot g(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{G(a)}^{G(b)}}$$

Formula ufficiale

Brutalata : devo calcolare $\int_a^b f(G(x)) \cdot g(x)\,dx$. Pongo $y = G(x)$.

Quando $x = a \rightsquigarrow y = G(a)$

$x = b \rightsquigarrow y = G(b)$

Inoltre

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ risp. a } x = g(x) \qquad \text{da cui} \quad dy = g(x)\,dx$$

così $\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \cdot \underbrace{g(x)\,dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y)\,dy = F(G(b)) - F(G(a))$ ☺

Esempio 1 $\int x^6 \sin(x^7)\,dx$

Pongo $y = x^7$. Allora $\frac{dy}{dx} = 7x^6$, quindi $dy = 7x^6 dx$

$$\int x^6 \cdot \sin(x^7)\,dx = \frac{1}{7}\int \underbrace{\sin(x^7)}_{\sin y} \cdot \underbrace{7x^6 dx}_{dy} = \frac{1}{7}\int \sin(y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{7}\cos(y) = -\frac{1}{7}\cos(x^7)$$ [Derivo per conferma]

Esempio 2 $\int x^3 e^{x^2} dx$

Pongo $y = x^2$. Allora $\frac{dy}{dx} = 2x$, quindi $dy = 2x\,dx$

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2 \cdot e^{x^2}}_{ye^y} \cdot \underbrace{2x\,dx}_{dy} = \frac{1}{2}\int \underset{G}{y}\,\underset{f}{e^y}\,dy$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=} \frac{1}{2}\left\{ y e^y - \int 1 \cdot e^y dy \right\} = \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^y (y-1)$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2}(x^2-1)$$

Verifica: $\left[\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2-1)\right]' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x(x^2-1) + \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x$

$$= e^{x^2} \cdot x^3 - x e^{x^2} + x e^{x^2} = e^{x^2} \cdot x^3$$ ☺

Esempio 3 $\int \sin(\log x)\,dx$

Pongo $y = \log x$ da cui $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ cioè $dy = \frac{1}{x} dx$

$$\int \sin(\log x)\,dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ e^y}}{x} \cdot \underbrace{\sin(\log x)}_{\sin y} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{dy} = \int e^y \cdot \sin y\,dy$$

= si fa con il grande ritorno.

Modo alternativo di vedere la sostituzione :

pongo $y = \log x$, quindi $x = e^y$, quindi $\frac{dx}{dy} = e^y$
cioè $dx = e^y dy$. Ma allora

$$\int \underbrace{\sin(\log x)}_{\sin y}\, \underbrace{dx}_{e^y dy} = \int \sin(y)\cdot e^y\, dy$$ ☺

Esempio 4 $\int \tan x \, dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ Pongo $y = \cos x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x \rightsquigarrow dy = -\sin x \, dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{y}(-dy) = -\int \frac{1}{y} dy = -\log|y|$$

$$= -\log|\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 5 $\underbrace{\int \frac{x}{1+x^4} dx}_{\text{MEDIO}}$ $\underbrace{\int \frac{x^2}{1+x^4} dx}_{\text{DIFFICILE}}$ $\underbrace{\int \frac{x^3}{1+x^4} dx}_{\text{FACILE}}$

$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)$ [Si può fare con la sostituzione $y = 1+x^4$]

$\int \frac{x}{1+x^4} dx$ Pongo $y = x^2 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = 2x\, dx \rightsquigarrow dy = 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\arctan y = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$ [Verifica]

Esempio 6 $\int \sin^3 x \, dx$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Grande ritorno!

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\sin^2 x} \, dx = -\underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\sin^2 x} - \int (-\cos x)\, 2 \sin x \cdot \cos x \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \, dx - 2 \int \sin^3 x \, dx$$

Quindi $3 \int \sin^3 x \, dx = -\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x$ ⇝ si finisce

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Per sostituzione (funziona con esponente dispari)

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \cdot \sin x \, dx = \star$$

Pongo $y = \cos x$ ⇝ $dy = -\sin x \, dx$, quindi

$$\star = \int (1-y^2) \cdot (-dy) = \int (y^2-1) \, dy = \frac{1}{3} y^3 - y = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$$

[Controllare sia lo stesso di prima]

Esempio 7 $\int \cos^7 x \, dx$ Grande ritorno possibile ma lungo

$$\int \cos^7 x \, dx = \int \cos^6 x \cdot \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^3 \cdot \cos x \, dx$$

Pongo $y = \sin x$ ⇝ $dy = \cos x \cdot dx$

⇝ $\int (1-y^2)^3 \, dy = \int (1-3y^2+3y^4-y^6) \, dy$ = si fa comodo

Esempio 8 $\int \frac{1}{x \log^3 x} \, dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 x}$

Esempio 9 $\int x^2 \log^3 x \, dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx$

$$\int x^2 \log^3 x \, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ e^{3y}}}{x^3} \underbrace{\log^3 x}_{y^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y^3 e^{3y} dy$$

= per parti si fa

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$\int \underset{f}{x^2} \cdot \underset{G}{\log^3 x} \, dx = \underset{F}{\frac{1}{3} x^3} \underset{G}{\log^3 x} - \int \underset{F}{\frac{1}{3} x^3} \cdot \underset{g}{3 \log^2 x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log^3 x - \int x^2 \log^2 x \, dx$$

e così in 3 passaggi si chiude

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 72

Note Title 07/03/2025

Integrazione delle funzioni razionale

Funzione razionale $= \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ polinomi

Buona notizia: SE siamo capaci di fattorizzare $Q(x)$, allora sappiamo trovare una primitiva fatta di 3 pezzi

→ funzione razionale

→ un po' di logaritmo

→ un po' di arctan

Road map
① Divisione
② Fattorizzazione
③ Sistema lineare (decomposizione)
④ Integrazione

1 Divisione

Devo calcolare $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Se grado $(P(x)) <$ grado$(Q(x))$ non faccio nulla

Se grado $(P(x)) \geq$ grado $(Q(x))$, allora divido $P(x)$ per $Q(x)$.

Ottengo

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{resto con grado } R(x) < \text{grado } Q(x)}$$

Dividendo trovo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio che} \\ \text{so integrare}}}{A(x)} + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

↖ Nuova funz. raz. con grado num < grado denom

<u>Conseguenza</u>: basta saper integrare quando grado sopra < grado sotto

<u>Esempio 1</u> $\int \frac{x^3+3}{x-4}\,dx$ Divido

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 3 & x-4 \\ \cline{2-2}
-x^3+4x^2 & x^2+4x+16 \\ \cline{1-1}
4x^2+3 & \\
-4x^2+16x & \\ \cline{1-1}
16x+3 & \\
-16x+64 & \\ \cline{1-1}
67 &
\end{array}
$$

Dalla divisione sappiamo che

$$\underbrace{x^3+3}_{P(x)} = \underbrace{(x-4)}_{Q(x)}\underbrace{(x^2+4x+16)}_{A(x)} + \underbrace{67}_{R(x)}$$

$$\int \frac{x^3+3}{x-4}\,dx = \int (x^2+4x+16)\,dx + \int \frac{67}{x-4}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+2x^2+16x + 67\log|x-4| \quad \text{[Verifica!]}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Fattorizzazione}}$ Si tratta di scomporre il denomin. $Q(x)$

<u>Teorema misterioso</u> Ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si "può" scrivere come prodotto di fattori di primo grado oppure di secondo grado a loro volta non ulteriormente scomponibili

La fase 2 consiste nello scrivere

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} (a_i x+b_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{N} (A_j x^2 + B_j x + C_j)^{M_j}$$

Gli esponenti m_i e M_j sono le molteplicità dei fattori.
I fattori di 2° grado non sono ulteriormente scomponibili se

$$B_j^2 - 4A_jC_j < 0 \quad \text{(discriminante negativo)}$$

Esempi $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

↑ Non si scompone oltre

$$x^3+1 = (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta = 1-4=-3<0}$$

Achtung! L'esistenza della fattorizzazione non vuol dire che la sappiamo trovare esplicitamente!!

3 Sistema lineare (Decomposizione)

Si tratta di scrivere la funzione razionale come somma di funzioni razionali "più semplici":

→ caso facile

→ caso generale

Caso facile: nella scomposizione di $Q(x)$ tutti i fattori (di primo e secondo grado) hanno moltepl. $= 1$

Allora si può scrivere la frazione come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori.

Esempi
$$\frac{3x^2+4}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}$$

Voglio trovare numeri A, B, C in modo che funzioni

Se faccio il denom. comune trovo

$$\frac{A(x+3)(x+5)+B(x-1)(x+5)+C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{3x^2+4}{(\ldots)(\ldots)(\ldots)}$$

Calcolo il numeratore

$$\underbrace{Ax^2}_{} + \underbrace{8Ax}_{} + \underbrace{15A}_{} + \underbrace{Bx^2}_{} + \underbrace{4Bx}_{} - \underbrace{5B}_{} + \underbrace{Cx^2}_{} + \underbrace{2Cx}_{} - \underbrace{3C}_{} = 3x^2+4$$

$$\begin{cases} A+B+C = 3 \\ 8A+4B+2C = 0 \\ 15A-5B-3C = 4 \end{cases}$$

Sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite $\rightsquigarrow$ c'è speranza di trovare in modo unico A, B, C.

Teorema misterioso Sì, ci riesco sempre.

Modo astuto di by-passare il sistema: guardiamo i numeratori nell'ultima riga della pagina precedente.

Sostituisco $x = 1 \rightsquigarrow 24A = 7 \rightsquigarrow A = \frac{7}{24}$

$x = -3 \rightsquigarrow -8B = 31 \rightsquigarrow B = -\frac{31}{8}$

$x = -5 \rightsquigarrow 12C = 79 \rightsquigarrow C = \frac{79}{12}$

Trovati A, B, C l'integrale è fatto!!

Se ci sono fattori di 2° grado, su quelli occorre mettere un numeratore di 1° grado

Esempio $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Cosa diventa il sistema lineare?

$A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x^2+1$ (guardo solo i numeratori)

$Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = x^2+1$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A-B+C = 0 \\ A-C = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{risolvo e trovo } A, B, C$$

Scorciatoia: metto $x=1$ subito e trovo $3A = 2 \rightsquigarrow A = \frac{2}{3}$

$\rightsquigarrow B = \frac{1}{3} \rightsquigarrow C = -\frac{1}{3}$

Quindi $\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}$

Basta integrare quello che è rimasto

Regola generale: se le molteplicità sono tutte 1, allora

$\rightsquigarrow$ costanti sopra i fattori di primo grado

$\rightsquigarrow$ roba di primo grado su quelli di secondo

$\rightsquigarrow$ il sistema ha sempre soluzione unica

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{x^3}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 73

Note Title 07/03/2025

Decomposizione nel caso generale

Se nella fattorizz. del denom. ci sono fattori con molt. >1, allora ci sono due possibili strade

→ decomposizione in fratti semplici

→ decomposizione di HERMITE

Fratti semplici $Q(x) = (x-3)(x+1)^3(x^2+4)^2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+4} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

Regola: ogni fattore di primo o secondo grado con molt $= m$ produce m frazioni i cui denominatori hanno le potenze da 1 ad m

Al numeratore usiamo costanti o polinomi di 1° grado a seconda del tipo di fattore al denominatore

Accade sempre che Numero incognite = grado denominatore

Decomposizione di Hermite $Q(x) = (x-3)(x+1)^3(x^2+4)^2$

Numeratore che ha grado 1 in meno del denominatore

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}}_{\text{come se le molteplicità fossero tutte 1}} + \frac{d}{dx}\,\frac{\overbrace{Ex^3+Fx^2+Gx+H}}{\boxed{(x+1)^2(x^2+4)}}$$

stessi fattori di $Q(x)$ con molteplicità diminuita di uno

Vantaggio di Hermite: è banale alla fine fare la primitiva di una derivata

<u>Esempio</u> $\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^4}\,dx$

Divisione non serve. Fattorizzazione: $x^5+2x^4 = x^4(x+2)$

<u>Fratti semplici</u>: $\frac{x^3+1}{x^4(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4}$

<u>Hermite</u>: $\frac{x^3+1}{x^4(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{d}{dx}\frac{Cx^2+Dx+E}{x^3}$ grado 2 grado 3

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x^3}\right)$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2} - \frac{2D}{x^3} - \frac{3E}{x^4}$$

Alla fine il conto è molto simile...

4 <u>Integrazione</u> Se abbiamo lavorata alla Hermite, alla fine ci ritroviamo da integrare cose di questo tipo

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx \qquad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Non ulteriormente scomponibile

Ora

$$\boxed{\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\log|ax+b|}$$

I fattori di 2° grado si aggiustano con log e arctan

Esempio 1 $\int \frac{3x+2}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\log \underbrace{(x^2+1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{sempre } >0, \\ \text{quindi non serve} \\ \text{il valore assoluto}}} + 2\arctan x$$

Esempio 2 $\int \frac{x-3}{1+2x^2}\,dx$

$$\int \frac{x}{1+2x^2}\,dx - \int \frac{3}{1+2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+2x^2) - 3\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+2x^2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)$$

Esempio 3 $\int \frac{x-3}{2+x^2}\,dx$

$$\int \frac{x}{2+x^2}\,dx - \int \frac{3}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2+x^2}\,dx - 3\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+x^2) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+x^2) - \frac{3}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Da ricordare: $\boxed{\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}$ $\boxed{\text{se } a>0}$

$$\int \frac{1}{a+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

Esempio 4 $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$

"se punto al log, cosa vorrei come numeratore?"
Vorrei $2x+2$, quindi cerco di farlo comparire

$$\frac{x+3}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+6}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2+4}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)$$

Fatto di precorso: ogni polinomio di secondo grado che non ha radici reali (diciamo sempre positivo) lo posso scrivere come

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Numero positivo}}}{a} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{quadrato}}}{(bx+c)^2}$$

Esempio 5 $\int \frac{x}{\underbrace{x^2+x+1}_{\Delta<0}}\,dx$

Per il log ci vuole sopra $2x+1$, quindi me lo procuro.

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)}}{\frac{2x+1}{x^2+x+1}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{positivo}}}{\frac{3}{4}} + \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\substack{\uparrow\\ \text{quadrato}}}$$

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx \quad = \text{caso con } a=\frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

con $a=\frac{3}{4}$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 74

Note Title 07/03/2025

Esempio 1 $\int \frac{2x+3}{x-5}\,dx$

Sopra vorrei $2x-10$ e quindi me lo procuro

$$\int \frac{2x+3}{x-5}\,dx = \int \frac{2x-10+13}{x-5}\,dx = \int 2+\frac{13}{x-5}\,dx$$

$$= 2x + 13\log|x-5|$$

Se volessi usare l'algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x-5 \\ \hline -2x+10 & 2 \\ \hline 13 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow (2x+3) = 2(x-5)+13$$

$$\rightsquigarrow \frac{2x+3}{x-5} = 2 + \frac{13}{x-5}$$

Esempio 2 $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$

$\boxed{1: \text{Divisione}}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3+x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow x^3 = (x^2-1)x + x$$

[verifica]

Quindi $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \log|x^2-1|$$

Esempio 3 $\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$

$\boxed{1: \text{Divisione}}$ Non serve

$\boxed{2: \text{Fattorizzazione}}$ $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$\boxed{\text{3: Sistema lineare}}$ $\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$

Guardo il numeratore: $x = 1 \leadsto 4 = 2B \leadsto B = 2$

$x = -1 \leadsto 2 = -2A \leadsto A = -1$

Quindi la decomposizione in fratti semplici è

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$ [Verifica!]

$\boxed{\text{4: Integrare}}$ $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-1} = -\log|x+1| + 2\log|x-1| = \log\frac{(x-1)^2}{|x+1|}$

Esempio 4 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\boxed{3}$ Decomposizione Se uso i fratti semplici è già decomposto e non lo devo integrare

Hermite: $$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx^2+C-2Cx^2-2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^2+C-2Cx^2-2Dx}{(x^2+1)^2}$$

Sistema lineare:

$A = 0$	coeff. x^3	$A = 0$
$B - C = 0$	coeff. x^2	$B = \frac{1}{2}$
$A - 2D = 0$	coeff x	$D = 0$
$B + C = 1$	termine noto	$C = \frac{1}{2}$

Quindi

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}$$ [Verifica!]

$\boxed{\text{Alternativa:}}$ trucco e poi per parti

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \underset{f}{\frac{x}{(x^2+1)^2}} \cdot \underset{G}{x}\,dx$$

$$= \arctan x + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{2}}_{F} \cdot \underbrace{x}_{G} - \int \underset{F}{\frac{1}{2}}\;\underset{g}{\frac{1}{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \arctan x - \frac{1}{2}\arctan x$$

Allo stesso modo si possono fare tutte le potenze

Esempio 5 $\int \frac{1}{(x^2+1)^{20}}\,dx$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{20}}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{20}}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,dx - \int \underset{f}{\frac{x}{(1+x^2)^{20}}} \cdot \underset{G}{x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,dx + \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{19}}\,\frac{1}{19}\,\frac{1}{2}}_{F}\,\underbrace{x}_{G} - \frac{1}{38}\int \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^{19}}}_{F}\,\underset{g}{dx}$$

Quindi mi sono ridotto alla potenza 19 e si procede

Esempio 6 $\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx$

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$x = -2 \rightsquigarrow A = -2$

$x = -3 \rightsquigarrow B = 3$

Quindi $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,dx = -2\int \frac{1}{x+2}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}$

$$= -2\log|x+2| + 3\log|x+3|$$

$$= \log\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$$

<u>Esempio 7</u> $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^4-1}\,dx$

$\boxed{\text{2: Fattorizzazione}}$ $x^4-1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\boxed{\text{3: Decomposizione}}$ $\displaystyle\frac{x^3+2}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

Potrei svolgere bovinamente e impostare il sistema, oppure

$x=-1 \rightsquigarrow 1 = -4A \rightsquigarrow A = -\frac{1}{4}$

$x = 1 \rightsquigarrow 3 = 4B \rightsquigarrow B = \frac{3}{4}$

$x = i \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ i^3}}{-i} + 2 = (Ci+D)(-2) = -2Ci - 2D \rightsquigarrow C = \frac{1}{2} \quad D = -1$

$\boxed{4}$ Resta da integrare $\displaystyle -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x-1}{x^2+1}$

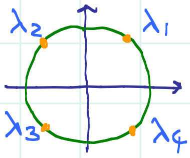
e si fanno tutti abbastanza bene

<u>Esempio 8</u> $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

$\boxed{\text{2 - Fattorizzare}}$ Come scomporre x^4+1 ?

<u>1° modo</u>: uso le radici complesse e le accoppio a 2 a 2

$x^4 = -1$



$$x = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

Quindi sui complessi so fattorizzare, poi accoppio i fattori λ_2 e λ_3 e λ_1 e λ_4

2° modo : senza numeri complessi

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\ &= (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \qquad\qquad A^2-B^2 \\ &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \qquad (A+B)(A-B) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{3 - Decomposizione}}$

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Risolvo e poi integro con log + arctan.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 75

Note Title 08/03/2025

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI Come trasformare integrali "strani" in integrali di funzioni razionali.

① Funzioni razionali di e^x ($\text{Raz}(e^x)$)

② Funzioni razionali di x e radici di roba di primo grado

($\text{Raz}(x, \sqrt[m]{x})$ o più in generali $\sqrt[m]{\text{roba di } 1^\circ \text{ grado}}$)

③ Radici quadrate di roba di 2° grado $\sqrt{ax^2+bx+c}$

④ Funzioni razionali di sin e cos $\text{Raz}(\sin x, \cos x)$

$\boxed{1}$ $\text{Raz}(e^x)$ Si pone $e^x = y$ e si vede che succede

Esempio 1 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,dx$

Pongo $y = e^x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = e^x \rightsquigarrow dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,dx = \int \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}\,\frac{1}{e^x}\cdot\underbrace{e^x dx}_{dy} = \int \frac{y^2+1}{(y-3)y}\,dy$$

L'ultimo lo so fare come funzione razionale (divisione, ...)

Piccola alternativa: $y = e^x \rightsquigarrow x = \log y \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \rightsquigarrow dx = \frac{1}{y}dy$

e si arriva allo stesso punto.

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,dx$

Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \cdot \log 2\, dx$

$$\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,dx = \frac{1}{\log 2}\int \frac{8^x+1}{4^x+3}\,\frac{1}{2^x}\cdot\underbrace{2^x \cdot \log 2\, dx}_{dy} = \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^3+1}{(y^2+3)y}\,dy = \dots$$

$\boxed{2}$ Funzioni razionali di x e radici di roba di 1° grado

Esempio 3 $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx$

Pongo $y = \sqrt{x+1} \rightsquigarrow$ (punto a ricavare) $y^2 = x+1 \rightsquigarrow x = y^2-1$

(sto ricavando x senza usare radici) $\rightsquigarrow \dfrac{dx}{dy} = 2y \rightsquigarrow dx = 2y\,dy$

Siamo pronti a sostituire

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx = \int \frac{\overbrace{y^2-1}^{x}+2}{\underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{x+1}}}{y}+3}\,\underbrace{2y\,dy}_{dx} = 2\int \frac{(y^2+1)\,y}{y+3}\,dy$$

Facciamolo per esercizio $\displaystyle\int \frac{y^3+y}{y+3}\,dy$

1-Divisione

$$\begin{array}{l|l} y^3+y & y+3 \\ \cline{2-2} -y^3-3y^2 & y^2-3y+10 \\ \cline{1-1} -3y^2+y & \\ 3y^2+9y & \\ \cline{1-1} 10y & \\ -10y-30 & \\ \cline{1-1} -30 & \end{array}$$

$$\int \frac{y^3+y}{y+3}\,dy = \int \left(y^2-3y+10-\frac{30}{y+3}\right)dy$$

$$= \frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+10y\underbrace{-30\log|y+3|}_{+\log\frac{1}{(y+3)^{30}}}$$

Non resta che tornare in x

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+3}\,dx = \frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}(x+1)+10\sqrt{x+1}+\log\frac{1}{(\sqrt{x+1}+3)^{30}}$$

[Derivare per verifica!]

Esempio 4 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (quando ricavo x, ottengo equazioni di 1°grado)

$$\rightsquigarrow y^2 = \frac{x+1}{x+2} \rightsquigarrow xy^2 + 2y^2 = x+1 \rightsquigarrow x(y^2-1) = 1-2y^2$$

$$\rightsquigarrow x = \frac{1-2y^2}{y^2-1} \rightsquigarrow dx = \underbrace{\left(\frac{1-2y^2}{y^2-1}\right)'}_{\text{volendo potrei calcolarla}} dy$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx = \int \underset{G}{y} \underset{f}{\left(\frac{1-2y^2}{y^2-1}\right)'} dy$$

$$= \underset{G}{y} \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}\,dy$$

Da qui si chiude facilmente

$$\int \frac{1-2y^2}{y^2-1}\,dy = \int \frac{2-2y^2-1}{y^2-1}\,dy = \int \left(-2 - \frac{1}{y^2-1}\right) dy$$

$$= -2y - \int \frac{1}{y^2-1}\,dy \quad \dots \quad \frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

... trovo A e B e concludo.

Alla fine al posto di y devo mettere tutta la radice

Esempio 5 $\int \frac{\sqrt{x+5} + x}{\sqrt[3]{x+5}+3}\,dx$ Tante radici con indici diversi, ma della STESSA ROBA

Pongo $y = \sqrt[6]{x+5}$ $\rightsquigarrow$ a questo punto $\sqrt{x+5} = y^3$ e $\sqrt[3]{x+5} = y^2$

$$\rightsquigarrow y^6 = x+5 \rightsquigarrow x = y^6 - 5 \rightsquigarrow dx = 6y^5 dy$$

Basta sostituire

integrale dato $= \displaystyle\int \frac{\overset{\sqrt{x+5}}{\overset{\downarrow}{y^3}} + \overbrace{\overset{\downarrow}{y^6} - 5}^{x}}{\underset{\sqrt[3]{x+5}}{\underset{\uparrow}{y^2}} + 3} \underbrace{6y^5\,dy}_{dx}$ = si fa e poi si sostituisce

<u>Regola generale</u>: se ho tante radici della stessa espressione $\frac{ax+b}{cx+d}$ con indici $m_1, \dots, m_k$, allora la sostituzione vincente è

$$y = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{con } m = \text{min. com. multiplo } (m_1, \dots, m_k)$$

$\boxed{3}$ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ Tre metodi a disposizione

$\boxed{\text{1° metodo}}$ <u>Sostituzioni trigonometriche</u>

<u>Esempio 6</u> (Caso base) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Pongo $x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y\,dy$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy = (\star)$$

$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1 \rightsquigarrow \cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$$

$$(\star) = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2y)\right) dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\underset{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\underset{\uparrow}{\cos y}}\sin y$$

Quando torno in x trovo $x = \sin y \rightsquigarrow y = \arcsin x$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\underset{\sin y}{\underset{\uparrow}{x}}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\overset{\uparrow}{\cos y}}$$

[Derivando abbiamo una certezza che è davvero la primitiva]

Esempio 7 $\int \sqrt{3-5x^2}\,dx$

$$= \sqrt{3}\int\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}\,dx = \sqrt{3}\int\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}\,dx = (\ast)$$

Pongo $z = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x \rightsquigarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}z \rightsquigarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,dz$

$$(\ast) = \sqrt{3}\int\sqrt{1-z^2}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,dz = \frac{3}{\sqrt{5}}\int\sqrt{1-z^2}\,dz$$

$= \frac{3}{2\sqrt{5}}\left(\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}\right) \rightsquigarrow$ sostituisco di nuovo z.

Alternativa: da subito $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sin y$

$\rightsquigarrow \sqrt{3-5x^2} = \sqrt{3-3\sin^2 y} = \sqrt{3}\cos y$ e non resta che calcolare dx

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 76

Note Title 08/03/2025

Ancora sostituzioni trigonometriche

Esempio 1 $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Ricordiamo che $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ e $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

Quindi pongo

$x = \sinh y \rightsquigarrow dx = \cosh y\, dy$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 y} \cdot \cosh y\, dy = \int \cosh^2 y\, dy$$

Come integro $\cosh^2 y$? → o ricordo chi è $\cosh y$ in termini di e^y

→ o ricordo che

$$\cosh(2y) = \cosh^2 y + \sinh^2 y$$
$$= 2\cosh^2 y + 1$$

da cui $\cosh^2 y = \dfrac{\cosh(2y)-1}{2}$ e quindi

$\int \cosh^2 y\, dy = -\frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \sinh(2y)$ e posso proseguire con $\sinh(2y) = \ldots$

In generale, se abbiamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ il metodo trigonometrico consiste nello scrivere

$$ax^2+bx+c = \text{costante} \pm \text{quadrato}$$

e ridursi ai casi $\sqrt{1+x^2}$ oppure $\sqrt{1-x^2}$

$\boxed{\text{2° metodo}}$ **Esempio 2** $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Pongo $\sqrt{1+x^2} = x+y$ (Idea: se provo a ricavare x, viene di 1° grado)

$$1+\cancel{x^2} = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \rightsquigarrow x = \frac{1-y^2}{2y} \rightsquigarrow dx = \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy$$

Sostituendo

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y}+y\right)}_{x\ +y} \underbrace{\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy}_{dx}$$

da qui in poi è razionale e si fa ... alla fine sostituisco

$$y = \sqrt{1+x^2} - x$$

Esempio 3 $\int \sqrt{3x^2+5x-2}\,dx$

Pongo $\sqrt{3x^2+5x-2} = \sqrt{3}\,x + y$

Quando vado a ricavare

$$\cancel{3x^2}+5x-2 = \cancel{3x^2}+2\sqrt{3}xy+y^2$$

$$\rightsquigarrow x(2\sqrt{3}y-5) = -2-y^2 \rightsquigarrow x = -\frac{y^2+2}{2\sqrt{3}y-5} \rightsquigarrow dx = (\ )'dy$$

e sostituendo è tutto brutto ma razionale!

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Se ho $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, allora pongo

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + y}$$

Funziona tutte le volte che $a>0$

$\boxed{3^\circ \text{ metodo}}$ Fattorizzo il polinomio di 2° grado

Esempio 4 $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

Si potrebbe fare con il metodo trigonometrico ponendo

$$x = \cosh y \rightsquigarrow \sqrt{x^2-1} = \sinh y$$

Osservo che $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

Scelgo uno a caso dei due fattori, ad esempio $x+1$, e pongo

$\sqrt{x^2-1} = y(x+1)$ $\rightsquigarrow$ se vado a ricavare $x^2-1 = y^2(x+1)^2$

$(\cancel{x+1})(x-1) = y^2(x+1)^{\cancel{2}}$ [Nuovamente di 1° grado in x!]

$x(y^2-1) = -1-y^2$ $\rightsquigarrow$ $x = \dfrac{y^2+1}{1-y^2}$ $\rightsquigarrow$ $dx = \left(\dfrac{y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$

Quindi mi sono ridotto ad integrare

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \underbrace{y\left(\frac{y^2+1}{1-y^2}+1\right)}_{y\,(x+1)} \left(\frac{y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$$

= non bellissimo, ma razionale...

alla fine sostituisco

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Esempio 5 $\int \sqrt{x^2-6x+8}\,dx$

Osservo che $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ e poi pongo

$\sqrt{x^2-6x+8} = y(x-2)$ $\rightsquigarrow$ $x^2-6x+8 = y^2(x-2)^{\cancel{2}}$

$= (\cancel{x-2})(x-4)$

$\rightsquigarrow$ $x(1-y^2) = 4-2y^2$ $\rightsquigarrow$ $x = \dfrac{4-2y^2}{1-y^2}$ e da qui in poi è tutto razionale

Fatto generale Se $ax^2+bx+c = a(x-\underset{\uparrow}{\lambda})(x-\underset{\uparrow}{\mu})$, allora posso porre

radici del polinomio

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure} \quad y(x-\mu)$$

Riassunto per $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$

- Se $a>0$ posso usare $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x + y$
- Se $\Delta > 0$ posso usare $\sqrt{ax^2+bx+c} = y\,(x-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{radice}}}{\lambda})$

- Se $\Delta = 0$ il pol. di 2° grado è un quadrato...

Sembrano esserci problemi quando $a<0$ e $\Delta<0$. Però in questo caso $ax^2+bx+c<0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la radice non è definita per nessun valore di x !!
Quindi tutti i casi possibili sono coperti

Esempio 6 $\int \sqrt{x^2+4x+7}\, dx$

$\Delta = 16-28 < 0 \rightsquigarrow$ niente metodo con le radici

Il coeff. di x^2 è positivo, quindi ok con $\sqrt{x^2+4x+7} = x+y$ e ricavo y.

Possiamo farlo con metodo trigonometrico?

$$x^2+4x+7 = x^2+4x+4+3 = (x+2)^2+3 \quad \text{, quindi}$$

$$\int\sqrt{x^2+4x+7}\, dx = \int \sqrt{3+(x+2)^2}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ z=x+2}}{=} \int \sqrt{3+z^2}\, dz$$

Ora pongo $z = \sqrt{3}\sinh y$ e viene

$$\int \sqrt{3+3\sinh^2 y}\ \underbrace{\sqrt{3}\cosh y\, dy}_{dz} = 3\int \cosh^2 y\, dy = \text{si fa}$$

Esempio 7 $\int \sqrt{x^2+4x-7}\, dx$

$\Delta = 16+28 > 0 \rightsquigarrow$ potevo usare $\sqrt{x^2+4x-7} = y\,(x-\lambda)$
dove λ è una delle radici del polinomio

Coeff. x^2 è >0, quindi posso fare $\sqrt{x^2+4x-7} = x+y$

Se lo voglio fare trigonometrico, osservo che

$x^2+4x-7 = x^2+4x+4-11 = (x+2)^2-11$, quindi

$$\int \sqrt{x^2+4x-7}\, dx = \int \sqrt{(x+2)^2-11}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ z = x+2}}{=} \int \sqrt{z^2-11}\, dz$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ z=\sqrt{11}\cosh y}}{=} \int \sqrt{11\cosh^2-11} \cdot \sqrt{11}\sinh y\, dy = 11 \int \sinh^2 y\, dy$$

ANALISI 1 - LEZIONE 77

Note Title 08/03/2025

4 Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

Ultima spiaggia : formule parametriche (se le conosci, le eviti)

Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$ e ricordo che $\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ $\cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}$

$\frac{x}{2} = \arctan y \rightsquigarrow x = 2\arctan y \rightsquigarrow dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$

Esempio 1 $\int \frac{3+\sin x}{2+\cos x}\,dx$

Sostituisco bovinamente le formule

$$\int \frac{3+\frac{2y}{y^2+1}}{2+\frac{1-y^2}{y^2+1}} \, \frac{2}{1+y^2}\,dy = \int \frac{3y^2+2y+3}{y^2+3}\,\frac{2}{1+y^2}\,dy = \text{si fa}$$

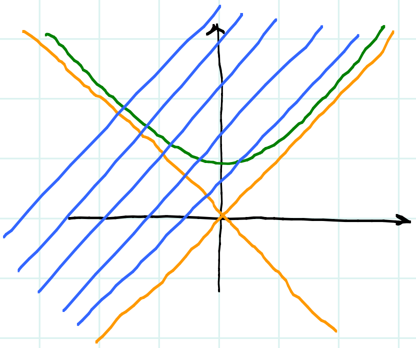
— o — o —

Interpretazione geometrica delle sostituzioni razionalizzanti

Scenario 1 $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ Come è fatto il grafico?

Sostituzione $\sqrt{1+x^2} = \underbrace{x+t}$

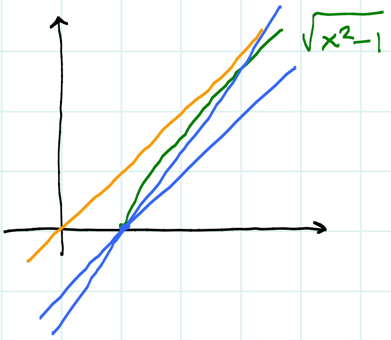
al variare di t, questa è una famiglia di rette parallele all'asintoto



Fissato t, ho un'unica soluzione in x

Algebricamente, l'equazione diventava di 1° grado in x.

Scenario 2 $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$



La sostituzione $\sqrt{x^2-1} = x+t$
ha la stessa interpretazione di prima

La sostituzione $\sqrt{x^2-1} = \underbrace{t(x-1)}$

famiglia di rette che
passano per $(1,0)$
(t è il coeff. angolare)

Quando vado ad intersecare retta e iperbole trovo due p.ti, di cui però uno lo conosco già perché è $(1,0)$, quindi resta una sola soluzione.

Esempio creativo $\int \sqrt{x^2+7x+1}\,dx$

Osservo che il p.to $(1,3)$ sta sul grafico della funzione.
Quindi posso provare la sostituzione

$$\sqrt{x^2+7x+1} = 3+t(x-1)$$

Faccio il conto

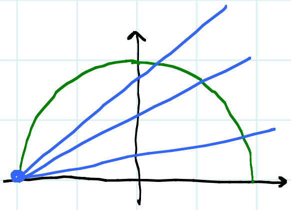
$$x^2+7x+1 = 9+t^2(x-1)^2+6t(x-1)$$

$$x^2+7x-8 = t^2(x-1)^{\cancel{2}}+6t\cancel{(x-1)}$$

$$(x+8)\cancel{(x-1)} = t^2(x-1)+6t$$

⇝ posso ricavare x senza radicali!

Scenario 3 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

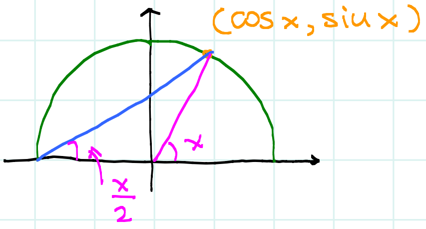


Considero la famiglia di rette per $(-1,0)$

$$\sqrt{1-x^2} = t(x+1) \rightsquigarrow (\cancel{1+x})(1-x) = t^2(x+1)^{\cancel{2}}$$

$1-x = t^2 x + t^2 \qquad x(t^2+1) = 1-t^2 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ formule parametriche

A quel punto $\sqrt{1-x^2} = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$



$t =$ coeff. angolare retta per $(-1,0)$ e $(\cos x, \sin x)$

$= \tan \frac{x}{2}$

Così si interpretano le formule parametriche.

Esempio 1 $\int \arcsin x \, dx$

Usiamo l'1 nascosto!

$$\int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\arcsin x} \, dx = \underset{G}{x} \, \underset{F}{\arcsin x} - \int \underset{G}{x} \, \underset{f}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \, dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Derivata per verifica: $\arcsin x + \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}} = \arcsin x$ ☺

Esempio 2 $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Parametriche bovine $\quad y = \tan \frac{x}{2} \rightsquigarrow dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

$\sin x = \frac{2y}{1+y^2} \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+y^2}{2y} \underbrace{\frac{2}{1+y^2} dy}_{dx}$

$$= \int \frac{1}{y} dy = \log |y|$$

$$= \log \left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ (Va bene per tutte le potenze dispari)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

Pongo $y = \cos x \leadsto dy = -\sin x\, dx$ $\quad \int \frac{-dy}{1-y^2} = \int \frac{dy}{y^2-1}$

$= $ si fa facile

Esempio 3 $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Parametriche bovine

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$$= \underset{\displaystyle \downarrow \atop \displaystyle \tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\tan x - \frac{1}{\cos x}$$

Esempio 4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

Si può fare calcolando la primitiva, ma si può usare la simmetria!

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

Poiché $\sin x$ e $\cos x$ sono uno il simmetrico dell'altro in $[0, \frac{\pi}{2}]$, la stessa cosa vale per $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$, quindi

$$S = C$$

Ma

$$S + C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \frac{\pi}{2} \leadsto S = C = \frac{\pi}{4}$$

Fatto generale :

$\boxed{h, k \text{ interi}}$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \underbrace{\frac{\pi}{4}(h-k)}_{\text{metà della lungh. dell'intervallo}}$$

Achtung! Funziona solo per i quadrati e solo se gli estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ altrimenti addio simmetria!

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 078

Note Title 21/03/2025

INTEGRALI $\int_A f(x)\,dx$ $A \subseteq \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$

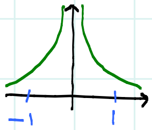
PROPRIO Serve che

① A sia insieme limitato (contenuto dentro intervallo)

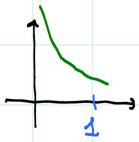
② f sia funzione limitata ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$)

IMPROPRIO Se mancano uno, o entrambi, gli ingredienti precedenti

Esempi $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① OK ② NO



$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ① OK ② NO



$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① NO ② SI

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ① NO ② NO

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ ① SI ② SI È un integrale PROPRIO perché

$0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x \in (0,1)$

INTEGRALI MONOPROBLEMA Sono gli integrali che ricadono in una delle seguenti tipologie

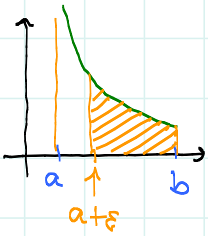
→ zona di integrazione $[a,b]$
funzione da integrare non limitata solo vicino ad un estremo

→ zona di integrazione: semiretta $[a,+\infty)$ oppure $(-\infty, a]$
funzione da integrare limitata

DEFINIZIONI PER INTEGRALI MONOPROBLEMA

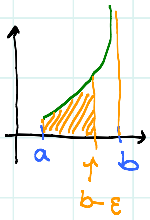
Caso 1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non limitata dalle parti di a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underbrace{\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}_{\text{A } \varepsilon>0 \text{ fisso, questo è un integrale proprio}}$$



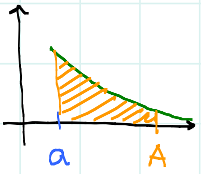
Se il problema fosse in b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$



Caso 2 $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$

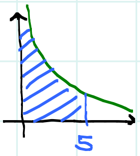
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{\text{è un integrale proprio perché } f \text{ è limitata}}$$



Se abbiamo $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, allora

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)\,dx$$

Esempio 1 $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$



$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^5 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{5}$$

Esempio 2 $\int_{7}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{7}^{A} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_{7}^{A} = \lim_{A\to+\infty} \left(2\sqrt{A} - 2\sqrt{7}\right) = +\infty$$

Oss. Un integrale improprio monoproblema, essendo definito come limite, ha le solite 4 opzioni

- è un numero reale
- $+\infty$
- $-\infty$
- non esiste

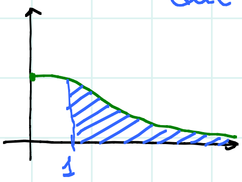
Esempio 3 $\int_{0}^{+\infty} \sin x\,dx$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\cos x\right]_{0}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[-\cos A + 1\right] = \text{NON ESISTE}$$

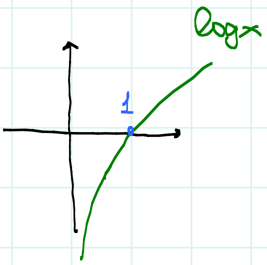
(si dimostra con le due successioni)

Esempio 4 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



$$\lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\underset{\downarrow\atop\frac{\pi}{2}}{\arctan A} - \underset{\shortparallel\atop\frac{\pi}{4}}{\arctan 1}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 5 $\int_{0}^{1} \log x\,dx$

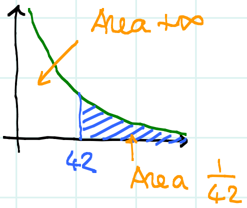


$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \log x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[x\log x - x\right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \underbrace{-\varepsilon\log\varepsilon}_{\downarrow\atop 0} + \underset{\downarrow\atop 0}{\varepsilon} - 1 = -1$$

E se un integrale ha tanti problemi?

Si spezza in tanti integrali che hanno un problema solo



Esempio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ Ha due problemi

Lo scrivo come $\int_0^{42} + \int_{42}^{+\infty}$ e li

studio separatamente (e il risultato non dipende dal punto di spezzamento)

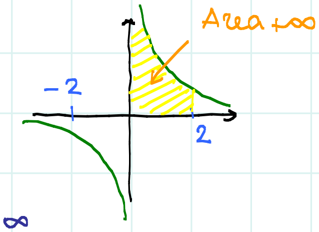
$$\int_{42}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{42}^{A} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{42}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{42}\right) = \frac{1}{42}$$

$$\int_0^{42} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^{42} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(-\frac{1}{42} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

Quindi l'integrale globalmente diverge a $+\infty$.

Achtung! Dopo aver fatto lo spezzamento, il risultato finale è la somma dei risultati, con la convenzione che se un pezzo è $+\infty$ e un pezzo è $-\infty$, allora il globale è per definizione indeterminato.



Esempio $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-2} \frac{1}{x}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty$$

Analogamente $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty$. Quindi l'integrale globalmente risulta indeterminato.

La compensazione è VIETATA.

ANALISI 1 - LEZIONE 079

Note Title 21/03/2025

Integrali impropri classici Sia $b>0$ numero reale

$$\boxed{\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a>1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a\leq 1 \end{cases}}$$

Problema $a+\infty$

$$\boxed{\int_0^{b} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a<1 \\ \searrow \text{diverge a} +\infty & \text{se } a\geq 1 \end{cases}}$$

Problema $a \; +\infty$

Oss. geometrica Le funzioni $\frac{1}{x^a}$ per x grandi diventano sempre + piccole all'aumentare di a
Quindi: più a è grande e più è facile che l'integrale converga.

Vicino a 0 le cose si scambiano: più a è grande, più la funzione è grande, quindi più è facile che l'integrale diverga

Dimostrazione del caso a $+\infty$

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_b^{A} \frac{1}{x^a}\,dx \overset{\text{se } a\neq 1}{=} \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{1-a}\,x^{1-a}\right]_b^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-a}\left[A^{1-a}-b^{1-a}\right]$$

- Se $a<1$, allora "A è al numeratore" e il limite fa $+\infty$
- Se $a>1$, allora "A è al denominatore" e il limite fa $\frac{b^{1-a}}{a-1}$
- Se $a=1$ $\dots = [\log x]_b^A = \lim_{A\to+\infty} (\log A - \log b) = +\infty$

La dimostrazione per il problema a 0 è analoga

$$\boxed{\int_b^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}}$$

Qui serve $b > 1$

Per la dimostrazione basta osservare che la primitiva è

$$\frac{1}{1-a}(\log x)^{1-a} \quad \text{se } a \neq 1 \qquad \log(\log x) \quad \text{se } a = 1$$

— o — o —

Criteri di convergenza Come stabilire se un integrale improprio converge senza calcolarlo esplicitamente (ad esempio perché non si sa calcolare la primitiva)

Occorre intanto guardare se il segno di $f(x)$ è costante (diciamo ≥ 0) oppure no (basta in realtà che il segno sia costante vicino al problema)

Segno costante	Segno variabile
→ criterio confronto	→ Assoluta integrabilità
→ confronto asintotico (caso standard e casi limite)	→ Tecniche per integrali oscillanti (Dirichlet)

Assoluta integrabilità Se $\int_E |f(x)|\,dx$ converge, allora

$$\int_E f(x)\,dx \text{ converge}$$

Non vale il viceversa.

Oss. Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$, allora $\int_E f(x)\,dx$ può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Le dimostrazioni sono analoghe a quelle per le serie

Esempio 1 $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+3x+1}\,dx$

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ L'unico problema è a $+\infty$. Qui bisogna osservare che il denominatore è sempre ≥ 1.

Brutal mode $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per x grandi, che è dove abbiamo il problema, quindi ci aspettiamo che l'integrale si comporti come $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ e quindi converge.

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Faccio confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$ quindi stesso comportamento

↑ perché il pbm. è a $+\infty$

Cosa ci sta sotto: se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$, allora

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 5$$ per ogni x abbastanza grande

cioè $$\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 5\,g(x)$$ per x grandi

Quindi se $\int g(x)\,dx$ converge, anche $\int f(x)\,dx$ converge per la disuguaglianza di destra.

Esempio 2 $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,dx$

Problema in $x=0$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ e questo converge perché $\frac{1}{2} < 1$

Rigoroso: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ che porta a fare

$$\lim_{\underbrace{x\to 0^+}_{\uparrow}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \dots$$

dove sta il problema

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+3x+1}\,dx$

Come prima $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$,

e questo diverge. Infatti $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \underset{\text{diverge}}{\underset{\uparrow}{\int_0^7 \frac{1}{x^2}\,dx}} + \underset{\text{converge}}{\underset{\uparrow}{\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}}$

LE RIGHE SOPRA SONO SPAZZATURA !! Infatti $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge per colpa di 0, ma $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ solo per x grandi.

L'esito corretto del confronto asintotico è questo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

quindi $\int f(x)\,dx$ con unico problema a $+\infty$
si comporta come $\int g(x)\,dx$ " " "
e quindi in questo caso converge

Oss. Se il problema è in $x=5$, si sposta in $x=0$ con un cambio di variabili.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 080

Note Title 21/03/2025

Esercizio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$

Due problemi: a 0 e a $+\infty$, quindi spezzo

$\displaystyle\int_{127}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Segno costante ☺

$f(x) \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$ quindi converge perché $\frac{3}{2} > 1$

$\displaystyle\int_0^{127} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Segno costante ☺

$f(x) \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ quindi converge perché $\frac{1}{2} < 1$

Esercizio 2 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ converge

Segno costante $f(x) \sim e^{-x}$ quindi si comporta come $\int e^{-x}dx$ con problema a $+\infty$, e questo converge come si può vedere in 2 modi

1° modo Confronto asintotico con $\frac{1}{x^{20}}$

$$\lim_{\underbrace{x\to+\infty}_{\uparrow \text{ problema}}} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{20}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{20}}{e^x} = 0 \quad \text{caso limite!}$$

$\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^{20}}} \to 0$, quindi $e^{-x} \leq \frac{1}{x^{20}}$ per x grandi

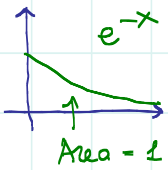
$\int \frac{1}{x^{20}}dx$ con pbm. all' ∞ converge, quindi converge anche $\int e^{-x}dx$ con pbm. a $+\infty$

2º modo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}+1\right) = 1$$



Esercizio 3 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x-1}\,dx$

Ora c'è pure il problema in $x=0$, quindi spezzo $\int_0^{+\infty}\dots = \int_0^{22}\dots + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{converge}}}{\int_{22}^{+\infty}\dots}$

Per il problema in $x=0$ osserviamo che

$\frac{1}{e^x-1}\sim\frac{1}{x}$ quindi l'integrale diverge perché l'esponente è 1.

Rigoroso: confr. asint. con $g(x)=\frac{1}{x}$ e mi riduco a

$$\lim_{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{problema}}}{x\to0^+}}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-1} = 1 \begin{matrix}\neq 0\\ \neq+\infty\end{matrix}$$

Esercizio 4 $\int_0^{20}\frac{\sin x}{e^x-1}\,dx$

Non è nemmeno un integrale improprio perché $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{e^x-1}=1$, quindi la funzione è limitata!

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,dx$ C'è un solo problema, MA il $\sin x$ fa variare il segno vicino al problema

Studio $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{e^x-1}\,dx$ e questo converge perché $\frac{|\sin x|}{e^x-1}\leq\frac{1}{e^x-1}$

e $\int\frac{1}{e^x-1}\,dx$ con problema all'infinito converge.

Quindi converge anche quello senza valore assoluto.

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$

Questo ha come problemi $+\infty$, $-\infty$, 0. Bisogna spezzare in 4 parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{0} \dots + \int_{0}^{4} \dots + \int_{4}^{+\infty} \dots$$

$\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ converge per confronto semplice con $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Idem per $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ $\qquad \displaystyle\frac{|\cos x|}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ quindi diverge perché perché $2 > 1$

Idem per $\displaystyle\int_{-2}^{0} \dots$. Quindi globalmente DIVERGE a $+\infty$.

Esempio 6 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ Segno costante, problemi in 1 e $+\infty$

A $+\infty$ abbiamo $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge.

Vediamo in $x = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)\underset{\uparrow\,\uparrow}{(x-1)}}}$$

COLPEVOLE DELL'IMPROPRIEZZA

$f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ che riportato in 0 diventa $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ e quindi converge perché $\frac{1}{2} < 1$.

Rigoroso: confr. asint. con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Ci troviamo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{problema}}}{\lim_{x \to 1^+}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$$

Quindi l'integrale dato si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con pblm. in $x=1$, il quale si comporta come (pongo $y = x-1$)

$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$ con problema in $y=0$, quindi converge

Esempio 7 $\int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx$ Problema in $x=1$

Poniamo $y = x-1$ per cui l'integrale diventa

$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+y)}\,dy$ $f(y) \sim \frac{1}{y}$ quindi diverge!

Esempio 8

$\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^a+3}\,dx$	$\int_3^{+\infty} \frac{x^a}{x^3+3}\,dx$	$\int_0^3 \frac{x^3+3}{x^a}\,dx$
↑ Converge se e solo se $\alpha > 2$	se e solo se $\alpha < 2$	se e solo se $\alpha < 1$ $\sim \frac{3}{x^\alpha}$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 81

Note Title 22/03/2025

INTEGRALI OSCILLANTI (Trucco dell'integrazione per parti)

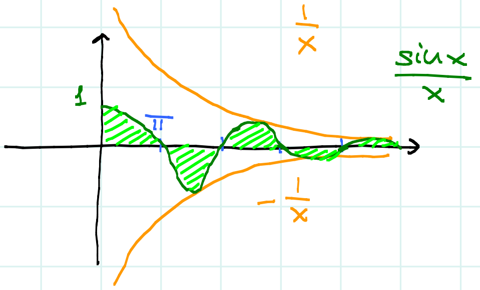
Esempi classici :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx \qquad \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\,dx$$

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



Osservo che l'unico problema è in $x = +\infty$ (in 0 il limite esiste ed è finito). Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{3} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{integrale proprio, quindi un numero}} + \int_3^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

↑ la convergenza dipende da questo

Oss. Se metto i valori assoluti $\dfrac{|\sin x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Ora

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \text{, quindi NON posso dire nulla di } \int_3^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

Tornando al problema

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_3^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_3^{A} \underset{G}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{f}{\sin x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[-\underset{FG}{\frac{\cos x}{x}}\right]_3^A - \int_3^A \underset{F}{\frac{\cos x}{x^2}}\,\underset{g}{dx}$$

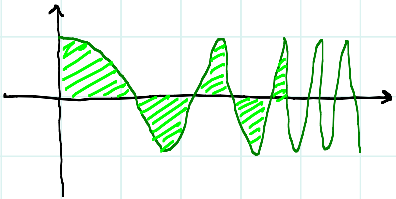
$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\cos A}{A}} + \frac{\cos 3}{3} - \int_3^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right) = \frac{\cos 3}{3} - \int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ora osservo che $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e quindi

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{confronto per}\\ \text{integrande } \geq 0}}{\Longrightarrow} \int_3^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \text{ converge} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Assoluta}\\ \text{integrabilità}}}{\Longrightarrow} \int_3^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx \text{ converge}$$

Quindi anche $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$



Intanto
$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^3 \cos(x^2)\,dx}_{\text{integrale proprio}} + \int_3^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$$

$$\int_3^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A \cos(x^2)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{2x}}_{G}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\left[\underset{FG}{\frac{\sin(x^2)}{2x}}\right]_3^A - \int_3^A \sin(x^2)\left(-\frac{1}{2x^2}\right)dx\right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\sin(A^2)}{2A}} - \underset{\substack{\downarrow\\ \text{numero}}}{\frac{\sin 9}{6}} + \frac{1}{2}\underset{\substack{\downarrow\\ \int_3^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}dx}}{\int_3^A \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx}\right\}$$

che converge assolutamente ☺

Oss. Per gli integrali impropri con problema all' infinito non è detta che valga la cond. necessaria come per le serie, cioè l' integrale può convergere anche se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste, come nell' esempio precedente.
Quello che non può succedere è che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$.

$\boxed{\text{CRITERIO DI DIRICHLET}}$ Consideriamo un integrale improprio del tipo

$$\int_M^{+\infty} a(x)\,b(x)\,dx$$

Supponiamo che
(i) la primitiva $A(x)$ di $a(x)$ è una funzione $\boxed{\text{limitata}}$
(ii) la funzione $b(x)$ è di classe C^1, $\boxed{\text{decrescente}}$ e tende a 0 per $x \to +\infty$.
Allora l' integrale improprio converge.

$\boxed{\text{Dim}}$ Come nei due esempi precedenti

$$\lim_{R\to+\infty} \int_M^R \underset{f}{a(x)}\,\underset{G}{b(x)}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \left\{ \left[\underset{F}{A(x)}\,\underset{G}{b(x)} \right]_M^R - \int_M^R \underset{F}{A(x)}\,\underset{g}{b'(x)}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left\{ \underbrace{A(R)\,b(R)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché } A \text{ è} \\ \text{limitato e } b(R)\to 0}} - \underbrace{A(M)\,b(M)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Numero}}} - \int_M^R A(x)\,b'(x)\,dx \right\}$$

$$= -A(M)\,b(M) - \underbrace{\int_M^{+\infty} A(x)\,b'(x)\,dx}_{\substack{\text{Spero che converga} \\ \text{assolutamente}}}$$

Metto i valori assoluti

$$\int_M^{+\infty} \underbrace{|A(x)|}_{\leq \text{costante}} \cdot |b'(x)|\,dx \quad \leq \text{costante} \cdot \int_M^{+\infty} |b'(x)|\,dx$$

Ora b è decrescente, quindi $b'(x) \leq 0$, quindi $|b'(x)| = -b'(x)$ e quindi

$$\int_M^R |b'(x)|\,dx = -\int_M^R b'(x)\,dx = -\left[b(x)\right]_M^R$$

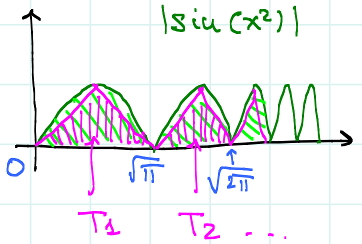
$$= -\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{b(R)} + b(M)$$

e quindi l'integrale converge.

ANALISI 1 — LEZIONE 82

Note Title 22/03/2025

METODO DEI TRIANGOLINI (RETTANGOLINI) (Le serie aiutano gli integrali)



Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$

Voglio dimostrare che diverge, ma non so fare la primitiva.
Uso che

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

dove $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ sono i triangoli in figura

Osservo che il triangolo T_n ha altezza $= 1$ e come base l'intervallo $[\sqrt{(n-1)\pi}, \sqrt{n\pi}]$, quindi la lungh. della base è

$$\sqrt{\pi}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

Quindi $\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ e quindi

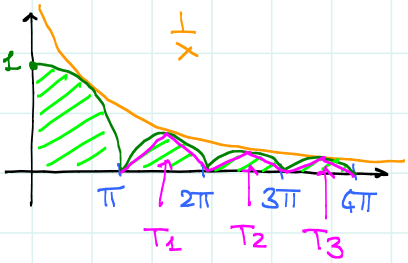
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

$$\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$, quindi la serie diverge

Visto che la serie diverge, allora diverge pure l'integrale.

<u>Oss.</u> La serie è pure telescopica.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$



Anche in questo caso voglio dimostrare che diverge

Piazzo dei triangolini sotto il grafico. Il triangolo T_n ha

→ come base l'intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, quindi base = π

→ come altezza il valore della funzione nel p.to medio della base, quindi in $n\pi + \frac{\pi}{2}$, dove $|\sin| = 1$, quindi

$$\text{altezza} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

→ Quindi area $(T_n) = \frac{1}{2}$ base . altezza $= \frac{1}{2} \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$

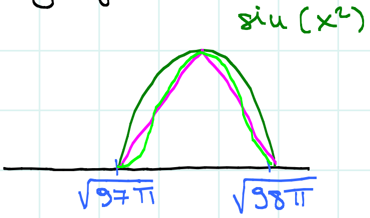
Ma allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = +\infty$

Oss. Sappiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx = +\infty$

Quindi geometricamente la somma delle aree sotto il grafico diverge, ma se le prendo a segno alterno converge per "effetto Leibnitz".

Oss. Nel metodo dei triangolini c'è del losco.

Non abbiamo mai dimostrato per bene che il triangolo sta sotto il grafico.

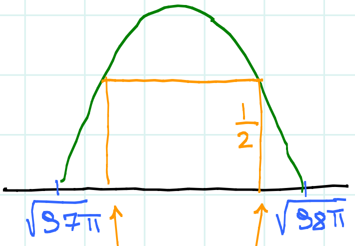


Come si aggiusta? O con uno studio di funzione (auguri!) oppure mettendo sotto un rettangolino, cioè mi chiedo dove è vero che $\sin(x^2) \geq \frac{1}{2}$

In questo caso nell'intervallo $x \in [\sqrt{37\pi}, \sqrt{98\pi}]$ avremo che

$\sin(x^2) \geq \frac{1}{2}$ se e solo se $x \in \left[\sqrt{37\pi + \frac{\pi}{6}}, \sqrt{98\pi - \frac{\pi}{6}}\right]$

e quindi piazzo sotto il grafico un rettangolo di altezza $\frac{1}{2}$



solo quelli che ho appena trovato

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}\,(R_n)$$

↑ rettangolo n-esimo con altezza $\frac{1}{2}$ e base nota

Stessa cosa nell'altro esempio

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx$ Per quali valori di a converge?

→ Per $a = 2$ lo abbiamo visto alla lezione precedente

→ Per $a = 1$ è indeterminato. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} \cos x\,dx = \lim_{A \to +\infty} [\sin x]_0^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \sin A \quad \text{e questo non esiste.}$$

→ Per $a > 1$ va sempre bene. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{a x^{a-1} \cos(x^a)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\frac{1}{a x^{a-1}}}_{\uparrow}\,dx$$

Funzione che ha come primitiva $\sin(x^a)$ che è limitata

se $a > 1$ è una funzione C^1 decrescente che tende a 0

Quindi ok per Dirichlet.

→ Per $a < 1$ va sempre male, nel senso che è indeterminato

Proviamo per $a = \frac{1}{2}$

$$\int_0^A \cos(\sqrt{x})\,dx$$

↑oscillazioni sempre più lente

$$= \int_0^A \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})}_{f} \cdot \underbrace{2\sqrt{x}}_{G}\,dx = \left[\sin\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

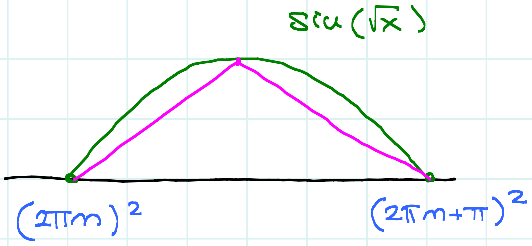
$$= 2\sqrt{A}\cdot\sin\sqrt{A} + \left[2\cos(\sqrt{x})\right]_0^A$$

$$= 2\sqrt{A}\cdot\sin\sqrt{A} + 2\cos(\sqrt{A}) - 2$$

Ora quando $A \to +\infty$ il limite non esiste (basta considerare le due sottosuccessioni $A_n = (n\pi)^2 \rightsquigarrow \sin\sqrt{A_n} = 0$

$A_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \rightsquigarrow \sin\sqrt{A_n} = 1$)

Oss. La non convergenza si poteva dimostrare anche con i triangolini o rettangolini



[Estremi corretti dopo video]

Se l'integrale convergesse, allora $\displaystyle\int_{(2\pi n)^2}^{(2\pi n+\pi)^2} \sin(\sqrt{x})\,dx \to 0$

Ma l'integrale è $\geq$ area del triangolo che ha altezza 1 e base che tende a $+\infty$ come n.

$$\int_{(2\pi n)^2}^{(2\pi n+\pi)^2} \dots = \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{\int_0^{(2\pi n+\pi)^2} \dots} - \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{\int_0^{(2\pi n)^2} \dots} \to \ell - \ell = 0$$

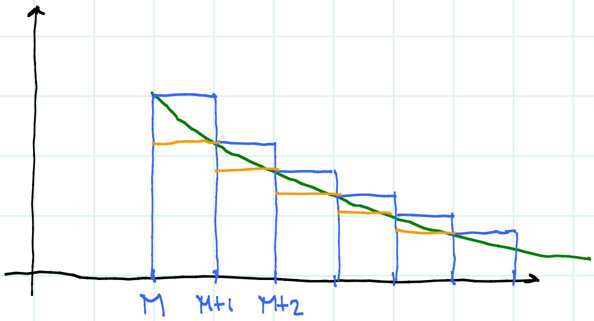
ANALISI 1 – LEZIONE 83

Note Title 22/03/2025

CONFRONTO SERIE-INTEGRALI

Gli integrali aiutano le serie.

Setting: sia $M \geq 0$ un intero e sia $f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente decrescente con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



La decrescenza è essenziale nella figura

$$\underbrace{\sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli sotto il grafico}} \leq \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \underbrace{\sum_{n=M}^{+\infty} f(n)}_{\text{somma aree rettangoli sopra il grafico}}$$

Sotto queste ipotesi

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge se e solo se } \sum_{n=M}^{\infty} f(n) \text{ converge}$$

Dim Se l'integrale diverge, allora diverge la serie per la disuguaglianza di destra

Se l'integrale converge, allora idem la serie per la disug. di sx.

Le due serie a dx e sx differiscono solo di un termine quindi hanno lo stesso comportamento

— o —

Applicazione classica

$f(x) = \frac{1}{x^a}$ Questa è decrescente in $[1, +\infty)$ se $a > 0$. Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ converge } \underset{\uparrow}{\iff} a > 1$$

si dimostra con la primitiva

Idem per

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \text{ converge } \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx \text{ converge}$$

$$\underset{\uparrow}{\iff} a > 1$$

si fa con la primitiva

Achtung! È fondamentale che f sia decrescente

— o — o —

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Questa diverge, quindi

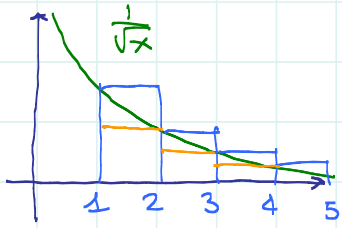
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ tende a } +\infty$$

Ma come tendono a $+\infty$? Quanto velocemente?

Brutal mode: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n} = 2\sqrt{n} - 2 \sim 2\sqrt{n}$

Questo ci fa sospettare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = 2$

Come lo dimostro? Guardo la figura!



Quindi

$$\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

e quindi $$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Così ho ottenuto disuguaglianza dall'alto. Dal basso

$$\int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{e quindi}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ 1^\circ \text{ termine}}}{1} + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Conclusione

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

I due termini laterali si calcolano esplicitamente e viene

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + 2\sqrt{n} - 2$$

Ora basta dividere per $\sqrt{n}$ e passare al limite.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}_{a_n}$ (vedere lezioni di inizio limiti)

A suo tempo avremmo scritto

$$(n+1)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{termine più} \\ \text{piccolo}}}{\frac{1}{2n}} \leq a_n \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{ termini}}}{(n+1)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{più} \\ \text{grande}}}{\frac{1}{n}}$$

Questo dice che $\lim a_n$, posto che esista, sta in $[\frac{1}{2}, 1]$, ma non permette di concludere

Brutal mode:

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x}\, dx = \left[\log x\right]_n^{2n}$$

$$= \log(2n) - \log n = \log 2$$

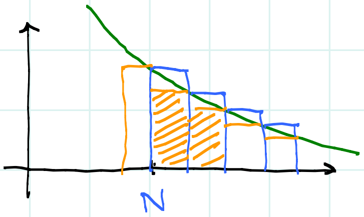
Per fare il rigoroso ottengo le disuguaglianze guardando il disegno.

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^4+2}$ Questa converge

Come posso trovare in modo approssimato il valore?
Sommo un po' di termini da $n=1$ fino ad un certo $n=N$.
Se mi fermo ad un certo N, l'errore commesso è

$$\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n+4}{n^4+2}}_{\uparrow\ \text{termini trascurati}}$$

e voglio stimarlo dall'alto. Se la funzione è decrescente, posso provare con l'integrale



Guardando i rettangoli sotto

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x)\, dx$$

ovviamente se $f(x)$ è decrescente per $x \geq N$

Nel nostro caso $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n+4}{n^4+2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{x+4}{x^4+2}\, dx$

$$\sim \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \sim \frac{1}{2N^2}$$

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Calcolare ordine di infinitesimo e parte principale di

$$a_n = \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{1}{k^5}$$

Si vede subito che $a_n \to 0$ perché

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^{10}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{termine} \\ \text{più grande}}} \cdot n^3 \nwarrow \text{ i termini sono meno di } n^3 \qquad 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^7}$$

Brutal mode: $a_n \sim \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^5}\,dx = \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{x^4}\right]_{n^2}^{n^3}$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{n^{12}} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^8} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^8}$$

Quindi la parte principale è $\frac{1}{4n^8}$ nel senso che

$$\lim_{n\to+\infty} n^8 a_n = \frac{1}{4}$$

... dimostrarlo per bene con le disuguaglianze!

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 84

Note Title 28/03/2025

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un' eq. diff. ha come incognita una funzione $u : \underset{\uparrow}{(a,b)} \to \mathbb{R}$

può essere anche semiretta o tutto $\mathbb{R}$

L'equazione è una relazione che lega la funzione u e un po' di sue derivate.

L'incognita la possiamo indicare con

$\boxed{u(t)}$ $u(x)$ $y(x)$ $y(t)$ e così via

Esempi $u'(t) = u(t) + 5$ → cerco una funzione la cui derivata è uguale alla funzione stessa +5

$u''(t) = u(t) - t$ → derivata seconda = funzione stessa meno t

Def. Si dice ORDINE di una equazione il massimo ordine di derivazione compare.

In generale un' eq. diff. di ordine k si scrive nella forma

$$\boxed{\Phi(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0}$$

dove Φ è una funzione di $k+2$ variabili

Notazione rapida: $\boxed{\Phi(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)}) = 0}$

Def. Un' eq. diff. si dice in $\boxed{\text{FORMA NORMALE}}$ se la derivata di ordine massimo è stata "ricavata" rispetto al resto, cioè si scrive nella forma

$$\boxed{u^{(k)}(t) = F\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k-1)}(t)\right)}$$

In notazione rapida: $\boxed{u^{(k)} = \underset{\uparrow}{F}\left(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}\right)}$

dipende da k+1 variabili

Esempi

$u'' = 3u' + tu^2$	FORMA NORMALE
$u'' - 3u' + \sin t = 0$	QUASI (basta spostare $u'' = 3u' - \sin t$)
$(u')^3 + 3u + t = 0$	QUASI ⇝ $u' = -\sqrt[3]{3u+t}$
$(u')^4 + 3u + t = 0$	NO: non posso ricavare u' in modo unico
$t u'' = 5 + u'$	NI: dovrei dividere per t, ma per questo serve $t \neq 0$.

Def. Un' eq. diff. si dice $\boxed{\text{AUTONOMA}}$ se la t non compare nell' equazione se non come variabile da cui dipende la u

Esempi

$u'' = u' - 3$	$u'' = u' - 3\underset{\uparrow}{t}$	$u'' = \underset{\uparrow}{t}u' - 3$
SI	NO	NO
$u''(t) = u'(t) - 3$	$u''(t) = u'(t) - 3\underset{\uparrow\uparrow}{t}$	$u''(t) = \underset{\uparrow}{t}u'(t) - 3$

Proposizione Se u risolve un' eq. diff. autonoma, allora anche tutte le sue traslate temporali risolvono la stessa equazione.

Più precisamente, se $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ è soluzione, allora anche $v(t) := u(t+c)$, vista come $v : (a+c, b+c) \to \mathbb{R}$ è ancora una soluzione

[Motivo: $v^{(i)}(t) = u^{(i)}(t+c)$ per ogni $i \geq 0$ e ogni t ammissibile]

Esempio 1 $u'(t) = 2u(t)$ $[u' = 2u]$

Una soluzione è $u(t) = e^{2t}$ [verifica in 30 secondi!]

Dico che anche $v(t) = e^{2t+2025}$ è soluzione

Verifica: $v'(t) = 2e^{2t+2025} = 2v(t)$:)

Esempio 2 $u'(t) = -u(t)^2$ $[u' = -u^2]$

Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ [Verifica!]

Ma anche $v(t) = \frac{1}{t+42}$ è soluzione [Verifica!]

Esamineremo 3 classi di eq. diff.

① Eq. primo ordine a variabili separabili

② Eq. primo ordine lineari

③ Eq. ordine qualunque lineari a coeff. costanti

→ omogenee

→ non omogenee

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Variabili separabili}}$ Sono equazioni che si presentano come

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

→ Primo ordine

→ Forma normale

→ A destra c'è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u.

Esempi $u' = 2t^2 u$ $u' = 2t \cdot u^2$ $u' = u \cdot \cos t$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f(t) \text{ è sempre } 1}}{u' = u^3}$$

Oss. Un' eq. del primo ordine in forma normale autonoma ricade sempre tra quelle a variabili separabili

$$u' = g(u) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1}$$

$\boxed{2}$ **Primo ordine lineari** Sono eq. del tipo

$$\boxed{\underset{\uparrow}{u'} + a(t) \underset{\uparrow}{u} = b(t)}$$

compaiono "puliti", cioè non dentro funzioni

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni date.

$\boxed{3}$ **Ordine qualunque lineari a coeff. costanti**

Si presentano (o si possono facilmente portare) nella forma

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} c_i \, u^{(i)}(t) = f(t)}$$

dove i c_i sono numeri e $f(t)$ è una funzione data.

→ Se $f(t) \equiv 0$ l'equazione è omogenea

→ Se $f(t) \not\equiv 0$ l'equazione è non omogenea

Esempi $u'' + 3u' + 5u = \sin t$

$u''' - 5u' = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{7}$ ordine 3, lineare, coeff. cost.
NON omogenea

[A sx c'è una comb. lineare di u e di tutte le sue derivate fino all' ordine k (alcuni coeff. possono essere 0)]

ANALISI 1 – LEZIONE 85

Note Title 28/03/2025

Esempio 1 $u'(t) = u(t)$

→ 1° ordine
→ forma normale
→ autonoma
→ variabili separabili
→ lineare primo ordine a coeff. costanti omogenea

$u(t) = e^t$ è una soluzione

Essendo autonoma, anche e^{t+c} è soluzione

Anche $u(t) = -e^t$ è soluzione e quindi anche $-e^{t+c}$.

Tutte queste soluzioni si possono scrivere come $\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro reale}}}{k} e^t}$

[Nota bene: $e^{t+c} = e^c \cdot e^t = ke^t$]

Si potrebbe dimostrare che tutte soluzioni sono queste.

Esempio 2 $u'' = -u$

Esempi di soluzione: $u(t) = \sin t$ $u(t) = \cos t$

Anche

$$u(t) = \underset{\uparrow}{a} \sin t + \underset{\uparrow}{b} \cos t \quad \text{è soluzione}$$

due parametri

Si potrebbe dimostrare che sono solo queste

[Nota bene: $\sin(t+c) = \sin t \cdot \underset{\overset{\parallel}{a}}{\cos c} + \cos t \cdot \underset{\overset{\parallel}{b}}{\sin c}$]

Esempio 3 $u'' = u$

$u(t) = ae^t + be^{-t}$

$u(t) = a \sinh t + b \cosh t$

Fatto generale (Falso, ma quasi vero)

L' insieme delle soluzioni di una eq. diff. di ordine k dipende da k parametri.

Esempio 4 $u' = -u^2$ $\qquad u(t) = \frac{1}{t+c}$ ↖ parametro

più la soluzione $u(t) \equiv 0$ (che corrisponde a $c = +\infty$)

PROBLEMA DI CAUCHY Eq. diff. + condizioni iniziali

Per una equazione di ordine k vuol dire prescrivere il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla (k-1) esima per uno stesso tempo t_0.

Esempi

$$\begin{cases} u' = u^2 + t \\ u(\underset{\overset{\uparrow}{t_0}}{7}) = \underset{\overset{\uparrow}{u_0}}{8} \end{cases}$$

→ eq. di ordine 1: prescrivo il valore di u in un certo t_0

$$\begin{cases} u'' = u' + u^2 - e^t \\ u(\boxed{7}) = 8 \\ u'(\boxed{7}) = 25 \end{cases}$$

} eq. di ordine 2; prescrivo u e u' in uno STESSO t_0 (in questo caso 7)

Se avessi messo

$$\boxed{\begin{matrix} u(\overset{\downarrow}{7}) = 8 \\ u'(\underset{\uparrow}{8}) = 25 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} u(7) = 8 \\ u''(7) = 9 \end{matrix}}$$

NO: deve essere lo stesso t

NO: deve essere u e u'

$$\boxed{\begin{matrix} u(7) = 8 \\ u(9) = 8 \end{matrix}}$$

non andava bene (non era un problema di Cauchy)

Morale Per una eq. diff. di ordine k ci aspettiamo una sol. generale che dipende da k parametri
Imponendo le k condizioni del problema di Cauchy si determinano univocamente i k parametri.

Oss. Nei modelli fisici spesso si trovano eq. del tipo

$$\underset{\text{massa}}{1} \cdot \underset{\text{accelerazione}}{u''} = \underset{\text{forza}}{\dots}$$

Prescrivere u e u' vuol dire prescrivere posizione e velocità iniziali.

Teorema 1 (Molto misterioso) (Teorema di sola esistenza)
Prendiamo un problema di Cauchy per una eq. diff. di ordine k del tipo

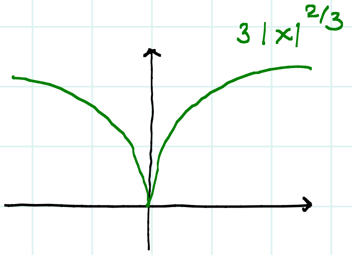
$$\begin{cases} u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{cases}$$

Se F è continua (bisognerebbe dire cosa vuol dire continua in k+1 variabili)
allora il problema ha almeno una soluzione (per lo meno locale, cioè vicino a t_0)
Se F è un po' meglio (un po' di Lipschitzianità locale, che è gratis se tutto è derivabile)
allora la soluzione è pure unica.

— o — o —

Esempio classico

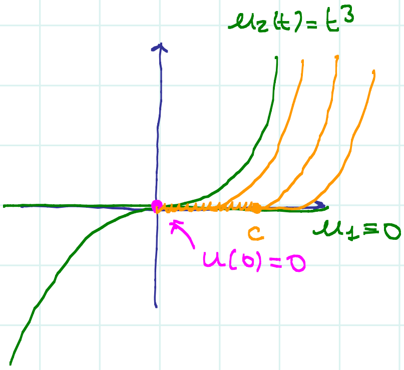
$$\begin{cases} u'(t) = 3\,|u(t)|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad u' = 3|u|^{2/3}$$



La funzione $g(u) = 3\,|u|^{2/3}$
è continua, ma non è lip.
dalle parti di $u=0$, quindi
funziona la parte esistenza, ma non la parte unicità.

Una soluzione è $\quad u_1(t) \equiv 0 \quad$ (vale sempre 0)
Un'altra soluzione è $\quad u_2(t) = t^3$

Verifica $\quad u'(t) = 3t^2 = 3\,|t^3|^{\frac{2}{3}}$



Entrambe le soluzioni verificano $u(0)=0$

Ci sono in realtà infinite soluzioni, e
sono tutte e sole (almeno per $t \geq 0$)
quelle del tipo

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases} \qquad \text{con } c > 0$$

Verificare derivando.

Oss. Il fenomeno precedente si chiama PENNELLO DI PEANO

ANALISI 1 – LEZIONE 86

Note Title 28/03/2025

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Setting: problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underbrace{u' = f(t)\,g(u)}_{\text{eq. var. separabili}} \\ u(\underset{\uparrow}{t_0}) = \underset{\uparrow}{u_0} \end{cases}$$

Numeri dati

Un' eq. di questo tipo si "riesce" a risolvere con la seguente procedura

① Separare
② Integrare
③ Ricavare
} soluzione generale che dipende da un parametro c

④ Determino c (usando la cond. iniziale)
⑤ Verifica! (sia dell' eq. sia della cond. iniz.)
⑥ Studiare la soluzione

Esempio 1

$$\begin{cases} u' = t u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

① Separare: tutte le u a sx, tutte le t a dx

$$\frac{du}{dt} = t u^2 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = t\,dt$$

② Integrare: a sx rispetto a u, a dx rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t\,dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

↖ famoso +c dell' integrale

③ Ricavare: u in funzione di t

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}t^2 + c \rightsquigarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{2}t^2 - c = -\frac{t^2+2c}{2} \rightsquigarrow u(t) = \frac{-2}{t^2+2c}$$

Conclusione: la soluzione generale è

$$u(t) = \frac{-2}{t^2+c}$$

↑ essendo c un parametro libero c o 2c è lo stesso

Oss. La procedura funziona pur di sapere
- → fare le primitive
- → ricavare u alla fine

④ **Determino c** $u(0) = 7 \rightsquigarrow -\frac{2}{c} = 7 \rightsquigarrow c = -\frac{2}{7}$

Quindi la soluzione è $u(t) = \frac{-2}{t^2 - \frac{2}{7}} = \frac{-2}{\frac{7t^2-2}{7}} = \frac{-14}{7t^2-2}$

$$\boxed{u(t) = \frac{14}{2-7t^2}}$$

⑤ **Verifica!** Cond. iniz. $u(0) = \frac{14}{2} = 7$ ☺

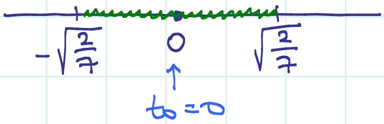
Equazione: $u'(t) = -\frac{14}{(2-7t^2)^2}(-14t) = t\underbrace{\left(\frac{14}{2-7t^2}\right)^2}_{u(t)^2}$ ☺

⑥ **Studio la soluzione** Cosa mi interessa?

- → intervallo massimale di esistenza
- → LIFE SPAN (tempo di vita)
- → tipo di morte (se c'è)

Nel nostro caso $u(t)$ è definita per $2-7t^2 \neq 0$, quindi $t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$

Intervallo massimale di esistenza = più grande pezzo dell'insieme di definizione che contiene il tempo iniziale t_0.

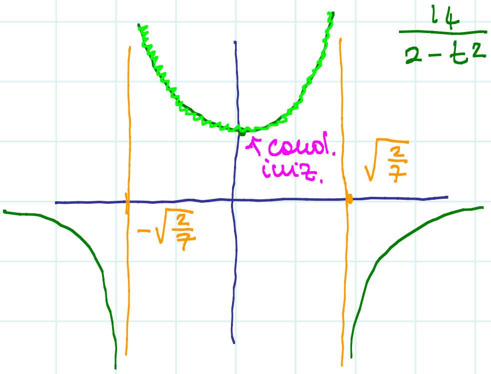


Int. max. di esistenza $= \left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$

Tempo di vita (nel futuro) = sup. int. max di esistenza $\rightsquigarrow \sqrt{\frac{2}{7}}$

" passato = inf " " " $\rightsquigarrow -\sqrt{\frac{2}{7}}$

Come è fatta la soluzione?



Quali sono gli scenari? A meno di situazioni patologiche, possono succedere 3 cose (nel futuro)

- → il tempo di vita è $+\infty$ (esistenza globale nel futuro)
- → BLOW UP : life span $= T \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$$

- → BREAK DOWN : life span $= T \in \mathbb{R}$ ma non c'è blow-up. Di solito allora succede che

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm\infty \quad \text{(Blow-up della derivata)}$$

Nel nostro caso, nel futuro, la soluzione ha blow-up per $T = \sqrt{\frac{2}{7}}$

— o — o —

Esempio 1 bis
$$\begin{cases} u' = t u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Come prima ① + ② + ③ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \frac{-2}{t^2 + c}$

④ Ricavo c: $u(0) = -\frac{2}{c} = 0 \rightsquigarrow$ niente c ☹

In questo caso la soluzione è $u(t) \equiv 0$ (si vedeva a occhio)

Oss 1 In questo caso il passaggio di divisione era ancora più abusivo.

Oss 2 $\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Se } g(u_0) = 0, \text{ allora la soluzione è sempre } u(t) \equiv u_0}$

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -\frac{t^3}{u^2} \\ u(1) = 2 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{t^3}{u^2} \rightsquigarrow u^2 du = -t^3 dt$

② $\frac{1}{3}u^3 = -\frac{1}{4}t^4 + c$

③ $u^3 = -\frac{3}{4}t^4 + c \rightsquigarrow u(t) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + c}$

↑ c e 3c è uguale

↑ c e −c è uguale

④ $u(1) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4} + c} = 2 \rightsquigarrow -\frac{3}{4} + c = 8 \rightsquigarrow c = 8 + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

$\rightsquigarrow u(t) = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + \frac{35}{4}}$

⑤ Verifica... ⑥ Esistenza globale nel passato e nel futuro

Esempio 3 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(1) = 5 \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u} \rightsquigarrow u\,du = -dt$

② $\frac{1}{2}u^2 = -t + c$

anche quelle con $-\sqrt{\ }$ sono soluzioni

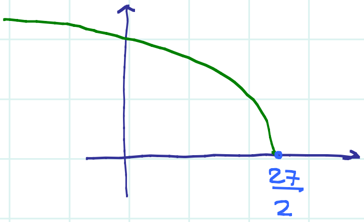
③ $u^2 = -2t + c \rightsquigarrow u(t) = \sqrt{c-2t}$

scelgo il segno + perché $u(1) = 5 > 0$

④ $u(1) = 5 \rightsquigarrow 5 = \sqrt{c-2} \rightsquigarrow c - 2 = 25 \rightsquigarrow c = 27$

$$u(t) = \sqrt{27-2t}$$

⑤ Verifica... a mente



⑥ Int. max. di esistenza : $\left(-\infty, \frac{27}{2}\right)$

La sol. ha esistenza globale nel passato e nel futuro ha break-down per $T = \frac{27}{2}$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 87

Note Title 29/03/2025

Eq. Diff. di ordine qualunque a coeff. costanti omogenee

$$\sum_{i=0}^{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numeri dati}}}{a_i}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata i-esima}}}{u^{(i)}}(t) = 0$$

Caso base: $m = 2$ $\boxed{a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = 0}$ a, b, c numeri dati

Teoria generale: l'insieme delle soluzioni è uno spazio vett. di dim 2

Tradotto: la soluzione generale è del tipo

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)} \qquad c_1, c_2 \text{ numeri reali}$$

Domanda: come trovo u_1 e u_2? Dipende dalle radici del polinomio

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \rightsquigarrow \text{equazione caratteristica}$$

A seconda delle radici, si aprono 3 scenari

Radici reali distinte Siano λ, μ queste due radici. Allora la soluzione generale è del tipo

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}}$$

Radici reali coincidenti (Discriminante = 0) Sia λ la radice doppia

Allora la sol. gen. è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}}$$

$\boxed{\text{Radici complesse coniugate}}$ (Discriminante <0)

Siano $\alpha \pm i\beta$ le due radici.

Allora la soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)}$$

Oss. Volendo seguire la logica del primo caso, nel caso delle radici complesse coniugate dovrei scrivere

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Quindi il terzo caso è coerente con il primo se si pensa agli esponenziali complessi.

Esempio 1 $\quad \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u = 0$

⇝ costruisco il polinomio $x^2 + 3x + 2 = 0$

⇝ calcolo le radici del polinomio $(x+2)(x+1) = 0$

$x = -2 \quad x = -1$ (reali distinte)

⇝ la soluzione generale è $u(t) = \underset{\uparrow}{c_1} e^{-2t} + \underset{\uparrow}{c_2} e^{-t}$

costanti libere (posso determinare se ho le condizioni iniziali)

$\boxed{\text{Verifica}}$

$$\dot{u}(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$$
$$\ddot{u}(t) = 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 2u(t) = \; & 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \\ & -6c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-t} \\ & +2c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{-t} \quad = 0 \end{aligned}$$

Esempio 2 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 9u = 0$

Pol. caratt. : $x^2 + 6x + 9 = 0$ $(x+3)^2 = 0$

$x = -3$ radice doppia

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}}$$

↑ quando c'è molteplicità 2 si aggiunge la t

Esempio 3 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 13u = 0$

Pol. caratt. : $x^2 + 6x + 13 = 0$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = \underset{\alpha}{-3} \pm \underset{\beta}{2}i$$

⇝ radici complesse coniugate

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{-3t} \cos(2t) + c_2 e^{-3t} \sin(2t)}$$

$e^{\alpha t} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\beta t)$

Oss. Se conosco le condizioni iniziali del problema di Cauchy posso trovare c_1 e c_2 in modo unico.

La teoria si estende a eq. lin. a coeff. costanti di ordine qualunque. Sostanzialmente per una equazione di ordine k la soluzione sarà la comb. lineare di k funzioni ottenute a partire dalle radici del polinomio in questo modo

→ radice reale λ di molt. 1 ⇝ $e^{\lambda t}$

→ radice reale λ di molt m ⇝ $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$

→ radice $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 ⇝ $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

→ radice $\alpha \pm i\beta$ di molt m ⇝ $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ e gli stessi moltiplicati per $t, t^2, \dots, t^{m-1}$

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Trovare la soluzione generale di

$$\boxed{u^{(4)}(t) = u(t)}$$

Tradotto: trovare tutte le funzioni la cui derivata quarta è uguale a loro stesse

A occhio sembrano essere e^t, e^{-t}, $\sin t$, $\cos t$ e le loro combinazioni lineari. Vediamo di farlo seguire dalla teoria

Polinomio caratteristico: $x^4 = 1 \rightsquigarrow x^4 - 1 = 0$

$\rightsquigarrow (x^2+1)(x^2-1) = 0 \rightsquigarrow (x^2+1)(x+1)(x-1) = 0$

Radici: $+1, -1, i, -i$

$1 \rightsquigarrow e^t$

$-1 \rightsquigarrow e^{-t}$

$\pm i \rightsquigarrow \sin t \quad \cos t$

$\alpha \pm i\beta \rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ viene fuori $\sin t$ e $\cos t$

Conclusione: la soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t}$$

Oss. Posso anche scrivere la soluzione (volendo) come

$$\boxed{u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t}$$

Traduzione in algebra lineare:

$\{e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t\}$ è una base dello spazio delle soluzioni

$\{\cos t, \sin t, \cosh t, \sinh t\}$ è un'altra base dello stesso spazio

Esempio 5 $u''' = -u'$

Polinomio caratteristico : $x^3 = -x \rightsquigarrow x^3 + x = 0$

$\rightsquigarrow x(x^2+1) = 0$

Radici : $x = 0$ $\quad x = \pm i$

$\rightsquigarrow e^{0t}$ $\quad \rightsquigarrow e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

1 $\quad \cos t \quad \sin t$

La soluzione generale è $\boxed{u(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3 \sin t}$

Esempio 6 $u^{(4)} = u^{(2)}$ (Derivata 4^a = Derivata 2^a)

Polinomio caratt. $x^4 = x^2 \rightsquigarrow x^4 - x^2 = 0$

$\rightsquigarrow x^2(x^2-1) = 0$

Radici : $x = 1$ $\quad x = -1$ $\quad x = 0$ radice doppia

$\downarrow \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow$

$e^t \quad e^{-t} \quad e^{0t} \quad t e^{0t}$

$1 \quad t$

Soluzione generale:

$$\boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 + c_4 t}$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 88

Note Title 29/03/2025

Equazioni lineari a coeff. costanti NON omogenee

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k u^{(k)}(t)}_{\text{comb. lineare di } u, \dot{u}, \ldots, u^{(k)}} = \underset{\text{funzione data}}{f(t)}$$

La soluzione generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione qualunque dell' eq. non omogenea}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k u_k(t)}_{\text{soluzione generale della corrispondente equazione omogenea}}$$

← si trovano come nella lez. precedente

$\boxed{\text{Come trovo } \bar{u}(t)?}$ Due metodi

1 → provare a indovinare

2 → metodo di variazione delle costanti

(funziona sempre, ma calcoloso)

Esempio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^t$

Devo trovare una soluzione qualunque. È ragionevole cercarla del tipo $u(t) = ae^t$.

Calcolo $\dot{u}(t) = ae^t$, $\ddot{u}(t) = ae^t$. Sostituisco:

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = ae^t + 5ae^t + 6ae^t = e^t \rightsquigarrow 12ae^t = e^t \rightsquigarrow a = \frac{1}{12}$$

Quindi $\bar{u}(t) = \frac{1}{12} e^t$

Risolvo l' eq. omogenea associata : $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 0$

$\rightsquigarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightsquigarrow (x+2)(x+3) = 0$

$\rightsquigarrow x = -2$ e $x = -3$

Soluzione generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{12} e^t}_{\substack{\uparrow \\ \text{soluzione} \\ \text{qualunque della non omogenea}}} + \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{soluzione generale} \\ \text{dell' eq. omog. corrispondente}}}$

Esempio 1-bis $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{7t}$

Cerco la soluzione speciale del tipo $u(t) = a e^{7t}$

Calcolo $\dot{u} = 7a e^{7t} \qquad \ddot{u} = 49 a e^{7t}$

Sostituisco

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 49 a e^{7t} + 35 a e^{7t} + 6a e^{7t} = e^{7t}$$

$$\rightsquigarrow 90 a e^{7t} = e^{7t} \quad \rightsquigarrow a = \frac{1}{90}$$

Soluzione generale: $u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soluzione speciale}}}{\frac{1}{90} e^{7t}} + \underbrace{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}_{\text{dipende dall'omogenea}}$

Esempio 2 $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{-2t}$

La tentazione è cercare la soluzione del tipo $u(t) = a e^{-2t}$
ma fallisce miseramente perché e^{-2t} è soluzione dell' omogenea
quindi NON PUÒ FUNZIONARE ☹

In questi casi basta aggiungere una t ☺

Provo con

$$u(t) = a \underset{\uparrow\uparrow}{t} e^{-2t}$$

$$\dot u(t) = a e^{-2t} - 2at\, e^{-2t}$$

$$\ddot u(t) = -2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} + 4at\, e^{-2t} = -4a e^{-2t} + 4at\, e^{-2t}$$

Sostituisco nell'equazione e trovo

$$\ddot u + 5\dot u + 6u = \underbrace{-4ae^{-2t} + \cancel{4ate^{-2t}}}_{\ddot u} + \underbrace{5ae^{-2t} - \cancel{10ate^{-2t}}}_{5\dot u} + \underbrace{\cancel{6ate^{-2t}}}_{6u} = e^{-2t}$$

I termini con la t <u>devono</u> andarsene. Cosa resta?

$$ae^{-2t} = e^{-2t} \rightsquigarrow a = 1$$

La soluzione generale è $\boxed{u(t) = te^{-2t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}$

Regola generale Se a destra il termine non omogeneo è del tipo $e^{\lambda t}$, allora si cerca una soluzione del tipo

$$u(t) = ae^{\lambda t}$$

Funziona se $e^{\lambda t}$ non è già soluzione dell'omog. Se lo è, si mettono delle t davanti "finché basta"

<u>Esempio 3</u> $\ddot u + 5\dot u + 6u = t^2$

Cerco una soluzione del tipo $u(t) = at^2 + bt + c$.

Calcolo $\dot u(t) = 2at + b$, $\ddot u(t) = 2a$

Sostituendo

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \underbrace{2a}_{} + \underbrace{10at}_{} + \underbrace{5b}_{} + \underbrace{6at^2}_{} + \underbrace{6bt}_{} + \underbrace{6c}_{} = \underbrace{t^2}_{}$$

$$\begin{cases} 6a = 1 & \text{coeff } t^2 & a = \frac{1}{6} \\ 10a + 6b = 0 & \text{coeff } t & b = -\frac{5}{3}a = -\frac{5}{18} \\ 2a + 5b + 6c = 0 & \text{termine noto} & c = \dots \text{ si trova} \end{cases}$$

Trovata la soluzione speciale $\bar{u}(t)$, quella generale sarà

$$u(t) = \bar{u}(t) + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Esempio 4 $\quad \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \sin(2t)$

Cerco una soluzione del tipo $\quad u(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$

Faccio i conti:

$$\dot{u}(t) = 2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)$$

$$\ddot{u}(t) = -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u &= -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t) && \ddot{u} \\ &\quad + 10a\cos(2t) - 10b\sin(2t) && +5\dot{u} \\ &\quad + 6a\sin(2t) + 6b\cos(2t) && +6u \\ &= (-4a - 10b + 6a)\sin(2t) + (-4b + 10a + 6b)\cos(2t) \\ &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2a - 10b = 1 \\ 10a + 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 50a = 1 \\ b = -5a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{52} \\ b = -\frac{5}{52} \end{cases}$$

La sol. generale è

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{52}\sin(2t) - \frac{5}{52}\cos(2t) + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}}$$

Regola generale: se ho a destra roba del tipo $\sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$

provo con qualcosa del tipo

$$\bar{u}(t) = a\sin(\alpha t) + b\cos(\alpha t)$$

Funziona sempre? NI! Non funziona quando $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ sono soluzioni dell'omogenea. In questi casi se ne esce mettendo delle t davanti finché basta.

Riassunto dei tentativi

$f(t) = e^{\lambda t}$	$u(t) = a e^{\lambda t}$
$f(t) =$ polinomio	$u(t) =$ polinomio dello stesso grado
$f(t) = \sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$	$u(t) =$ comb. lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$
$f(t) =$ somma di tanta roba come sopra	$u(t) =$ somma dei singoli tentativi
$f(t) =$ polinomio $\cdot\, e^{\lambda t}$ (stessa cosa con sin e cos)	$u(t) =$ polinomio dello stesso grado $\cdot\, e^{\lambda t}$
$f(t) =$ roba che risolve l'omogenea	$u(t) =$ tentativo corrispondente moltiplicato per t finché basta

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 89

Note Title 29/03/2025

$\boxed{\text{Metodo di variazione delle costanti}}$ = ultima spiaggia

Esempio $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{5t}$

Col tentativo : $u(t) = ae^{5t}$ $\dot{u}(t) = 5ae^{5t}$ $\ddot{u}(t) = 25ae^{5t}$

$\rightsquigarrow 25ae^{5t} + 25ae^{5t} + 6ae^{5t} = e^{5t} \rightsquigarrow 56a = 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{56}$ ☺

Metodo generale : cerco una soluzione del tipo

$$u(t) = \underset{\uparrow}{a(t)}\, e^{-2t} + \underset{\uparrow}{b(t)}\, e^{-3t}$$

quelle che sarebbero costanti nella soluz. generale dell' omog. ora diventano funzioni incognite

Faccio i conti ☹ : $\dot{u}(t) = \underline{\dot{a}(t)e^{-2t}} - 2a(t)e^{-2t} + \underline{\dot{b}(t)e^{-3t}} - 3b(t)e^{-3t}$

Impongo come prima condizione che i termini con $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$ si annullino :

$$\boxed{\dot{a}(t)e^{-2t} + \dot{b}(t)e^{-3t} = 0}$$ 1ª equazione

Calcolo $\ddot{u}$ tenendo conto della condizione appena imposta

$$\ddot{u}(t) = -2\dot{a}(t)e^{-2t} + 4a(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$$

Sostituisco $u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ nell' equazione data

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 5\dot{u} + 6u &= -2\dot{a}(t)e^{-2t} + \cancel{4a(t)e^{-2t}} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} + \cancel{9b(t)e^{-3t}} \\ &\quad \cancel{-10\,a(t)e^{-2t}} \cancel{-15\,b(t)e^{-3t}} \\ &\quad \cancel{+6a(t)e^{-2t}} + \cancel{6\,b(t)e^{-3t}} \\ &= e^{5t} \end{aligned}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ se ne devono andare. Resta

$$\boxed{-2\dot{a}(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} = e^{5t}} \qquad 2^a \text{ equazione}$$

Abbiamo quindi due equazioni nelle incognite $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$. Risolvendo trovo $\dot{a}(t)$ e $\dot{b}(t)$ e poi basta integrare

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^{-2t} + \dot{b}(t)e^{-3t} = 0 & \cdot\, e^{3t} \\ -2\dot{a}(t)e^{-2t} - 3\dot{b}(t)e^{-3t} = e^{5t} & \cdot\, e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a}(t)e^{t} + \dot{b}(t) = 0 \\ -2\dot{a}(t)e^{t} - 3\dot{b}(t) = e^{8t} \end{cases} \qquad 3\cdot 1^a + 2^a \rightsquigarrow \dot{a}(t)e^{t} = e^{8t}$$

$$\rightsquigarrow \dot{a}(t) = e^{7t}$$

$$\rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{7}e^{7t}$$

Dalla prima equazione $\dot{b}(t) = -\dot{a}(t)e^{t} = -e^{7t}\cdot e^{t} = -e^{8t}$

$$b(t) = -\frac{1}{8}e^{8t}$$

Conclusione : $u(t) = a(t)e^{-2t} + b(t)e^{-3t}$

$$= \frac{1}{7}e^{7t}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{8t}\cdot e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{7}e^{5t} - \frac{1}{8}e^{5t} = \boxed{\frac{1}{56}e^{5t}}$$ ☺

<u>Oss.</u> Per ottenere lo stesso risultato sono serviti molti conti.

Esempio 2 $u'' - u' - 2u = t^2 + e^{3t} + \cos(2t)$

Trovare la soluzione generale

Prima guardo l'omogenea: $\ddot{u} - \dot{u} - 2u = 0$

$$\rightsquigarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightsquigarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightsquigarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = -1 \end{matrix}$$

La parte omogenea ha come soluzione

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = \underbrace{at^2+bt+c}_{\substack{\downarrow \\ \text{produrre } t^2}} + \underbrace{d e^{3t}}_{\substack{\downarrow \\ \text{produrre} \\ e^{3t}}} + \underbrace{e\cos(2t) + f\sin(2t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{produrre } \cos(2t)}}$$

Calcolo $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$, poi sostituisco e trovo a, b, c, d, e, f.

Oss. Posso fare i tentativi separati per produrre i 3 pezzi e poi sommare

$$u(t) = at^2+bt+c \qquad \dot{u}(t) = 2at+b \qquad \ddot{u}(t) = 2a$$

Sostituisco: $\ddot{u} - \dot{u} - 2u = 2a - \underbrace{2at}_{} - b - \underbrace{2at^2}_{} - \underbrace{2bt}_{} - 2c = \underbrace{t^2}_{}$

$$\begin{cases} -2a = 1 & a = -\frac{1}{2} \\ -2a - 2b = 0 & b = \frac{1}{2} \\ 2a - b - 2c = 0 & 2c = 2a - b = -\frac{3}{2} \qquad c = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Per produrre t^2 serve $-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$ (verifica!)

Analogo per produrre gli altri

Esempio 3 $\ddot{u} - \dot{u} - 2u = 5 + t \sin t$

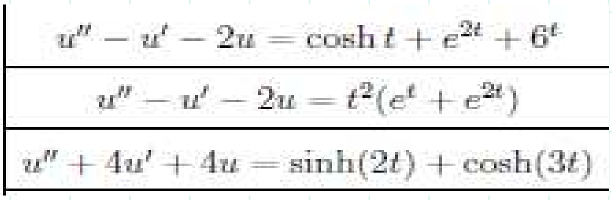
Per produrre 5 basta $u(t) = -\frac{5}{2}$

Per produrre $t \sin t$ servirà

$$u(t) = a t \sin t + b t \cos t + c \sin t + d \cos t$$

In generale, se c'è polinomio · $\sin(\alpha t)$ provo con polinomio · $\sin(\alpha t)$ + polinomio · $\cos(\alpha t)$

Esempio 4



① $u'' - u' - 2u = \cosh t + e^{2t} + 6^t$

② $u'' - u' - 2u = t^2(e^t + e^{2t})$

③ $u'' + 4u' + 4u = \sinh(2t) + \cosh(3t)$

(1.1) e^{2t} ⇝ è soluzione dell'omogenea, quindi il tentativo è $u(t) = a t e^{2t}$ ⇝ trovo a

(1.2) $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ma e^{-t} è soluzione dell'omogenea

Tentativo: $a e^t + b t e^{-t}$

(1.3) 6^t Tentativo: $a 6^t$

$\wr$

$e^{\log 6 \cdot t}$ $a e^{\log 6 \cdot t}$

(2.1) Ottenere $t^2 e^t$ ⇝ provo $(at^2 + bt + c) e^t$

(2.2) Ottenere $t^2 e^{2t}$ ⇝ se provo $(at^2 + bt + c) e^{2t}$ va male perché e^{2t} è soluzione dell'omogenea

Il tentativo corretto è $t(at^2+bt+c)e^{2t}$

③ $\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u = \sinh(2t) + \cosh(3t)$

$x^2+4x+4=0 \rightsquigarrow x=-2$ con molteplicità 2

Sol. omogenea: $u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$

$$\cosh(3t) = \frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$$ ☺

$$\sinh(2t) = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$$ ↖ crea problemi

Tentativo per $e^{-2t} \rightsquigarrow u(t) = at^2e^{-2t}$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 90

Note Title 04/04/2025

Eq. Diff. Lineari del primo ordine

$$\boxed{u'(t) + a(t)\,u(t) = b(t)}$$

con $a(t)$ e $b(t)$ due funzioni date, per esempio continue, in un certo intervallo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Soluzione generale

$$\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante arbitraria}}}{c}\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \underbrace{\int e^{A(s)}\, b(s)\, ds}_{\text{primitiva qualunque di } e^{A(s)} b(s)}}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$

Conseguenza : sappiamo risolvere con formula esplicita se sappiamo fare le primitive di $a(t)$ e di $e^{A(t)} b(t)$

Se abbiamo il dato iniziale $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione generale diventa (calcolando c)

$$\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vecchio}}}{u_0}\, e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}\, b(s)\, ds}_{\substack{\uparrow \\ \text{integrale tra } t_0 \text{ e } t}}}$$

dove

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

↑ primitiva esplicita

Programma: → verificare che la formula funziona
→ capire come può venire in mente
→ applicare in esempi

Verifica che funziona

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\,ds$$

Sostituisco $t = t_0$

$$u(t_0) = u_0 \cdot e^0 + e^0 \cdot 0 = u_0$$ cond. iniziale ok :)

Verifico l'equazione:

$$u'(t) = u_0 e^{-A(t)} (-a(t)) + e^{-A(t)} (-a(t)) \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\,ds$$
$$+ \cancel{e^{-A(t)}} \cdot \cancel{e^{A(t)}} b(t)$$

$$= -a(t) \left\{ u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\,ds \right\} + b(t)$$

$$= -a(t)\, u(t) + b(t)$$:)

— o — o —

Come può venire in mente la formula?

1° modo: via FATTORE INTEGRANTE

Parto dall'equazione $u'(t) + a(t)\,u(t) = b(t)$

Prendo una qualunque primitiva $A(t)$ di $a(t)$ e moltiplico tutto per $\boxed{e^{A(t)}}$ ← fattore integrante

$$\boxed{u'(t)\, e^{A(t)} + u(t)\cdot a(t)\, e^{A(t)}} = b(t)\, e^{A(t)}$$

questo è una derivata

$$\left[u(t)\, e^{A(t)}\right]' = b(t)\, e^{A(t)}$$

Ma allora $u(t)\, e^{A(t)} = \int b(s) e^{A(s)}\, ds + c$

costante arbitraria

Moltiplicando per $e^{-A(t)}$ trovo

$$u(t) = e^{-A(t)} \int b(s) e^{A(s)}\, ds + c\, e^{-A(t)}$$:-)

— o — o —

2° modo Essendo l'equazione lineare, la soluzione generale si scriverà nella forma

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{soluzione qualunque}\\ \text{dell' eq. non omogenea}}}{\bar{u}(t)} + \overset{\substack{\text{parametro}\\ \swarrow}}{c}\, \underline{v(t)}$$

sol. non nulla dell' eq. omogenea associata

Trovo $v(t)$ risolvendo $v'(t) + a(t)\, v(t) = 0$, ma questa è

$$v'(t) = -a(t)\, v(t)$$

cioè a variabili separabili

$$\frac{dv}{dt} = -a(t)\, v \rightsquigarrow \frac{dv}{v} = -a(t)\, dt \rightsquigarrow \log|v| = -A(t) + c$$

$$\rightsquigarrow |v(t)| = e^{-A(t)+c} = e^{c}\cdot e^{-A(t)}$$

$$\rightsquigarrow v(t) = \boxed{\pm e^{c}}\, e^{-A(t)}$$

nuova costante

Per calcolare una soluzione qualunque della non omogenea, uso il metodo di variazione delle costanti, cioè la cerco del tipo

$$\bar u(t) = \underset{\uparrow}{c(t)}\, e^{-A(t)}$$

quello che prima era una costante, ora è una funzione

Faccio il conto

$$\bar u'(t) = c'(t)\, e^{-A(t)} + c(t)\, e^{-A(t)} \, (-a(t))$$

Sostituisco nell' eq. $\bar u' + a(t)\,\bar u = b(t)$:

$$c'(t)\, e^{-A(t)} - a(t)\,\cancel{c(t)\, e^{-A(t)}} + a(t)\,\cancel{c(t)\, e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad c'(t) = e^{A(t)}\, b(t) \quad \rightsquigarrow \quad c(t) = \int e^{A(s)}\, b(s)\, ds$$

da cui la formula iniziale.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $u' + t u = t^3$ $a(t) = t$ $b(t) = t^3$

Fattore integrante: $A(t) = \frac{1}{2}t^2$. Quindi moltiplico per $\boxed{e^{+\frac{1}{2}t^2}}$

$$u'\, e^{+\frac{1}{2}t^2} + t\, u\, e^{+\frac{1}{2}t^2} = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[u\, e^{\frac{1}{2}t^2}\right]' = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad \text{quindi}$$

$$u\, e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}\, dt = \int \underbrace{t^2}_{G} \cdot \underbrace{t\, e^{\frac{1}{2}t^2}}_{f}\, dt$$

$$= \underset{G}{t^2} \cdot \underset{F}{e^{\frac{1}{2}t^2}} - \int \underset{g}{2t}\, \underset{F}{e^{\frac{1}{2}t^2}}\, dt = t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} - 2\, e^{\frac{1}{2}t^2} + c$$

Ricavando otteniamo

$$\boxed{u(t) = t^2 - 2 + c\, e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$ ← soluzione generale

$\boxed{\text{Metodo alternativo}}$ Sappiamo che la soluzione sarà

$$u(t) = \bar{u}(t) + c\, v(t)$$

Ora $v(t)$ lo trovo risolvendo l'omogenea: $v' + tv = 0$

$$v' = -tv \rightsquigarrow \frac{dv}{dt} = -tv \rightsquigarrow \frac{dv}{v} = -t\,dt \rightsquigarrow \log|v| = -\frac{1}{2}t^2$$

$$\rightsquigarrow v(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Per trovare $\bar{u}(t)$ vado per tentativi $u' + tu = t^3$

la cerco del tipo $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$

$$\underbrace{2at + b}_{\bar{u}'} + \underbrace{at^3 + bt^2 + ct}_{t\bar{u}} = t^3$$

$a = 1$ coeff t^3 $a = 1$

$b = 0$ coeff t^2 $b = 0$ $\bar{u}(t) = t^2 - 2$

$2a + c = 0$ coeff t $c = -2$

$b = 0$ termine noto

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $u' + \frac{2}{t} u = \sin t$ $a(t) = +\frac{2}{t}$ $b(t) = \sin t$

$A(t) = +2\log t$ (mettiamo di essere per $t > 0$)

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{2\log t} = t^2$

Quando moltiplico :

$$t^2 u' + 2t\, u = t^2 \sin t$$

$$[t^2 u]' = t^2 \sin t$$

$$t^2 u(t) = \underbrace{\int t^2 \sin t \, dt}_{\uparrow \text{ in 2 passaggi per parti si fa}} + c$$

$$\boxed{u(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int s^2 \sin s \, ds}$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 91

Note Title 04/04/2025

Esercizio 1 $u' = 3u - 2$

Abbiamo vari approcci : → variabili separabili
→ 1° ordine (come lez. prec. $u' - 3u = -2$)
→ lin. a coeff. cost. non omog.

$\boxed{\text{Var. sep.}}$ $\frac{du}{dt} = 3u-2 \rightsquigarrow \frac{du}{3u-2} = dt \rightsquigarrow \frac{1}{3}\log|3u-2| = t+c$

$\rightsquigarrow \log|3u-2| = 3t+c \rightsquigarrow |3u-2| = e^{3t+c} = e^{3t}\cdot e^{c}$

$\rightsquigarrow 3u-2 = \underbrace{\boxed{\pm e^{c}}}_{c}\cdot e^{3t} \rightsquigarrow 3u-2 = c\,e^{3t}$

$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{2}{3} + c\,e^{3t}}$

$\boxed{\text{1° ordine lineare}}$ $u' - 3u = -2$ $a(t) = -3$ $A(t) = -3t$

Fatt. int. $= e^{A(t)} = e^{-3t}$

$u' e^{-3t} - 3e^{-3t}u = -2e^{-3t}$ $[ue^{-3t}]' = -2e^{-3t}$

Integrando: $u(t)\,e^{-3t} = -2\int e^{-3t}\,dt = \frac{2}{3}e^{-3t} + c$

Ricavando : $\boxed{u(t) = \frac{2}{3} + c\,e^{3t}}$

$\boxed{\text{Coeff. cost.}}$ $u' = 3u-2$ omog. $v' = 3v \rightsquigarrow v(t) = e^{3t}$

Cerco una $\bar{u}(t) = a$ costante che risolve $0 = 3a-2 \rightsquigarrow a = \frac{2}{3}$

Finale

$$u(t) = c\,v(t) + \bar{u}(t) = \boxed{c\,e^{3t} + \frac{2}{3}}$$

Esercizio 2 $\quad u' - 5u = 3 + t\,e^{5t}$

Strategie : → lineare 1° ordine

→ lineare a coeff. costanti

$\boxed{\text{lin. } 1^\circ \text{ ordine}}$ $\quad a(t) = -5 \rightsquigarrow$ Fatt. int. $= e^{A(t)} = e^{-5t}$

$$u' \cdot e^{-5t} - 5e^{-5t}u = 3e^{-5t} + t$$

$$\left[u(t)\,e^{-5t}\right]' = 3e^{-5t} + t$$

$$\rightsquigarrow \quad u(t)\,e^{-5t} = -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{u(t) = -\frac{3}{5} + \frac{1}{2}t^2 e^{5t} + c\,e^{5t}}$$

$\boxed{\text{lin. coeff. cost.}}$ $\quad u' - 5u = 3 + t\,e^{5t} \qquad u(t) = c\,v(t) + \bar{u}(t)$

$$v' - 5v = 0 \rightsquigarrow v' = 5v \rightsquigarrow v(t) = e^{5t}$$

Per trovare $\bar{u}(t)$ posso andare per tentativi.

Per ottenere 3 provo con $\bar{u}(t) = a$ costante

$$\rightsquigarrow \quad -5a = 3 \quad \rightsquigarrow \quad a = -\frac{3}{5}$$

Per ottenere $t\,e^{5t}$ il tentativo classico sarebbe $\bar{u}(t) = \underbrace{(at+b)}_{\text{pol. dello stesso grado}}e^{5t}$

ma questo NON può funzionare

(andrebbe bene con e^{2t} o e^{-5t}, ma non con e^{5t} perché $v(t) = e^{5t}$ risolve l'omogenea)... provare per credere...

DEVO aggiungere una t davanti

$$\rightsquigarrow \bar{u}(t) = (at^2+bt)e^{5t}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{(2at+b)e^{5t} + (\cancel{at^2}+bt)\cdot 5e^{5t}}_{\bar{u}'(t)} \underbrace{-5(\cancel{at^2}+bt)e^{5t}}_{-5\bar{u}(t)} = te^{5t}$$

$2a+5b = 1$ coeff. t $a=\frac{1}{2}$

$b = 0$ termine noto $b=0$

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2}t^2e^{5t}$$

La soluzione ottenuta è la stessa :)

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: stabilire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ c'è esistenza globale nel futuro.

Questa è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = u^2 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = t+c \rightsquigarrow \frac{1}{u} = -t+c$$

c e $-c$ sono la stessa cosa

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{1}{c-t}}$$ soluz. generale

Trovo c usando la cond. iniz. $u(0) = \alpha = \frac{1}{c}$

sostituisco $t=0$

$\rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha}$ (se $\alpha \neq 0$)

Sostituendo:

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t}$$

La soluzione del problema con il dato iniziale è

[Verifica!] $$\boxed{u(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha t}}$$

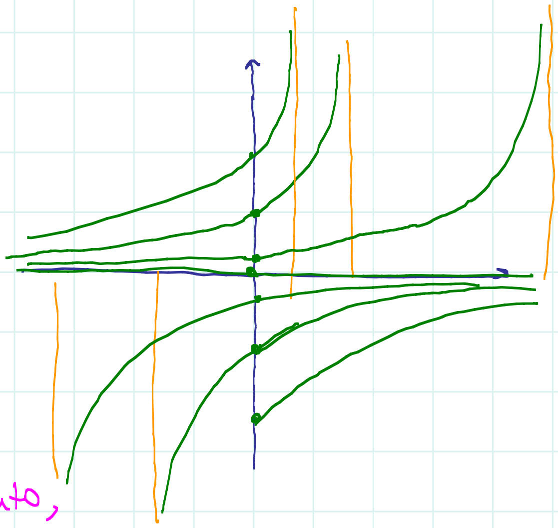
Noto che questa va bene anche se $\alpha = 0$, perché viene $u(t) \equiv 0$

Domanda: per quali α è globale nel futuro?

Il denominatore non si deve annullare per $t \geq 0$. Il denom. si annulla per $t = \frac{1}{\alpha}$, quindi c'è blow-up per $t = \frac{1}{\alpha}$

Se $\alpha > 0$, il blow-up è nel futuro
Se $\alpha < 0$, il blow-up è nel passato
Se $\alpha = 0$, già sappiamo che $u(t) \equiv 0$, quindi c'è esistenza globale nel passato e nel futuro.

Disegno:



→ Più α è grande, prima arriva il blow-up, che infatti arriva in $t = \frac{1}{\alpha}$

→ Due soluzioni non si possono mai intersecare (per quel punto, pensato come dato iniziale, passerebbero due soluzioni, e questo viola l'unicità, che di solito è verificata)

→ I grafici delle varie soluzioni sono l'uno il traslato degli altri (sempre vero se l'equazione è autonoma)

Cosa succede per α negativo ?

→ Nel futuro tutte le soluzioni crescono e tendono a 0 (si vede dalla formula), quindi c'è esistenza globale nel futuro

→ Nel passato le soluzioni hanno blow-up a $-\infty$ per $t = \frac{1}{\alpha}$ che ora è negativo.

— o — o —

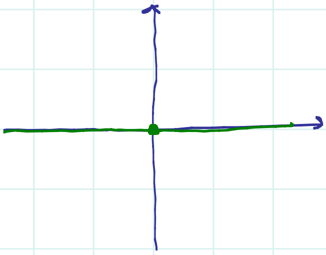
ANALISI 1 – LEZIONE 92

Note Title 04/04/2025

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \sin t \cdot u^3 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Per quali valori di α c'è esistenza globale nel futuro

Fatto 1 Se $\alpha = 0$, la soluzione è $u(t) \equiv 0$



Da questa sola oss. segue che le soluzioni con $\alpha > 0$ restano sempre > 0

" $\alpha < 0$ " " < 0

perché altrimenti ci sarebbe violazione di unicità.

Fatto 2 L'eq. è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = \sin t \cdot u^3 \rightsquigarrow \frac{du}{u^3} = \sin t \, dt \rightsquigarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = -\cos t + c$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2u^2} = \cos t + c \rightsquigarrow \frac{1}{u^2} = 2\cos t + c \rightsquigarrow u^2 = \frac{1}{2\cos t + c}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\cos t + c}}}$$

Se $\alpha > 0$ scelgo il $+$

" $\alpha < 0$ " " $-$

Fatto 3 Supponiamo $\alpha > 0$ e troviamo c

$$\alpha = u(0) = \frac{1}{\sqrt{2+c}} \rightsquigarrow \sqrt{2+c} = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow 2 + c = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha^2} - 2 = \frac{1-2\alpha^2}{\alpha^2}$$

Sostituendo $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cos t + \dfrac{1-2\alpha^2}{\alpha^2}}} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\sqrt{2\alpha^2 \cos t + (1-2\alpha^2)}}}$

Facendo la verifica si dovrebbe vedere che la formula trovata rappresenta la soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. (verifica = calcolo tombale)

Fatto 4 Per quali α c'è soluzione globale (nel futuro)? Quando ci sono problemi? Quando

$$2\alpha^2 \cos t + (1-2\alpha^2) = 0$$

cioè

$$\cos t = \frac{2\alpha^2-1}{2\alpha^2} = \boxed{1-\frac{1}{2\alpha^2}}$$

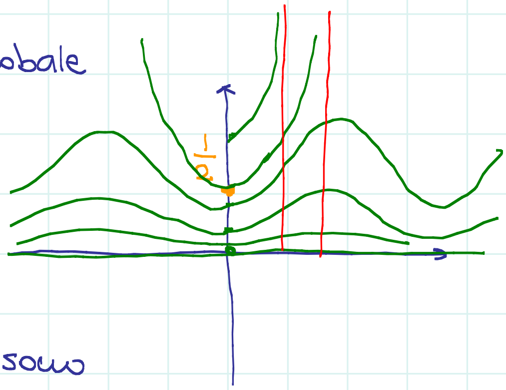
Problemi se questo sta tra -1 e 1. Sotto 1 ci sta. Quindi il problema c'è se

$$1-\frac{1}{2\alpha^2} \geq -1$$

$$1-\frac{1}{2\alpha^2} \geq -1 \iff \frac{1}{2\alpha^2} \leq 2 \iff \alpha^2 \geq \frac{1}{4} \iff \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ oppure } \alpha \leq -\frac{1}{2}$$

Quindi emerge un **EFFETTO SOGLIA**

- se $\alpha \geq \frac{1}{2}$ allora c'è blow-up (sia nel futuro sia nel passato)
- se $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, allora c'è esistenza globale
- analogo ribaltato sui negativi



Fatto 5 Le soluzioni con α negativo sono quelle positive riflesse rispetto all'asse x

Rigoroso: se $u(t)$ è una soluzione, allora anche $v(t) = -u(t)$ è soluzione

verifica: $v'(t) = -u'(t) = -\sin t \cdot u(t)^3 = \sin t \cdot v(t)^3$

quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione.

— o — o —

Esempio 2 $u'' + \lambda u = 0$

Per quali valori di λ tutte le soluzioni sono limitate, nel passato e nel futuro.

Come sono fatte le soluzioni? Dipende dalle radici del polinomio

$$x^2 + \lambda = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 = -\lambda$$

- $\lambda < 0 \rightsquigarrow$ radici reali $\rightsquigarrow x = \pm \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\text{positivo}}$

$$u(t) = c_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Questa di sicuro non è limitata per } t>0}}{e^{\sqrt{-\lambda}\, t}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t}$$

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow$ equazione diventa $u'' = 0 \rightsquigarrow u(t) = c_1 + c_2 t$
  e queste sono limitate solo se $c_2 = 0$, quindi non è vero che sono tutte limitate

- $\lambda > 0 \rightsquigarrow x^2 = -\lambda \rightsquigarrow x = \pm i \sqrt{+\lambda}$
  e quindi la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$$

e queste sono limitate al variare di t.

Oss. Nell'ultimo caso le soluzioni si possono scrivere come

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ampiezza}}}{A} \cos(\sqrt{\lambda}\, t + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{fase}}}{c})$$

Fatto generale

$$c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) = \underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \underset{\cos(at - \beta)}{\left\{ \overset{\cos(\beta)}{\overset{\shortparallel}{\frac{c_1}{\sqrt{\ldots}}}} \cos(at) + \overset{\sin(\beta)}{\overset{\shortparallel}{\frac{c_2}{\sqrt{\ldots}}}} \sin(at) \right\}}$$

Esempio 3 $u'' + 9u = \sin(\alpha t)$

Per quali α le soluzioni sono tutte limitate

Lineare, coeff. costanti, NON omogenea

Parte omog.: $u''+9u=0 \rightsquigarrow x^2+9=0 \rightsquigarrow x^2=-9$

$\rightsquigarrow x = \pm 3i$

$$u(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

Ora devo trovare una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$ della non omogenea.

La cerco del tipo

$$\bar{u}(t) = a \sin(\alpha t) + b\cos(\alpha t)$$

Riesco a trovare a e b se $\alpha \neq 3$.

$\boxed{\alpha \neq 3}$ Le soluzioni sono TUTTE limitate

$\boxed{\alpha = 3}$ Cerco la soluzione speciale del tipo

$$\bar{u}(t) = t\,(a \sin(3t) + b\cos(3t))$$

Riesco a trovare a e b, ma in ogni caso quello che ottengo è del tipo

$$\bar{u}(t) = t \cdot A\cos(3t+b)$$

e quindi NESSUNA delle soluzioni è limitata.

Questa è la famigerata RISONANZA.

[Vedi su YOUTUBE : TAKOMA BRIDGE

MILLENIUM BRIDGE]

ANALISI 1 – LEZIONE 93

Note Title 04/04/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$a_{n+1} = 3a_n - 2$ (se conosco a_n, posso calcolare a_{n+1})
(regola di passaggio da un termine al successivo)

$a_0 = 4$ ← Dato iniziale a partire dal quale calcolo i termini successivi

$a_0 = 4$, $a_1 = 3a_0 - 2 = 12 - 2 = 10$
$a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 10 - 2 = 28$
$a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 28 - 2 = 82$
e così via

Se voglio a_{2025} … devo calcolare tutti i termini precedenti

Domande: ① Avere una formula chiusa per a_n che non richieda di calcolare i termini precedenti
(riesce in pochissimi casi fortunati)

② Stabilire il comportamento della successione (ad esempio calcolare il limite) senza avere la formula esplicita.

Nomenclatura $a_{n+1} = f(a_n)$ 1° ordine autonoma

$a_{n+1} = 3a_n - 7n$ 1° ordine NON autonoma
$\uparrow$ la regola di passaggio cambia ogni volta

$a_{n+1} = f(a_n, n)$

$a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1}$ 2° ordine autonoma (dipende a 2 termini prima)

In questo caso occorre dare a_0 e a_1 per partire

$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$ o più in generale $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n)$

… possiamo avere dipendenza anche da 3 o più termini precedenti

Esempio 1 $a_{n+1} = 2a_n - n$ $a_0 = 3$

Calcolare un po' di termini

$a_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regola di passaggio} \\ \text{con } n=0}}{2a_0 - 0} = 6$ $a_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regola con} \\ n=1}}{2a_1 - 1} = 2 \cdot 6 - 1 = 11$

$a_3 = 2a_2 - 2 = 20$ $a_4 = 2a_3 - 3 = 37$, e così via

Esempio 2 $a_{n+1} = a_n^2$ $a_0 = \frac{3}{4}$

ogni termine è il quadrato del precedente

[Si potrebbe trovare una formula chiusa $a_n = \ldots$, ma facciamo finta di non vederla]

Dimostriamo che $a_n \to 0$ mediante il seguente PIANO

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & 0 \leq a_n \leq \frac{3}{4} & \forall n \in \mathbb{N} \\ (ii) & a_{n+1} \leq a_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ (iii) & a_n \to \ell \in \mathbb{R} & \\ (iv) & \ell = 0 & \end{array}\right\} \text{Piano classico con la monotonia}$$

Obiettivo: dimostrare i 4 p.ti deducendo così che $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) + teo. succ. monotone
(se a_n è debolmente decrescente e limitata dal basso, nel nostro caso $a_n \geq 0$, allora a_n ha per forza un limite reale)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Scriviamo la ricorrenza e passiamo al limite

$$\begin{tikzcd} a_{n+1} \arrow[d] & = & a_n^2 \arrow[d] & & & \ell=0 \\ \ell & = & \ell^2 & \rightsquigarrow & \ell=\ell^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & & & \ell=1 \end{tikzcd}$$

I limiti reali possibili sono $\ell=0$ e $\ell=1$, ma $\ell=1$ è incompatibile con il p.to (i)

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Si fa per induzione

$\boxed{n=0}$ $0 \le a_0 \le \frac{3}{4}$ banale perché $a_0 = \frac{3}{4}$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $0 \le a_n \le \frac{3}{4}$ Tesi: $0 \le a_{n+1} \le \frac{3}{4}$

Prendo l'ipotesi e applico la funzione $f(x)=x^2$, che è crescente per $x \ge 0$ e quindi conserva i versi delle disuguaglianze

$$0 \le a_n \le \frac{3}{4} \implies 0 \le a_n^2 \le \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \le \frac{3}{4}$$

quindi $0 \le a_{n+1} \le \frac{3}{4}$ ☺

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo dimostrare che $a_{n+1} \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1° modo : $\boxed{\text{ricorrenza + disequazione}}$

$$a_{n+1} \le a_n \iff a_n^2 \le a_n \iff a_n^2 - a_n \le 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{\iff} 0 \le a_n \le 1$$

ma noi sappiamo che $0 \le a_n \le \frac{3}{4}$, quindi ancora meglio.

2° modo : $\boxed{\text{induzione con applico } f}$ Dimostro che $a_{n+1} \le a_n$ per induzione

$\boxed{\text{Passo base } n=0}$ $a_1 \overset{?}{\leq} a_0$ $\underset{\underset{a_1}{\shortparallel}}{\frac{9}{16}} \overset{?}{\leq} \underset{\underset{a_0}{\shortparallel}}{\frac{3}{4}}$ ☺

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Prendiamo l'ipotesi e facciamo il $\square$: non cambio i versi perché sappiamo dal p.to (i) che tutto è ≥ 0

$$a_{n+1} \leq a_n \rightsquigarrow a_{n+1}^2 \leq a_n^2 \rightsquigarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$$ ☺

— o — o —

Esempio 3 $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 5$ $a_0 = 3$

$\boxed{\text{PIANO}}$
(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (ii) + teo. succ. monotone (ora il limite può essere anche $+\infty$)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Se fosse per assurdo $\ell \in \mathbb{R}$, allora passando al limite nella ricorrenza avrei

$$\begin{array}{ccccccc} a_{n+1} & = & a_n^2 & - & 2a_n & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 & - & 2\ell & + & 5 \end{array}$$
, cioè $\ell^2 - 3\ell + 5 = 0$

ma questa equazione non ha soluzioni reali perché
$\Delta = 9 - 20 < 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Per induzione

$\boxed{n=0}$ $a_0 \geq 3$ ovvio perché $a_0 = 3$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $a_n \geq 3$ Tesi : $a_{n+1} \geq 3$

$a_{n+1} \geq 3 \iff a_n^2 - 2a_n + 5 \geq 3 \iff a_n^2 - 2a_n + 2 \geq 0$

e questa è sempre vera perché $\Delta = 4 - 8 < 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Provo con $\boxed{\text{ricorrenza + disequazione}}$

$a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n \iff a_n^2 - 2a_n + 5 \overset{?}{\geq} a_n \iff a_n^2 - 3a_n + 5 \overset{?}{\geq} 0$

Fortunatamente l'ultima è sempre vera perché $\Delta = 9 - 20 < 0$.

Oss. La disequazione del p.to (ii) è analoga all'equazione finale del p.to (iv).

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 94

Note Title 04/04/2025

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$ $\quad a_0 = 1$

$a_1 = \sqrt{17}$ $\quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{17}+15}$ e poi sempre più brutto

Dimostriamo che $a_n \to 5$ con il piano

(i) $1 \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

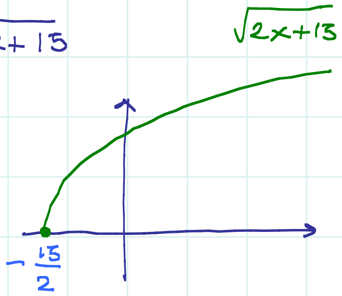
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 5$

} PIANO classico con monotonia

Preliminare: cerchiamo di studiare $f(x) = \sqrt{2x+15}$



Definita per $2x+15 \geq 0$, cioè $x \geq -\frac{15}{2}$

Crescente e ≥ 0 sempre

Dim (i) Per induzione

n=0 ☺

n ⟹ n+1 Ipotesi: $1 \leq a_n \leq 5$ applico $f(x)$ che è crescente

$$f(1) \leq f(a_n) \leq f(5)$$
$$1 \leq \sqrt{17} \leq a_{n+1} \leq 5$$

⇝ $1 \leq a_{n+1} \leq 5$ che è la tesi ☺

Dim (ii) Induzione + applico f

Devo dim. per induzione che $a_{n+1} \geq a_n$

n=0 $\quad a_1 \overset{?}{\geq} a_0 \iff \sqrt{17} \overset{?}{\geq} 1$ OK ☺

$\boxed{n = m+1}$ Ipotesi : $a_{n+1} \geq a_n$ Applico f che è crescente

$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$ cioè $a_{n+2} \geq a_{m+1}$ che è la tesi ☺

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) + teo. succ. monotone
(debolm. cresc. + limitata dall'alto perché $a_n \leq 5$)

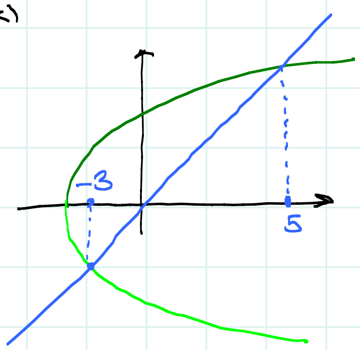
$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Passiamo al limite nella ricorrenza e otteniamo

$$\begin{array}{ccc} a_{m+1} & = & \sqrt{2a_n + 15} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{2\ell+15} \end{array}$$

$\ell = \sqrt{2\ell+15} \rightsquigarrow \ell^2 = 2\ell + 15 \rightsquigarrow \ell^2 - 2\ell - 15 = 0 \rightsquigarrow (\ell-5)(\ell+3) = 0$

$\boxed{\ell = -3}$ oppure $\ell = 5$
↑ non è accettabile perché viene $-3 = \sqrt{9}$

<u>Oss.</u> L'equazione risolta in (iv) è $\ell = f(\ell)$, che corrisponde ad intersecare il grafico di $f(x)$ con la bisettrice $y = x$



Dimostro che $a_n \to 5$ usando un PIANO con la DISTANZA.

Pongo $d_n = |a_n - 5|$
↑ presunto limite

Dimostrare che $a_n \to 5$ è la stessa cosa che dimostrare che $d_n \to 0$.

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Esattamente come prima.

Supponiamo di aver fatto (ii).

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Induzione che segue da (ii)

$d_1 \leq \frac{1}{2} d_0$, $\quad d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2} d_0 = \frac{1}{4} d_0$

$d_3 \leq \frac{1}{2} d_2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} d_0 = \frac{1}{8} d_0 \ldots$ in generale si dimostra per induzione

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Sappiamo che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \underset{\substack{\wr \\ 0}}{d_n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0}$$

Per i carabinieri $d_n \to 0$ (al posto di $\frac{1}{2}$ andava bene qualunque cosa < 1)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Dico che la funzione $f(x)$, per $x \geq 0$, è Lipschitziana con costante $\frac{1}{2}$, cioè

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a| \qquad \forall b \geq 0 \quad \forall a \geq 0$$

Perché è vero? Ripassino: $|f(b) - f(a)| = |b-a| \cdot |f'(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tra } a \text{ e } b}}{c})|$

Quindi basta dim. che $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+15}} = \frac{1}{\sqrt{2x+15}} \le \frac{1}{\sqrt{15}} \le \frac{1}{2}$$

Ora che so che è Lip. con costante $\frac{1}{2}$ basta osservare che

$$\begin{aligned} d_{m+1} = |a_{m+1} - 5| &= |f(a_n) - 5| \\ &= |f(a_n) - f(5)| \\ \text{uso la Lip.} \nearrow \quad &\le \frac{1}{2} |a_n - 5| \\ &= \frac{1}{2} d_m \end{aligned}$$

Mettendo insieme otteniamo $d_{m+1} \le \frac{1}{2} d_m$.

Esempio 2 $\quad a_{m+1} = \sqrt{2a_n + 15} \qquad a_0 = 2025$

Anche adesso $a_n \to 5$. Proviamo a fare un piano per dimostrarlo

$\boxed{\text{PIANO 1}}$
- (i) $a_n \ge 5 \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \le a_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_m \to \ell \in \mathbb{R}$ $\quad$ (i) + (ii) + teo. succ. monot.
- (iv) $\ell = 5$ $\quad$ ⇝ $\ell = \sqrt{2\ell + 15}$

Dim (i) Induzione ... $a_n \ge 5$ ... applico f e diventa

$$\begin{array}{ccc} f(a_n) & \ge & f(5) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ a_{n+1} & \ge & 5 \end{array} \quad \rightsquigarrow \text{tesi} \ ☺$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Induzione $\quad a_1 \le a_0$ è una verifica diretta

Passo $n \Rightarrow m+1$ ... $a_{n+1} \le a_n$ ... applico f che è crescente

$$\ldots \begin{array}{ccc} f(a_{n+1}) & \le & f(a_n) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ a_{n+2} & \le & a_{n+1} \end{array} \qquad ☺$$

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ Con la distanza. Pongo $d_n = |a_n - 5|$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o anche $a_n \geq 5$) (come prima)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$ (ii) + induzione

(iv) $d_n \to 0$ (iii) + carabinieri

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Qui serve la Lip.

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 5| = |f(a_n) - f(5)| \leq \frac{1}{2} |a_n - 5| = \frac{1}{2} d_n$$

Oss. A che serve il p.to (i)?

Serve perché abbiamo dim. che $f(x)$ è Lip con costante $\frac{1}{2}$ per $x \geq 0$ quindi per usarla serve $a_n \geq 0$.

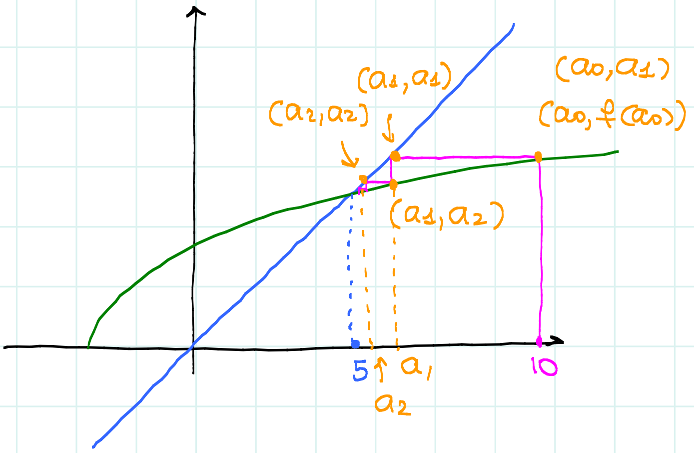
— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 95

Note Title 04/04/2025

Interpretazione grafica delle successioni $a_{n+1} = f(a_n)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15} \\ a_0 = 10 \end{cases}$$



Disegno a_0 sull'asse x

Poi seguo lo SLOGAN

verticale alla funzione
orizzontale alla bisettrice

Chi sono i p.ti che trovo strada facendo

$(a_0, 0) \rightsquigarrow (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$

$\rightsquigarrow (a_1, a_1)$ (stessa y del precedente e poi x = y)

$\rightsquigarrow (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$ (stessa x del prec. e sta sulla funzione)

Morale: seguendo lo slogan, le x dei p.ti che si trovano sono $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

quindi dal disegno sappiamo quale piano aspettarci

quella che serve per punto (iii)

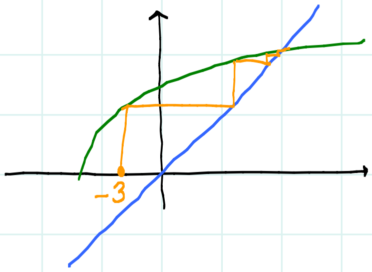
Con la monotonia: (i) $5 \leq a_n \leq 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 5$

Stessa cosa con $a_0 = -3$

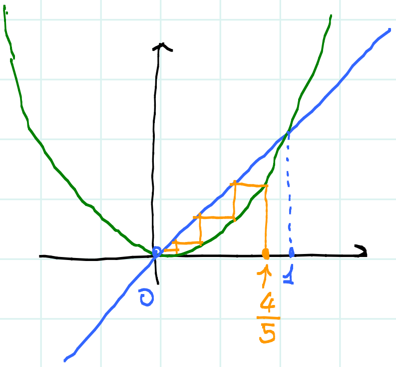


PIANO (i) $-3 \leq a_n \leq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 5$



Esempio 0 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = \frac{4}{5} \end{cases}$

Ora $f(x) = x^2$

Le due intersezioni sono $x = 0$ e $x = 1$

(è la stessa equazione del p.to (iv) quando si passa la ricorrenza al limite)

Piano con la monotonia (i) $0 \leq a_n \leq \frac{4}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (i) + (ii) + succ. monot.

(iv) $\ell = 0$

... dim (iv)

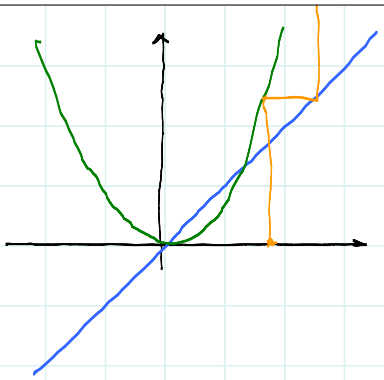
$$\begin{matrix} a_{n+1} & = & a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \ell = 0 \text{ oppure } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{escluso da } a_n \leq \frac{4}{5}}}{\ell = 1}$$

Qual è il comportamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$a_n \to 0$, quindi cond. nec. ok. Essendo $a_n > 0$ sempre (induz.) posso usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2}{a_n} = a_n \to 0 < 1 \quad \rightsquigarrow \text{ la serie converge}$$

Esempio 1 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 \\ a_0 = 2 \end{cases}$



Idea: a_n sale e se ne va a $+\infty$

PIANO

(i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

(i) Induzione (ii) induzione + applico

(iii) teo. succ. monot. (so solo che è deb. cresc.)

(iv) Se fosse $\ell \in \mathbb{R}$, allora passando al limite

$$\begin{array}{ccc} a_n & = & a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 \end{array} \rightsquigarrow \ell = 0 \text{ oppure } \ell = 1, \text{ che}$$

sono incompatibili con (i)

Esempio 1 bis $\begin{cases} a_n = a_n^2 \\ a_0 = -2 \end{cases}$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \geq 1$ $\rightsquigarrow$ se metto $a_n \geq -2 \quad \forall n \geq 0$ poi ho problemi ad escludere $\ell = 0$ e $\ell = 1$ (darebbe problemi anche ad applicare f)

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$

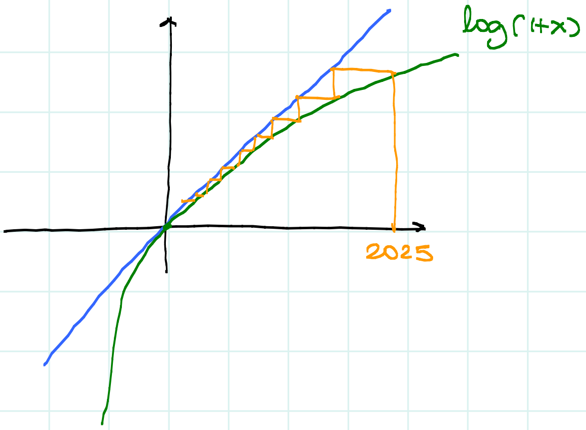
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

Al variare di a_0, a cosa tende la succ. $a_{n+1} = a_n^2$

- Se $|a_0| > 1$, allora $a_n \to +\infty$
- Se $|a_0| < 1$, allora $a_n \to 0$
- Se $a_0 = \pm 1$, allora $a_n \equiv 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi $a_n \to 1$

Esempio 2 $\begin{cases} a_{n+1} = \log(1+a_n) \\ a_0 = 2025 \end{cases}$



Per prima cosa dimostro che

$\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

con uguaglianza $\Leftrightarrow x=0$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

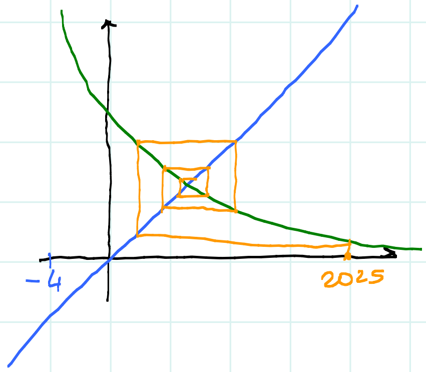
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

Si potrebbe usare la Lip? NO perché $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ e $f'(0) = 1$

$\boxed{\text{Esempio di domani}}$ $a_{n+1} = \frac{1}{a_n+4}$

$a_0 = 2025$

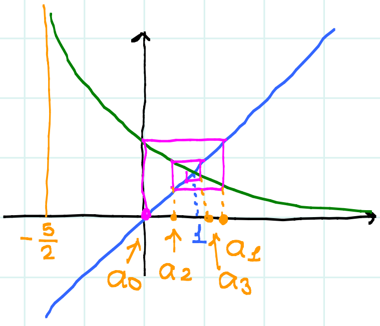


— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 96

Note Title 05/04/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA SPIRALEGGIANTI



Esempio 1 $\quad a_{n+1} = \dfrac{7}{2a_n+5} \qquad a_0 = 0$

Calcolo l'intersezione

$$\frac{7}{2x+5} = x \rightsquigarrow 7 = 2x^2+5x$$

$$\rightsquigarrow 2x^2+5x-7=0$$

$$\rightsquigarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4} = \frac{-5\pm 9}{4} = \begin{matrix}\nearrow 1 \\ \searrow -\frac{7}{2}\end{matrix}$$

Idea : $a_n \to 1$ spiraleggiando

Due tipi di piano : → piano con la distanza
→ piano con le due sottosuccessioni

PIANO CON LA DISTANZA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq c\, d_n$ (spero con $c<1$)

(iii) $d_n \leq c^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$

$$d_n = |a_n - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{presunto limite}}}{1}|$$

I punti (i), (iii) e (iv) sono sostanzialmente banali.
Si tratta di trovare il c per cui vale il p.to (ii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1}-1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che} \\ a_{n+1}=f(a_n) \\ f(1)=1}}{=} |f(a_n)-f(1)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante di} \\ \text{Lipschitz di } f(x) \\ \text{per } x\geq 0}}{L} |a_n-1| = L d_n$$

Come calcolo L ? Dal primo semestre sappiamo che

$$L = \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{(2x+5)^2} \cdot 2 = \frac{-14}{(2x+5)^2} \rightsquigarrow |f'(x)| = \frac{14}{(2x+5)^2} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{14}{25}$$

denom. + piccolo possibile

Fortunatamente $\frac{14}{25} < 1$ e quindi ☺

Da questo momento posso scrivere il piano di sopra con $c = \frac{14}{25}$.

PIANO CON LE DUE SOTTOSUCCESSIONI

Idea: a_n non è monotona, ma sui pari cresce e sui dispari decresce

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ oppure $0 \leq a_n \leq \underset{\uparrow a_1}{\frac{7}{5}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui pari cresce)

$1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (sui dispari decresce)

(iii) $a_{2n} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ (debolm. cresc. e limitata dall'alto)

$a_{2n+1} \longrightarrow m \in \mathbb{R}$ (debolm. decresc. e limitata dal basso)

(iv) $\ell = m = 1$

Dim (iv) Scriviamo la ricorrenza sui pari e sui dispari

$$\begin{array}{ccc} a_{2n+1} & = & \dfrac{7}{2a_{2n}+5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \dfrac{7}{2\ell+5} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} a_{2n} & = & \dfrac{7}{2a_{2n-1}+5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \dfrac{7}{2m+5} \end{array}$$

Ora abbiamo un sistema in m ed ℓ, che risolviamo

$$\begin{cases} m = \dfrac{7}{2\ell+5} \\ \ell = \dfrac{7}{2m+5} \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2m\ell + 5m &= 7 \\ 2m\ell + 5\ell &= 7 \end{aligned} \qquad 1^a - 2^a \rightsquigarrow m = \ell$$

Una volta che $m = \ell$ troviamo $\ell = f(\ell) \rightsquigarrow \begin{cases} \nearrow \ell = 1 \\ \searrow \ell = -\frac{7}{2} \end{cases}$

ma $\ell = m = -\frac{7}{2}$ è incompatibile con (i)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Si ~~fa~~ fa per induzione. Cerchiamo di capire perché è vero.

$a_0 = 0 \qquad a_1 = \dfrac{7}{5} \qquad a_2 = \dfrac{7}{2a_1+5} = \dfrac{7}{\frac{14}{5}+5} = \dfrac{35}{39}$

Da questi primi conti vediamo che

$a_0 \leq a_2 \leq 1$ Ora applico f che è decrescente, quindi inverto i versi

$f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1)$

$a_1 \geq a_3 \geq 1$ Applico f

$f(a_1) \leq f(a_3) \leq f(1)$

$a_2 \leq a_4 \leq 1$ Applico f

$f(a_2) \geq f(a_4) \geq f(1)$

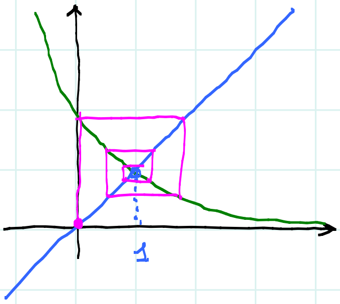
$a_3 \geq a_5 \geq 1$

e così via. Ogni volta che applico f trovo la relazione successiva che mi serve.

Tutte le relazioni del p.to (ii) seguono a partire da $a_0 \leq a_2 \leq 1$ applicando f un numero sufficiente di volte

— o — o —

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \frac{7}{5a_n+2} \qquad a_0 = 0$



Sembra tutto come prima, quindi verrebbe da provare con la distanza.

Al p.to (ii) serve $d_{n+1} \le c\, d_n$ con $c < 1$ e $d_n = |a_n - 1|$

Ora

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| \le L\,|a_n - 1| = L\,d_n$$

dove $\quad L = \sup\{\,|f'(x)| : x \ge 0\}$

Ora $\quad f'(x) = -\frac{7}{(5x+2)^2}\cdot 5 \qquad |f'(x)| = \frac{35}{(5x+2)^2}$

Ora il sup è $\frac{35}{4}$, che è maggiore di 1 ☹

Due vie di uscita.

1° modo: piano con le due sottosuccessioni

... il p.to fondamentale era che $\quad a_0 \le a_2 \le 1$ (poi applicando f trovavo tutte le altre disuguaglianze)

$a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{7}{2} \qquad a_2 = \frac{7}{5a_1+2} = \frac{7}{\frac{35}{2}+2} = \frac{14}{39}$ ☺

2° modo: provo a salvare il piano con la distanza.

Osservo che quando $5x+2 \ge 6$, cioè $x \ge \frac{4}{5}$, allora di sicuro

$$|f'(x)| = \frac{35}{(5x+2)^2} \le \frac{35}{36} < 1$$

Con un po' di pazienza posso provare a calcolare un po' di termini della successione fino a quando ne trovo uno con indice pari che sia $\ge \frac{4}{5}$.

A quel p.to posso fare un piano con la distanza

Supponiamo di sapere che $a_{10} \geq \frac{4}{5}$ perché l'ho calcolato a mano.
Allora il piano diventa

(i) $a_n \geq \frac{4}{5} \quad \forall n \geq 10$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{35}{36} d_n \quad \forall n \geq 10$ ((i) + Lipschitzianità)

(iii) $d_n \leq \left(\frac{35}{36}\right)^{n-10} d_0 \quad \forall n \geq 10$ (induzione da (ii))

(iv) $d_n \to 0$ (banale da (iii)).

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 97

Note Title 05/04/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

L'unica regola è che non ci sono regole

Esempio 1 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+3}$ $\qquad a_0 = 2025$

Primo modo: piano classico con la monotonia

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 0$

Dim (iv)

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \boxed{\dfrac{a_n}{n+3}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & 0 \end{array}$$

num. $\to \ell \in \mathbb{R}$

denom. $\to +\infty$

Dim (ii) Provo con ricorrenza + disequazione

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{a_n}{n+3} \overset{?}{\leq} a_n \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \geq 0 \text{ per} \\ \text{p.to (i)}}}{a_n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)}_{\geq 1 - \frac{1}{3}} \overset{?}{\geq} 0$$

e quindi ≥ 0 ☺

Secondo modo: criterio del rapporto

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i) posso usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n+3} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+3} \to 0 < 1 \leadsto a_n \to 0$$

Terzo modo: $\boxed{\text{LIMITATEZZA + CARABINIERI}}$

(i) $0 \le a_n \le 2025 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \ge 0$ è induzione molto semplice

$a_n \le 2025$ pure ... ma

$\boxed{n=0}$ $a_0 \le 2025$ OK ☺ $a_0 = 2025$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi $a_n \le 2025$ Tesi: $a_{n+1} \le 2025$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+3} \le \frac{2025}{n+3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denom.} \ge 3}}{\le} \frac{2025}{3} \le 2025$$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Grazie al p.to (i)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{0}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a_n}{n+3}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{2025}{n+3}}}$$

Così abbiamo ottenuto che $a_{n+1} \to 0$ il che è equivalente ad $a_n \to 0$.

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \frac{a_n + n}{5n+4} \qquad a_0 = 2025$

Esperimenti: $a_0 = 2025 \qquad a_1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{=} \frac{2025}{4} = 506,25$

$$a_2 = \frac{a_1 + 1}{9} = \frac{507,25}{9} = 55, \dots$$

Congettura ragionevole: $a_n \to \frac{1}{5}$

Esperimento: sarà debolmente decrescente ?

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \iff \frac{a_n+n}{5n+4} \overset{?}{\leq} a_n \iff a_n+n \overset{?}{\leq} 5n\,a_n+4\,a_n$$

$$\iff (5n+3)\,a_n \overset{?}{\geq} n \iff a_n \overset{?}{\geq} \frac{n}{5n+3}$$

Quindi, $\boxed{\text{se}}$ voglio dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ (in un ipotetico p.to (ii)), mi serve come p.to (i) che $a_n \geq \frac{n}{5n+3}$

Ipotetico piano con monotonia:

(i) $a_n \geq \frac{n}{5n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = \frac{1}{5}$

I p.ti (ii), (iii), (iv) sono tranquilli.

$\boxed{\text{MA}}$ prima dovrei dimostrare (i) per induzione, e potrebbe essere complicato [provare per esercizio].

Alternativa: $\boxed{\text{LIMITATEZZA + CARABINIERI}}$

potevo mettere 2025

(i) $0 \leq a_n \leq 10.000$ $\forall n \geq 0$

(ii) $a_n \to \frac{1}{5}$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \geq 0$ facile induzione

$a_n \leq 10.000$ per induzione

$\boxed{n=0}$ Gratis

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+n}{5n+4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{\leq} \frac{10.000+n}{5n+4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\leq} 10.000$$

Controllo la speranza

$$\frac{10.000+n}{5n+4} \overset{?}{\le} 10.000 \iff 10.000+n \overset{?}{\le} 50.000\, n + 40.000$$

e questo è troppo vero ☺

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $$\underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{5}}}{\boxed{\frac{n}{5n+4}}} \le a_{n+1} = \frac{a_n+n}{5n+4} \le \underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{5}}}{\boxed{\frac{10.000+n}{5n+4}}}$$

Per i carabinieri $a_{n+1} \to \frac{1}{5}$ quindi anche $a_n \to \frac{1}{5}$

—o—o—

Esempio 3 $a_{n+1} = \dfrac{a_n+8}{n+3}$ $a_0 = 2025$

Si può fare con limitatezza + carabinieri e tende a 0.

Si può fare con il rapporto?

È facile che $a_n > 0$ sempre. Poi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n+8}{n+3} \cdot \dfrac{1}{a_n}$

e da qui non è chiaro come procedere ☹

Esempio 4 $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n+8}}{n+1} + \sqrt{n}$ $a_0 = 2025$

Questa tende a $+\infty$ per colpa di $\sqrt{n}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $$\underset{\overset{\downarrow}{+\infty}}{a_{n+1}} \ge \underset{\overset{\downarrow}{+\infty}}{\boxed{\sqrt{n}}}$$ ← [Corretto dopo video]

Per confronto $a_{n+1} \to +\infty$, quindi $a_n \to +\infty$.

Esempio 5 $a_{n+1} = \frac{n^{100}}{2^n} a_n$ $a_1 = 2025$

$\uparrow$ per evitare che tutti i termini siano 0 se fosse $a_0 = 2025$

Questa successione tende a 0 !

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Criterio del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{100}}{2^n} \to 0 < 1 \leadsto a_n \to 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Esiste (per definizione di limite) $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^{100}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

A quel p.to il piano diventa

(i) $0 \leq a_n \leq a_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \geq n_0$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (teo. succ. monot.)

(iv) $\ell = 0$ (solito)

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Solita induzione ... $a_{n+1} = \underbrace{\boxed{\frac{n^{100}}{2^n}}}_{\leq \frac{1}{2}} a_n \leq \frac{1}{2} a_n \leq a_n$

$\uparrow$ $a_n \geq 0$

[bastava pure che $\frac{n^{100}}{2^n} \leq 1$ per ogni $n \geq n_0$ per avere la monotonia]

Morale: talvolta le limitatezze bastano da un certo punto in poi.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 98

Note Title 05/04/2025

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt[n]{7+a_n}$ $\qquad a_1 = 2025$

$a_1 = 2025 \qquad a_2 = \sqrt[1]{7+a_1} = 2032 \qquad a_3 = \sqrt[2]{7+2032} = 40$ e qc. ...

Idea: $a_n \longrightarrow 1$ $\qquad$ **PIANO** (i) $1 \le a_n \le 10.000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $a_n \to 1$

Dim (ii) Dopo aver fatto (i) sappiamo che

$$\sqrt[n]{8} \le a_{n+1} \le \sqrt[n]{10.007}$$

e si conclude con carabinieri

Dim (i) $a_n \ge 1$ è semplice induzione (bastava anche $a_n \ge 0$)

$a_n \le 10000$ per induzione

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \le 10.000$ $\qquad$ tesi: $a_{n+1} \le 10.000$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + 7} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ip.}}}{\le} \sqrt[n]{10.007} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } n \ge 2}}{\le} \sqrt{10.007} \le 101 \le 10.000$$

Quindi come passi base mi servono $n=1$ e $\boxed{n=2}$.

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n}$ $\qquad a_1 = 2025$

PIANO (i) $0 \le a_n \le 10.000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $a_n \to 1$ $\qquad$ (segue da (i) con carabinieri)

Dim (i) per induzione non è così ovvio

$$\ldots \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso Ip}}}{\le} \sqrt[n]{n+10.000} \underset{\substack{\uparrow \\ n \ge 2}}{\le} \sqrt{n+10.000} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\le} 10.000$$

Purtroppo la speranza non può essere vera per ogni $n \ge 2$ ☹

$\boxed{\text{PIANO ALTERNATIVO}}$ (i) $0 \le a_n \le 10.000\, n \quad \forall n \ge 1$

(ii) $a_n \to 1$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{n}}} \le a_{n+1} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{10.001\, n}}}$ e quindi carabinieri...

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Mi limito alla disug. di sinistra

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ip}}}{\le} \sqrt[n]{10.001\, n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \ge 2}}{\le} \sqrt{10.001\, n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speranza}}}{\le} 10.000\, n$$

Speranza

$$\sqrt{10.001\, n} \le 10.000\, n \iff 10.001\, n \le 10^8\, n^2$$

$$\iff n \ge \frac{10.001}{10^8}$$

il che è verissimo.

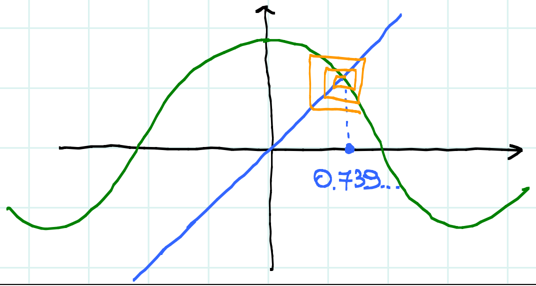
Esempio 3 Prendo la calcolatrice, scrivo 2025, e inizio a premere tante volte cos

Dopo un po' si stabilizza su un valore 0.739...

indipendente dal p.to di partenza

Stiamo calcolando la successione $a_{n+1} = \cos a_n \qquad a_0 = 2025$

Idea: dopo un po' la succ. spiraleggia intorno all'unica intersezione



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ L'equazione $x = \cos x$ ammette un'unica sol. reale

$\boxed{\text{Dim}}$ Considero $g(x) = x - \cos x$

Osservo che $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, quindi g è surgettiva

Osservo che $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ e si annulla sporadicamente quando $\sin x = -1$, quindi per MONOTONIA 3 la funzione $g(x)$ è strett. crescente, quindi iniettiva.

Quindi la soluzione esiste ed è unica.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Detta ℓ l'unica soluzione di $\ell = \cos \ell$, diciamo che

$$a_n \to \ell$$

Vorremmo fare un piano con la distanza, ma la costante di Lip di $\cos x$ è 1 e non va bene.

$\boxed{\text{MA}}$ La successione non arriva dove la derivata di $\cos x = 1$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ (ovvio perché $\cos \in [-1, 1]$)

(ii) $d_{n+1} \leq (\sin 1) \cdot d_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $d_n \leq (\sin 1)^{n-1} \cdot d_1 \quad \forall n \geq 1$ (segue da (ii))

(iv) $d_n \to 0$ (segue da (iii) perché $\sin 1 < 1$)

dove $d_n = |a_n - \ell|$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $d_{n+1} = |a_{n+1} - \ell| = |\cos a_n - \cos \ell| \leq \underset{\uparrow}{L}\, |a_n - \ell| = L\, d_n$

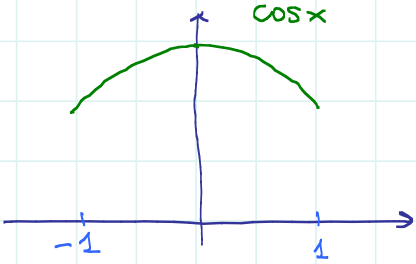
costante di Lip di $\cos x$ in $[-1, 1]$

Ora

$L = \sup\{\, \underset{\uparrow}{|\sin x|} : x \in [-1, 1] \} = \sin 1$ ☺

$\uparrow$ è anche un max

|derivata di $\cos x$|



Esempio 4 $a_{n+1} = \arctan(n a_n)$ $a_1 = 2025$

Idea: $a_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

Se sapessi che $a_n \geq m > 0$, avrei finito perché

$$\underset{\downarrow \atop \frac{\pi}{2}}{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \geq a_{n+1} \geq \underset{\downarrow \atop \frac{\pi}{2}}{\boxed{\arctan(n \cdot m)}}$$

Tutto sta a fare un p.to (i) in cui $a_n \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante positiva} \\ \text{da trovare}}}{m}$ $\forall n \geq 1$

Provo con $m = \overset{\arctan 1 \atop \parallel}{\frac{\pi}{4}}$. Dimostro per induzione che $a_n \geq \frac{\pi}{4}$ $\forall n \geq 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ $a_{n+1} = \arctan(n a_n) \underset{\substack{\uparrow \\ Hp}}{\geq} \arctan\left(n \frac{\pi}{4}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speranza}}}{\geq} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

La speranza è ok se $n \frac{\pi}{4} \geq 1$, il che succede appena $n \geq 2$

Quindi basta controllare a mano i casi $n = 1$ e $n = 2$

— o — o —

Oss. Se parto con $a_0 = \frac{1}{2025}$ la cosa è più complicata

perché $\frac{\pi}{4}$ non può andare bene. Con cosa si può sostituire?

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 099

Note Title 30/04/2025

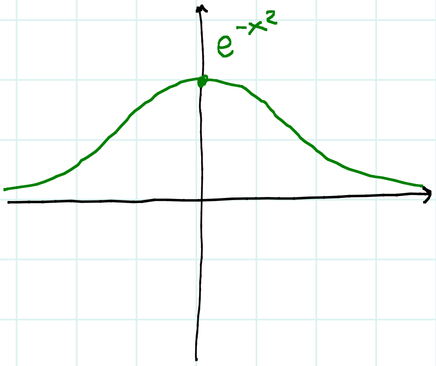
Studio di funzioni integrali

Esempio 1 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

In altre parole: $f(x)$ è LA primitiva di e^{-x^2} che si annulla in $x=0$.

Problema: la primitiva non si esprime in termini di funzioni elementari.

Obiettivo: disegnare il grafico di $f(x)$.

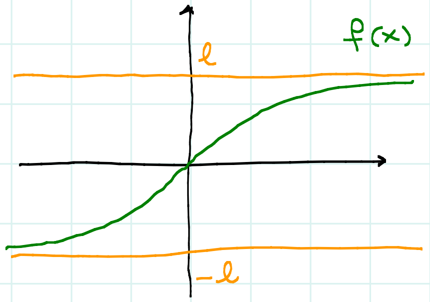


Zona di definizione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

Simmetrie f è dispari perché

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ho invertito} \\ \text{gli estremi}}}{-}\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ e^{-t^2} \text{ è PARI}}}{=} -\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -f(x)$$



Limiti agli estremi $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{integrale improprio}}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

L'integrale improprio converge, quindi il limite è un certo $\ell \in \mathbb{R}$.

Analogamente per parità

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Perché converge l'int. improprio ?

1° modo $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per ogni $x \geq 1$

Ora $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (si calcola esplicitamente), quindi per confronto anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge}$$

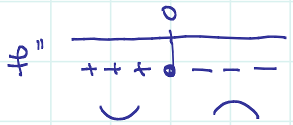
2° modo Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{2025}}$. Ci si riduce a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2025}}{e^{x^2}} = 0 \qquad [\text{caso limite}]$$

quindi $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^{2025}}$ per x grandi ...

Studio della monotonia $f'(x) = e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è strett. cresc. su tutto $\mathbb{R}$

Studio della convessità $f''(x) = -2x e^{-x^2}$



__Esempio 2__ Prendiamo la $f(x)$ di prima. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \arctan x}{x^3}$$

È del tipo $\frac{0}{0}$, quindi usiamo de L'Hôpital

$$\ldots = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2 - (1 - x^2) + o(x^2)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{3x^2} = 0$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine $n=8$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{6} t^6 + o(t^7)\right) dt$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + o(x^8)$$

Moralmente: $o(t^7)$ contiene tutte potenze con esponente >7

$\rightsquigarrow$ la sua primitiva contiene tutte potenze con esponente >8

Fatto generale : se $g(x) = o(x^k)$ per $x \to 0$, allora

$$\int_0^x g(t)\,dt = o(x^{k+1}) \text{ per } x \to 0$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Devo fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^{k+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{(k+1)x^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } g(x) = o(x^k)}}{=} 0$$

Achtung! Gli o piccolo si comportano bene con le primitive, ma non con le derivate.

Esempio classico $\quad f(x) = x^{20} \sin \frac{1}{x^4}$

È evidente che $f(x) = o(x^{19})$, ma non è vero che $f'(x) = o(x^{18})$

Infatti $\quad f'(x) = 20\,x^{19} \sin\frac{1}{x^4} + x^{20} \cdot \cos\frac{1}{x^4}\left(-\frac{4}{x^5}\right)$

$$= \underbrace{20\,x^{19} \sin \frac{1}{x^4}}_{\text{questo è } o(x^{18})} - \underbrace{4\,x^{15} \cos\frac{1}{x^4}}_{\text{Non è } o(x^{18})}$$

Esempio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$

[Sarebbe LA primitiva di $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x}$ che si annulla per $x=1$]

$\boxed{\text{Zona di definizione}}$ Di sicuro ha senso per $x>0$.
Di sicuro non ha senso per $x<0$ perché la funzione che sto integrando non è definita per $t<0$.

Resta $x=0$ per cui diventa

$$\int_1^0 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt = -\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$

È un int. impr. per colpa di 0. Per $t \sim 0$ si ha $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \sim \frac{1}{t}$

e quindi l'int. diverge [rigoroso: C.A. con $\frac{1}{t}$]

Questo ci dice che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt = -\infty$

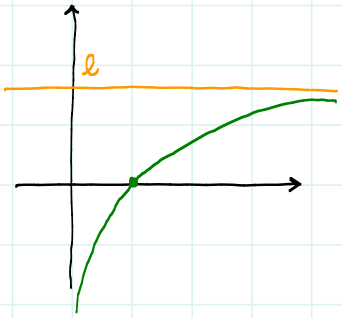
Già che ci siamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt$$ che converge ad un certo $\ell \in \mathbb{R}$

[Basta fare C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^{2025}}$ e ci si ritrova nel caso limite]

$\boxed{\text{Monotonia}}$ $f'(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} > 0 \quad \forall x > 0$

$\rightsquigarrow f(x)$ è strett. cresc. in $(0, +\infty)$



$\boxed{\text{Convessità}}$ $f''(x) = \left[\frac{1}{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} \right]'$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{x} e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \qquad \forall\, x > 0$$

⇝ $f(x)$ è concava in $(0, +\infty)$, come previsto.

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ Sia $f(x)$ come nell'esempio precedente.

Capire come $f(x)$ va a $-\infty$ per $x \to 0^+$.

Ad esempio capire

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot \sqrt[3]{x}$$

Brutale: $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \sim \frac{1}{t}$ per $t \to 0^+$, quindi facendo la primitiva avremo

$f(x) \sim \log x$ per $x \to 0^+$

Rigoroso: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\log x} \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \cdot x = 1$$

Quindi a maggior ragione

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{f(x)}{\log x}}} \; \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\log x \cdot \sqrt[3]{x}}}$$

(limite dimenticato)

— o — o —

[La versione originale di questo file è andata perduta. Questa è una ricostruzione sulla base del video]

ANALISI 1 – LEZIONE 100

Note Title 30/04/2025

Esempio 1 $f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt$

[Ora entrambi gli estremi dipendono da x]

Detta $g(x)$ $\boxed{\text{UNA qualunque}}$ primitiva di $\frac{1}{\arctan x}$, allora

$$f(x) = \left[g(t)\right]_{2x}^{3x} = g(3x) - g(2x)$$

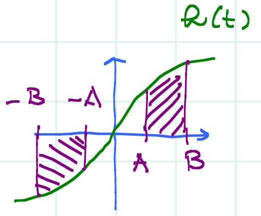
$\boxed{\text{Zona di definizione}}$ Definita per ogni $x \neq 0$ (in ogni caso evito $t = 0$ in cui ci sono problemi)

$\boxed{\text{Simmetrie}}$ Mi aspetto che sia PARI

$$f(-x) = \int_{-2x}^{-3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverto gli} \\ \text{estremi}}}{=} -\int_{-3x}^{-2x} \dots\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{\arctan t} \text{ è dispari}}}{=} \int_{2x}^{3x} \dots\, dt = f(x)$$

Ho usato: se $R(t)$ è dispari, allora

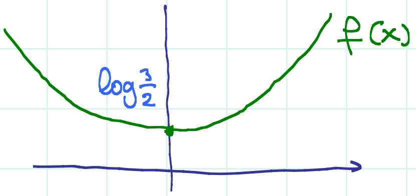
$$\int_{A}^{B} R(t)\, dt = -\int_{-B}^{-A} R(t)\, dt$$



$\boxed{\text{Limiti agli estremi}}$ Devo calcolare (gli altri due sono uguali per parità)

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt \sim \int_{2x}^{3x} \frac{2}{\pi}\, dt \sim \frac{2}{\pi} x \to +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\arctan t}\, dt \sim \int_{2x}^{3x} \frac{1}{t}\, dt = \left[\log t\right]_{2x}^{3x} = \log \frac{3}{2}$$



Quindi possiamo aspettarci un grafico del tipo qui accanto

$\boxed{\text{Monotonia}}$ $$f'(x) = [g(3x) - g(2x)]'$$

$$= 3g'(3x) - 2g'(2x)$$

$$= \frac{3}{\arctan(3x)} - \frac{2}{\arctan(2x)}$$

Sarà vero che è >0 per ogni $x>0$?

Ci serve dimostrare che

$$\frac{3\arctan(2x) - 2\arctan(3x)}{\underbrace{\arctan(3x)}_{>0} \cdot \underbrace{\arctan(2x)}_{>0}} \overset{?}{>} 0 \qquad \forall\, x>0$$

Ci basta dimostrare che $\varphi(x) = 3\arctan(2x) - 2\arctan(3x) > 0$ per ogni $x>0$.

Osservo che $\varphi(0)=0$ e

$$\varphi'(x) = 3\frac{2}{1+4x^2} - 2\frac{3}{1+9x^2} = 6\left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{1+9x^2}\right) > 0$$

per ogni $x>0$ quindi $\varphi(x)$ è strett. crescente e quindi, visto che $\varphi(0)=0$, di sicuro $\varphi(x)>0$ per $x>0$.

$\boxed{\text{Andamento all' infinito}}$ Dico che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$$

Una volta saputo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ posso usare Hôp e viene

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\arctan(3x)} - \frac{2}{\arctan(2x)}$$

$$= 3\cdot\frac{2}{\pi} - 2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \qquad ☺$$

<u>Esempio 2</u> Calcolo delle derivate

$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{\arctan t}{t^2}\,dt$$

$$f'(x) = \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^4}}}_{\text{Ho sostituito } x^2 \text{ nell'integranda}} \cdot \underbrace{\boxed{2x}}_{\text{derivata dell'esterno}} - \underbrace{\boxed{\frac{\arctan x}{x^2}}}_{\text{sostituito } x \text{ nell'integranda}} \overset{\text{Derivata di } x}{\boxed{\cdot 1}}$$

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{-x^6}}_{\text{sostituisco } x^3} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{Deriv. di } x^3} - \underbrace{e^{-\sin^2 x}}_{\text{sostituisco } \sin x} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{Derivata di } \sin x}$$

Perché funziona? Sia $g(x)$ UNA primitiva qualunque di e^{-x^2},
cioè $g'(x) = e^{-x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora

$$f(x) = g(x^3) - g(\sin x)$$

Quindi $f'(x) = [\,g(x^3) - g(\sin x)\,]'$

$$= g'(x^3)\cdot 3x^2 - g'(\sin x)\cdot \cos x$$

$$= e^{-x^6}\cdot 3x^2 - e^{-\sin^2 x}\cdot \cos x$$

$\boxed{\text{Formula generale}}$ Se

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t)\,dt$$

allora

$$\boxed{f'(x) = \varphi(b(x)) \cdot b'(x) - \varphi(a(x)) \cdot a'(x)}$$

Derivata di un integrale con estremi dipendenti da x

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ Risolvere la disequazione

$$\arctan x > \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Poniamo $f(x) = \arctan x - \int_0^x e^{-t^2} dt$ e studiamo $f(x)$.

Osserviamo che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$.
Vediamo se è monotona (intanto f è dispari)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2} \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{1 - (1+x^2)e^{-x^2}}{1+x^2} \overset{?}{>} 0$$

Il segno dipende dal solo numeratore, che è una funzione pari. Quindi studio

$$g(x) = 1 - (1+x^2)e^{-x^2}$$

Vediamo subito che $g(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

e $$g'(x) = -2x e^{-x^2} - (1+x^2) \cdot (-2x e^{-x^2})$$
$$= -\cancel{2x e^{-x^2}} + \cancel{2x e^{-x^2}} + 2x^3 e^{-x^2} > 0 \text{ per } x > 0.$$

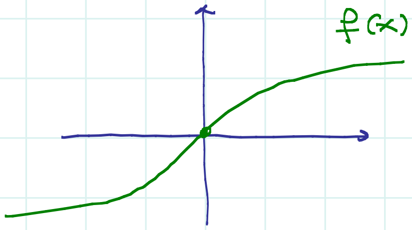
Riassunto: $g(0)=0$ e $g'(x)>0$ per $x>0$

quindi $g(x)>0$ per $x>0$

quindi $f'(x)>0$ per $x>0$

quindi (essendo $f(0)=0$) anche $f(x)>0$ per $x>0$.

Essendo f dispari avremo che $f(x)<0$ per $x<0$



Quindi $\arctan x > \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ se e solo se $x>0$

— o — o —

Esempio 4 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{x^2}}_{\downarrow\atop +\infty} \underbrace{\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt}_{\downarrow\atop 0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt}{e^{-x^2}} \underset{\uparrow\atop [\frac{0}{0}]:\,\text{Hôp}}{=}$$

$$\underset{\text{regola generale}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^4}\cdot 2x - e^{-x^2}\cdot 1}{-2x\,e^{-x^2}} \underset{\uparrow\atop \text{raccolgo sopra (o semplifico) } e^{-x^2}}{=} 0$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 101

Note Title 02/05/2025

SUCCESSIONI PER RICORRENZA LINEARI

Caso semplice $x_{n+1} = a x_n + b$ con a e b numeri dati

(esempio : $x_{n+1} = 3 x_n - 2$ oppure $x_{n+1} = -7 x_n + 5$)

Obiettivo : trovare FORMULA ESPLICITA

Caso banale Se $b = 0$, allora $\boxed{x_{n+1} = a x_n}$

Formula generale : $\boxed{x_n = a^n x_0}$ (si dimostra per induzione)

$x_1 = a x_0$, $x_2 = a x_1 = a a x_0 = a^2 x_0$, $x_3 = a x_2 = a \cdot a^2 x_0 = a^3 x_0 \ldots$

Caso più generale $x_{n+1} = a x_0 + b$

Proviamo a scrivere i primi termini

$x_1 = a x_0 + b$, $x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + ab + b$

$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$

Sembra venire

$$x_n = a^n x_0 + b\,(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$$
$$= a^n x_0 + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Sembra ragionevole la formula $\boxed{x_n = x_0 a^n + b\,\frac{a^n - 1}{a - 1}}$ se $a \neq 1$

Se $a = 1$, allora $x_{n+1} = x_n + b$ ⇝ $\boxed{x_n = x_0 + nb}$ se $a = 1$

Entrambe le formule si dimostrano facilmente per induzione.

Modo alternativo $x_{n+1} = a x_n + b$

Domanda: esiste una succ. costante che la verifica?

Se $x_n \equiv \ell$, allora $\ell = a\ell + b$, cioè $\ell = -\frac{b}{a-1}$

Ogni altra soluzione la scriviamo come $x_n = \ell + y_n$

Vedo cosa risolve y_n:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \ell = a x_n + b - \ell = a(\ell + y_n) + b - \ell$$
$$= a y_n + \underbrace{\boxed{a\ell - \ell + b}}_{= 0 \text{ per l'eq. che definisce } \ell}$$

quindi $y_{n+1} = a y_n$, quindi dal caso banale

$$y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - \ell)$$

Ma allora $x_n = \ell + y_n = \ell + a^n(x_0 - \ell)$

$$= a^n x_0 + (1 - a^n)\ell$$

$$= a^n x_0 + \frac{a^n - 1}{a-1} b,$$

che è la stessa formula di prima.

Interpretazione $x_{n+1} = \underbrace{a x_n}_{\text{parte omogenea}} + \overset{\text{parte non omogenea}}{b}$

$$\text{Soluz. generale} = \underbrace{c a^n}_{\text{soluzione generale della omogenea}} + \underset{\text{soluzione speciale costante della non omogenea}}{\ell}$$

→ Per trovare ℓ, sostituiamo come prima e viene $\ell = -\frac{b}{a-1}$

→ Per trovare c, sostituiamo il dato iniziale

$$x_0 = c \cdot a^0 + \ell \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{x_0 - \ell}{\underbrace{a^0}_{=1}} \quad \rightsquigarrow \text{ si fanno i conti.}$$

↖ [Corretto dopo video]

Esempio 1 $x_{n+1} = 3x_n - 2$

Formula generale $x_n = c \cdot 3^n + \ell$

Trovo ℓ : $\ell = 3\ell - 2 \rightsquigarrow 2\ell = 2 \rightsquigarrow \ell = 1$

Trovo c : $x_0 = c + 1 \rightsquigarrow c = x_0 - 1$

Finale $\boxed{x_n = (x_0 - 1) \cdot 3^n + 1}$

Oss. Se invece di x_0, io conoscevo x_{10}, allora per trovare c sostituivo $n = 10$.

Esempio 2 $x_{n+1} = -5x_n + 7$ $x_2 = 3$

Trovare x_{2025}.

Formula generale: $x_n = c(-5)^n + \ell$

→ Calcolo ℓ : $\ell = -5\ell + 7 \rightsquigarrow 6\ell = 7 \rightsquigarrow \ell = \frac{7}{6}$

→ Calcolo c : metto $n = 2 \rightsquigarrow x_2 = 25c + \frac{7}{6} \rightsquigarrow 25c = 3 - \frac{7}{6}$

$$25c = \frac{11}{6} \rightsquigarrow c = \frac{11}{150} \rightsquigarrow \boxed{x_n = \frac{11}{150}(-5)^n + \frac{7}{6}}$$

Sostituendo $n = 2025$ si trova la risposta

Fare la verifica
→ mettere $n = 2$
→ sostituire x_{n+1} e x_n nella ricorrenza

Esempio 3 $x_{n+1} = 2x_n + 7 + n^2$

La soluzione generale sarà $x_n = c \cdot 2^n +$ soluzione speciale

$x_n = an^2 + bn + c$ sostituisco

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c + 7 + n^2$$
$$\underbrace{an^2}_{} + \underbrace{2an}_{} + \underbrace{a}_{} + \underbrace{bn}_{} + \underbrace{b}_{} + \underbrace{c}_{} = \underbrace{2an^2}_{} + \underbrace{2bn}_{} + \underbrace{2c}_{} + \underbrace{7}_{} + \underbrace{n^2}_{}$$

$$\begin{cases} a = 2a + 1 & (\text{coeff. } n^2) & a = -1 \\ 2a + b = 2b & (\text{coeff. } n) & b = -2 \\ a + b + c = 2c + 7 & (\text{termine noto}) & c = -10 \end{cases}$$

Soluzione generale: $\boxed{x_n = c \cdot 2^n - n^2 - 2n - 10}$

↑ lo posso calcolare se conosco un valore di x_n

Esempio 4 $x_{n+1} = 2x_n + 3^n + n$

Formula generale: $x_n = c \cdot 2^n + \underbrace{an+b}_{\text{per far contento } n} + \underbrace{d \cdot 3^n}_{\text{per far contento } 3^n}$

Calcolo a, b, d sostituendo nella ricorrenza la seconda parte

$$\overbrace{a(n+1) + b + d \cdot 3^{n+1}}^{x_{n+1}} = \overbrace{2an + 2b + 2d \cdot 3^n}^{2x_n} + 3^n + n$$
$$\underbrace{an}_{} + \underbrace{a + b}_{} + \underbrace{3d}_{} \cdot 3^n = \underbrace{2an}_{} + \underbrace{2b}_{} + \underbrace{2d}_{} \cdot 3^n + \underbrace{3^n}_{} + \underbrace{n}_{}$$

$$\begin{cases} a = 2a + 1 & a = -1 \\ a + b = 2b & b = -1 \\ 3d = 2d + 1 & d = 1 \end{cases} \leadsto \boxed{x_n = c \cdot 2^n - n - 1 + 3^n}$$

↑ se conosco x_0 posso trovare c

Esempio 5 $x_{n+1} = 2x_n + 2^n$

Ora la soluz. gen. sarà $x_n = \underbrace{c \cdot 2^n}_{\substack{\uparrow \\ \text{dipende dal} \\ \text{2 nella parte} \\ \text{omogenea}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } 2^n \text{ è} \\ \text{già soluz.} \\ \text{dell'omog.}}}{a\,n \cdot 2^n}$

Sostituendo solo la seconda parte

$$\overbrace{a(n+1)\,2^{n+1}}^{x_{n+1}} = \overbrace{2a\,n \cdot 2^n}^{2x_n} + 2^n$$

$$2a(n+1) \cdot 2^n = 2a\,n \cdot 2^n + 2^n$$

$$\underset{\uparrow}{\cancel{2an\,2^n}} + 2a \cdot 2^n = \underset{\uparrow}{\cancel{2an \cdot 2^n}} + 2^n \rightsquigarrow 2a = 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$$

se ne devono andare

Soluzione generale $x_n = c \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1}$

Se sapessi che $x_0 = 7$, allora sostituisco $n=0$ e trovo $7 = c$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 102

Note Title 02/05/2025

Ricorrenze lineari omogenee di ordine superiore

Ordine 2 $\boxed{x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}}$ dipendenza lineare dai due termini precedenti

Formula generale $\boxed{x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n}$

dove λ_1 e λ_2 sono le due radici del polinomio

$\boxed{\lambda^2 - a\lambda - b = 0}$ polinomio caratteristico

Esempio 1 $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$

Polinomio caratteristico $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x-2)(x-3) = 0$

radici $x = 2$ e $x = 3$

Soluz. generale : $\boxed{x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n}$

↑ se conosco x_0 e x_1, allora trovo c_1 e c_2

Perché funziona? Osservo che $x_n = 2^n$ è una soluzione perché

$$2^{n+1} \overset{?}{=} 5 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^{n-1}$$

$$2^2 \cdot \cancel{2^{n-1}} \overset{?}{=} 5 \cdot 2 \cdot \cancel{2^{n-1}} - 6 \cdot \cancel{2^{n-1}} \qquad 4 = 10 - 6 \quad \ddot\smile$$

Allo stesso modo osservo che $x_n = 3^n$ funziona (sostituire per crederci)

Domanda: quali sono i valori di λ per cui $x_n = \lambda^n$ funziona?

$$\lambda^{n+1} \overset{?}{=} 5\lambda^n - 6\lambda^{n-1}$$

$$\lambda^2 \cdot \cancel{\lambda^{n-1}} \overset{?}{=} 5\lambda \cdot \cancel{\lambda^{n-1}} - 6\cancel{\lambda^{n-1}} \rightsquigarrow \lambda^2 = 5\lambda - 6$$

Fatto generale: gli esponenziali che funzionano sono quelli che hanno come base le radici del polinomio caratteristico (vero per ogni ordine)

Se funzionano 2^n e 3^n, allora funzionano tutte le comb. lin.

$$x_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

(conseguenza della linearità)

Ci sono altre soluzioni? No! Fissati x_0 e x_1 trovo c_1 e c_2 per cui $c_1 2^n + c_2 3^n$ risolve e verifica x_0 e x_1, quindi la soluzione è quella.

Esempio 2 $\qquad x_{n+1} = 6x_n - 9x_{n-1}$

Pol. caratteristico $\quad \lambda^2 = 6\lambda - 9 \rightsquigarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \rightsquigarrow (\lambda-3)^2 = 0$

$\rightsquigarrow \lambda = 3$ radice di molt. due.

$$x_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dovuta alla molteplicità}}}{n} \cdot 3^n$$

Oss. Funziona anche se le radici sono numeri complessi, nel qual caso posso ottenere una formula con soli numeri reali

Esempio 3 $x_{n+1} = 4x_n - 13x_{n-1}$ $x_0 = 1$ $x_1 = 7$

I numeri saranno tutti interi!

Pol. caratt.: $\lambda^2 = 4\lambda - 13 \rightsquigarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

Formula generale $x_n = c_1 \cdot (2+3i)^n + c_2 \cdot (2-3i)^n$

$\rightsquigarrow$ usando i dati iniziali posso trovare c_1 e c_2 che saranno numeri complessi

Volendo, posso scrivere $2+3i = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$x_n = c_1 \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2 \rho^n (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

Dopo aver calcolato c_1 e c_2 si vede che le parti con la i se ne vanno.

Esempio 4 (Successione di Fibonacci)

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $x_0 = 0$ $x_1 = 1$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Trovare la formula generale e calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Pol. caratt.: $\lambda^2 = \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Calcolo c_1 e c_2

$\boxed{n=0}$ $\quad 0 = c_1 + c_2 \quad \rightsquigarrow \quad c_2 = -c_1$

$\boxed{n=1}$ $\quad 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} - c_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = c_1\sqrt{5} \rightsquigarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Con i dati iniziali:

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Nonostante la $\sqrt{5}$ è un numero intero!

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sia al numeratore sia al denominatore comanda il 1° termine perché il secondo ha base con val. ass. < 1

<u>Curiosità</u> Il rapporto tra due Fibonacci consecutivi tende quasi alla conversione miglia/km

<u>Esempio 5</u> $\quad x_{n+1} = x_n + x_{n-1} - 2n + 7^n$

La soluzione generale sarà fatta da 2 pezzi

→ il primo è la soluz. generale di Fibonacci (fine pag. precedente)

→ il secondo accontenta la parte non omogenea e sarà del tipo

$$x_n = an + b + c\,7^n$$

Facciamo il conto

$$\underbrace{a(n+1)+b+c\cdot 7^{n+1}}_{x_{n+1}} = \underbrace{an+b+c\cdot 7^{n}}_{x_n} + \underbrace{a(n-1)+b+c\cdot 7^{n-1}}_{x_{n-1}} - 2n + 7^n$$

$a = a + a - 2$ (coeff. n) $a = 2$

$a + b = b - a + b + 7$ (termine noto) $b = \dots$

$7c = c + \frac{1}{7}c + 1$ (coeff. 7^n) $c = \dots$

In questo caso quanto fa $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Il limite è uguale a 7 perché nella formula comanda il termine con 7^n, che ha davanti un coeff. $c \neq 0$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 103

Note Title 02/05/2025

Esempio 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ b_0 = -3 \end{matrix}$$

Nel sistema il valore di ogni successione dipende dai valori al passo precedente di entrambe

SLOGAN: due successioni del 1° ordine = una succ. di ordine 2

$$a_{n+2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1ª shiftata}}}{=} 4a_{n+1} - b_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mi procuro} \\ b_{n+1} \text{ dalla 2ª}}}{=} 4a_{n+1} - (2a_n + b_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mi procuro} \\ -b_n \text{ dalla prima}}}{=} 4a_{n+1} - 2a_n - b_n$$

$$= 4a_{n+1} - 2a_n + a_{n+1} - 4a_n$$

$$= 5a_{n+1} - 6a_n$$

Conclusione:

$$\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n}$$

Risolvo questa: $\lambda^2 = 5\lambda - 6 \rightsquigarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{smallmatrix}$

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

Per trovare c_1 e c_2 uso che $a_0 = 1$ e $a_1 = 7$ ← ottenuto dalla 1ª eq. con $n = 0$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 7 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_1 = -4 \\ c_2 = 5 \end{matrix} \rightsquigarrow \boxed{a_n = -4 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$$

Come trovo b_n? $b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla 1ª} \\ \text{equazione}}}{=} 4a_n - a_{n+1} = -16 \cdot 2^n + 20 \cdot 3^n + 4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^{n+1}$

$$= -16 \cdot 2^n + 20 \cdot 3^n + 8 \cdot 2^n - 15 \cdot 3^n$$

$$\boxed{b_n = -8 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ Il sistema era

$$a_{n+1} = 4a_n - b_n \qquad \text{cioè} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_m \end{pmatrix}$$
$$b_{m+1} = 2a_n + b_m$$

cioè del tipo $v_{m+1} = A v_m$ da cui $\boxed{v_m = A^m v_0}$

$\operatorname{Tr} A = 5$ $\quad$ $\operatorname{Det} A = 6$ ⇝ autovalori : $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

Morale : se il sistema fosse $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 3b_m \end{cases}$

lo sapremmo risolvere

Esempio 2 $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 15b_n \\ b_{m+1} = a_n + 7b_m \end{cases}$

Formula generale

$$a_{n+2} \underset{\uparrow \; 1^a \text{ shiftata}}{=} 5a_{n+1} + 15b_{n+1} \underset{\uparrow \; b_{n+1} \text{ dalla } 2^a}{=} 5a_{n+1} + 15a_n + 7 \cdot 15 b_n$$

$$\underset{\uparrow \; 15\, b_m \text{ dalla } 1^a}{=} 5a_{n+1} + 15a_n + 7(a_{n+1} - 5a_n)$$

$$= 12a_{n+1} - 20a_n$$

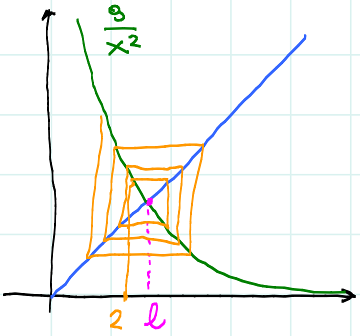
$$a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n \quad ⇝ \quad \lambda^2 = 12\lambda - 20 \quad ⇝ \quad \lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 10) = 0$$

$$\boxed{a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 10^n}$$

Usando di nuovo la 1^a trovo b_m.

— o — o —

Esempio 3 $x_{n+1} = \frac{9}{x_n^2}$ $x_0 = 2$



Dove si incontrano ?

$$\ell = \frac{9}{\ell^2} \rightsquigarrow \ell^3 = 9 \rightsquigarrow \ell = 3^{\frac{2}{3}}$$

$3^{\frac{2}{3}} \overset{?}{<} 2$ elevo al cubo: $3^2 \overset{?}{<} 2^3$, $9 \overset{?}{<} 8$ NO!

Idea: spiraleggiamento uscente, cioè

→ sui pari decresce e tende a 0 (cioè $a_{2n} \longrightarrow 0$)

→ sui dispari cresce e tende a $+\infty$ (cioè $a_{2n+1} \longrightarrow +\infty$)

Come me ne accorgo? $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{9}{4}$ (che è $> \ell$), $x_2 = \frac{9}{\frac{81}{16}} = \frac{16}{9}$

Quindi di sicuro $x_2 < x_0 < \ell$

Applico $f(x) = \frac{9}{x^2}$ $x_3 > x_1 > \ell$

" $x_4 < x_2 < \ell$

" $x_5 > x_3 > \ell$

Questo ci dice che x_{2n} decresce (e ovviamente è ≥ 0)

x_{2n+1} cresce

Quindi

$$x_{2n} \longrightarrow m \in \mathbb{R}$$
$$x_{2n+1} \longrightarrow \overline{m} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Se fosse $\overline{m} \in \mathbb{R}$, allora $m = \frac{9}{\overline{m}^2}$ e $\overline{m} = \frac{9}{m^2}$

per il solito motivo, da cui

$$m\,\overline{m}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono entrambi } 9}}{=} \overline{m}\,m^2$$

Se fossero anche diversi da 0, allora semplificando $m = \overline{m} = \ell$

il che è incompatibile con le disuguaglianze.

L'unica opzione che resta è $m = 0$ e $\overline{m} = +\infty$

Ci sono due modi per rendere rigoroso il discorso

1° modo Dimostrare per induzione che

$x_{2n+2} \leq x_{2n} \leq \ell$ (sui pari scende)

$x_{2n+3} \geq x_{2n+1} \geq \ell$ (sui dispari sale)

Il passo base si fa a mano calcolando x_0, x_1, x_2, x_3.

Nel passo induttivo, prendo il secondo pezzo dell'ipotesi

applico f ⇝ $x_{2n+4} \leq x_{2n+2} \leq \ell$ (1° pezzo della tesi)

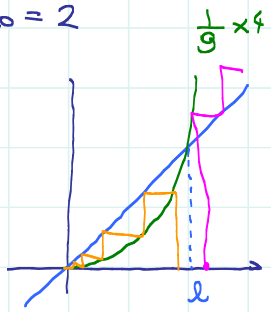
applico f ⇝ $x_{2n+5} \geq x_{2n+3} \geq \ell$ (2° " " ")

2° modo Pongo $y_n = x_{2n}$ (la sottosucc. dei pari)

Che cosa risolve y_n ?

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = \frac{9}{x_{2n+1}^2} = \frac{9}{\left(\frac{9}{x_{2n}^2}\right)^2} = \frac{x_{2n}^4}{9} = \frac{y_n^4}{9}$$

Quindi y_n risolve $y_{n+1} = \frac{1}{9} y_n^4$ con $y_0 = x_0 = 2$



È evidente e facile da dimostrare che $y_n \to 0$

(piano con la monotonia)

Analogamente $z_n = x_{2n+1}$ risolve

$$z_{n+1} = \frac{1}{9} z_n^4 \quad \text{con} \quad z_0 = x_1 = \frac{9}{4} > \ell$$

da cui facilmente $z_n \to +\infty$.

Da ricordare: può essere utile fare due passi di iterazione!

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 104

Note Title 03/05/2025

Equazioni differenziali alla BERNOULLI

$$\boxed{u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t)^{\alpha}}$$

Idea: queste si riducono ad eq. lin. con un cambio di variabili

Esempio 1 $\quad u' = 2u + \frac{3t}{u^2}$

Questa rientra nello schema precedente con $a(t) \equiv 2$, $b(t) = 3t$, $\alpha = -2$.

Slogan: liberarsi di u^2 nell' ultimo termine

Moltiplico per u^2:

$$u^2 u' = 2u^3 + 3t$$

$$3u^2 u' = 6u^3 + 9t$$

$$(u^3)' = 6u^3 + 9t$$

Pongo $v = u^3$ e ho l'equazione

$$v' = 6v + 9t$$

e da qui è fatta

$$v(t) = \underbrace{c\,e^{6t}}_{\uparrow \text{ sol. gen. parte omog.}} + \bar{v}(t)$$

$\bar{v}(t) = at + b \quad \leadsto \quad a = 6at + 6b + 9t$

$\bar{v}' = 6\bar{v} + 9t$

$\leadsto \quad 6a + 9 = 0 \quad \leadsto \quad a = -\frac{3}{2} \qquad b = -\frac{1}{4}$

$a = 6b$

$$\leadsto v(t) = c \cdot e^{6t} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4} \quad \leadsto \quad \boxed{u(t) = \sqrt[3]{c \cdot e^{6t} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}}}$$

Esempio 2 $u' = 2u - 3u^2$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Trattarla come eq. variabili separabili

$$\frac{du}{2u-3u^2} = dt \rightsquigarrow \text{integro e ricavo}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Vederla come Bernoulli con $a(t) \equiv 2$, $b(t) \equiv -3$, $\alpha = 2$

Mi libero di u^2 in fondo:

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2}{u} - 3 \qquad -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{u} + 3$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{2}{u} + 3$$

Cambio di variabili $v = \frac{1}{u} \rightsquigarrow v' = -2v + 3$

Risolvo a occhio $v(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte omogenea}}}{c \cdot e^{-2t}} + \frac{3}{2} \leftarrow$ sol. speciale

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{1}{\frac{3}{2} + ce^{-2t}}}$$

Supponiamo di avere il dato iniziale $u(0) = \alpha$. Allora trovo c

$\boxed{t=0}$ $\alpha = \frac{1}{\frac{3}{2}+c} \rightsquigarrow \frac{3}{2} + c = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow c = \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}$

$\uparrow\uparrow$ uhm... e se $\alpha = 0$?

$$u(t) = \frac{1}{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\right)e^{-2t}}$$

Cosa succede per $\alpha = 0$? In quel caso $u(t) \equiv 0$ è la soluzione (che è sol. si vede sostituendo, che è unica segue dal teorema di unicità).

Fatto generale Se l'eq. è

$$u' = f(t) \cdot g(u) \qquad u(0) = \alpha$$

allora se $g(u_0) = 0$ la soluzione è sempre $u(t) \equiv \alpha$.

Nell'esempio 2 le soluzioni costanti sono $\underbrace{u(t) \equiv 0}_{\substack{\uparrow \\ \text{qui non} \\ \text{trovo } c}}$, $\underbrace{u(t) \equiv \frac{2}{3}}_{\substack{\uparrow \text{viene} \\ c=0}}$

Esempio 3 $\quad u' = (t^2+u)^3 - 2t$

Faccio il cambio di variabili $v(t) = t^2 + u(t)$. Allora

$$v'(t) = 2t + u'(t) = \cancel{2t} + (t^2+u(t))^3 - \cancel{2t} = v(t)^3$$

Nella variabile v so risolvere $\quad v' = v^3 \rightsquigarrow \frac{dv}{v^3} = dt$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{v^2} = t + c \rightsquigarrow \frac{1}{v^2} = -2t + c \rightsquigarrow v(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{c-2t}}$$

$$\boxed{u(t) = v(t) - t^2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{c-2t}} - t^2}$$

(il segno ± dipende dal dato iniziale)

Esempio 4 $\quad u' = 1 + t^2 e^{-u}$

Proviamo ad eliminare e^{-u} in fondo: $e^u \cdot u' = e^u + t^2$

$$(e^u)' = e^u + t^2$$

Pongo $v = e^u$ e mi ritrovo $\quad v' = v + t^2$

$\rightsquigarrow$ risolvo con i soliti metodi $\rightsquigarrow u(t) = \log(v(t))$ ☺

Esempio 5
$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t) - v(t) \\ v'(t) = -4u(t) + 6v(t) \end{cases}$$

Sistema: devo trovare $u(t)$ e $v(t)$

Idea: si può trasformare in una equazione unica di ordine 2

$$\underbrace{u''(t) = 3u'(t) - v'(t)}_{\text{prima eq. derivata}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prendo } v'(t) \\ \text{dalla } 2^a}}{=} 3u'(t) + 4u(t) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{me la procuro dalla} \\ 1^a \text{ equazione}}}{6v(t)}$$

$$= 3u'(t) + 4u(t) + 6u'(t) - 18u(t)$$

$$= 9u'(t) - 14u(t)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u''(t) = 9u'(t) - 14u(t)} \rightsquigarrow x^2 = 9x - 14 \rightsquigarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\rightsquigarrow (x-7)(x-2) = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = ae^{7t} + be^{2t}}$$

A questo punto mi procuro $v(t)$ dalla prima equazione

$$v(t) = 3u(t) - u'(t) = 3ae^{7t} + 3be^{2t} - 7ae^{7t} - 2be^{2t}$$

$$\boxed{v(t) = -4ae^{7t} + be^{2t}}$$

Oss. Il sistema è descritto dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ che ha $\mathrm{Tr} = 9$ e $\mathrm{Det} = 14$, quindi autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 7$.
Chi sono gli autovettori?

$$\lambda = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 7 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La soluzione la posso scrivere come

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore} \\ \text{di } \lambda=2}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} e^{2t} + a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore} \\ \text{di } \lambda=7}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}} e^{7t}$$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Questa rappresentazione della soluzione vale per sistemi di dimensione qualunque purché

→ la matrice sia diagonalizzabile

→ gli autovalori siano reali (altrimenti gli esponenziali complessi vanno interpretati)

$\boxed{\text{Delirio}}$ Il sistema lo posso pensare come

$$W'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{A}\, W(t) \qquad \text{con} \quad W(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

e allora la soluzione verrebbe da scriverla come

$$W(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esponenziale} \\ \text{di una matrice}}}{\boxed{e^{At}}}\, W(0)$$

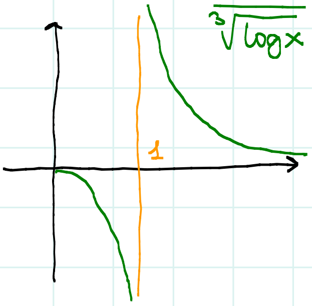
dove $\quad e^{M} = Id + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{6} M^3 + \ldots$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 105

Note Title 03/05/2025

Esercizio 1 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx$



In 0 non ci sono problemi.

I problemi sono in 1 e $+\infty$

$$\int_0^4 \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^4 \dots$$

Idea: portare il problema in 1 in 0.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx \underset{\substack{y=x-1\\ dy=dx}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+y)}}\,dy \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+y)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

e questo converge per confronto asintotico con $g(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\,dx \underset{\substack{y=1-x\\ dy=-dx}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}}\,dy$$

Brutale: $\frac{1}{\sqrt[3]{\log(1-y)}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ quindi converge

Direttamente dall'inizio potevo scrivere

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\log(1+\underbrace{(x-1)})}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

quando $x \sim 1$
$x-1 \sim 0$

e questo in 1 converge

Per il problema a $+\infty$ il $\log x$ è troppo debole per farlo convergere, quindi l'idea è che diverga a $+\infty$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x} = g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{\log x}} = +\infty \quad \dots \text{caso limite}$$

quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \geq g(x)$ per x grandi.

$\int g(x)\,dx$ con pbm a $+\infty$ diverge ...

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx$

$$\int_0^{\pi} \dots = \underset{\uparrow}{\int_0^{\pi/2}} \dots + \underset{\uparrow}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}} \dots$$

problema in $x=0$ problema in $x=\pi$

$\boxed{x=0}$ $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ ⇝ diverge

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{\sin(\pi-y)}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\pi-y)}\,dy$$

$y=\pi-x$
$dy=-dx$

$$\underset{\nearrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin y}\,dy$$

trigon.

abbiamo ottenuto quello che era evidente per simmetria

Esercizio 3 $\int_7^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$

Converge alla grande perché $\frac{\arctan(x^2)}{x^2-1} \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^2-1}$

Ora $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ volendo si calcola pure, ma in ogni caso converge per C.A. con $\frac{1}{x^2}$

$$\int_1^7 \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{\arctan(x^2)}{(x+1)\underbrace{(x-1)}_{\uparrow}} \sim \frac{1}{x-1}$$ che con problema in $x=1$ diverge

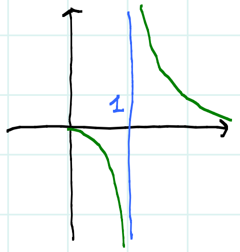
colpevole dell'improprietà

Rigoroso: C.A. con $g(x)=\frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\arctan(x^2)}{x+1} = \frac{\pi}{8} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq \pm\infty\end{matrix}$$

quindi si comporta come $\int_1^a \frac{1}{x-1}\,dx$ che diverge $(y=x-1)$

$$\int_0^7 \frac{\arctan(x^2)}{x^2-1}\,dx$$



$$\int_0^7 \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^7 \dots$$

Diverge a $-\infty$ Diverge a $+\infty$

Quindi globalmente è indeterminato

Esercizio 4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha\,dx$

Studiare al variare di α

Porto il problema in 0 con il cambio di variabili $y=\frac{\pi}{2}-x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^\alpha\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^\alpha dy$$

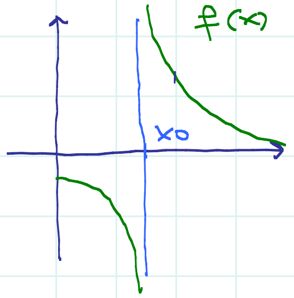
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^\alpha dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\tan y)^\alpha}\,dy$$

$\frac{1}{\tan y}\sim\frac{1}{y}$ per $y\sim 0$ ⇝ converge $\iff \alpha<1$

Esercizio 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+7x-5}}\,dx$

Grosso problema: il denominatore si annulla da qualche parte
(in $x=0$ vale -5 e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$)

Fatto 1 Il denominatore si annulla in un unico p.to x_0
Infatti la derivata è $4x^3+7 \geq 7$ per $x \geq 0$, quindi è crescente strett., quindi si annulla una sola volta.
Però non riesco a trovare x_0



Fatto 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{x_0} \dots + \int_{x_0}^{x_0+4} \dots + \int_{x_0+4}^{+\infty} \dots$

$\displaystyle\int_{x_0+4}^{+\infty} \dots$ converge per C.A. con $\dfrac{1}{x^{4/3}}$

Fatto 3 Per il problema in $x = x_0$ faccio il confronto asintotico con

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-x_0}}$$

Mi riduco a calcolare

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \sqrt[3]{\frac{x-x_0}{x^4+7x-5}}$$

Basta fare il limite dentro la radice, e quello è $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{x-x_0}{x^4+7x-5} \underset{\text{Hôp}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{4x^3+7} = \frac{1}{4x_0^3+7} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

quindi l'integrale si comporta come quello di $g(x)$ e quindi converge!

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 106

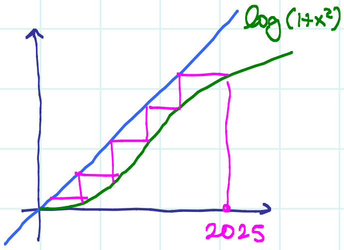
Note Title 03/05/2025

Esercizio 1 Consideriamo la successione

$$x_{n+1} = \log(1+x_n^2) \qquad x_0 = 2025$$

Studiare

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \qquad e \qquad \lim_{n\to+\infty} n^n x_n$$



$\boxed{1^a \text{ cosa}}$ Capire come è messa $f(x) = \log(1+x^2)$ rispetto alla bisettrice $y=x$

Ci piacerebbe che fosse $\log(1+x^2) \leq x$ per ogni $x \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $x=0$

Studio $g(x) = x - \log(1+x^2)$. Osservo che $g(0) = 0$ e

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

Quindi $g'(x) \geq 0$ sempre con annullamento solo per $x=1$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ g strett. cresc. $\Rightarrow$ $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Quindi il disegno è giusto :)

$\boxed{2^a \text{ cosa}}$ $x_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ $\log(1+x_n^2) \leq x_n$ vera per $x_n \geq 0$

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ Teo succ. monotone

(iv) $\ell = 0$ L'unica sol. di $\log(1+\ell^2) = \ell$ è $\ell = 0$ come segue dallo studio di funzioni.

$\boxed{3^a \text{ cosa}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

Non abbiamo la formula esplicita, ma usiamo il rapporto

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n}\underset{\substack{\uparrow\\ y=x_n}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y^2)}{y}=0<1$$

⤳ la serie converge ☺

$\boxed{4^a \text{ cosa}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^n x_n$

Proviamo il criterio della radice. Dobbiamo fare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt[n]{x_n}$ ☹

Proviamo allora il rapporto

$$\frac{(n+1)^{n+1}x_{n+1}}{n^n x_n}=\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\boxed{(n+1)}}\ \underset{\substack{\|\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e}}{\boxed{\frac{(n+1)^n}{n^n}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n}}}$$

$$=\underset{\substack{\downarrow\\e}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}\ \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{(n+1)x_n}}\ \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n^2}}}$$

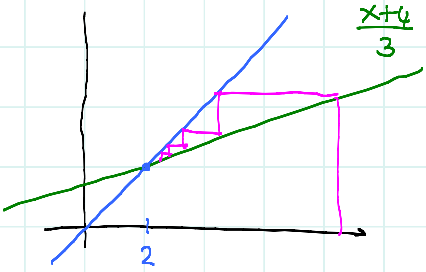
Ci basta quindi dimostrare che $(n+1)x_n\to0$ e questo si fa a sua con il rapporto

$$\frac{(n+2)x_{n+1}}{(n+1)x_n}=\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{n+2}{n+1}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{\log(1+x_n^2)}{x_n}}}\to0$$

Ricostruendo $(n+1)x_n\to0$ quindi $\displaystyle\frac{(n+1)^{n+1}x_{n+1}}{n^n x_n}\to0<1$

quindi $n^n x_n\to0$

quindi $x_n\to0$ molto velocemente.



Esercizio 2 $\quad x_{n+1} = \dfrac{x_n+4}{3} \qquad x_0 = 2025$

A cosa tende?

$x_n \to 2$ con piano
(i) $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$
(iv) $\ell = 2$

Cosa possiamo dire della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(x_n-2)}_{a_n}$?

Intanto può convergere perché $a_n \to 0$. Inoltre è a termini >0 (servirebbe un p.to (i) con $x_n > 2$ stretto che comunque si fa per induzione)

[Achtung! Il fatto che $x_n > 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ non impedisce che $a_n \to 2$]

Proviamo con rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_{n+1}-2}{x_n-2} = \frac{\frac{x_n+4}{3}-2}{x_n-2} = \frac{x_n-2}{3(x_n-2)} = \frac{1}{3} < 1$$

⇝ la serie converge

$\boxed{\text{Back to p.to precedente}}$ La funzione $f(x) = \dfrac{x+4}{3}$ è Lip. con costante $\frac{1}{3}$, quindi potevo fare il piano con la distanza ☺

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 \quad \text{perché } x_n \to 2$$

Più interessante: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n-2} = \frac{1}{3}$ (per rapporto → radice)

Esercizio 3 $x_{n+1} = \arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)$ $x_1 = 2025$

Dimostriamo che $x_n \to 0$

PIANO (i) $0 < x_n \le \frac{\pi}{2}$ $\forall n \ge 2$ [Facile induzione]

(ii) $x_n \to 0$

Infatti dal p.to (i) sappiamo che (uso monotonia di arctan)

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{0}} < \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x_{n+1}} < \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\arctan\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}}$$

Quindi $x_{n+1} \to 0$ e quindi anche $x_n \to 0$.

Studiamo la $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{8^n x_n}_{a_n}$

Per ora non è chiaro nemmeno che $a_n \to 0$. Però $a_n > 0$, quindi posso provare con il rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8^{n+1}x_{n+1}}{8^n x_n} = \lim_{n\to+\infty} 8 \frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8 \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{1}{n}}} \to 0 < 1$$

basta osservare che $y = \frac{x_n}{n} \to 0$ e diventa il limite notevole

Quindi per il criterio del rapporto la serie converge

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{n^n}}$

Provo con il criterio rapporto → radice

$$\frac{\frac{x_{n+1}}{(u+1)^{n+1}}}{\frac{x_n}{n^n}} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_n} = \frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{(u+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{x_n}$$

$$= \underset{\begin{array}{c}\downarrow\\ 1\end{array}}{\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\frac{x_n}{n}}}}\; n \quad \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \qquad\qquad \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} \longrightarrow 0$$

[Forse c'è un errore con gli esponenti]

[Il vero esercizio era con n al numeratore :)]

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 107

Note Title 09/05/2025

LIMINF E LIMSUP DI SUCCESSIONI

Brutalmente : $a_n = (-1)^n \rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1, \ \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1$

$a_n = \arctan(n + (-1)^n n^2) \rightsquigarrow \limsup_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{2}, \ \liminf_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}$

Def. (Limsup) Sia a_n una successione

(i) Se a_n NON è limitata superiormente diciamo che $\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$

(ii) Se a_n è limitata superiormente, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo definire

$$S_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$$

[Nota bene : $S_n \leq M$, quindi $S_n \in \mathbb{R}$, e inoltre $S_{n+1} \leq S_n$ perché è il sup su meno roba, quindi $\{S_n\}$ è debolm. decr.]

Allora si pone

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} a_n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{questo esiste per forza} \\ \text{e sta in } \mathbb{R}\cup\{-\infty\}.}}{\lim_{n\to+\infty}} S_n}$$

Def. (Liminf) Sia a_n una successione

(i) Se a_n NON è limitata inferiormente, allora $\boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$

(ii) Se a_n è limitata inferiormente, allora si pone

$$I_n := \inf\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e infine

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \uparrow}} I_n}$$

questo limite esiste perché I_n è debolm. cresc.
Questo limite sta in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$\boxed{\text{BUONE NOTIZIE}}$ ① Liminf e limsup esistono sempre finiti o ±∞.
② Vale sempre la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

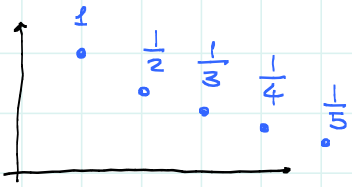
③ Vale il segno di = se e solo se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$, che in questo caso coincide con i due

Esempio facile 1 $\quad a_n = (-1)^n$
Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$S_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$I_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = -1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi

$$S_n \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limsup}}}{1} \qquad\qquad I_n \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{liminf}}}{-1}$$



Esempio facile 2 $a_n = \frac{1}{n}$

$S_n = \sup\left\{\frac{1}{k} : k \geq n\right\} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il 1° è il + grande}}}{\frac{1}{n}}$ $\forall n \geq 1$

$I_n = \inf\left\{\frac{1}{k} : k \geq n\right\} = 0$ $\forall n \geq 1$

Quindi $S_n \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limsup}}}{0}$ $I_n \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{liminf}}}{0}$

$\boxed{\text{Caratterizzazione del limsup}}$

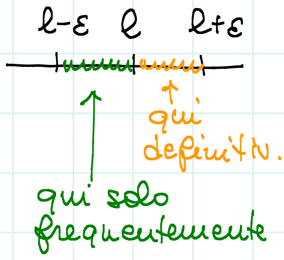
Una volta: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \geq M$ definitivamente

Adesso: $\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \geq M$ frequentemente
cioè infinite volte

Una volta: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0$ $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente

Adesso: $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$



$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0$ $a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente
$a_n \geq \ell - \varepsilon$ frequentemente

Una volta: $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ definitivamente

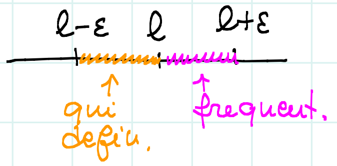
Adesso è la stessa cosa perché dire $\limsup_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ è la stessa cosa che dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Caratterizzazione del liminf

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \rightsquigarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \le M$ frequentemente

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \rightsquigarrow$ è lo stesso che dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$



$\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad l-\varepsilon \le a_n$ definitiv.

$a_n \le l+\varepsilon$ frequentemente.

Utilità Tutti i teoremi sui limiti di successioni si enunciano con molte meno storie usando liminf e limsup

① **Teorema del confronto a 2** Sia $a_n \le b_n$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \le \liminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n \le \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

② **Teorema dei carabinieri** Sia $a_n \le b_n \le c_n$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{a due}}}{\le} \liminf_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvietà}}}{\le} \limsup_{n\to+\infty} b_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{confronto} \\ \text{a due}}}{\le} \limsup_{n\to+\infty} c_n$$

In particolare, se a_n e c_n hanno lo stesso limite, allora i due termini ai lati sono uguali, ma allora sono uguali anche i due centrali, quindi esiste il limite di b_n perché il suo liminf e limsup coincidono

③ <u>Teorema delle sottosuccessioni</u> Se a_n è una succ. e a_{k_n} è una sua sottosuccessione, allora

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} a_{k_n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvia}}}{\leq} \limsup_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

Come prima, se a_n ha limite (in $\mathbb{R}$ oppure $\pm\infty$), allora i due laterali coincidono, ma allora coincidono i due centrali, quindi la sottosucc. ha lo stesso limite della succ.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 108

Note Title 09/05/2025

Achtung! I teoremi algebrici per liminf e limsup non sono così puliti

Esempio classico $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

È chiaro che $\limsup a_n = \limsup b_n = 1$
$\lim (a_n + b_n) = 1$

Quindi il limsup della somma non è la somma dei limsup
Stessa cosa per i liminf.

Si salvano però le disuguaglianze

$$\boxed{\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} (a_n+b_n) &\leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n \\ \liminf_{n\to+\infty} (a_n+b_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \end{aligned}}$$

MAXLIM Sia a_n una successione, che può avere o non avere limite.
Alcune sottosuccessioni di a_n possono però avere limite.
Quanto può valere al massimo il limite di una s.succ. di a_n?

MINLIM Quanto può valere come minimo il limite di una sottosucc. di a_n?

"Def." Maxlim e minlim di a_n sono il massimo ed il minimo limite possibili per delle sottosucc. di a_n.

Teorema (Misterioso)

$$\operatorname{Maxlim}_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n \qquad \operatorname{Minlim}_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n$$

Tradotto: sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$ il $\limsup_{n\to+\infty} a_n$. Allora

① Ogni sottosuccessione che ha limite, ha un limite $\leq L$
(teorema delle sottosucc. visto prima)

② Esiste una sottosuccessione che tende esattamente a L.

Idem per il liminf. Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ il liminf di a_n. Allora

① Ogni s.succ. che ha limite, ha limite $\geq \ell$.
② Esiste una s.succ. che tende esattamente a ℓ.

Conseguenza operativa Come dimostro che $\limsup_{n\to+\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$?
Con questa procedura

① Disuguaglianza dall'alto. Spero di trovare una succ. b_n t.c.

$$\boxed{a_n \leq b_n \text{ definitiv.}} \quad \text{e} \quad \boxed{b_n \to L}$$

[Questo ci dice che $\limsup a_n \leq \limsup b_n = \lim b_n = L$]

② Sottosuccessione dal basso Spero di trovare una s.succ. a_{k_n} t.c.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = L}$$

[Questo ci dice che Maxlim $\geq L$, ma dal teo. sappiamo che limsup = Maxlim]

Analogamente, per dimostrare che $\liminf_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ servono due cose

① Disug. dal basso Cerco b_n t.c.

$$\boxed{b_n \leq a_n \text{ definit.}} \quad e \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = l}$$

② S.succ. dall'alto Cerco a_{k_n} s.succ. t.c.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l}$$

Esempio 1 $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

Osservo che $\underset{\uparrow\, b_n \text{ dal basso}}{-1} \leq a_n \leq \underset{\nwarrow\, b_n \text{ dall'alto}}{1}$

quindi

$\limsup a_n \leq 1$ e $\liminf a_n \geq -1$

Ora mi servono due s.succ. che vadano a $+1$ e -1

Per andare a $+1$ prendo $a_{6n} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 6n\right) = \cos(2\pi n) \to 1$

Per andare a -1 prendo $a_{6n+3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}(6n+3)\right)$

$= \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi) \to -1$

Esempio 2 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

La successione è sostanzialmente

$a_0 = 0$ $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $a_3 = 0$ $a_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $a_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_6 = 0$ $a_7 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e così via periodicamente

Quindi $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Una s.succ. che tende a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è a_{6n+1} oppure a_{6n+2}

Una s.succ. che tende a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ è a_{6n+4} oppure a_{6n+5}

Esempio 3 $a_n = \dfrac{(-1)^n n+3}{8n+(-1)^n}$

Brutale: $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{8}$ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{8}$

$\boxed{\text{Dim. del limsup}}$ Disuguaglianza dall'alto

$$\frac{(-1)^n n+3}{8n+(-1)^n} \le \boxed{\frac{n+3}{8n-1}}$$

(num. + grande denom. + piccolo)

$\downarrow$

$\frac{1}{8}$

Sottosucc. dal basso Basta prendere i pari

$$a_{2n} = \frac{2n+3}{16n+1} \to \frac{1}{8}$$ ☺

Analogo per il liminf

Esempio 4 $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2+\sin n}{n+\sqrt{n}}$

Brutale: $\limsup = +\infty$ $\liminf = -\infty$ $a_n \sim (-1)^n n$

Per il limsup basta trovare la s.succ. che tende a $+\infty$
(automaticamente $\max\lim = \limsup = +\infty$) $\rightsquigarrow$ basta a_{2n}

Per il liminf basta una s.succ. che tende a $-\infty$, ad esempio a_{2n+1}

Esempio 5 $\sqrt{n} \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right) + \alpha \sqrt{n}$

Brutale Il primo termine oscilla tra

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n} \qquad 0 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{n}$$

Se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ allora esiste il limite e fa $-\infty$

Se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ allora esiste il limite e fa $+\infty$

Se $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ allora liminf $= -\infty$ e limsup $= +\infty$

Domanda: cosa succede quando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 109

Note Title 09/05/2025

$\boxed{\text{Liminf e limsup di funzioni}}$ L'idea è sempre la stessa

$\limsup\limits_{x\to+\infty} \sin x = +1$ $\qquad$ $\liminf\limits_{x\to+\infty} \sin x = -1$

Vediamo la definizione in qualche caso.

$\boxed{x\to+\infty}$ Supponiamo per semplicità $f:\underbrace{[a,+\infty)}_{\text{definita su una semiretta}}\to\mathbb{R}$

Allora per ogni $x\geq a$ possiamo definire

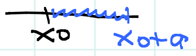
$$S(x)=\sup\{f(t):t\geq x\} \qquad I(x)=\inf\{f(t):t\geq x\}$$

Allora
$$\left.\begin{aligned}\limsup_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} S(x)\\ \liminf_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} I(x)\end{aligned}\right\}\ \text{esistono perché } S(x) \text{ è deb. decr. e } I(x) \text{ è deb. cresc.}$$

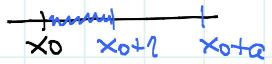
Ovviamente dovrei prima distinguere i casi in cui $S(x)=+\infty$ per infiniti x oppure $I(x)=-\infty$ per ∞ x.

$\boxed{x\to x_0^+}$ Supponiamo $f:(x_0,x_0+a)\to\mathbb{R}$ con $a>0$

Ora per ogni $r\in(0,a)$ definisco

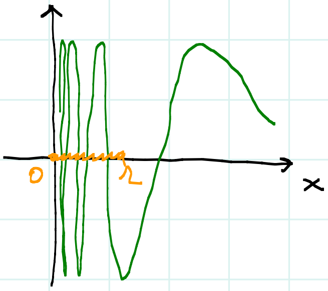


$$S(r)=\sup\{f(x):x\in(x_0,x_0+r)\}$$
$$I(r)=\inf\{f(x):x\in(x_0,x_0+r)\}$$



Poi faccio il limite di $S(r)$ ed $I(r)$ per $r\to0^+$.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $x \to 0^+$



Per ogni $r > 0$ avremo che $S(r) = 1$ e $I(r) = -1$ quindi

$$\limsup_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = 1 \qquad \liminf_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = -1$$

Anche qui potrei definire Maxlim e minlim andando a vedere tutte le possibili successioni che hanno limite, e vale la solita caratterizzazione.

Nell'esempio vorrebbe dire che (guardando $\limsup_{\underset{\uparrow\uparrow}{x\to 0^+}} \sin\frac{1}{x} = 1$)

① per ogni succ. $x_n \to \underset{\uparrow\uparrow}{0^+}$ succede che, se $\sin\frac{1}{x_n} \to \ell$, allora $\ell \leq 1$.

② esiste succ. $x_n \to \underset{\uparrow\uparrow}{0^+}$ tale che $\sin\frac{1}{x_n} \to 1$

Ad esempio posso fare in modo che $\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, cioè

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Quindi ancora una volta la strategia per dim. un limsup è
→ disuguaglianza dall'alto
→ successione dal basso

Esempio 2 $f(x) = \cos x \cdot \sin\frac{1}{x}$ $x \to 0^+$

Brutale: $\cos x \to 1$, $\sin\frac{1}{x}$ oscilla tra -1 e 1, quindi

$$\limsup_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \liminf_{x\to 0^+} f(x) = -1$$

Dim. del limsup

→ Disug. dall'alto $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \boxed{\cos x}$ $\downarrow$ 1

⇝ $\limsup f(x) \leq 1$

→ Succ. dal basso Devo trovare $x_n \to 0^+$ t.c. $f(x_n) \to 1$

[questo ci dirà che $\limsup\limits_{x \to 0^+} f(x) = \max \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \geq 1$]

È utile che il $\sin \frac{1}{x}$ tenda a 1, quindi come prima $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

E se fosse per $x \to +\infty$?

$$\underbrace{\cos x}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\downarrow \, 0}$$

In questo caso esiste il limite e fa 0. Rigorosamente si dimostra con i carabinieri a partire da

$$-\sin \frac{1}{x} \leq \cos x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \sin \frac{1}{x}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

$\boxed{x \to 0}$ Esiste il limite e fa 1 (quindi liminf = limsup = 1)

$\boxed{x \to +\infty}$ Se fosse $f(x) = \sin^3 x$ avremmo limsup = 1
liminf = −1

Se fosse $f(x) = \cos^3 x$ avremmo lo stesso

Quando li metto insieme non posso fare la somma.
Osservo però che $\sin^3 x + \cos^3 x$ è una funzione 2π-periodica, quindi in $[0, 2\pi]$ avrà un max M e un minimo −M
(è anche una funzione dispari)

A questo pto $\limsup_{x\to+\infty} \sin^3 x + \cos^3 x = M$

$\liminf_{x\to+\infty}$ " $= -M$

Come trovo M? Studio la funzione

Esempio 4 $f(x) = \cos x + \cos^2 \frac{1}{x}$

$\boxed{x\to+\infty}$ $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Stime dall'alto e dal basso

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (\liminf \geq 0)}}{\boxed{-1+\cos^2\frac{1}{x}}} \leq \cos x + \cos^2\frac{1}{x} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \\ (\limsup \leq 2)}}{\boxed{1+\cos^2\frac{1}{x}}}$$

Succ. per il limsup : serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to 2$

$\uparrow$ dove faccio il lim. $\uparrow$ presunto limsup

Basta prendere $x_n = 2\pi n$

Succ. per il liminf : serve $x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to 0$

Basta prendere $x_n = 2\pi n + \pi$

$\boxed{x\to 0}$ $f(x) = \underbrace{\cos x}_{\substack{\downarrow \\ 1}} + \underbrace{\cos^2\frac{1}{x}}_{\text{oscilla fra } 0 \text{ e } 1}$

$\liminf_{x\to 0} f(x) = 1$ $\limsup_{x\to 0} f(x) = 2$

Disuguaglianze $\boxed{\cos x} \leq \cos x + \cos^2 \frac{1}{x} \leq \boxed{\cos x + 1}$

$\cos x \downarrow 1$ (liminf ≥ 1) $\qquad \cos x + 1 \downarrow 2$ (limsup ≤ 2)

Succ. per limsup Serve $x_n \to 0$ tale che $f(x_n) \to 2$

Basta prendere $x_n = \frac{1}{n\pi}$ così $\cos^2 \frac{1}{x} = \cos^2 (n\pi) = 1$

Succ. per liminf Serve $x_n \to 0$ t.c. $f(x_n) \to 1$

Basta prendere $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ così $\cos^2 \frac{1}{x} = 0$

oppure $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$

ANALISI 1 – LEZIONE 110

Note Title 10/05/2025

STUDIO QUALITATIVO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Obiettivo: capire come è fatta la soluzione di un' eq. diff. anche se non riusciamo a risolverla esplicitamente

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 7 \end{cases}$

Se volessi risolvere, potrei separare $\frac{du}{\arctan u} = dt$ ma la primitiva a sx non si sa esprimere con le solite funzioni elementari

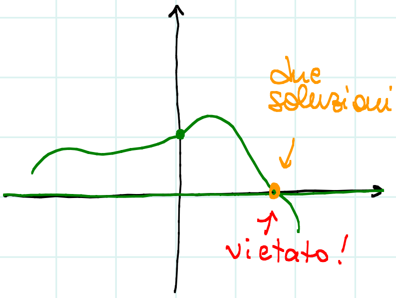
Fatto 1 L'equazione ammette un'unica soluzione, per lo meno locale

Solito teorema di esistenza e unicità

Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è una soluzione dell'eq. diff. (non rispetta la cond. iniziale, ma non importa.

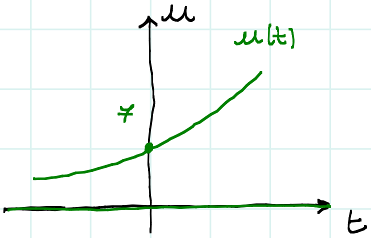
Conseguenza importante: la nostra soluzione, cioè quella con $u(0) = 7$, sarà sempre positiva !!

Se diventasse negativa o nulla, allora intersecherebbe $u(t) \equiv 0$, e in quel p.to di intersezione passerebbero due soluzioni, il che è vietato !!



Fatto 3 La nostra soluzione, fin quando esiste, è strettamente crescente.

Infatti $u'(t) = \arctan \underbrace{u(t)}_{>0} > 0$ per ogni t per cui esiste



$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Può esserci blow-up per $t > 0$?

No! Infatti sappiamo che

$$u'(t) = \arctan u(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

⇝ $u(t)$ cresce meno di una retta con coeff. angolare $\frac{\pi}{2}$, cioè

$$u(t) \leq 7 + \frac{\pi}{2} t$$

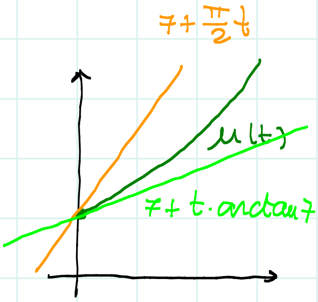
Sostanzialmente sto integrando la disug. di sopra tra 0 e t

$$\int_0^t u'(s)\,ds \leq \int_0^t \frac{\pi}{2}\,ds$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ u(t) - u(0) & \leq & \frac{\pi}{2} t \end{matrix}$$

⇝ questo impedisce il blow-up. D'altra parte, anche break-down non può succedere perchè $\arctan u$ è definita ovunque.

Quindi per $t \geq 0$ la soluzione è monotona crescente e ha esistenza globale, e sta sotto la retta $7 + \frac{\pi}{2} t$



$\boxed{\text{Fatto 5}}$ A cosa $u(t)$ per $t \to +\infty$?

È crescente, quindi ha un limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Noi sappiamo anche che

$$u'(t) = \arctan u(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } u(t) \geq 7}}{\geq} \arctan 7 \qquad \forall\, t \geq 0$$

Ma allora $u(t) \geq \underbrace{7 + (\arctan 7) \cdot t}$

retta che passa per $(0,7)$

e ha coeff. angolare arctan t

Quindi $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Come è fatta $u(t)$ nel passato?

Esiste globalmente? sì, perché dovendo essere $u(t) > 0$ non può avere blow-up a $-\infty$

$\boxed{\text{Fatto 7}}$ A cosa tende $u(t)$ per $t \to -\infty$?

Vorrei tanto dire che tende a 0.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Se non tende a 0, allora tende ad un certo $\ell > 0$ e in tal caso $u'(t) = \arctan u(t) \geq \arctan \ell \quad \forall t \leq 0$

Brutalmente: se la derivata ha un minimo positivo, la funzione non può tendere ad una costante

Questo vorrebbe dire che $u(t) \overset{\uparrow}{\leq} 7 + (\arctan \ell) t$

nel passato le disuguaglianze si invertono

Formalmente

$$u'(s) \geq \arctan \ell$$

Io vorrei integrare tra 0 e t, con t negativo:

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s) ds = -\int_t^0 u'(s) ds$$

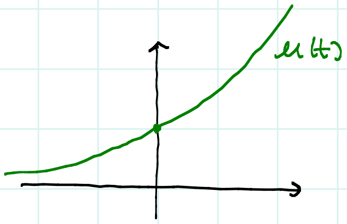
$$\leq -\int_t^0 \arctan \ell \, ds = + \arctan \ell \cdot t$$

Conseguenza $u(t) \leq u(0) + \arctan \ell \cdot t$

e quindi

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) \leq \lim_{t \to -\infty} 7 + \underbrace{\arctan \ell}_{>0} \cdot t = -\infty$$

il che è assurdo.



$\boxed{\text{Fatto 8}}$ Sarà vero che $u(t)$ è convessa?

Sì! $u''(t) = [u'(t)]' = [\arctan u(t)]'$

$$= \frac{1}{1+u(t)^2} \cdot u'(t)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+u(t)^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\arctan u(t)}_{>0} > 0$$

$\boxed{\text{Fatto 9}}$ Quanto fa $\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t}$?

Si tratta di $\frac{+\infty}{+\infty}$, quindi Hôpital

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché} \\ u(t) \to +\infty}}{=} \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{FATTO 10}}$ Come tende $u(t)$ a 0 per $t \to -\infty$?

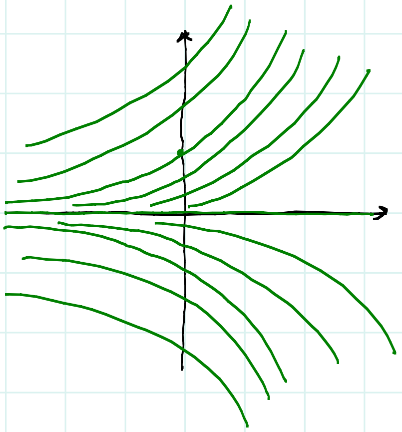
Brutale $u'(t) = \arctan u(t) \sim u(t)$, quindi per tempi molto negativi è come se fosse $u'(t) = u(t)$.
Le soluzioni di questa sono $c \cdot e^t$, quindi per $t << 0$ vanno a 0 esponenzialmente

Calcoliamo $\lim_{t \to -\infty} \frac{\log(u(t))}{t}$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\log(u(t))}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{-\infty}{-\infty}}}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{u'(t)}{u(t)}}{1}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{\arctan u(t)}{u(t)} \underset{\substack{\uparrow \\ x = u(t)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$\boxed{\text{FATTO 11}}$ Tutte le altre soluz. sono fatte analogamente



— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 111

Note Title 10/05/2025

TEOREMA DELL' ASINTOTO (Versione a $+\infty$, quella a $-\infty$ è analoga)

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (definita su una semiretta destra)

Supponiamo che

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$$ (cioè f ha asintoto orizz.)

$$\lim_{t \to +\infty} f'(t) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$ (cioè la derivata ha limite)

Allora $m = 0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per Lagrange abbiamo che

$$f(n+1) - f(n) = \underset{\overset{\uparrow}{(n+1)-n}}{1} \cdot f'(\underset{\overset{\uparrow}{\text{p.to tra } n \text{ ed } n+1}}{c_n})$$

Osservo che $c_n \geq n$, quindi $c_n \to +\infty$, quindi $f'(c_n) \to m$

(qui ho usato che la derivata ha limite)

A sx invece $f(n+1) \to \ell$ e $f(n) \to \ell$. Quindi

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0 = \ell - \ell}}{f(n+1) - f(n)} = \underset{\substack{\downarrow \\ m}}{f'(c_n)}$$

Quindi $m = 0$

<u>Oss.</u> Se non metto come ipotesi che esiste $\lim_{t \to +\infty} f'(t)$, come tesi ottengo solo che

$$\liminf_{t \to +\infty} f'(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{t \to +\infty} f'(t) \geq 0$$

↑ MINLIM ↑ MAXLIM

<u>Oss.</u> Può succedere che ci sia asintoto orizz, ma la derivata non ha limite.

Basta prendere $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$. Allora $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \sin(x^2)$$

$$= 2\cos(x^2) - \frac{1}{x^2} \sin(x^2)$$

Quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ non esiste. Inoltre

$$\limsup_{x \to +\infty} f'(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{x \to +\infty} f'(x) = -2$$

— o — o —

<u>Back to lezione precedente</u>

Dimostriamo che $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$

Per monotonia sappiamo che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Se per assurdo fosse $\ell \in \mathbb{R}$, allora dall'eq. avremmo che

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \arctan u(t) = \arctan \ell = m$$

Ma allora per il teo. asintoto deve essere $m = 0$, cioè $\arctan \ell = 0$, cioè $\ell = 0$, il che non è possibile perché $u(0) = 7$ e poi cresce.

Dimostriamo che $\lim\limits_{t \to -\infty} u(t) = 0$

Per monotonia e positività sappiamo che $u(t) \to \ell \in [0, +\infty)$.
Ma allora $u'(t) \to \arctan \ell$. Per il teo. dell'asintoto
$\arctan \ell = 0$ e quindi $\ell = 0$. ☺

Esempio $\begin{cases} u'(t) = \sin u(t) \\ u(0) = 4 \end{cases}$ ← ma in realtà studiamo tutte le soluzioni

Fatto 1 La soluzione esiste unica e globale nel passato e nel futuro

FATTO GENERALE $u'(t) =$ MOSTRO

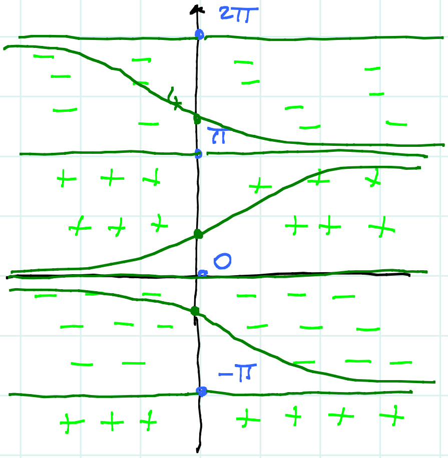
Se mostro è definito ovunque non ci può essere break-down

Se mostro è limitato, la soluzione $u(t)$ è compresa tra due rette, quindi non può avere blow-up in tempo finito.

Se sono verificate entrambe, allora gratis c'è esistenza globale

FATTO 2 Ci sono tutte le soluzioni costanti

$$u(t) \equiv k\pi \quad , \text{ con } k \text{ intero}$$



Quindi la soluzione con $u(0) = 4$ sta sempre tra π e 2π

FATTO 3 La nostra soluz. è strett. decr.

Infatti $u'(t) = \sin u(t) < 0$ ← quando $\pi < u(t) < 2\pi$

FATTO 4 $\lim_{t \to +\infty} u(t) = \pi$ e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 2\pi$

Vediamo a +∞. Sappiamo che $u(t) \to l \in [\pi, 2\pi]$ per monotonia

Ma allora

$$u'(t) = \sin u(t) \to \sin l$$

Per teo. asintoto $\sin l = 0$, cioè $l = \pi$ oppure $\underbrace{l = 2\pi}$

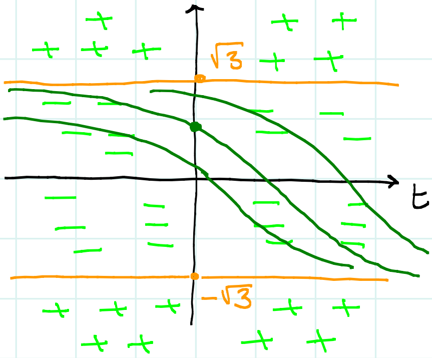
NO perché $u(0) = 4$ e poi ↓

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 - 3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Questa volendo si integra, ma faccio finta di non saperlo

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Vediamo dove u' è + o −

La situazione è quella in figura



$\boxed{\text{Fatto 2}}$ C'è esistenza globale nel passato e nel futuro

NO Break down perché u^2-3 è definita ovunque

NO BLOW UP perché $-\sqrt{3} \leq u(t) \leq \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ $u(t)$ è strett. decrescente con

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to -\infty} u(t) = \sqrt{3}$$

Facciamo a $-\infty$. Sappiamo che $u(t) \to \ell \in [1, \sqrt{3}]$ per monotonia e limitatezza.

Ma allora $u'(t) \to \ell^2 - 3 \rightsquigarrow \ell^2 = 3 \rightsquigarrow \ell = \pm\sqrt{3}$

e l'unico compatibile è $\sqrt{3}$.

Stessa cosa a $+\infty$.

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Vediamo la convessità.

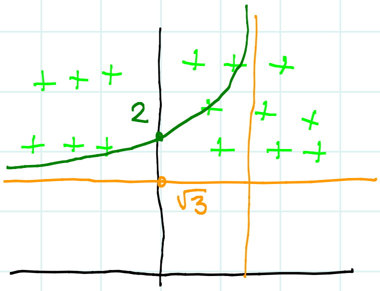
$$u''(t) = [u'(t)]' = [u^2(t) - 3]' = 2u(t)\,u'(t) = \overset{\uparrow}{2u(t)}\,\underbrace{[u(t)^2 - 3]}_{<0}$$

dipende dal segno di $u(t)$

Dove $u(t) > 0 \rightsquigarrow u''(t) < 0$

Dove $u(t) < 0 \rightsquigarrow u''(t) > 0$

Cosa succede se partiamo con $u(0) = 2$



Nel passato: esistenza globale con $u(t) \to \sqrt{3}$

Nel futuro: blow-up per colpa dell' esponente 2

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 112

Note Title 10/05/2025

TEOREMA DEL CONFRONTO Consideriamo due problemi

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = g(t,v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

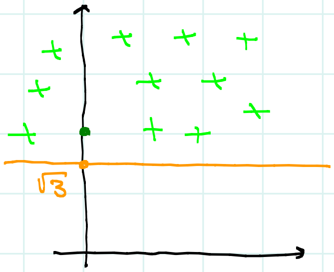
Supponiamo che $f(t,x) \geq g(t,x)$ nella zona in cui so che le soluzioni stanno.

Supponiamo che $u_0 \geq v_0$.

Allora $u(t) \geq v(t)$ per tutti i $t \geq 0$ per cui esistono entrambe

Brutalmente: u parte sopra v e cresce di più; quindi u sta sempre sopra v.

Come si usa?



$$\begin{cases} u' = u^2 - 3 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

So che $u(t) \geq 2$ per ogni $t \geq 0$ perché so che la sua derivata è positiva

So che per $x \geq 2$ esiste una costante $c > 0$ t.c.

$$x^2 - 3 \geq c x^2 \qquad \forall x \geq 2$$

Basta dimostrare che $\varphi(x) = \frac{x^2-3}{x^2}$ ha minimo positivo per $x \geq 2$ e questo si fa usando che $\varphi(2) = \frac{1}{4}$ e $\varphi(x) \to 1$ a $+\infty$ e $\varphi(x)$ non si annulla mai

Adesso considero il problema $\begin{cases} v' = c v^2 \\ v(0) = 2 \end{cases}$

Siamo nelle ipotesi del teo. del confronto

→ u e v partono insieme ($u(0) = 2$ e $v(0) = 2$)

→ $x^2 - 3 \geq c x^2$ $\forall x \geq 2$ ← questa è la zona in cui stanno u e v

Ma allora $u(t) \geq v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per cui esistono entrambe.

Risolvendo esplicitamente trovo che v ha B.U. per t positivi.

Quindi u ha blow-up pure lei.

— o — o —

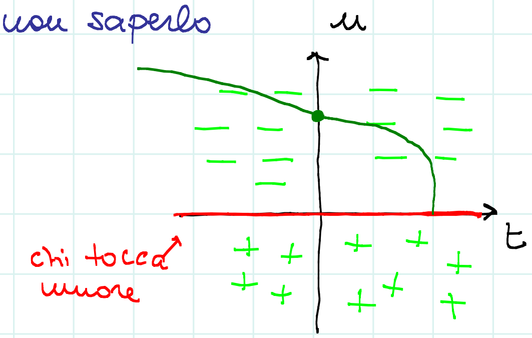
$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ $v' = (v)^\alpha$

hanno blow-up se si parte positivi quando $\alpha > 1$

e esistenza globale quando $0 \leq \alpha \leq 1$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 6 \end{cases}$

Potrei integrarla, ma faccio finta di non saperlo



La soluzione fin quando esiste è decrescente.

Può esistere globalmente nel futuro?

NO! Se esistesse globalmente, per monotonia $\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in [0, 6]$

Ma allora

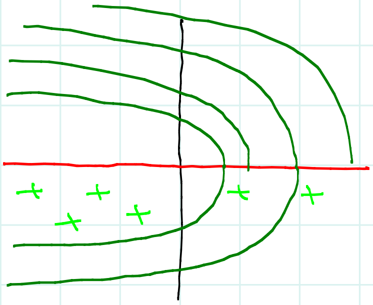
$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$

In ogni caso esisterebbe, ma allora dovrebbe fare 0 per il teorema dell'asintoto, e questo non è possibile.

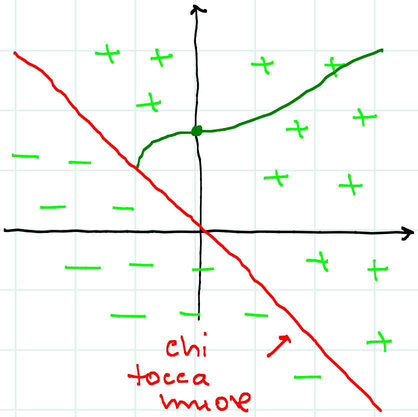
Quindi la soluzione nel futuro ha break-down da qualche parte

Nel passato sappiamo che $u(t) \geq 6$, quindi $|u'(t)| \leq \frac{1}{6}$
quindi niente BU e niente BD, quindi
esistenza globale con limite $+\infty$.

Come sono fatte le altre soluzioni ?



Esempio 2 $\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u+t} \\ u(0) = 5 \end{cases}$



Grossi problemi quando $u+t=0$

→ Nel passato c'è di sicuro BD in un tempo finito

→ Nel futuro la soluzione ha esistenza globale perché

$$0 \leq u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{\uparrow \\ u(t)\geq 5 \\ t \geq 0}}{\leq} \frac{1}{5+0}$$

Quindi $u'(t)$ limitata, quindi niente BU

Domanda: calcolare $\lim_{t\to+\infty} u(t)$

Sappiamo che $u(t) \longrightarrow \ell$ per monotonia, con $\ell \geq 5$ oppure $\ell = +\infty$
Ma allora

$u'(t) \longrightarrow 0$ qualunque sia ℓ ☹

Sembra che tutti gli ℓ, finiti o infiniti, vadano bene.

Brutale : se $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \sim \frac{1}{\ell+t}$,
ma allora $u(t) \sim \log(\ell+t)$
e quindi tende a $+\infty$. Assurdo. Quindi $\ell = +\infty$

Rigoroso : Se per assurdo fosse che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora sarebbe

$$5 \leq u(t) \leq \ell \qquad \forall t \geq 0$$

Ma allora

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denom.} \\ \text{più grande}}}{\geq} \frac{1}{\ell+t}$$

Ma allora integrando

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s)\,ds \geq \int_0^t \frac{1}{\ell+s}\,ds = \left[\log(\ell+s)\right]_0^t$$
$$= \log(\ell+t) - \log \ell$$

Ma allora passando al limite per $t \to +\infty$ otterrei

$$\ell - u(0) \geq +\infty$$

Conclusione : $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.

Ci tenderà logaritmicamente ?

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{\log t} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{+\infty}{+\infty}}}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{u'(t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{u(t)+t}$$

Mi piacerebbe dire che tende a 1, ma dovrei sapere chi comanda sotto, cioè mi serve sapere che $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = 0$

Provo a dimostrarlo:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t}\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{+\infty}{+\infty}}}{=}\lim_{t\to+\infty}u'(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{u(t)+t}=0$$ ☺

<u>Esempio</u> <u>2 bis</u>
$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u+t^2} \\ u(0)=5 \end{cases}$$

allora per t → +∞ le soluzioni avevano un limite finito

$$u'(t)\leq\frac{1}{t^2+5}$$

quindi
$$u(t)-u(0)=\int_0^t u'(s)\,ds$$
$$\leq\underbrace{\int_0^t\frac{1}{s^2+5}\,ds}$$

quando $t\to+\infty$ tende a

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2+5}\,ds$$ e questo CONVERGE

—— o —— o ——

ANALISI 1 - LEZIONE 113

Note Title 16/05/2025

FORMULA DI STIRLING

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \forall n \geq 1$$

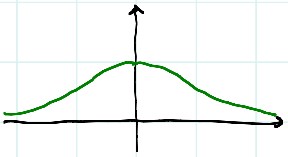
se divido il rapporto tende a 1

PRODOTTO DI WALLIS

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \; \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \; \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \; \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \; \ldots$$

INTEGRALE GAUSSIANO



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

INTEGRALI DI FRESNEL

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

FONZIONE GAMMA DI EULERO

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$\boxed{\text{Formula di Stirling}}$ $\quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Questo è equivalente a dimostrare che

$$S_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \to \sqrt{2\pi}$$

Esercizio 1 Dimostriamo che S_n tende ad un limite $\ell \in (0, +\infty)$

Calcoliamo il rapporto

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}\, e^{\cancel{n}+1}}{(n+1)^{n+\cancel{1}} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{n^n \sqrt{n}}{\cancel{n!}\, \cancel{e^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = R_n$$

Abbiamo scoperto che $\quad S_{n+1} = R_n \cdot S_n \quad \forall n \geq 1$

e da questa per induzione otteniamo che

$$S_2 = R_1 \cdot S_1 \ , \quad S_3 = R_2 \cdot S_2 = R_2 \cdot R_1 \cdot S_1 \ , \quad S_4 = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot S_1 \ , \dots$$

$$S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} R_k$$

e quindi, passando al limite

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} R_k$$

Quindi mi sono ridotto a dimostrare che la produttoria converge ad un limite $\in (0, +\infty)$.

Questo è equivalente a dire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log R_k \qquad \text{converge}$$

Sub-esercizio

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \sqrt{\frac{k+1}{k}}} \right)}_{a_k} \qquad \text{converge}$$

$$a_k = 1 - k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= 1 - k \log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\underset{\underset{\text{Taylor}}{\uparrow}}{=} 1 - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2k}} - \frac{1}{3k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \cancel{\frac{1}{2k}} + \frac{1}{4k^2} = -\frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Conseguenza: La serie è a termini definitivamente negativi e converge per confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$

— o — o —

Da questo momento in poi sappiamo che $S_n \to S_\infty$ e di conseguenza

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \cdot S_\infty$$

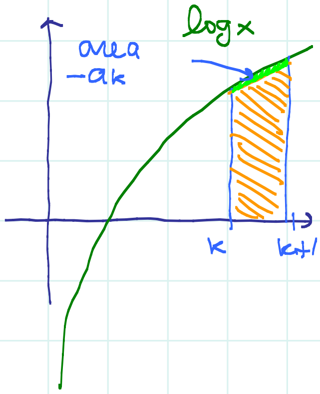
Vogliamo prima o poi dimostrare che $S_\infty = 2\pi$

Esercizio 2

Vogliamo dimostrare che il numero a_k di sopra è sempre negativo, cioè

$$k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1 \geq 0 \qquad \forall k \geq 1$$

Consideriamo $\log x$ e integriamo tra k e $k+1$



$$\int_k^{k+1} \log x \, dx = \left[x \log x - x \right]_k^{k+1}$$

$$= (k+1)\log(k+1) - (\cancel{k}+1) - k\log k + \cancel{k}$$

$$= k\left[\log(k+1) - \log k\right] + \log(k+1) - 1$$

$$= k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \log(k+1) - 1$$

Area trapezio sotto il grafico

$$= \frac{1}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altezza}}}{1} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{minore}}}{\log(k)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{maggiore}}}{\log(k+1)} \right]$$

Essendo log x concava, abbiamo integrale − area trapezio > 0 quindi

$$\underbrace{k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \log(k+1) - 1}_{\text{integrale}} - \underbrace{\frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1)}_{\text{area trapezio}}$$

$$= k \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\log(k+1) - \frac{1}{2}\log k}_{\frac{1}{2}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)} - 1 = -a_k > 0$$

— o — o —

<u>Conseguenza</u> Ricordiamo che

$$a_k = \log \frac{S_{k+1}}{S_k}$$

$a_k < 0 \Rightarrow \frac{S_{k+1}}{S_k} \le 1 \rightarrow S_{k+1} \le S_k \Rightarrow S_k$ decrescente

Quindi $S_k > S_\infty$ per ogni $k \ge 1$.

Ricordando che cosa era S_k deduciamo che

$$k! > \frac{k^k}{e^k}\sqrt{k}\, S_\infty$$

— o — o —

PRODOTTO DI WALLIS

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

Esercizio 3 Il prodotto converge ad un numero reale $\in (1, +\infty)$

Questo è equivalente a dimostrare che il suo logaritmo converge ad un numero positivo, ma il log è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(\frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}\right)}_{b_k}$$

$$b_k = \underbrace{\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)}_{>0} = \log\left(\frac{4k^2-1+1}{4k^2-1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)$$

perché sono frazioni > 1

$$\sim \frac{1}{4k^2-1}$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$ e la somma è positiva perché tutti i b_k sono > 0

— o — o —

Ci resta da dimostrare che

- il prodotto tende a $\frac{\pi}{2}$
- $S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sqrt{2\pi}$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 114

Note Title 16/05/2025

Esercizio 1 Poniamo $$W_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

prodotto parziale del prodotto di Wallis

Trovare una formula più esplicita per W_n

$$W_1 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}, \quad W_2 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}, \quad W_3 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\,\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}$$

$$W_4 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\,\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \quad \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8} = \frac{1}{9}\,\frac{(4!)^4\cdot 2^{16}}{(8!)^2}$$

Sembra ragionevole che

$$\boxed{W_n = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2^n\cdot n!)^4}{[(2n)!]^2}}$$

A partire da dimostrazione rigorosa si fa per induzione dopo aver osservato che

$$W_{n+1} = W_n \cdot \frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

L'induzione è un facile esercizio.

Esercizio 2 $\boxed{\text{Se}}$ $W_n \to \frac{\pi}{2}$, allora $S_\infty = \sqrt{2\pi}$

Già sappiamo che $n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\, S_\infty$. Se sostituisco nella formula per W_n trovo

$$W_m = \frac{1}{2m+1} \; \frac{2^{4m} \; (m!)^4}{[(2m)!]^2} = \frac{1}{2m+1} \; \frac{2^{4m} \; \frac{m^{4m}}{e^{4m}} \; m^2 \; S_\infty^4}{\left[\frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \; S_\infty \right]^2}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \; \frac{\cancel{2^{4m}} \; \cancel{m^{4m}}}{\cancel{e^{4m}}} \; m^{\cancel{2}} \; S_\infty^{\cancel{4}\,2} \; \frac{\cancel{e^{4m}}}{\cancel{(2m)^{4m}} \; 2\cancel{m} \; \cancel{S_\infty^2}}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \frac{\pi}{2}}}{\boxed{W_m}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{m}{2m+1}}} \; S_\infty^2 \; \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} S_\infty^2 \quad \rightsquigarrow \quad S_\infty^2 = 2\pi$$

$$\rightsquigarrow \quad S_\infty = \sqrt{2\pi}$$

Calcoliamo il limite del Wallis

Pongo $I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$. Lo calcolo con il grande ritorno

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx = \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva}}}{\sin x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata}}}{\sin^{n-1} x} \, dx$$

$$= \underbrace{\left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \cos^2 x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^\pi \sin^n x \, dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \quad \rightsquigarrow \quad n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

Conseguenza

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \forall n \geq 2}$$

succ. per ricorrenza

$I_0 = \pi$

$I_1 = 2$

Oss. Tra le varie cose la formula ci dice che $I_n < I_{n-2}$.
È ragionevole?

Certo! Infatti $\sin x \in [0,1]$ quando $x \in [0,\pi]$, e quindi all'aumentare di n la funzione che integro diventa sempre più piccola.

Introduco il rapporto $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \hat{R}_n$

Esercizio 3 Dimostriamo che $\hat{R}_n \to 1$ per $n \to +\infty$

Cerco di usare i carabinieri. Per l'osservazione precedente $\hat{R}_n \le 1$.

Dall'altra parte

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcolo } I_{2n+1} \\ \text{usando la ricorrenza}}}{=} \frac{2n}{2n+1} \underbrace{\boxed{\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}}}_{\ge 1} \ge \frac{2n}{2n+1}$$

Conclusione

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{2n}{2n+1}}} \le \underset{\substack{\rightsquigarrow \\ 1}}{\hat{R}_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{1}}$$

Esercizio 4 Trovare una specie di formula esplicita per $\hat{R}_n$

$$\hat{R}_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ingrediente} \\ \text{fondamentale} \\ \text{del prodotto di Wallis}}}{\boxed{\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n}{2n-1}}} \hat{R}_{n-1}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$\hat{R}_1 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\hat{R}_0, \quad \hat{R}_2 = \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\hat{R}_0, \quad \hat{R}_3 = \frac{6\cdot 6}{7\cdot 5}\,\frac{4\,4}{5\cdot 3}\,\frac{2\cdot 2}{3\cdot 1}\hat{R}_0$$

Per induzione si dimostra che $\boxed{\hat{R}_n = \hat{R}_0 \cdot W_n}$

Ora possiamo sapere il limite di W_n.

Infatti $\hat{R}_0 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2}{\pi}$, quindi $\underset{\overset{\downarrow}{1}}{\boxed{\hat{R}_n}} = \frac{2}{\pi} \cdot W_n$

Quindi per forza $W_n \to \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 5 Dimostriamo che $I_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$, cioè che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{2\pi}$$

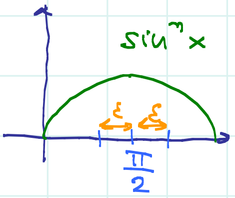
Esercizio 5 – Dimostriamo che $\int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \to 0$

Grande tentazione Per ogni $x \in [0, \pi]$ con $x \neq \frac{\pi}{2}$ si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \sin^n x = 0 \qquad (\text{in } \tfrac{\pi}{2} \text{ non è vero perché } \sin x = 1)$$

Allora $\int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \to \int_0^{\pi} 0 \cdot dx = 0$

Questo modo di procedere non è giustificato.



Più rigorosamente. Fisso un piccolo parametro $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$

Ora il centrale è $\leq 2\varepsilon$ (ampiezza intervallo · 1)

I due laterali sono più piccoli di $\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}_{\text{ampiezza intervallo}} \underbrace{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}_{\text{Max della funzione}}$

Ne segue che

$$0 \leq \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \leq 2\varepsilon + \underset{\displaystyle}{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}}}$$

Ora faccio liminf e limsup di tutto (uso che $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<1$)

e ottengo $0 \leq \liminf I_n \leq \limsup I_n \leq 2\varepsilon$.

Poiché 2ε è un qualunque numero >0 questo dimostra che

$I_n \to 0$.

—— o —— o ——

ANALISI 1 — LEZIONE 115

Note Title 16/05/2025

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \qquad\qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$\boxed{\text{Esercizio 5}}$ Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{2\pi}$

Occorre fare due lim. separate sui pari e sui dispari, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\, I_{2n} = \sqrt{2\pi} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} \cdot I_{2n+1} = \sqrt{2\pi}$$

Facciamo il caso pari, l'altro è analogo [fare per esercizio].
Cerchiamo di avere una formula per I_{2n}

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} I_0, \qquad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$$

$$I_8 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 \;\frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = I_0 \,\frac{8!}{2^8\cdot(4!)^2}$$

Una congettura ragionevole è che sia

$$I_{2n} = \underset{\overset{\uparrow}{\pi}}{I_0}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Quindi

$$\sqrt{2n}\, I_{2n} = \pi\cdot\sqrt{2n}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Uso formula di Stirling

$$\sim \cancel{\pi}\,\sqrt{2\cancel{n}}\;\underbrace{\frac{\cancel{(2n)^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}}\sqrt{2\pi\cdot 2\cancel{n}}}_{(2n)!}\;\frac{1}{\cancel{2^{2n}}}\;\frac{\cancel{e^{2n}}}{\cancel{n^{2n}}}\;\frac{1}{2\cancel{\pi}\,\cancel{n}}$$

$$= \sqrt{2}\;\; 2\sqrt{\pi}\;\frac{1}{2} = \sqrt{2\pi}$$ ☺

Sui dispari è analogo.

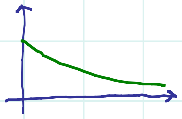
Esercizio 6 Dimostrare che

$$\boxed{\frac{1}{1+t} \geq e^{-t} \geq 1-t \qquad \forall t>0}$$

Sono facili studi di funzione.

① A sx ci si riduce a $(1+t)e^{-t} \leq 1$ per ogni $t>0$

$$f'(t) = e^{-t} - (1+t)e^{-t} = -te^{-t} < 0 \quad ☺$$



② A dx è un caso particolare di $e^x \geq 1+x$ che è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si può fare in 2 modi:

→ studio $e^x - x - 1$ e vedo che ha minimo per $x=0$

→ si può fare con Taylor-Lagrange di ordine 2.

Calcoliamo l'integrale Gaussiano

Partiamo dalla disuguaglianza con $t=x^2$:

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n-esima potenza

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Integro tra -1 e 1:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx \leq \int_{-1}^{1} e^{-nx^2} dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Vediamo quanto valgono questi integrali

$$\int_{-1}^{1} e^{-nx^2}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{n}\,x\\ dy=\sqrt{n}\,dx}}{=} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx \underset{\substack{x=\cos t\\ dx=-\sin t\,dt}}{=} -\int_{\pi}^{0} \sin^{2n+1} t\,dt = \int_{0}^{\pi} \sin^{2n+1} t\,dt = I_{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

$$x=\frac{1}{\tan t} \qquad 1+x^2 = 1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$dx = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' dt = \frac{-1}{\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n-2} t\,dt \le \int_{0}^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt = I_{2n-2}$$

Conclusione

$$I_{2n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy \le I_{2n-2}$$

Moltiplico per $\sqrt{n}$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{\sqrt{2}}}}{\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \sqrt{2\pi}}}{\boxed{I_{2n+1}\cdot\sqrt{2n+1}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy}}{\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-y^2}dy} \le I_{2n-2}\cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{\sqrt{2}}}}{\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \sqrt{2\pi}}}{\sqrt{2n-2}}$$

Questo dimostra che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$ ☺

Oss. Nella dimostrazione c'è un passaggio MOLTO SPORCO.
Il cambio di variabili $x = \frac{1}{\tan t}$ è "improprio" perché per $t=0$ ha grossi problemi.
Andrebbe giustificato con più cura.

$\boxed{\text{Esercizio}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ con $a>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{a}x \\ dy=\sqrt{a}\,dx}}{\overset{}{=}} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

(Andrebbe giustificato per bene il cambio variabili nell'integrale improprio ... $\int_{-n}^{n}$ ... e passo al limite)

$\boxed{\text{DELIRIO}}$ La uso con $a=i$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} = \sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(x^2) - i\sin(x^2))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$$

ora $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Uguagliando parti reali e immaginarie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Fatto tra 0 e $+\infty$ è la metà :)

— o — o —

Gamma di Eulero

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt$$

① Se $\alpha \geq 1$ l'unico pbm. è a $+\infty$ e l'integrale converge

② Se $\alpha \in (0,1)$ c'è anche il problema in $t=0$, ma non pregiudica la convergenza

③ Se $\alpha \leq 0$ ci sono problemi di convergenza

④ $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivo}}}{t^{\alpha-1}} \, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integro}}}{e^{-t}} \, dt$$

$$= \underbrace{\left[-e^{-t} \cdot t^{\alpha-1}\right]_{t=0}^{\text{"}t=+\infty\text{"}}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-t} (\alpha-1) \cdot t^{\alpha-2} \, dt$$

$$= (\alpha-1) \int_0^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-t} \, dt = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$$

⑤ $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$ $\qquad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \qquad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$

$\ldots \quad \Gamma(n) = (n-1)!$

La Γ è il sostituto del fattoriale anche quando α non è intero.

Esercizio

$$\text{"}\left(-\tfrac{1}{2}\right)!\text{"} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, dt =$$

$x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

ANALISI 1 — LEZIONE 116

Note Title 17/05/2025

FUNZIONI SEMICONTINUE

Una funzione f si dice CONTINUA in x_0 se $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Si dice SEMICONTINUA INFERIORMENTE in x_0 se $\boxed{\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)}$

" SEMICONTINUA SUPERIORMENTE in x_0 se $\boxed{\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)}$

Fatto semplice f è continua in x_0 se e solo se f è contemporaneamente SCI e SCS in x_0

$$f(x_0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{SCI}}}{\leq} \liminf_{x\to x_0} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fatto generale}}}{\leq} \limsup_{x\to x_0} f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{SCS}}}{\leq} f(x_0)$$

Brutalmente : f SCI in x_0 vuol dire che in x_0 la funzione $f(x)$ può "crollare" rispetto a quanto ci aspettiamo guardandola intorno.

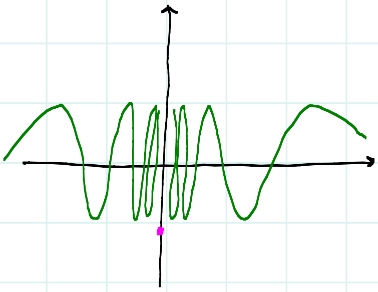
Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ a & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Se $a \leq -1$, allora f è SCI in $x=0$ (e anche per $x \neq 0$, dove è continua)

Se $a \geq 1$, allora f è SCS in $x=0$

Se $a \in (-1,1)$ allora f non è SCI e non è SCS.



Teorema misterioso Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione SCI.

Allora per forza esiste

$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

[Weierstrass SCI]

N.B. Il max non è obbligato ad esistere.

Analogamente: se f è SCS in $[a,b]$, allora esiste per forza il max, ma non è detta che esista il min.

— o — o —

Esercizio 1 Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $\quad 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \dots$

È chiaro che la serie converge (ci sono tanti modi:

- → criterio rapporto
- → criterio radice
- → confronto asintotico con $\frac{1}{n^{2025}}$)

Per calcolare la somma considero $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underset{\uparrow c_n}{n^2} x^n$ e metto $x = \frac{1}{2}$

Per quali x converge? $\quad L = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

$\rightsquigarrow R = \frac{1}{L} = 1 \quad \rightsquigarrow$ in questo caso conv. $\iff x \in (-1,1)$

Oss. generale Quando non esiste $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, vale la stessa formula per R considerando il limsup (la dimostrazione è sostanzialmente la stessa)

Ora però devo calcolare $f(x)$ per ogni $x \in (-1,1)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } n=0 \\ \text{viene } 0}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)'$$

$$\underset{\substack{\text{teo. scambio} \\ \uparrow}}{=} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)'$$

Ora pongo $g(x) = \sum_{n\geq1}^{\infty} n x^n$ e cerco di calcolare questa

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n\geq1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo.} \\ \text{scambio}}}{=} x \Big(\underbrace{\sum_{n\geq1}^{\infty} x^n}_{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica} \\ \text{che so} \\ \text{calcolare}}} \Big)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ma allora $f(x) = x g'(x) = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x \left(x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right)'$

$$= x \left(\frac{1}{(1-x)^2} + x \frac{2}{(1-x)^3} \right)$$

$$= x \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Sostituendo $x = \frac{1}{2}$ abbiamo il valore richiesto

Strada facendo ho usato $\sum_{n\geq1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots$

$$= x \left(1 + x + x^2 + \dots \right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica}}}{=} x \frac{1}{1-x}$$

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Allo stesso modo si fanno tutte le serie

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \underbrace{p(n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{qualunque polinomio di } n}} x^n$$

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ Calcolare la somma di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

$$\frac{x}{1\cdot2} + \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^3}{3\cdot4} + \dots$$

Questa converge se e solo se $x \in [-1,1]$ ($L=1$ e converge anche per $x=\pm 1$)

Chiamo $f(x)$ la somma. Allora

$$f'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo.} \\ \text{scambio}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n(n+1)}\right)' = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)}}_{\text{la chiamo } g(x)}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

Ora $$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo termine}}}{x}$$

Quindi $g(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\log(1-x) - x\right)$. Ma allora

$$f'(x) = -\frac{\log(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$$

e quindi per trovare $f(x)$ basta fare la primitiva che si annulla in $x=0$ (perché $f(0)=0$ dalla serie)

$$\int\left(-\frac{\log(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = -\log|x| - \underbrace{\int \frac{\log(1-x)}{x^2}\,dx}_{\text{Questo si fa facilmente per parti}}$$

Metodo alternativo $\frac{x^n}{n(n+1)}$ ora ricordiamo che

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ ... facendo il conto ... $A=1$ e $B=-1$, quindi

$$\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} = \underset{\uparrow}{\frac{x^n}{n}} - \frac{1}{x}\underset{\uparrow}{\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

si calcolano facilmente a partire dagli sviluppi di $\log(1-x)$

Discorso analogo per $\sum \frac{p(n)}{q(n)} x^n$.

ANALISI 1 — LEZIONE 117

Note Title 17/05/2025

Esercizio 1 $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \qquad a_1 = \frac{1}{1000}$

① Determinare il limite della successione

LIMITATEZZA + CARABINIERI (i) $\frac{1}{1000} \le a_n \le 1000 \quad \forall n \ge 1$

(ii) $a_n \to 1$

Dim (i) $a_n \ge \frac{1}{1000}$ per induzione

Passo base $n=1$ ovvio **Passo induttivo** Ipotesi $a_n \ge \frac{1}{1000}$

Tesi $a_{n+1} \ge \frac{1}{1000}$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt[n]{\ } \text{ è} \\ \text{crescente + ipotesi}}}{\ge} \sqrt[n]{\frac{1}{1000}} + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt[n]{x} \ge x \text{ per } x \in [0,1]}}{\ge} \frac{1}{1000} + \frac{1}{n} \ge \frac{1}{1000}$$

$a_n \le 1000 \quad \forall n \ge 1$ Passo base $n=1$ ⇝ ovvio

Passo induttivo

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \le \sqrt[n]{1000} + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vale solo} \\ \text{se } n \ge 2}}{\le} \sqrt{1000} + \frac{1}{n} \le 50 + 1 \le 1000$$

Quindi come passo base devo fare $n=1$ e ANCHE $n=2$

Dim (ii) Dal p.to (i) e dalla monotonia di $\sqrt[n]{\ }$ segue che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{1000}} + \frac{1}{n}}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{a_{n+1}}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{1000} + \frac{1}{n}}}$$

$\boxed{\text{Esercizio 1 bis}}$ $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n}$ $a_{1000} = \frac{1}{1000}$

Come prima si dimostra che $a_n \to 1$.

Voglio dimostrare che $a_n \to 1^+$ e che a_n è definitiv. decresc.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Prima o poi a_n supera 1, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} > 1$

Se così non fosse, sarebbe che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1000$. Ma allora

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \underset{\uparrow}{\geq} a_n + \frac{1}{n}$$

$\sqrt[n]{x} \geq x$ se $x \in [0,1]$

Quindi $a_{1001} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000}$

$$a_{1002} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001}$$

$$a_{1003} \geq a_{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002}$$

... quindi per induzione potrei dimostrare che

$$a_{1000+k} \geq a_{1000} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1000+i}}_{\text{diverge quando } k \to +\infty}$$

e quindi vorrebbe dire che $a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Esiste $n_0 \geq 1000$ t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$

Infatti sappiamo che a_n supera 1, e se continuasse a crescere, il limite sarebbe > 1.

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $a_{n_0} \geq 1$, allora per sempre $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq n_0$

... induzione ... $a_{n+1} = \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{\substack{\geq 1 \text{ se} \\ a_n \geq 1}} + \frac{1}{n} \geq 1$

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Se $1 \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$

(se decresce una volta sopra 1, allora decresce per sempre)

Anche qui induzione

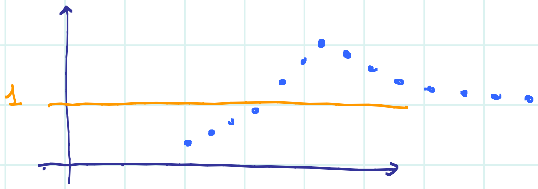
$\boxed{\text{Passo base}}$ $n = n_0$ ⇝ esattamente l'ipotesi

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Ipotesi : $1 \leq a_{n+1} \leq a_n$

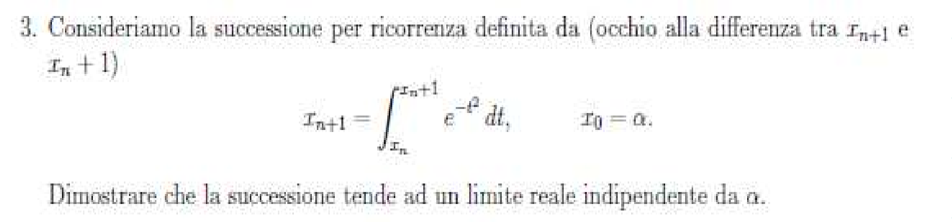
Tesi : $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$a_{n+2} = \sqrt[n+1]{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}}}{\leq} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ a_{n+1} \leq a_n \\ + \text{monotonia di } \sqrt[n]{\ }}}{\leq} \sqrt[n+1]{a_n} + \frac{1}{n}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vero se} \\ a_n \geq 1}}{\leq} \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$



$\boxed{\text{Esempio 2}}$



3. Consideriamo la successione per ricorrenza definita da (occhio alla differenza tra x_{n+1} e $x_n + 1$)

$$x_{n+1} = \int_{x_n}^{x_n+1} e^{-t^2}\, dt, \qquad x_0 = \alpha.$$

Dimostrare che la successione tende ad un limite reale indipendente da α.

Iniziamo con $\alpha = 2025$

Prima cosa: studiamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

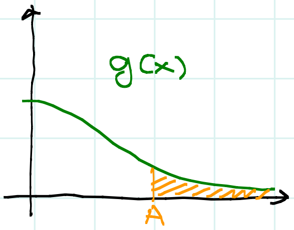
Definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, senza particolari simmetrie, sempre positiva perché stiamo integrando su un intervallo con gli estremi nell'ordine corretto una funzione > 0.
Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Questa è una conseguenza della convergenza dell'integrale improprio gaussiano.

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Se $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, allora

[la coda tende a 0, cioè] $\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} g(x)\,dx = 0$



Nel nostro caso vale

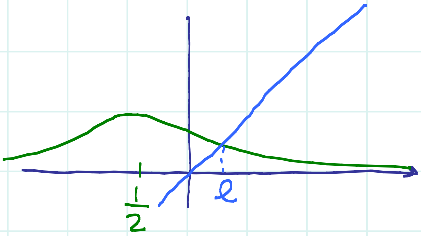
$$f(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq \underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{\text{coda di integrale convergente}}$$

$\boxed{\text{Monotonia di } f(x)}$ $f'(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) \geq 0 \iff e^{-(x+1)^2} \geq e^{-x^2} \iff -(x+1)^2 \geq -x^2$$

$$\iff (x+1)^2 \leq x^2 \iff x^2+2x+1 \leq x^2 \iff 2x+1 \leq 0$$

$$\iff x \leq -\frac{1}{2}$$



Quindi l'idea è che l'equazione $f(x) = x$ abbia una sola soluzione reale ℓ e $x_n \to \ell$ spiraleggiando

Si può dimostrare → con le due sottosuccessioni
→ con la distanza

(i) $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

Poi spero che $\sup\{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$ = costante di Lip < 1

Per questo basta studiare $|f'(x)| = \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1} - e^{-(x+1)^2}$ e vedere che ha max < 1

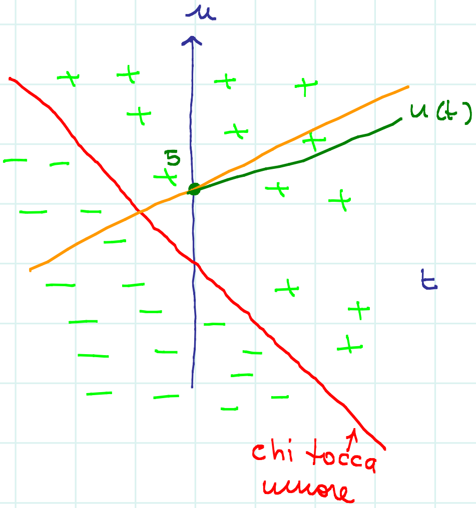
(non è difficile, ma non ovvio)

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 118

Note Title 17/05/2025

Esercizio 1 $u' = \dfrac{1}{u+t}$ $u(0) = 5$



Serve $u+t \neq 0$, cioè $u \neq -t$

Nel futuro la soluzione cresce.

Esiste globalmente (nel futuro) perché

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{\uparrow \\ t \geq 0 \\ u(t) \geq 5}}{\leq} \frac{1}{5}$$

$\rightsquigarrow$ $u(t)$ sta sotto la retta $5 + \frac{1}{5}t$. Questo esclude il BU

Qual è $\lim_{t \to +\infty} u(t)$? Dico che è $+\infty$.

Se fosse $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) = \dfrac{1}{u(t)+t} \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) \leq \ell}}{\geq} \dfrac{1}{\ell+t}$

Ma allora integrando

$$\underbrace{u(t)}_{\substack{\downarrow \\ \ell}} \geq u(0) + \int_0^t \frac{1}{\ell+s}\, ds = u(0) + \underbrace{\log(t+\ell)}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} - \log \ell$$

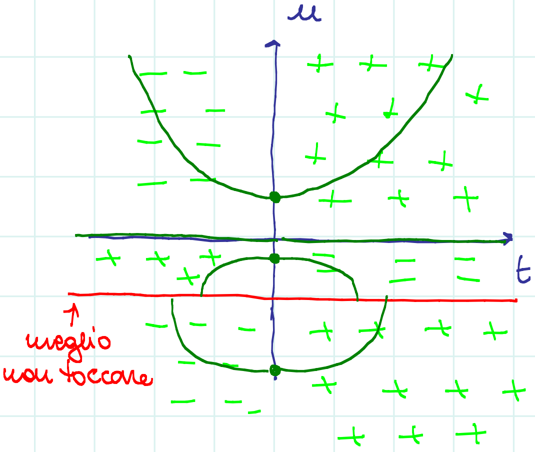
che è assurdo.

Nel passato u ha BD perché per monotonia è costretta ad incrociare la retta rossa.

— o — o —

Esercizio 2 $\quad u' = \dfrac{tu}{u^3+1} \qquad u(0) = \alpha$

Capire come sono fatte le soluzioni al variare di α



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ Problemi quando $u = -1$

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ $u(t) \equiv 0$ è una soluzione

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Segni di u' come in figura

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Partiamo con $\alpha > 0$. Dico che c'è esistenza globale nel futuro e nel passato.

Non può esserci BD.

Può esserci BU?

$$u'(t) = t \boxed{\frac{u(t)}{u(t)^3+1}} \le Mt$$

quando $u(t) \ge 0$ è più piccolo di una costante M

⇝ $u(t)$ cresce meno di una parabola, quindi $u(t)$ non può avere BU

Basta osservare che $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ è limitata per $x \ge 0$

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Sappiamo che per $\alpha > 0$ la soluzione u è crescente, quindi ha limite per $t \to +\infty$ e questo limite è $\ell \in [\alpha, +\infty)$ oppure $\ell = +\infty$

Uso teorema dell'asintoto. Se per assurdo $\ell \in \mathbb{R}$, allora

$$u'(t) = \overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{\boxed{t}}}\ \boxed{\frac{u}{u^3+1}}^{\nearrow\ \text{numero} > 0} \longrightarrow +\infty \quad \text{e non va bene}$$

Stessa cosa nel passato.

FATTO 6 Se $\alpha \in (-1,0)$, allora abbiamo BD sia nel futuro, sia nel passato.
Perché?

Vediamo il futuro: se ci fosse esistenza globale, sarebbe

$$-1 < u(t) \le \alpha$$

e quindi $u(t)$ decrescerebbe e quindi $u(t)$ avrebbe un limite $l \in [-1,\alpha]$. Ma allora

$$u'(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{t}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{l}{l^3+1}}}{\boxed{\frac{u(t)}{u(t)^3+1}}} \qquad \text{e questo non può essere } 0$$

FATTO 7 Se partiamo con $\alpha < -1$, ancora una volta abbiamo BD nel passato e nel futuro

Se avessimo esistenza globale, ... allora $u(t) \to l \le -1$ ...
ma allora $u'(t) \to \dots$ e non è possibile per il teorema dell'asintoto.

Parentesi $f(x) = x^k$ ... primitiva $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$

Quando $x \to +\infty$ abbiamo $\dfrac{F(x)}{f(x)} \to +\infty$

cioè la primitiva batte la funzione all'infinito.

Questo è sempre vero? O ci sono casi in cui perde?

Intanto con $f(x) = e^x$ c'è il pareggio ☺

Proviamo con una funzione più che esponenziale

$f(x) = e^{x^2}$ $\quad \boxed{\text{La}}$ sua primitiva è $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

$\uparrow$ quella t.c. $F(0)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\cdot e^{x^2}} = 0$$

Domanda: ma quanto perde ?

Dico che $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{\cancel{2x}e^{x^2}}{\cancel{2x}} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}} = 1$$ ☺

<u>Oss.</u> Tutto questo era prevedibile a priori. Basta considerare

$u' = t^{20}\cdot u$ $\quad$ (la derivata è molto + forte a $+\infty$ della funzione)

Questa si risolve $\rightsquigarrow \frac{du}{u} = t^{20} dt \rightsquigarrow \log u = \frac{t^{21}}{21} + c$

$\rightsquigarrow u(t) = e^{\frac{t^{21}}{21}}\cdot k$

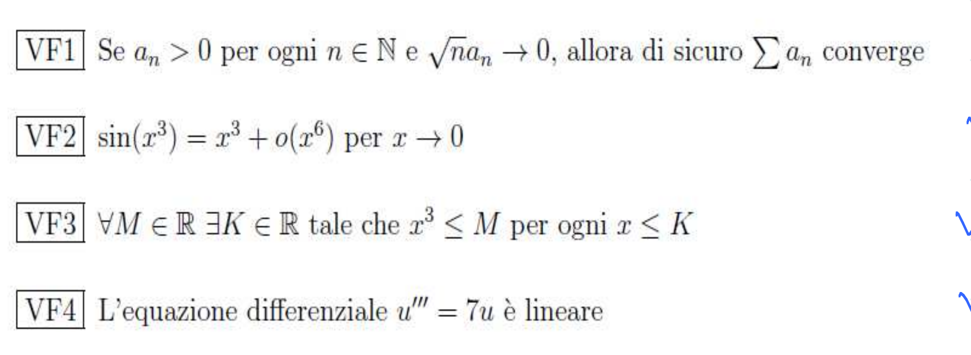
— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 119

Note Title 23/05/2025

VF	1	2	3	4	5	6	7	8
MC	1.	2	3	4	5	6	7	8

$\boxed{\text{TEST}}$ ①



VF1 Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{n}a_n \to 0$, allora di sicuro $\sum a_n$ converge F

VF2 $\sin(x^3) = x^3 + o(x^6)$ per $x \to 0$ V

VF3 $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}$ tale che $x^3 \leq M$ per ogni $x \leq K$ V

VF4 L'equazione differenziale $u''' = 7u$ è lineare V

① $\sqrt{n}\, a_n \to 0$ $\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0$ $\rightsquigarrow$ $\underset{\overset{\uparrow}{\text{BOH}}}{a_n} \leq \underset{\overset{\uparrow}{\text{Diverge}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ defin.

$a_n = \frac{1}{n}$ $\rightsquigarrow$ $\sqrt{n} \cdot a_n \to 0$ e $\sum a_n$ diverge

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\rightsquigarrow$ $\sqrt{n} \cdot a_n \to 0$ e $\sum a_n$ converge

$\sqrt{n}\, a_n \to 14 \Rightarrow \sum a_n$ diverge V

$\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 14$ $\begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$ $\rightsquigarrow$ $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

quindi diverge

② $\sin(x^3) = x^3 + o(x^8)$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \dots$

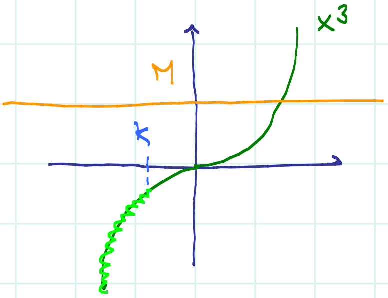
$\sin x^3 = x^3 \underbrace{-\frac{1}{6}}_{} x^9 + \dots$

viene assorbito da x^8

$\sin(x^3) = x^3 + o(x^2)$ VERA MA BUFFA

③ $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $x^3 \le M \quad \forall x \le k$

Sinonimo di $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



VF5 La funzione $f(x) = \sin(x^3)$ è pari F (è dispari)

VF6 Si ha che $2^n \ge n^{3000}$ definitivamente V

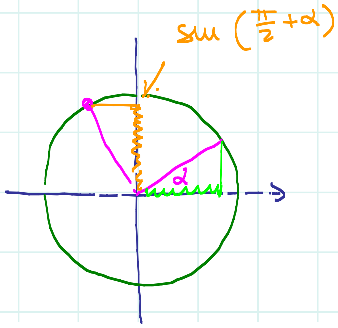
VF7 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$ F $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

VF8 Esiste $\min\{\arctan(x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ V

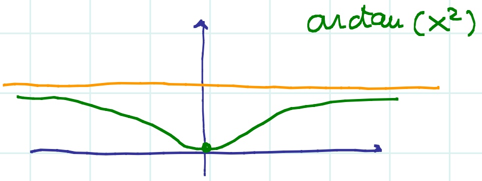
⑤ $f(-x) = \sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x)$

⑥ Esponenziale batte potenza $\underbrace{\boxed{\frac{2^n}{n^{3000}}}}_{+\infty} \ge 1$ definitiv.

⑦



⑧



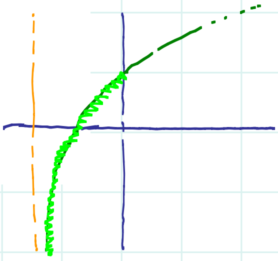
MC1 Se $f(x) = x\sin x$, allora $f''(x) \ge 0$ se e solo se ... $f'(x) = \sin x + x\cos x$

(A) $x\sin x \le 0$ (B) $\cos x \ge x\sin x$ (C) $\cos x \ge 0$ (D) $x\sin x \ge 0$

[✓ (E) $2\cos x \ge x\sin x$] $f''(x) = 2\cos x - x\sin x \ge 0$

MC2 $\sup\{\log(3+x) : x < 0\} = \dots$

(A) -2 (B) Non esiste [✓ (C) $\log 3$] (D) -3 (E) 3

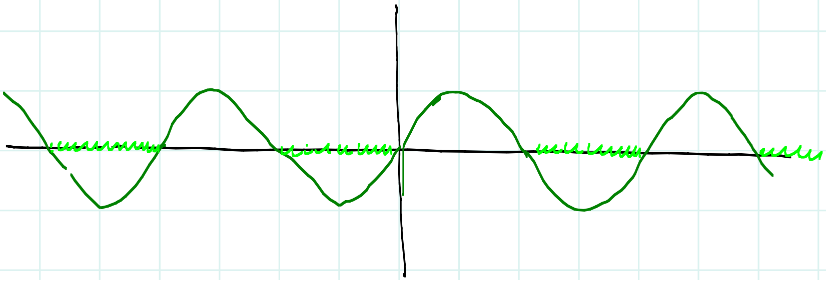


MC4 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq 0\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è *vera*.

(A) A è limitato superiormente (B) esiste $\min A$ (C) A ammette minoranti

(D) $2\pi \in A$ (E) $\sup A \in \mathbb{R}$

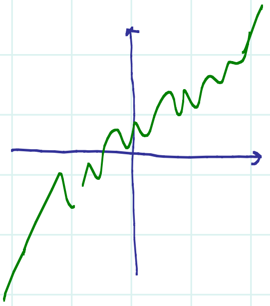


MC6 Stabilire quali delle seguenti funzioni sono *limitate inferiormente* su tutto $\mathbb{R}$:

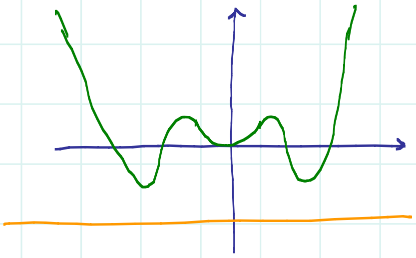
$$f(x) = x^5 - \sin(x^4), \qquad g(x) = x^2 - \log(1 + x^{20}), \qquad h(x) = x^7 + \cos(x^8).$$

↑ come la 1a

(A) Nessuna [✓ (B) Solo g] (C) Solo f (D) Solo h (E) Solo g e h

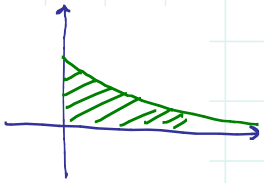


NO LIM INF



MC7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+6)^2}\,dx = \ldots$

$$\left[-\frac{1}{x+6}\right]_0^{+\infty}$$



(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{6^3}$ (C) $+\infty$ (D) $-\frac{1}{6}$ (E) $-\frac{3}{6^3}$

MC8 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - 2000}{\sqrt{n^8+3}}$ converge se e solo se …

$$\frac{n^\alpha}{n^4} = \frac{1}{n^{4-\alpha}}$$

$4 - \alpha > 1$

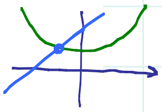
$\alpha < 3$

(A) $\alpha \leq 7$ [✓ (B) $\alpha < 3$] (C) $\alpha < 7$ (D) $\alpha < 8$ (E) $\alpha < 4$

ANALISI 1 - LEZIONE 120

Note Title 23/05/2025

VF1 Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \overset{<1}{\boxed{\frac{1}{e}}}$, allora di sicuro $\sum a_n$ converge V criterio radice



VF2 L'equazione $\cosh x = x + 4$ ha almeno una soluzione reale V

VF3 $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}$ tale che $\cosh x \leq M$ per ogni $x \leq K$ F $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = -\infty$

VF4 $32^4 = 2^{64}$ F $32^4 = (2^5)^4 = 2^{20}$ ☺

VF5 La funzione $f(x) = \arctan(x^7)$, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva V

VF6 $e^{x^3} = 1 + o(x^3)$ per $x \to 0$ Ⓕ $e^{x^3} = 1 + x^3 + o(x^3) = 1 + x^3 + o(x^5)$

VF7 La funzione $u(t) = e^{3t}$ è una soluzione dell'equazione differenziale $u' = u^2 + e^{3t}$ Ⓕ

$3e^{3t} = e^{6t} + e^{3t}$

VF8 Si ha che $\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{(n+50)^{500} \cdot 2^{-n}}} < 1$ definitivamente V

MC1 $\int_{-3}^{0} \sqrt{x+3}\,dx = \dots$ $\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{0} = \frac{2}{3} 3^{3/2} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\sqrt{3}$

(A) $\frac{2}{3^{1/3}}$ [✓ (B) $2\sqrt{3}$] (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $+\infty$ (E) $-2\sqrt{3}$

MC2 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha - 2000}{\sqrt{n^{12}+3}}$ converge se e solo se ...

[✓ (A) $\alpha < 5$] (B) $\alpha < 12$ (C) $\alpha < 11$ (D) $\alpha < 6$ (E) $\alpha \leq 11$

$\frac{n^\alpha}{n^6} = \frac{1}{n^{6-\alpha}}$

$6 - \alpha > 1$

$\alpha < 5$

MC3 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 7\log x}{e^x + 8\log x} = \dots$ $\sim \frac{e^x}{e^x} \to 1$

(A) 1 (B) $+\infty$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) 0 (E) $\frac{1}{8}$

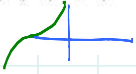
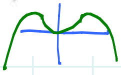
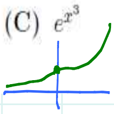
MC4 Se $f(x) = \sin(\cos x)$, allora $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$ $f'(x) = \underset{1}{\cos(\cos x)} \cdot \underset{(-1)}{(-\sin x)}$

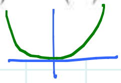
(A) 0 (B) 1 (C) $-\cos 1$ (D) $\cos 1$ [✓ (E) -1]

MC5 Stabilire per quale delle seguenti funzioni $f(x)$ si ha che $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il min assoluto è in $x = 0$

(A) $(x+3)^3$ (B) $x^2 - x^4$ (C) e^{x^3} (D) $\arctan x$ [✓ (E) $\sinh(x^2)$]



MC6 Consideriamo l'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : 3n \leq 25\}$.

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

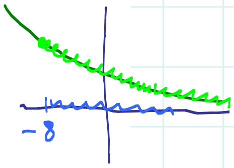
Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è *falsa*.

[✓ (A) $\sup A = 9$] (B) $\min A = 0$ (C) $\max A = \sup A$ (D) $\max A = 8$

(E) l'insieme A ha un numero finito di elementi

MC7 Consideriamo l'insieme $B = \{e^{-x} : x \geq -8\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme B è *falsa*.



(A) B è limitato superiormente (B) $\max B$ esiste (C) $\max B = e^8$

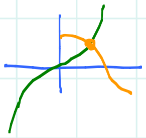
(D) $\min B$ esiste (E) B è limitato inferiormente

MC8 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 7\log x}{e^x + 9\log x} = \ldots$

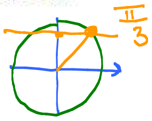
(A) 1 (B) $-\infty$ (C) 0 (D) non esiste [✓ (E) $\frac{7}{9}$]

VF1 La funzione $u(t) = e^{3t}$ è una soluzione dell'equazione differenziale $u'' + 9u = 0$ Ⓕ $a\cos(3t) + b\sin(3t)$

VF2 L'equazione $\sinh x = \cos(3x)$ ha almeno una soluzione reale Ⓥ



VF3 $\arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) = \pi/6$ $\frac{\pi}{3}$ Ⓕ



VF4 $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq M$ e $\sin(x^2) = 0$ Ⓥ

VF5 La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot x^n$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ Ⓕ $R = 1$

converge
$\iff x \in [-1, 1)$

VF6 $\sin(x^3) = x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$ Ⓥ

VF7 La funzione $f(x) = |\sin(7x)|$ è dispari Ⓕ PARI

VF8 Se $a_n \to 4$, allora di sicuro $a_{n+3} \to 4$ Ⓥ

MC3 $\min\{|x-19| : x \le 1\} = \dots$

MONDO y

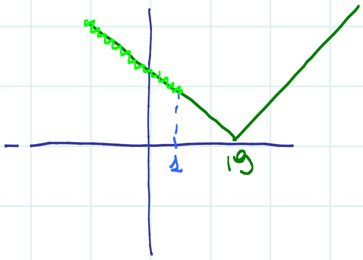
(A) -19 [✓ (B) 18] (C) 0 (D) $-\infty$ (E) 1

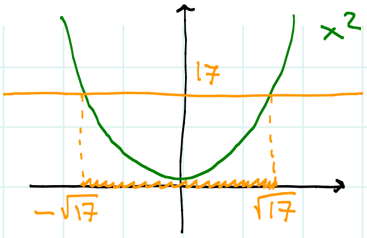
MC4 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 17\}$.
Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è *vera*.

MONDO x

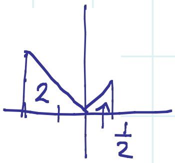
(A) $\inf A = \min A$ (B) $\inf A = -\sqrt{17}$ (C) $\min A = 0$ (D) $10 \in A$

(E) $\sup A = \max A$





MC5 $\int_{-2}^{1} |x|\,dx = \dots$



(A) 2 (B) 3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$ [✓ (E) $\frac{5}{2}$]

MC6 L'integrale $\int_0^2 \frac{\sin(x^7)}{x^\alpha}\,dx$ converge se e solo se ...

$\frac{x^7}{x^\alpha}$ $\frac{1}{x^{\alpha-7}}$ $\alpha - 7 < 1$

(A) $\alpha > 8$ (B) $\alpha < 1$ (C) $\alpha > 1$ [✓ (D) $\alpha < 8$] (E) $\alpha < 7$

MC7 $\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{4}{x} = \dots$

$x \cdot \frac{4}{x} \to 4$

$\boxed{\frac{\sin\frac{4}{x}}{\frac{4}{x}}} \cdot 4$

pongo $y = \frac{4}{x}$

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $+\infty$ (D) non esiste [✓ (E) 4]

MC8 Stabilire quali delle seguenti funzioni sono *limitate inferiormente* su tutto $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^3 - \arctan(x^2)$, $\boxed{g(x) = x^6 - \cos(x^7),}$ $h(x) = x^3 + \arctan(x^4)$.

(A) Solo h (B) Solo g e h (C) Solo g (D) Nessuna (E) Solo f