A.A. 2014/2015
Corso di Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 1 – LEZIONE 001

Titolo nota 25/09/2014

① Preliminari
② Limiti e questioni collegate
③ Calcolo differenziale (derivate, studi di funzione)
④ Calcolo integrale

4 inizi diversi
- insiemi e funzioni
- induzione
- numeri reali
- funzioni elementari

Logica elementare

Proposizione = frase che può essere vera / falsa

Esempi: 1 – Il numero di molecole in questa stanza è pari
2 – $2014 \geq 2000$ Vera

Predicato: frase con dei parametri che a seconda del valore dei parametri può essere V / F

Esempi $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro}}}{x}^2 \geq 2014$ $\qquad$ $\underset{\uparrow}{a} > \underset{\nearrow}{b}$ parametri

Quantificatori:
$\forall$ per ogni
$\exists$ esiste almeno un
$\exists!$ esiste un unico

Quando quantifico tutti i parametri un predicato diventa una proposizione

Esempi $\quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014}_{\text{prop. falsa}} \qquad \underbrace{\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014}_{\text{prop. vera}}$

$\forall a \in \mathbb{N} \ \forall b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Falsa

$\exists a \in \mathbb{N} \ \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Vera

$\forall a \in \mathbb{N} \ \exists b \in \mathbb{N} \quad a < b$ Vera

B = insieme di ragazzi (boys)

G = " " ragazze (girls)

P(b,g) = al boy b piace la girl g

$\forall b \in B \ \forall g \in G \quad P(b,g)$ a tutti piacciono tutte

$\exists b \in B \ \exists g \in G \quad P(b,g)$ c'è almeno 1 a cui piace almeno una

$\forall b \in B \ \exists g \in G \quad P(b,g)$ A tutti i B piace almeno una G

$\exists b \in B \ \forall g \in G \quad P(b,g)$ C'è un B a cui piacciono tutte

$\forall g \in G \ \exists b \in B \quad P(b,g)$ Ogni G piace ad almeno un B

$\exists g \in G \ \forall b \in B \quad P(b,g)$ Esiste una G che piace a tutti

Operazioni tra proposizioni

$\boxed{\text{AND}} \qquad \boxed{\underbrace{\boxed{3 > 2}}_{\text{prop}} \quad \text{AND} \quad \underbrace{\boxed{3 < 27}}_{\text{prop}}} \qquad \boxed{\text{AND}} \quad \boxed{\text{E}} \quad \boxed{\wedge}$

Nuova Prop (vera se sono vere tutte e 2)

$\boxed{\text{VEL}} \qquad \boxed{3 > 2 \quad \text{VEL} \quad 3 > 7} \qquad \boxed{\text{VEV}} \quad \boxed{\text{O}} \quad \boxed{\vee}$

$\boxed{3 > 2 \quad \text{VEL} \quad 3 > 0}$

Entrambe le prop. globali sono vere

Il VEL è falso se e solo se sono false tutte e 2.

$\boxed{\text{NEGAZIONE}}$ Proposizione che dice l'esatto contrario

$\boxed{P}$: oggi è giovedì $\boxed{\text{NOT } P}$: oggi non è giovedì

Come si negano AND e VEL?

$$\text{NOT } (P \wedge Q) = (\text{NOT } P) \vee (\text{NOT } Q)$$

Se non è vero che P e Q sono vere, vuol dire che almeno una delle 2 è falsa

$$\text{NOT } (P \vee Q) = (\text{NOT } P) \wedge (\text{NOT } Q)$$

Se non è vero che o P o Q è vera, allora vuol dire che sono false tutte e 2.

Come si nega una prop. ottenuta quantificando un predicato?

Prop: $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \geq 2014$ Neg. $\exists x \in \mathbb{N} \quad x^2 < 2014$

$\text{NOT } (\forall x \in \ldots \ P(x))$ $\exists x \in \ldots \ \text{NOT } P(x)$

P: tutti i cavalli sono bianchi $\forall c \in$ cavalli c è bianco

NOT P: esiste un cavallo che non è bianco $\exists c \in$ cavalli c è non bianco

$\exists x \in \mathbb{N} \quad x^3 \geq 7$ Neg. $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^3 < 7$

$\text{NOT } (\exists x \in \ldots \ P(x))$ $\forall x \in \ldots \ \text{NOT } P(x)$

<u>Esercizio</u> Negare $\exists b \in B \ \forall g \in G \quad P(b,g)$

$\forall b \in B \ \exists g \in G \quad \text{NOT } P(b,g)$

Esercizio Ogni anno c'è almeno uno studente che canna tutti gli esami

Traduzione: $\forall$ a anno $\exists$ s studente $\forall$ e esame
Canna (a, s, e)

Negazione: $\exists$ a anno $\forall$ s studente $\exists$ e esame
NOT canna (a, s, e)

In almeno un anno tutti gli studenti hanno superato almeno un esame

Altro esempio $\exists$ a anno $\forall$ s studente $\forall$ e esame
Canna (a, s, e)

Negazione: $\forall$ a anno $\exists$ s studente $\exists$ e esame
NOT Canna (a, s, e)

In ogni anno c'è almeno uno studente che supera almeno un esame.

Esercizio Quantificare in tutti i modi possibili
Canna (a, e, s)
e negare

ANALISI 1 – LEZIONE 002

Titolo nota 25/09/2014

Tavole di verità Siano P e Q due proposizioni

$P \wedge Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	F
	F	F	F

$P \vee Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	V
	F	V	F

$P \Leftrightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	F
	F	F	V

$P \Rightarrow Q$

		P	
		V	F
Q	V	V	V
	F	F	V

se P è falsa non mi aspetto nulla da Q

Esempio

$3 > 0 \Leftrightarrow 7 > 0$ Vera

$3 < 0 \Leftrightarrow 7 < 0$ Vera

$3 > 0 \Rightarrow 7 > 0$ Vera

$3 < 0 \Rightarrow 7 > 0$ Vera

Itali ha vinto mondiale 2014 $\Rightarrow 7 < 0$ Vera

〃 $\Rightarrow 7 > 0$ Vera

$\forall x \in \dots \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$

Quando P è vera, allora anche Q(x) è vera

Quando P è falsa, allora non posso dedurre nulla

Tutte le volte che esco senza ombrello piove

Se esco senza piove, se esco con dipende

Quando è falsa una implicazione vuol dire che la premessa (sx del $\Rightarrow$) è VERA, ma la conclusione falsa (dx del $\Rightarrow$)

$$\forall x \in \dots \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Negazione : $\exists x \in \dots \quad \text{NOT } (P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\exists x \in \dots, \quad P(x) \text{ AND } \text{NOT } Q(x)$

Dimostrazione per assurdo : nego la $Q(x)$ e dimostro che non vale la $P(x)$

<u>Esempi</u>

$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 > 9$	$\Rightarrow$	$x > 3$	Vera
$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 > 9$	$\Rightarrow$	$x > 2$	vera
$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 < -9$	$\Rightarrow$	$x > 3$	Vera
$\forall x \in \mathbb{N}$	$x^2 < -9$	$\Rightarrow$	$x^2 < -2014$	Vera

— o — o —

INSIEMI Cos'è un insieme ? BOH !

Come si presenta un insieme ?

- per elenco $A = \{ 2, 7, \square, 🯅 \}$

  Oss : 1 - non conta l'ordine

  2 - elementi ripetuti contano una volta sola

  $A = \{ 2, 7, \square, 2, 2, 🯅, \square \}$ è lo stesso di prima

- per proprietà $B = \{ \text{studenti in quest'aula} \}$

  $= \{ s \in \text{Studenti} : \underbrace{s \text{ sta nell'aula}}_{P(s)} \}$

Esempio $Q = \{ n^2 : n \in \mathbb{N} \}$

- Fai la lista degli elementi di $\mathbb{N}$
- Fanne il quadrato
- Ottieni l' elenco degli elementi di Q

$Q = \{ n^2 : n \in \mathbb{Z} \}$ è lo stesso perchè gli el. ripetuti non contano

$Q = \{ n \in \mathbb{N} : \exists a \in \mathbb{N} \; n = a^2 \}$

$A = \{ x \in \dots : P(x)$ è vera $\}$
$B = \{ x \in \dots : Q(x)$ è vera $\}$

$\{ x \in \dots : P(x) \vee Q(x)$ è vera $\} = A \cup B$
$\{ x \in \dots : P(x) \wedge Q(x)$ è vera $\} = A \cap B$

Notazioni insiemistiche $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$

$a \in A \qquad A \ni a$

$\underset{\text{elemento}}{a} \in \underset{\text{insieme}}{A}$

$a \notin A \qquad A \not\ni a$

$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$ $\qquad A \subseteq B$

$A \subset B$ DA NON USARE

$A \subsetneq B$

$\emptyset$ = insieme vuoto

$\forall x \in \emptyset \quad x^2 < -10$ VERA

$\forall x \quad x \in \emptyset \Rightarrow x^2 < -10$

Prodotto cartesiano $A \times B = \{ (a,b) : a \in A, \, b \in B \}$

Insieme delle parti

$$\mathcal{P}(A) = \{ \text{sottoinsiemi di } A \} = \{ B : B \subseteq A \}$$

Esempi $A = \{ 2, 3, \square, z \}$

$2 \in A$ V $\quad 2 \subseteq A$ F $\quad \{2\} \subseteq A$ V

$\emptyset \in A$ F $\quad \emptyset \subseteq A$ V $\quad \emptyset \in \mathcal{P}(A)$

Quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$? 2^4 (per ogni elemento scelgo se metterlo o no)

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$ V

$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$ V

$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ V

$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ V

$$\underbrace{\mathcal{P}(\underbrace{\mathcal{P}(\emptyset)}_{\text{ha 1 el.}})}_{\text{mi aspetto 2 elementi}} = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$$

In generale: se $A = \{a\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\} \}$

Esercizio di burocrazia Scrivere gli elementi di

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$

ANALISI 1 – LEZIONE 003

Titolo nota 29/09/2014

FUNZIONI TRA INSIEMI

Cos'è una funzione?

Operativamente sono $\boxed{\text{3 cose}}$:

- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una "legge" che ad ogni elemento $a \in A$ assegna un unico elemento $b \in B$. Questo b si indica con $f(a)$

La funzione si indica come

$$f: A \to B$$

Grafico di una funzione: è il sottoinsieme di $A \times B$ definito da

$$\text{Grafico}(f) := \{ (a,b) \in A \times B : b = f(a) \}$$

Definizione formale di funzione Dati due insiemi A e B, una funzione $f: A \to B$ è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ t.c.

$$\boxed{\forall a \in A \ \exists!\, b \in B \ [\text{tale che}] \ (a,b) \in G}$$

fluidifica il discorso

Detto in altri termini, "una funzione è il suo grafico".
In questo setting, $f(a)$ è l'unico $b \in B$ t.c. $(a,b) \in G$.

— o — o —

Composizione di funzioni Data una $f: A \to \boxed{B}$ e data $g: \boxed{B} \to C$ si definisce la funzione composta $g \circ f : A \to C$ definita come

formalmente devono essere uguali

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

La funzione più interna è quella che si fa prima.

Esercizio di burocrazia Definire la composizione a partire dalla definizione formale

$$\begin{array}{lcl} f: A \to B & \qquad & G_f \subseteq A \times B \\ g: B \to C & \qquad & G_g \subseteq B \times C \\ g\circ f: A \to C & \qquad & G_{g\circ f} \subseteq A \times C \end{array}$$

$$G_{g\circ f} = \{ (a,c) \in A \times C : \exists\, b \in B \text{ tale che } (a,b) \in G_f \wedge (b,c) \in G_g \}$$

Bisognerebbe ora dimostrare che $\forall a \in A\ \exists!\, c \in C$ t.c. $(a,c) \in G_{g\circ f}$ ...

— o — o —

Si possono comporre anche più di 2 funzioni purché ...

— o — o —

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, BIGETTIVITÀ

Def. $f: A \to B$ si dice

- iniettiva se manda cose diverse in cose diverse, cioè

$$\boxed{\forall a_1 \in A\ \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)}$$

equivalenti

$$\boxed{\forall a_1 \in A\ \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2}$$

- surgettiva se tutto B è raggiunto dalla funzione, cioè

$$\boxed{\forall b \in B\ \exists\, a \in A \quad f(a) = b}$$

- bigettiva se è iniettiva + surgettiva.

Funzione inversa Data $f: A \to B$, si dice inversa di f una funzione $g: B \to A$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{lll} g(f(a)) = a & & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & & \forall b \in B \end{array}} \begin{array}{l} \leftarrow \text{inversa sinistra} \\ \leftarrow \text{inversa destra} \end{array}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia data $f: A \to B$. Allora

- f è invertibile, cioè esiste l'inversa, se e solo se f è bigettiva

Più precisamente

* esiste l'inversa sinistra se e solo se f è iniettiva
* esiste l'inversa destra se e solo se f è surgettiva.

Premessa: come si comportano iniettività e surg. con la composizione?

① Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

$$\left[\text{Dim.: } a_1 \neq a_2 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ inj.}}}{\Rightarrow} f(a_1) \neq f(a_2) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ inj.}}}{\Rightarrow} g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \right]$$

② Se f e g sono surg., allora $g \circ f$ è surg.

$$\left[\text{Dim. } c \in C \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ surg.}}}{\Rightarrow} \exists\, b \in B \quad g(b) = c \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ surg.}}}{\Rightarrow} \exists\, a \in A \quad f(a) = b\right.$$

Ma allora $g(f(a)) = g(b) = c$.]

③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva (la + interna), ma non nec. g.

[Dim. suppongo per assurdo f non iniettiva. Allora $\exists\, a_1 \in A$ $\exists\, a_2 \in A$ t.c. $a_1 \neq a_2$, ma $f(a_1) = f(a_2)$.
Ma allora $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, quindi $g \circ f$ non inj., contro l'ipotesi]

④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva (la + esterna), ma non necessariamente f.

[Dim.: Sia $c \in C$. Allora $\exists\, a \in A$ t.c. $g(f(a)) = c$ (comp. surg.)
Posto $b = f(a)$ ho che $b \in B$ e $g(b) = c$.
Ho così trovato $b \in B$ t.c. $g(b) = c$].

$\boxed{\text{IMMAGINE e CONTROIMMAGINE}}$ Data $f : A \to B$

- per ogni $D \subseteq A$ si definisce l'<u>immagine</u> di D

$$f(D) = \{ f(a) : a \in D \} \subseteq B$$
$$= \{ b \in B : \exists a \in A \;\; b = f(a) \}$$

- per ogni $E \subseteq B$ si definisce la <u>controimmagine</u> di E

$$f^{-1}(E) = \{ a \in A : f(a) \in E \}$$

Si definisce immagine di una funzione l' insieme $f(A)$

<u>Achtung!</u> Il simbolo f^{-1} si usa per almeno 3 cose diverse

- la funzione inversa (quando esiste)
- la controimmagine (che esiste sempre)
- la funzione $\frac{1}{f}$ (quando ha senso farlo)

Il contesto aiuta a distinguere.

ANALISI 1 — LEZIONE 004

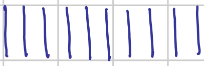
Titolo nota 29/09/2014

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che
(i) $P(0)$ è vera ← passo base
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ [\,P(n) \text{ vera} \Rightarrow P(n+1) \text{ vera}\,]$ ← passo induttivo
Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Variante: se sostituisco (i) con (i') $P(77)$ è vera, la tesi diventa $P(n)$ è vera $\forall\, n \geq 77$.

Interpretazione brutale: tessere del domino che cadono in success.



il passaggio induttivo è il meccanismo di caduta, il passo base la caduta della 0-esima tessera

Esempio 1

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^3$$

Dim. esercizio

Esempio 2

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{con } a \text{ parametro}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$

Formula
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} \qquad \text{se } a \neq 1$$
$$= n+1 \qquad \text{se } a = 1$$

Dim. (nel caso $a \neq 1$)

$\boxed{\text{Passo base}}$ $n=0$ diventa $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ok.

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ $\boxed{n \Rightarrow n+1}$

Ipotesi: $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ Tesi: $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. si fa una CATENA DI UGUAGLIANZE

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}$$ (def. di sommatoria)

ipotesi induttiva ↗ $$= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$$

$$= \frac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$ (Precorso)

Primo = ultimo mi dà la tesi del passaggio induttivo,

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ Det. per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $2^n \geq n^2$

↑ Risposta: $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 3$

Esploro il problema:

$n=0$	$1 \geq 0$	ok
$n=1$	$2 \geq 1$	ok
$n=2$	$4 \geq 4$	ok
$n=3$	$8 \geq 9$	☹
$n=4$	$16 \geq 16$	ok
$n=5$	$32 \geq 25$	ok

più vado avanti, più diventa abbondante

Provo a dim. per induzione che $2^n \geq n^2$ $\forall n \geq 4$

Dim. $\boxed{\text{Passo base}}$ $n=4$ ok

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $2^n \geq n^2$ Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Dim. CATENA DI DISUGUAGLIANZE

$$2^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} 2\cdot 2^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp. induttiva} \\ \text{molt. per 2}}}{\geq} 2n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\geq} (n+1)^2$$

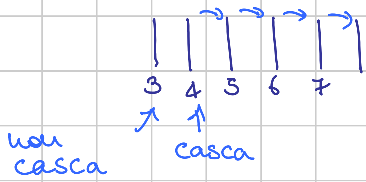
Se la speranza è vera, ho finito il passo induttivo.
Controllo la speranza:

$$2n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} 2n^2 \overset{?}{\geq} n^2+2n+1 &\iff n^2-2n-1 \geq 0 \\ &\iff (n-1)^2-2 \geq 0 \\ &\iff n-1 \geq 2 \\ &\iff n \geq 3 \end{aligned}$$

Quindi: la speranza è vera per ogni $n \geq 3$, quindi il passo induttivo è ok per ogni $n \geq 3$ e questo basta.

Oss. Il meccanismo di caduta funziona da 3 in poi



$\boxed{\text{Esempio 4}}$ DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Passo base $n=0$ OK $(1 \geq 1)$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$

$$\boxed{\text{uso Hp indutt.}} \longrightarrow \geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+\overset{\geq 0}{\boxed{nx^2}}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

Ho usato Hp induttiva moltiplicata per $(1+x)$ senza cambiare il verso: questo è ok se $(1+x)>0$, cioè se $x>-1$.

La dim. fatta funziona solo per $x>-1$

Vera Bernoulli: $\boxed{\forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{reale}}}{x} > -1 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx}$

Esempio 5 Per quali $n\in\mathbb{N}$ si ha che $n! \geq 2^n$

Esplorazione: $0! \geq 2^0$ ok

$1! \geq 2^1$ NO

$2! \geq 2^2$ NO

$3! \geq 2^3$ NO

$4! \geq 2^4$ SI

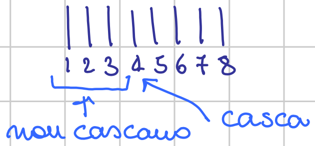
$5! \geq 2^5$ abbondante

Congettura: vero per ogni ≥ 4

Dim. ..., arriviamo al passaggio induttivo...

$$(n+1)! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{fatt.}}}{=} (n+1)\,n! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp. indutt.} \\ \text{moltiplicata per} \\ (n+1) \text{ che è } >0}}{\geq} (n+1)\cdot 2^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero} \\ \uparrow \\ \text{ok per } n\geq 1}}{\geq} 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Con le tessere



il meccanismo è ok $\forall\, n \geq 1$

Esempio 6 Tutti gli studenti prendono lo stesso voto all' esame.

$P(n)$ = " dato un gruppo di n studenti, i suoi componenti prendono lo stesso voto all' esame "

Dim. Passo base $n=1$ è banale

Passo induttivo

Hp: vale per gruppi da n

Th: vale per gruppi da $n+1$

Dim. prendo un gruppo da $n+1$

Per sovrapposizione, tutti sono costretti ad avere lo stesso voto.

Esercizio: cosa non va in questa dimostrazione?

ANALISI 1 - LEZIONE 005

Titolo nota 30/09/2014

Iniettività, surgettività, grafici ed equazioni

Funzione $f: A \to B$. Dato $b \in B$, voglio risolvere l'equaz.

$\boxed{f(x) = b}$ cerco gli $x \in A$ t.c. $f(x) = b$

(le sol. sarebbero $f^{-1}(\{b\})$)

Fatti ① Se f è surg., allora per ogni $b \in B$ c'è ALMENO una sol.

② " f è iniettiva, " " " " " AL MASSIMO " "

(si dimostra per assurdo)

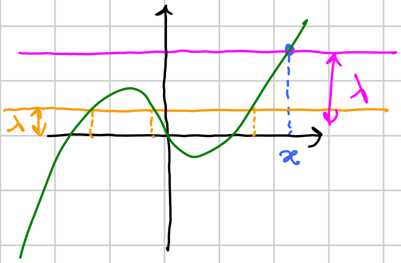
③ Se f è bigettiva, allora $\forall b \in B$ esiste UNICA soluzione, e sarebbe $x = f^{-1}(b)$

↑ funzione inversa calcolata in b

(è la definizione di inversa)

Sia ora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Come interpreto iniett. e surg. sul grafico?

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$ e prendere le x dei p.ti di intersez.



Quindi

① f è surg. se il grafico interseca tutte le rette // all'asse x in almeno un p.to (uno o +)

② ... iniettiva ... tutte le // in al massimo un p.to (0 o 1)

Se in partenza e/o arrivo ho sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, il discorso va adattato. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NO inj. NO surg.

$f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \boxed{[0, +\infty)}$

NO inj.

SI surg.

penso solo alle eq. $f(x) = b$ con $b \geq 0$.

Come si interpretano immagine e controimmagine sul grafico ?

$f(x)=x^2$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad$ Calcolare $f([-2,1])$ e $f^{-1}([-2,1])$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{[0,4]} \qquad\qquad\qquad [-1,1]$

IMMAGINE $\qquad$ CONTROIMMAG.

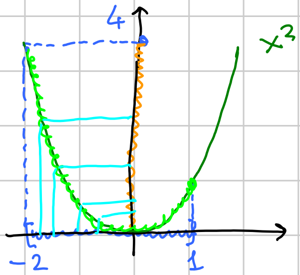
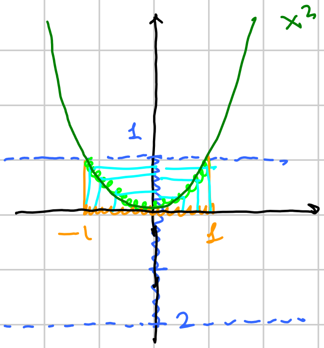


Immagine:

Parto sull'asse x ⇝ grafico ⇝ asse y



Controimmagine

Parto asse y ⇝ grafico ⇝ asse x

— o — o —

E se fosse $f(x)=||x^2-3|-2|$ le cose in apparenza si complicano ...

Operazioni sui grafici

$f(x) \rightsquigarrow f(x)+c$

Traslazione verticale

(su se c positivo)

$f(x) \rightsquigarrow f(x+c)$

Trasl. orizz.

(sx se c positivo)

$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$

Simm. asse x

$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$

Ribalto in su le parti negative

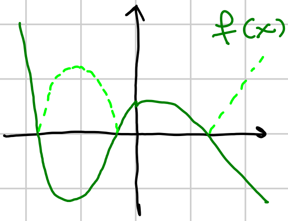
$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

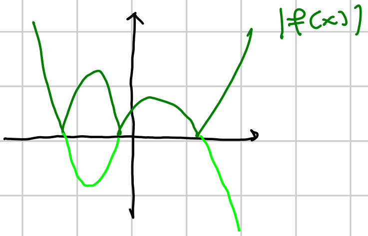
per $x\geq 0$ non cambia nulla, per $x<0$ ribalto gli $x\geq 0$

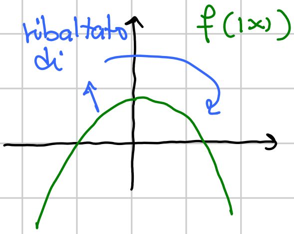
$f(x) \rightsquigarrow cf(x)$

Omotetia verticale

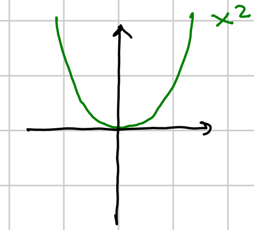
(con ribaltam. se $c<0$)

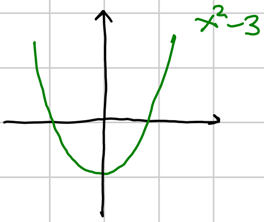


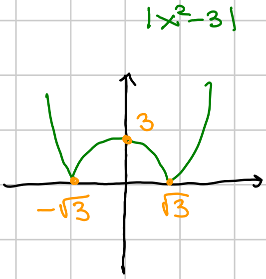


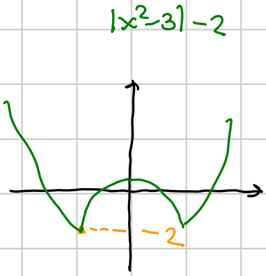


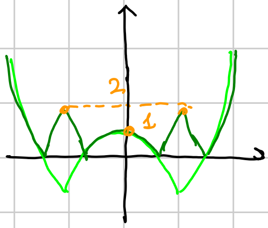
$f(x) = ||x^2-3|-2|$











— o — o —

Proprietà di simmetria Una funzione $f: \overset{\uparrow}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ si dice
o anche un sottoinsieme

- PARI se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt asse x)
  with respect to

- DISPARI se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (grafico simm. wrt origine)
  [teoremino: allora $f(0) = 0$]

- PERIODICA se $\exists\, T > 0$ t.c. $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Più form.

$$\exists\, \underbrace{T}_{\uparrow \text{ un periodo di } f} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

Oss. Il periodo NON è unico (almeno tutti i multipli di T sono pure periodi).
Il più piccolo $T > 0$ che va bene (SE ESISTE) si dice minimo periodo.

Esercizio (Hard) È vero che esiste sempre un minimo periodo se f non è costante ?

Esercizio (non provate a farlo) È vero che $\exists\, f$ e g periodiche t.c. $f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

— o — o —

Proprietà di MONOTONIA Sia $f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{anche sottoinsieme.}}}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

Allora si dice

- $\boxed{\text{STRETT. CRESC.}}$ se

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$$

- $\boxed{\text{DEBOLM. CRESCENTE}}$ se

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

In maniera analoga si definiscono strett. / deb. decr.

$$y > x \Rightarrow f(y) < f(x) \qquad\qquad y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

Esercizio $\begin{matrix} f \text{ str. decr.} \\ g \text{ str. decr.} \end{matrix} \Rightarrow f \circ g$ str. cresc.

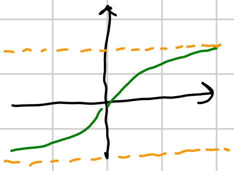
[Dim. $y > x \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ decr.}}}{\Rightarrow} g(y) < g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ decr.}}}{\Rightarrow} f(g(y)) > f(g(x))$]

Fare la stessa cosa mettendo cresc. / decr. nei vari modi possibili

Oss. ① Se voglio una debolm. cresc. che non sia strett. cresc. servono dei tratti piatti (costanti)

② Le funzioni strett. monotone (str. cresc. o decr.) sono PER FORZA INIETTIVE

③ La monotonia c'entra poco con la surg.



ANALISI 1 — LEZIONE 006

Titolo nota 02/10/2014

INSIEMI NUMERICI $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ Naturali

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ Interi (relativi) ZAHLEN

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Razionali (quozienti)

$\mathbb{R}$ Reali

$\mathbb{C} = \{a+bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ Complessi

— o — o —

Numeri reali : sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che soddisfa tre tipi di assiomi

→ assiomi ALGEBRICI
→ assiomi di ORDINAMENTO
→ assioma di CONTINUITÀ

ASSIOMI ALGEBRICI $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni + e $\cdot$ con le solite proprietà

ASSIOMI DI ORDINAMENTO $\geq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$, cioè

(Ord 1) $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \lor x \leq y$ TOTALE

(Ord 2) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ RIFLESSIVA

(Ord 3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ TRANSITIVA

(Ord 4) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$ ANTISIMMETRICA

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ è un campo ordinato nel senso che l'ordine e le proprietà algebriche verificano due assiomi :

(O-A-1) se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

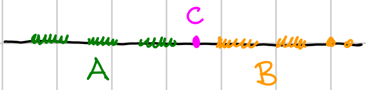
(O-A-2) se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

<u>Oss.</u> Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{ASSIOMA DI CONTINUITÀ}}$

<u>Def.</u> Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Si dice che A sta a sinistra di B se

$$\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leq b}$$



$\boxed{\text{Assioma di cont.}}$ Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B con A che sta a sinistra di B, esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leq c \leq b}$$

← il c è lo stesso e va bene per ogni a e b

<u>Oss.</u> Il separatore c può essere unico o no a seconda dei casi

<u>Oss.</u> Assioma di continuità in soli simboli

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall A \subseteq \mathbb{R} \ \forall B \subseteq \mathbb{R} \ [\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b] \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq 0 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ (\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq c \leq b) \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{TEOREMA MISTERIOSO}}$ Esiste un'unica quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che verifica gli assiomi algebrici, di ordin. e di continuità.

<u>Oss.</u> Cosa vuol dire unicità? Se c'è un'altra struttura $(\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{\geq})$ con le stesse proprietà, allora esiste una funzione INVERTIBILE $f: \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}}$ che commuta con la struttura algebrica e l'ordin., cioè

$$f(x+y) = f(x) \boxed{+} f(y) \qquad\qquad f(x \cdot y) = f(x) \boxed{\cdot} f(y)$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \boxed{\leq} f(y) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Esercizio (Hard) Dimostrare l'unicità

Tante cose vere non sono scritte negli assiomi...

$a \cdot 0 = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$(-1) \cdot (-1) = 1$

$1 \geq 0$

$\Big\}$ Andrebbero tutte dimostrate (esercizi!)

Cosa che si usa e non è scritta (ma si deduce):

(O-A-2') Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$ per ogni $z \in \mathbb{R}$

Oss. Se risolvo $3x - 5 \geq 2$ uso solo gli assiomi

$3x - 5 + 5 \geq 2 + 5$ (esist. opposto + O-A-1)

$3x \geq 7$ Molt. per $\frac{1}{3}$ e uso (O-A-2)

↑ siamo sicuri che è ≥ 0?

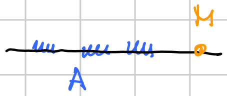
$x \geq \frac{7}{3}$

— o — o —

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto

Def. (Maggioranti e minoranti) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$



Si dice che $k \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \geq k$$

Def. (Insiemi limitati) Si dice che A è

- limitato superiormente se esiste almeno un maggiorante
- limitato inferiormente " " " " minorante
- limitato se è limitato sup. e inf.

Oss. I maggioranti non sono obbligati ad esistere, e quando esistono non sono mai unici

Def. (Massimo e minimo) Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A, e si scrive

$$M = \max A$$

se

(i) $M \geq a \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$.

Analogamente $m = \min A$ se

(i) $m \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) $m \in A$

Oss. Max e min non sono obbligati ad esistere, nemmeno se A è limitato, ma se esistono sono unici.

[**Dim.** se fosse $M_1 = \max A$, $M_2 = \max A$, allora

$$\left.\begin{array}{ll} M_1 \geq M_2 & (\text{pensando } M_1 \text{ come max}) \\ M_2 \geq M_1 & (\text{pensando } M_2 \text{ come max}) \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

]

Oss. Due definizioni analoghe di insieme limitato

$$\exists k \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad k \leq a \leq M$$

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

capire che sono la stessa cosa

ANALISI 1 — LEZIONE 007

Titolo nota 02/10/2014

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

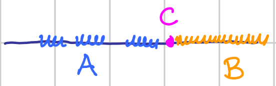
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

Def.
- Si dice che $\boxed{\sup A = +\infty}$ se A non è limitato superior.
- Si dice che $\boxed{\sup A = L \in \mathbb{R}}$ se A è limitato superiormente e L è il minimo dei maggioranti di A
- Si dice che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente
- Si dice che $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se A è lim. inf. e ℓ è il massimo dei minoranti.

Per poter dare la definizione, serve accertarsi che il min. dei magg. (ed il max. dei minoranti) esistano.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Supponiamo che A sia limitato superiormente ($\exists$ maggiorante).
Allora l'insieme dei maggioranti ammette minimo.

Dim. Sia B l'insieme dei maggioranti.



Per ipotesi $B \neq \emptyset$.
Per def. di maggioranti B sta a dx di A.
Per l'assioma di continuità esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ tale che

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante, cioè $c \in B$)
(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è più piccolo di tutti gli el. di B)
Quindi (i) + (ii) $\Rightarrow$ $c = \min B$. ☐

Conseguenza Grazie all'assioma di continuità, tutti i sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ hanno inf e sup (eventualmente $\pm\infty$).

Oss. ① Inf e sup esistono per forza

② Sono unici (sono min / max dei magg. / min.)

③ Se $M = \max A$ esiste, allora M è anche sup.
Idem per inf e min.

④ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora è anche max.

Oss. burocratica (Inf e sup di $\emptyset$)

Sicuramente tutti i numeri reali sono magg. e minor. di $\emptyset$

Ci sono 2 possibili politiche

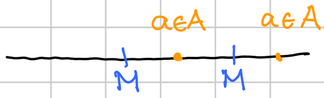
- dire che sup e inf non hanno senso se $A = \emptyset$ (buona idea, ma costringe tutte le volte che scrivo sup / inf a controllare)
- dire che $\sup \emptyset =$ " minimo dei maggioranti " $= -\infty$
  $\inf \emptyset = \dots = +\infty$

(ma così sup < inf, il che è bruttissimo).

—o—o—

CARATTERIZZAZIONE DI INF E SUP

① Si ha che $\sup A = +\infty$ se



$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{tale che} \quad a \geq M}$$

↑ l'insieme A sceglie a dopo aver visto M

$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ a \leq M}$ A è limitato ⇝ $\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A \ a > M}$ negazione

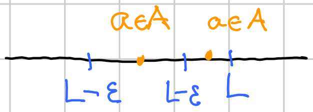
② Si ha che $\inf A = -\infty$ se $\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A \text{ t.c. } a \leq M}$

③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (questo dice che L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $L - \varepsilon \leq a$

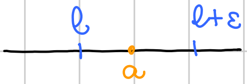
(che è come dire che $L-\varepsilon$ non va bene come maggiorante)



④ Si ha che $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se

(i) $\ell \le a \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a \le \ell + \varepsilon$.



— o — o —

Oss. Cosa vuol dire $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A \ a \ge M$? $\sup A = +\infty$

" " " $\boxed{\exists a \in A \ \forall M \in \mathbb{R} \ a \ge M}$?

ASSURDITÀ: a dovrebbe essere più grande di ogni M.

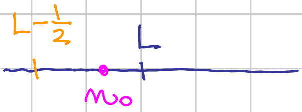
— o — o —

Esercizio (teorema) $\sup \mathbb{N} = +\infty$

[Dim.: sappiamo che $\sup \mathbb{N}$ esiste. Se non è $+\infty$, sarà un certo $L \in \mathbb{R}$.

Uso la caratterizzazione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (o qualunque cosa < 1)

Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_0 \ge L - \frac{1}{2}$



Ma allora $n_0 + 1 \underset{\uparrow}{\ge} L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L$

(uso O-A-1)

Quindi ho trovato un elemento di $\mathbb{N}$, cioè n_0+1, che è $> L$, contro l'ipotesi che L sia un maggiorante.]

Oss. Diamo per buono che $1 > 0$. Allora $2 > 1$ (O-A-1).

Ma allora $1 > \frac{1}{2}$ (ho moltiplicato per l'inverso di 2).

— o — o —

Esercizio Siano A e B non vuoti e limitati superiormente.

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ (ma esisterà?)

$\sup(\underbrace{A \cap B}) \le \min\{\sup A, \sup B\}$

già potrebbe essere il $\emptyset$ ↖ ma può essere minore stretto.

[Dimostrare!]

Lemma (sotto-esercizio) Se B è un insieme finito, allora max e min esistono.

[Dim. per induzione sul numero di elementi]

Esercizio sup (unione qualunque) = sup dei sup .
(il max potrebbe non esistere)

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 008

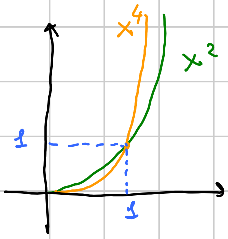
Titolo nota 06/10/2014

PRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

POTENZE $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Il comp. dipende dalla parità dell'esponente.

Teorema (poco misterioso) Per n pari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva.



Di conseguenza, f è invertibile e l'inversa

$$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

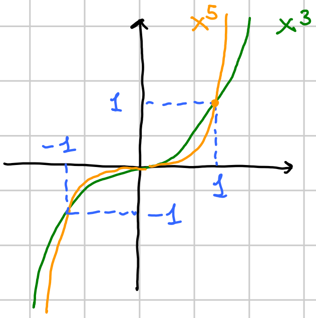
ed è detta radice n-esima

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

Oss. INPUT: reali ≥ 0 OUTPUT: reali ≥ 0

quindi $\sqrt[4]{16} = 2$ (e non ± 2 o simili)

Teorema (poco misterioso) Per n dispari la funzione $f(x) = x^n$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è strett. cresc., iniettiva, surgettiva, dispari.

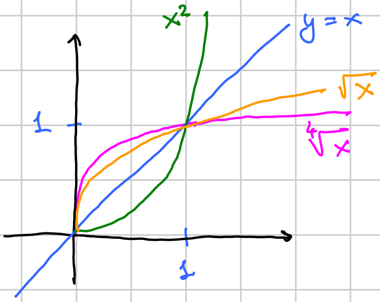


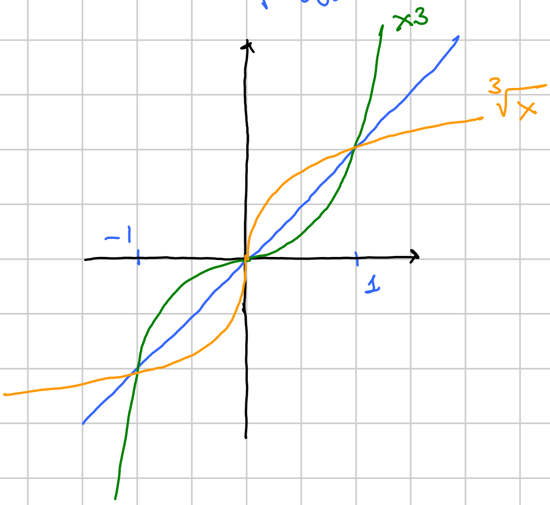
Di conseguenza è invertibile e l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la radice n-esima

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

Oss. INPUT: x reale qualunque, OUTPUT: reali qualunque, dello stesso segno di x

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Per funzioni reali, il grafico dell'inversa è il simmetrico del grafico della funzione wrt a $y=x$, cioè se $\underbrace{(x,y)}_{y=f(x)} \in G_f$, allora $\underbrace{(y,x)}_{x=f^{-1}(y)} \in G_{f^{-1}}$





Oss. sul mistero dei teoremi

① La def. di x^n segue per induzione dagli assiomi di R

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

② La stretta crescenza di x^n per $x \geq 0$ si dimostra volendo per induzione. Al passo induttivo, preso $y > x$ ho $y^n > x^n$ per ipotesi induttiva, quindi voglio dedurre $y^{n+1} > x^{n+1}$

$$y^{n+1} \underset{\uparrow\,\text{Def.}}{=} y \cdot y^n \underset{\uparrow\,\text{Hp}\cdot y}{>} y \cdot x^n \underset{\substack{\uparrow\\ y>x \text{ molt.}\\ \text{per } x^n}}{\geq} x \cdot x^n \underset{\nwarrow\,\text{Def.}}{=} x^{n+1}$$

③ L'iniettività segue dalla stretta crescenza.

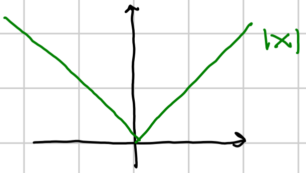
④ La surgettività è un PROBLEMONE. Vuol dire mostrare che l'equazione $x^n = \lambda$ ha soluzione per ogni $\lambda \geq 0$ e ogni $n \geq 1$.

[Idea: bisogna usare l'assioma di continuità. Definisco

$A = \{x \geq 0 : x^n < \lambda\}$ $\qquad$ $B = \{x \geq 0 : x^n > \lambda\}$

Dimostro che $A \neq \emptyset$, dimostro che $B \neq \emptyset$, dimostro che A è a sx di B, $\underbrace{\text{dimostro}}_{\uparrow\ \text{delicato}}$ che un qualunque sep c verifica $c^n = \lambda$]

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



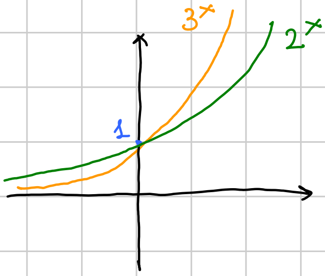
$\boxed{\text{ESPONENZIALI}}$ $f(x) = a^x$ con a parametro

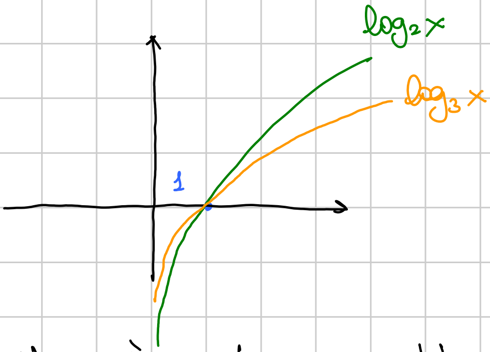
Oss. Potenze: x alla base Esponenziali: x all'esponente

Fatti. Per ogni $a > 1$ la funzione $f(x) = a^x$ vista come $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva, surgettiva. L'inversa $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è detta log in base a di x

$$g(x) = \log_a x$$

è pure lei strett. cresc.





Per ogni $a \in (0,1)$ la situazione è analoga scambiando crescente con decrescente.

Proprietà precorsistiche:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x^y) = y \log_a x$

Teorema misterioso (definizione di esponenziale)

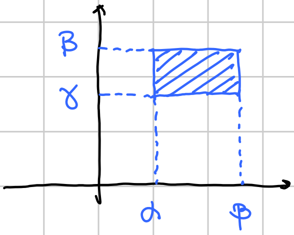
Per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ che verifica le seguenti proprietà:

(i) $f_a(1) = a$

(ii) $f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$

] basterebbero a definire univocamente $f_a : \mathbb{Q} \to (0, +\infty)$

(iii) esiste un rettangolo in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ che non contiene punti del grafico, cioè esistono $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ e $[\gamma, \delta] \subseteq (0, +\infty)$ tale che il grafico di f_a non incontra $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$



Secondo teorema misterioso L'unica funzione che verifica (i) – (ii) – (iii) è

- nel caso $a = 1$ è la costante 1
- nei casi $a > 1$ e $a \in (0,1)$ ha le proprietà di monotonia, iniettiva e surgettività enunciate precedentemente. Il problema grosso è sempre la surgettività.

Oss. L'esistenza di una funzione che verifica (i) – (ii) – (iii) si può fare a tappe

① Si definisce per $x \in \mathbb{N}$

② " " " $x \in \mathbb{Z}$

③ " " " $x \in \mathbb{Q}$

④ Si estende a ogni $x \in \mathbb{R}$ ponendo per $a > 1$

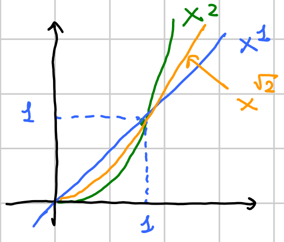
$$f_a(x) = \sup \{ f_a(q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q < x \}$$

e questa è già la parte dura.

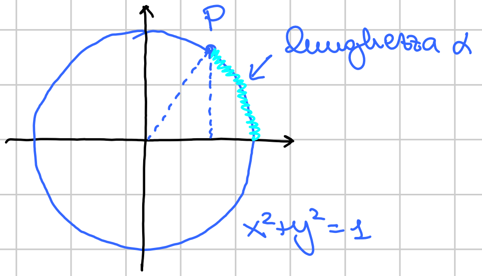
ANALISI 1 - LEZIONE 009

Titolo nota 06/10/2014

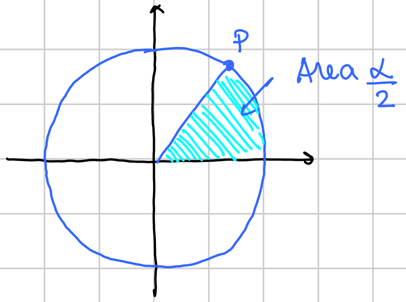
Oss. Definite gli esponenziali, sono definite anche le funzioni $f(x) = x^{\alpha}$ con esponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Queste funzioni, tranne casi particolari, sono definite solo per $x > 0$.
Per α positivo, le proprietà sono le stesse delle x^n precedenti



FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



concetto "losco"
↑
Se l'arco ha $\boxed{\text{lunghezza}}$ α, allora le coordinate di P sono $(\cos\alpha, \sin\alpha)$



"losco"
↑
se il settore ha $\boxed{\text{area}}$ $\frac{\alpha}{2}$, allora $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

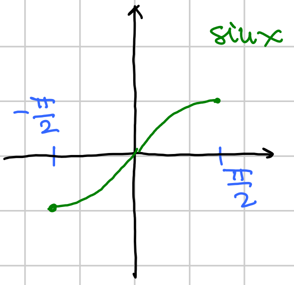
Fatti $\boxed{\sin x}$ La funzione $f(x) = \sin x$, vista come

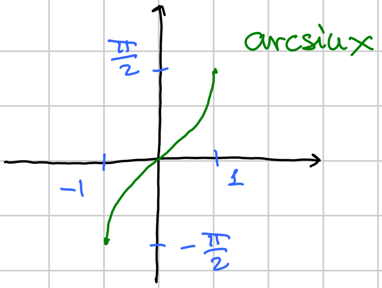
$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è

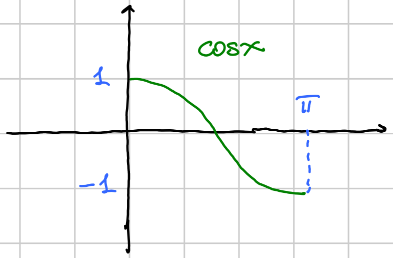
$g: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è detta $g(x) = \arcsin x$

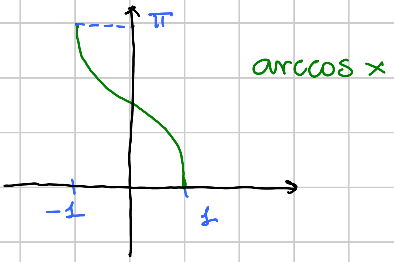
$\boxed{\cos x}$ La funzione $f(x) = \cos x$, vista come $f:[0,\pi] \to [-1,1]$ è strett. decrescente e invertibile. L'inversa è

$$g:[-1,1] \to [0,\pi] \qquad g(x) = \arccos x$$





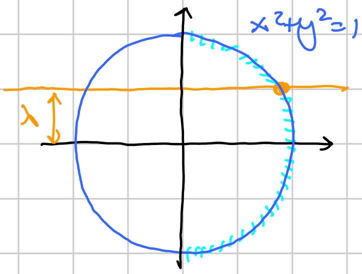




Interpretazione nella circ. trigonometrica.

Se voglio calcolare $\arcsin\lambda$, allora interseco con la retta $y=\lambda$ e prendo l'intersezione in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

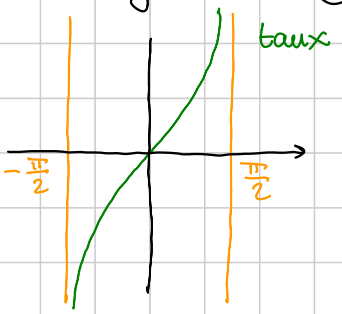
La lungh. dell'arco corrisp. è $\arcsin\lambda$.

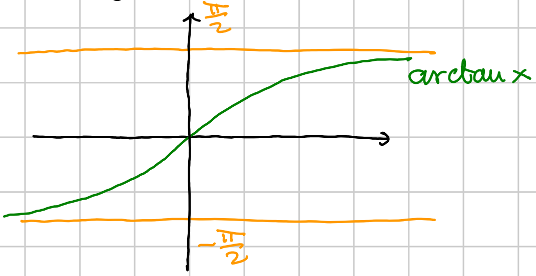


Per $\arccos\lambda$, stessa cosa con la retta $x=\lambda$ prendendo l'intersezione "sopra"

$\boxed{\tan x}$ Vista come $f:(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è strett. cresc. e invertibile. L'inversa è

$$g:\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad g(x) = \arctan x$$





<u>Esercizio</u> Mostrare che

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0}$$

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Sia $\alpha = \arctan x$, quindi $x = \tan \alpha$. Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\underset{\text{Precorso}}{\uparrow}}{=} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arctan \frac{1}{x}$$

Ma allora $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}$. □

Analogamente, $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x < 0}$

Dimostrare → sia usando la disparità
→ sia usando il precorso

Domanda: dove ho usato sopra che fosse $x > 0$??

<u>Esercizio</u> $\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]}$

Dim.: $\arcsin x = \alpha$, quindi $x = \sin \alpha$. Ora

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \underset{\underset{\text{precorso}}{\uparrow}}{=} \sin \alpha = x, \text{ quindi } \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$$

Sommando: $\arcsin x + \arccos x = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}$. □

<u>Esercizio</u>

$\arcsin(\sin 1) = 1$ $\qquad$ $\arccos(\cos 1) = 1$

$\arcsin(\sin 2) =$ $\qquad$ $\arccos(\cos 2) = 2$

$\arcsin(\sin 3) =$ $\qquad$ $\arccos(\cos 3) = 3$

$\arcsin(\sin 4) =$ $\qquad$ $\arccos(\cos 4) =$

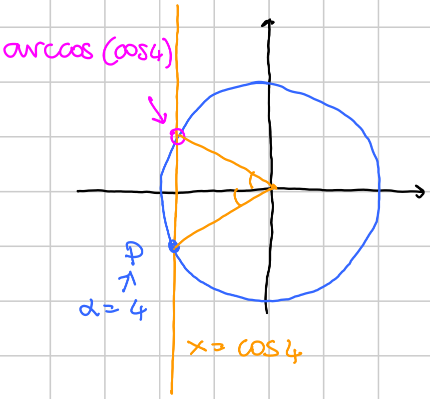
Achtung! Se g è l'inversa di f, allora
$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$$

quindi
$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$\arccos(\cos x) = x \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

Quanto fa $\arccos(\cos 4)$?

Quindi $\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$

Allo stesso modo si sistemano quelli con $\sin x$ e $\arcsin x$.



— o — o —

Esercizio (equazioni)

$$2^{3x+4} = 2^{4x+3} \qquad \text{SI}$$

$$\log_2(3x+4) = \log_2(4x+3) \qquad \text{NI}$$

$$\sin(3x+4) = \sin(4x+3) \qquad \text{NO}$$

$\rightsquigarrow 3x+4 = 4x+3 \rightsquigarrow x = 1.$

Questione di iniettività: SI nel 1° caso, SI nel 2° caso ma devo imporre di essere dove $\log_2$ è definita, quindi imporre $3x+4 > 0$, NO nel terzo.

$\boxed{\text{Disequazioni}}$

$$2^{x+3} > 2^{3x+1} \qquad \text{SI}$$
$$\log_3(x+3) > \log_3(3x+1) \qquad \text{NI} \qquad x+3 > 3x+1$$
$$\sin(x+3) > \sin(3x+1) \qquad \text{NO}$$

Il passaggio $f(A) > f(B) \Longrightarrow A > B$

è OK se f è crescente (strett. o debolmente ?)

$$f(A) \geq f(B) \Longrightarrow A \geq B$$

è OK se f è strett. cresc.

$$f(A) > f(B) \Longrightarrow A < B$$
$$f(A) \geq f(B) \Longrightarrow A \leq B$$

sono OK con decrescenza opportuna, sempre se siamo all'interno degli insiemi di definizione.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 010

Titolo nota 07/10/2014

<u>Def.</u> Sia $P(n)$ un predicato che riguarda $n \in \mathbb{N}$. Si dice che

- $P(n)$ vale $\boxed{\text{DEFINITIVAMENTE}}$

  $$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad P(n) \text{ è vero } \quad \forall\, n \geq n_0$$

- $P(n)$ vale $\boxed{\text{FREQUENTEMENTE}}$ se vale per infiniti indici n, o equivalentemente

  $$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, m \geq n \quad \text{t.c.} \quad P(m) \text{ è vero}$$

<u>Def.</u> Una <u>successione</u> di numeri reali è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

<u>Notazione</u> Di solito una succ. si indica con x_n, a_n, y_n invece di $f(n)$, $a(n)$

<u>Def. elastica di successione</u> Si accettano come succ. anche quelle "funzioni" che non sono def. per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente, cioè sempre tranne un numero finito di casi.

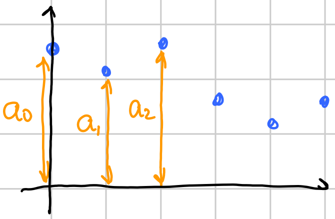
<u>Esempi</u> : $\underbrace{a_n = \frac{1}{n-3}}_{\text{Ok per } n \geq 4}$ $\qquad b_n = \sqrt{n-2014}$ $\qquad \underbrace{c_n = \sqrt{2014^{2014}-n}}$

Ok per $n \geq 2014$

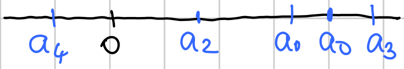
NON è una successione perchè va male frequentemente

<u>Come visualizzare una succ.</u> Sia a_n una succ.

① Nel piano cartesiano considero i p.ti di coord. (n, a_n)
Sostanzialmente è il grafico.



② Disegno su una retta i p.ti di ascissa a_n



③ Penso alla retta e penso allo scorrere del tempo e al secondo n si accende una lampadina in a_n e sta accesa un secondo

— o — o —

Limite di una succ. = comportamento della succ. per n grandi

I possibili tipi di comportamento sono 4.

$\boxed{1}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad a_n \to \ell$

"a_n tende ad ℓ"

"il limite per n che va all'infinito di a_n è ℓ"

$\boxed{2}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ $\qquad a_n \to +\infty$

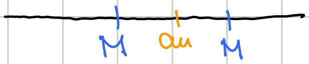
$\boxed{3}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ $\qquad a_n \to -\infty$

$\boxed{4}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n$ NON ESISTE $\qquad a_n$ è INDETERMINATA

a_n NON HA LIMITE

<u>Def. di</u> $\boxed{4}$ Nessuno dei precedenti

<u>Def. di</u> $\boxed{2}$ Si dice che $a_n \to +\infty$ se
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grandi)
si ha che $a_n \geq M$ definitivamente
(più M è grande, più il definitivamente inizia dopo)



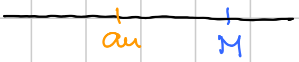
$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \underset{\uparrow \text{dipende da } M}{n_0} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M$$

Stessa cosa detta in maniera barocca: $a_n \to +\infty$ se $\exists\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \qquad \forall n \geq \boxed{g(M)}$$

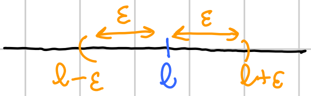
↑ sarebbe l' n_0 corrispond. ad M.

Def. di $\boxed{3}$ Si dice che $a_n \to -\infty$ se



$$\forall \underset{\substack{\uparrow \\ \text{molto} \\ \text{negativi}}}{M} \in \mathbb{R} \;\; \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; a_n \leq M}_{a_n \,\leq\, M \text{ definitivamente}}$$

Def. di $\boxed{1}$ Si dice che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se



$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitivamente

anche strette sarebbe lo stesso

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \underbrace{\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon}_{\underbrace{|a_n - \ell|}_{\text{distanza di } a_n \text{ da } \ell} \leq \varepsilon \text{ (precorso)}}$$

Due varianti di $\boxed{1}$ $\quad a_n \to \ell^+ \qquad\qquad a_n \to \ell^-$

a_n tende ad ℓ da dx $\qquad$ ... da sx

$\boxed{1+}$ Si dice che $a_n \to \ell^+$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\ell < a_n \leq \ell + \varepsilon$ defin.

STRETTO

$\boxed{1-}$ Si dice che $a_n \to \ell^-$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\ell - \varepsilon \leq a_n < \ell$ defin.

— o — o —

Oss. Se $a_n \to \ell^+$ oppure $a_n \to \ell^-$, allora $a_n \neq \ell$ definitiv.

— o — o —

Esempi intuitivi

① $n^2 \to +\infty$

② $527 - n^3 \to -\infty$

③ $\frac{1}{n} \to 0$ anzi $\frac{1}{n} \to 0^+$

④ $(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots$
non ha limite

⑤ $(-1)^n n = 0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$
non ha limite.

Leggende metropolitane

① Se $a_n \to +\infty$, allora $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente

FALSO : 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, ... "Penelope"

② Se $a_n \to \ell$, allora $a_n \to \ell^+$ oppure $a_n \to \ell^-$

FALSO : $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ $\frac{(-1)^n}{n}$

③ Se $a_n \to 0^+$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

FALSO : $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ $\frac{1}{\text{Penelope}}$

— o — o —

Teorema Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora a_n è limitata, cioè esistono $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ tali che $A \leq a_n \leq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dim.: Idea: definitiv. sta tra $\ell-1$ e $\ell+1$, i termini precedenti sono un numero finito.

Uso la def. di limite con $\varepsilon = 37$. Allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\ell - 37 \leq a_n \leq \ell + 37 \quad \forall n \geq n_0$$

Ora basta porre

$$B = \max\{\overbrace{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, \ell+37}^{\text{numero finito}}\}$$

$$A = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, \ell-37\}.$$

Con questi valori si ha la tesi. □

LM ④ Se una successione è limitata, allora ha limite reale.

FALSO : $(-1)^n$,

ANALISI 1 – LEZIONE 011

Titolo nota 07/10/2014

Esempio 1 $n^2 \to +\infty$

[Dim.: devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n^2 \geq M$ $\forall n \geq n_0$,
cioè devo risolvere $n^2 \geq M$

- Se $M \leq 0$, posso scegliere $n_0 = 0$
- Se $M > 0$ devo avere $n \geq \sqrt{M}$, quindi basta che scelga un intero n_0 t.c. $n_0 \geq \sqrt{M}$.
  Questo esiste perché abbiamo dim a suo tempo che $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Esempio 2 $\frac{1}{n} \to 0^+$

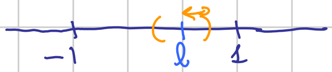
Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\underset{\overset{\uparrow}{\text{banale}}}{0 <} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Devo risolvere $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ... precorso ... $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$
Quindi basta scegliere $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Esempio 3 $(-1)^n$ NON ha limite.

Di certo non tende a $+\infty$ (per farlo dovrebbe superare 2014)
" " " " " $-\infty$ (" " " " -25)

Non tende a numeri $\ell \neq \pm 1$ perché definitivamente dovrebbe stare in un intervallo che evita ± 1



Non tende a 1 perché definitiv. dovrebbe stare tra 0 e 2 ($\varepsilon = 1$), ma frequentemente non ci sta
Non tende a -1 per lo stesso motivo.

— o — o —

Teorema (Permanenza del segno) Supponiamo che $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to \ell > 0$.
Allora $a_n > 0$ definitivamente.

Dim.: Se $a_n \to +\infty$, allora uso la def. con $M = 14$
Definitiv. $a_n \geq M = 14 > 0$, quindi $a_n > 0$.

Se invece $a_n \to \ell > 0$, allora uso la def. con $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Definitivamente

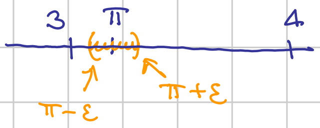
$$a_n \geq \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$$

— o — o —

Esercizio Enunciare e dim. con segno negativo

— o — o —

Variante Se $a_n \to \pi$, allora $3 < a_n < 4$ definitivamente



Scelgo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che

$3 < \pi - \varepsilon < \pi + \varepsilon < 4$. Allora definitiv.

$\pi - \varepsilon \leq a_n \leq \pi + \varepsilon$ e quindi $3 < a_n < 4$.

Ad esempio va bene $\varepsilon = \frac{\pi - 3}{2}$.

— o — o —

Teorema (Unicità del limite) Una successione ha uno ed uno solo dei comportamenti $\boxed{1}$, ②, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$. Inoltre, se è di tipo ①, allora esiste un unico $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \to \ell$.

Dim. Ci sarebbero tanti casi da fare. Facciamone uno: escludiamo che possa essere $a_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $a_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_1 \neq \ell_2$.
Supponiamo per assurdo che accada.
wlog (WITHOUT LOSS OF GENERALITY) $\ell_1 < \ell_2$.

Scelgo $\varepsilon = \frac{\ell_2-\ell_1}{3}$ in modo che

$\ell_2-\varepsilon > \ell_1+\varepsilon$ (verificare che accade).
Allora per def. di limite si dovrebbe avere che

$\ell_1-\varepsilon \le a_n \le \ell_1+\varepsilon < \ell_2-\varepsilon \le a_n$ definitivamente

ma allora si avrebbe $a_n < a_n$, il che è assurdo. □

— o — o —

Teorema (confronto a 2) Siano a_n e b_n due successioni.
Supponiamo che $a_n \le b_n$ definitivamente.
Allora
- se $a_n \to +\infty$, anche $b_n \to +\infty$
- se $b_n \to -\infty$, anche $a_n \to -\infty$

[Dim. della 1ª: $\forall M$ $a_n \ge M$ definitiv., ma allora pure $b_n \ge M$ ...]

Achtung! Ogni altra deduzione è ABUSIVA.

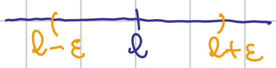
Teorema (confronto a 3) (Carabinieri) Supponiamo che

$a_n \le b_n \le c_n$ definitivamente

$a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
$c_n \to \ell \in \mathbb{R}$ } stesso ℓ REALE

Allora anche $b_n \to \ell$ (stesso ℓ).

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario.



Per def. di lim. su c_n so che

$c_n \le \ell+\varepsilon \quad \forall n \ge n_{0,c}$

Per def. di lim. su a_n so che

$\ell-\varepsilon \le a_n \quad \forall n \ge n_{0,a}$

Ma allora definitivamente ($\forall n \ge \max\{n_{0c}, n_{0a}, n_0$ dell'ipotesi$\}$)

$\ell-\varepsilon \le a_n \le b_n \le c_n \le \ell+\varepsilon$

quindi in particolare $\ell-\varepsilon \le b_n \le \ell+\varepsilon$ che è quello che volevo. □

Oss. Se $a_n = b_n$ definitivamente, allora a_n e b_n hanno (ovviamente) lo stesso comportamento.

Esempio 1 Se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora

$$a_n + b_n \to +\infty$$

Dim. b_n lim. inf. vuol dire che $\exists B \in \mathbb{R}$ t.c. $b_n \geq B$.
Ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B$$

Fisso $M \in \mathbb{R}$. Poiché $a_n \to +\infty$ avremo che $a_n \geq M - B$ definitiv., ma allora

$$a_n + b_n \geq a_n + B \geq M - B + B = M \quad \text{definitiv.}$$

Esempio 2 $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

[Potrei dire $2^n \geq M$ se e solo se $n \geq \log_2 M$ e questo è vero definitivamente.
Fregatura: per definire $\log_2 x$ serve sapere che 2^x assume valori grandi a piacere, quindi in un certo senso bisogna il limite PRIMA

Altra via più elementare. Per induzione dimostro che

$$\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{2^n}}} \geq 1 + n \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

per confronto a 2.

—o—o—

ANALISI 1 – LEZIONE 012

Titolo nota 09/10/2014

SUCCESSIONI MONOTONE

Def. Una succ. a_n di numeri reali si dice
- debolmente crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- strett. crescente " $a_{n+1} > a_n$ "
- debolmente decrescente " $a_{n+1} \leq a_n$ "
- strett. decrescente " $a_{n+1} < a_n$ "

Oss. 1 Strett. cresc. $\Rightarrow$ deb. crescente

" decr. $\Rightarrow$ deb. decr.

Oss. 2 Una maniera analoga di dare le definizioni è di chiedere

$$a_m \geq a_n \quad \forall\, m > n$$
$$a_m > a_n \quad \forall\, m > n$$
$$a_m \leq a_n \quad \forall\, m > n$$
$$a_m < a_n \quad \forall\, m > n$$

— o — o —

Importanza delle succ. monotone: i comportamenti possibili sono solo due

Teorema (delle succ. monotone)

Sia a_n una successione debolmente crescente (se è strett., meglio)

Allora ci sono solo due possibilità

① $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

② $a_n \to +\infty$

In entrambi i casi il limite (reale o $+\infty$) è

$$\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ (sup dei valori assunti dalla successioni)

Dim. Sia L il sup. Ci sono 2 casi

<u>Caso 1</u> Se $L = +\infty$, allora dico che $a_n \to +\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. Per def. di sup c'è un elemento della successione $\geq M$, cioè

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} \geq M$$

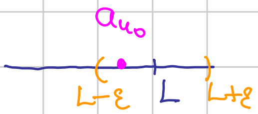
Ma per la debole crescenza $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$, quindi $a_n \geq M$ definitivamente.

(per def. di sup supera una volta, per monotonia non torna più indietro)

<u>Caso 2</u> Se $L \in \mathbb{R}$, allora dico che $a_n \to L$.

Voglio dim.: $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitiv.}$$



↑ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché L è il sup (meglio $a_n \leq L$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Per def. di sup (anzi per la caratterizzazione) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $L - \varepsilon \leq a_{n_0}$. Ma allora per monotonia $L - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$, cioè definitivamente.

— o — o —

<u>Osservazione</u> Non è detto che $a_n \to L^-$ perché potrebbe valere sempre L. D'altra se assume almeno una volta il valore L, allora $a_n = L$ da lì in poi.

<u>Oss.</u> Se a_n è strett. cresc., allora nel secondo caso $a_n \to L^-$.

— o — o —

<u>Corollario</u> Se a_n è debolm. cresc. e limitata superiormente, cioè $\exists\, A \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per forza $a_n \to L \in \mathbb{R}$ e $L \leq A$ [se fosse $L > A$ oppure $L = +\infty$, allora definitivamente dovrebbe superare A per i discorsi tipo permanenza del segno].

— o — o —

IL NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

Teorema La successione

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è debolmente crescente (anzi strettamente) e limitata superiormente (anzi $2 \leq e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$), quindi ha un limite reale.

Def. Si dice numero di Nepero e si indica con "e" il limite di e_n. Quindi

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (e = 2{,}718\ \ldots)$$

Dim.

Passo 1 (Non serve a niente) $e_n \geq 2$.

Parto dalla Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1$

Se metto $x = \frac{1}{n}$ ottengo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

Passo 2 Dimostro la debole crescenza, cioè $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$.

$$e_n \geq e_{n-1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\iff (n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1}$$

$$\iff \boxed{(n+1)}\,(n^2-1)^{n-1} \geq n \cdot \boxed{n^{2n-2}}$$

$$\iff \frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n^2)^{n-1}} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\iff \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n}{n+1}$$

Ora uso la Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$ che è > -1 appena $n \geq 2$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2} \overset{\text{spero}}{\geq} \frac{n}{n+1}$$

$$(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$$

Vediamo la speranza! $\frac{n^2-n+1}{n^2} \overset{?}{\geq} \frac{n}{n+1}$

$$n^3 - \cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n^2} - \cancel{n} + 1 \overset{?}{\geq} n^3 \qquad \text{Ok!}$$

Oss. Forse veniva ancora meglio se scrivevo

$$(n+1)^n (n-1)^{n-1} \geq n^{2n-1} \iff \frac{(n^2-1)^n}{n-1} \geq n^{2n-1}$$

e andavo avanti da qua.

$\boxed{\text{Passo 3}}$ $\boxed{e_n \leq 3}$ Uso il binomio di Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{} \leq 2$$

$$\leq 1 + 2 = 3$$

Cosa abbiamo usato?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$$

Questa è $1+a+a^2+\dots+a^{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim. per} \\ \text{induzione}}}{=} \frac{a^n-1}{a-1} = \frac{1-a^n}{1-a} \underset{\substack{\uparrow \\ 1-a^n \leq 1 \text{ poi} \\ \text{divido per } 1-a>0, \\ \text{quindi conservo} \\ \text{il verso}}}{\leq} \frac{1}{1-a}$

Mettendo $a=\frac{1}{2}$ si ha quello che voglio.

Al passaggio precedente abbiamo usato che

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \qquad \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \underbrace{\boxed{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}}_{\leq 1 \text{ perché num. } \leq \text{ denom.}} \frac{1}{k!}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$\boxed{\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}}$ vera per ogni $k=1,2,\dots,n$

Dimostrazione più formale a posteriori

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.}}}{e_n=}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binomio} \\ \text{Newton}}}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Disug.} \\ \text{di sopra}}}{\leq} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\underset{\text{SHIFT indici} \nearrow}{=} 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

$$\underset{\text{succ. geometrica} \nearrow}{\leq} 3$$

ANALISI 1 — LEZIONE 013

Titolo nota 09/10/2014

RETTA REALE ESTESA

Def. Si pone $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Quando si dice che $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, vuol dire che il limite può essere un $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$.

Posso definire in modo ovvio un ordinamento su $\overline{\mathbb{R}}$.

Posso quasi sempre definire le 4 operazioni su $\overline{\mathbb{R}}$:

$7 + (+\infty) = +\infty$ $\quad 7 \cdot (+\infty) = +\infty$ $\quad -7 \cdot +\infty = -\infty$

Alcune operazioni non si possono fare

$+\infty + (-\infty)$ $\quad +\infty \cdot 0$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$

ma nemmeno $\frac{7}{0}$.

Teoremi algebrici sui limiti Siano a_n e b_n due succ.
Supponiamo che

$$a_n \to a_\infty \in \overline{\mathbb{R}} \qquad b_n \to b_\infty \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- $a_n + b_n \to a_\infty + b_\infty$
- $a_n \cdot b_n \to a_\infty \cdot b_\infty$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a_\infty}{b_\infty}$
- se $\lambda \neq 0$, allora $\lambda a_n \to \lambda a_\infty$

TRANNE → il rapporto quando $b_\infty = 0$
→ tutte le operazioni nelle 4 forme indeterminate

$\boxed{+\infty - \infty}$ $\quad \boxed{\pm\infty \cdot 0}$ $\quad \boxed{\frac{0}{0}}$ $\quad \boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$

Achtung! Achtung! Cosa vuol dire forma indeterminata? NON vuol dire che il limite non esiste, cioè è di tipo ④. Vuol dire che non posso dire niente del limite globale (della somma, prod., quoziente) sapendo solo il limite dei 2 termini a_n e b_n.

Esempio classico

① $a_n = 2n \to +\infty$ $\qquad$ $a_n + b_n = n \to +\infty$

$b_n = -n \to -\infty$

② $a_n = n \to +\infty$ $\qquad$ $a_n + b_n = -n \to -\infty$

$b_n = -2n \to -\infty$

③ $a_n = n + 15 \to +\infty$ $\qquad$ $a_n + b_n = 15 \to 15$

$b_n = -n \to -\infty$

④ $a_n = n + (-1)^n \to +\infty$ $\qquad$ $a_n + b_n = (-1)^n$ e non ha limite

$b_n = -n \to -\infty$

Esercizio Fare esempi analoghi per le altre 3 forme indeterm.

Esempio 1 $a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n^2} - \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{n}$ $\qquad$ FORMA INDETERMINATA

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n}\,\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{(n-1)} \longrightarrow +\infty$$

Esempio 2 $a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{n^2} - \underbrace{\sin(n^3)}_{\substack{\downarrow \\ \text{BOH}}}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \text{ per} \\ \text{confronto a 2}}}{\boxed{a_n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x \le 1}}{\geq} \underset{\substack{\searrow \\ +\infty}}{\boxed{n^2 - 1}}$$

<u>Cosa posso dare per buono?</u>

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a>0 \\ \searrow 0 \ (\text{anzi } 0^+) & \text{se } a<0 \end{cases}}$$

SI DIM. USANDO LA DEFINIZIONE

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a>1 \\ \searrow 0 & \text{se } a\in(0,1) \end{cases}}$$

Oss. $\lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$ $\quad (1^n = 1, 1, 1, 1, 1, \dots,$ quindi $\to 1)$

[Dim.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{a^n} = (1+\underbrace{a-1}_{x})^n \geq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \ \text{se } a>1}}{\boxed{1+(a-1)n}}$$

per confronto a due

Se $a\in(0,1)$, allora lo scrivo come $a=\frac{1}{b}$ con $b>1$, ma allora

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \boxed{\frac{1}{b^n}} \to \frac{1}{+\infty} = 0 \qquad]$$

Esempio 3 $\quad \dfrac{n^2+3n+5}{2n^2-n} \to \dfrac{1}{2}$

$$\frac{\cancel{n^2}\left(1+\overset{\substack{0\\ \uparrow}}{\boxed{\frac{3}{n}}}+\overset{\substack{0\\ \uparrow}}{\boxed{\frac{5}{n^2}}}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{1}{n}}}\right)} \to \frac{1}{2}$$

Più in generale: il rapporto tra polinomi dello stesso grado tende al rapporto tra i coeff. dei termini di grado max

Esempio 4 $\frac{\sin n}{n} \to 0$

Ovviamente $-1 \leq \sin n \leq 1$

Divido per n conservando i versi (posso per $n > 0$)

$$\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{-\frac{1}{n}}} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{\sin n}{n}} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

(Carabinieri)

Fatto generale Supponiamo che

- a_n sia limitata
- $b_n \to +\infty$

Allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Dim. $A \leq a_n \leq B$ per ipotesi

Divido per b_n (e definitivamente posso perchè $b_n > 0$ defin.)

$$\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{A}{b_n}}} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a_n}{b_n}} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{B}{b_n}}}$$

Carabinieri

Esempio 5 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n!)}{\sqrt{n}} = 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{Mostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per $\sqrt{n}$ e concludo con i carabinieri

Esempio 6 $\sqrt[n]{2} \to 1$

Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ uso $x=\frac{1}{n}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ Faccio $\sqrt[n]{\ }$ (posso per monotonia di $\sqrt[n]{x}$)

$1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$ Quindi

$$\sqrt[n]{1} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{1}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{2}}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{1+\frac{1}{n}}}$$

(carabinieri)

Analogamente se avessi $\sqrt[n]{a}$, faccio Bernoulli con $x=\frac{a-1}{n}$ e ottengo

$$\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{a-1}{n}\cdot n = a, \text{ quindi } \sqrt[n]{a} \leq 1+\frac{a-1}{n}$$

Se so che $a \geq 1$ ho $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{1+\frac{a-1}{n}}}$

Se invece $a \in (0,1)$, lo scrivo come $a=\frac{1}{b}$ con $b>1$ e ottengo

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$$

In generale $\boxed{\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \forall a>0}$ Tabellina

Esempio 7 $\sqrt[n]{n}$

Variante di Bernoulli $\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2}$ $\forall x \geq 0$

Esercizio per induzione

In particolare $(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2$

Uso $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Ottengo

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \geq n$$

Faccio la radice n-esima e ho

$$\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{1}} \overset{\substack{\text{gratis}\\\downarrow}}{\leq} \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\sqrt[n]{n}}} \overset{\substack{\text{sopra}\\\downarrow}}{\leq} \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}}$$

Tabellina: $\boxed{\sqrt[n]{n} \to 1}$

ANALISI 1 — LEZIONE 14

Titolo nota 13/10/2014

CRITERI

- RADICE
- RAPPORTO
- RAPPORTO → RADICE

<u>Criterio della radice</u> Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definitiv.
Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad (\ell \in [0,+\infty) \text{ opp. } \ell = +\infty)$$

Allora

- se $\ell > 1$, allora $a_n \to +\infty$
- se $\ell < 1$, allora $a_n \to 0$
- se $\ell = 1$, allora BOH (non si può dire nulla di a_n)

<u>Criterio del rapporto</u> Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definitiv.
Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad (\text{come sopra})$$

Allora stesse conclusioni della radice.

<u>Criterio rapporto → radice</u> Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definitiv.
Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad (\text{come sopra})$$

Allora anche $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ (stesso ℓ di sopra)

<u>Oss.</u> Il rapporto → radice funziona anche per $\ell = 1$ e non riguarda il $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

Esempi per l'ottimalità degli enunciati

① $a_n = n^2$ $\qquad a_n \to +\infty$

Il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} \to 1$$

Quindi il criterio del rapporto in questo caso non aiuta

Analogamente $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1$

② $a_n = \frac{1}{n^2}$ Ora $a_n \to 0$, ma i criteri non aiutano

③ Può succedere che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non ha limite.

$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$

D'altra parte $1 \le a_n \le 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi

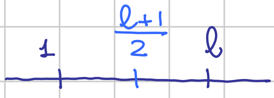
$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{a_n}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{2}}$$

Oss. Il rapporto non può avere un limite diverso da quello della radice.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Caso } \ell > 1}$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1$

Tesi: $a_n \to +\infty$



Dall'ipotesi segue che

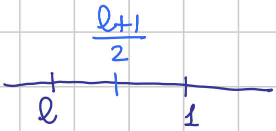
$$\sqrt[n]{a_n} \ge \frac{\ell+1}{2}$$ definitiv., quindi

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \\ \text{(confronto)}}}{a_n} \ge \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \text{ (espon. con base } >1)}}{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}}$$ definitiv.

Se $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, parto da $\sqrt[n]{a_n} \geq 2014$ definitiv. e procedo allo stesso modo.

$\boxed{\text{Caso } l < 1}$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \to l < 1$

Tesi: $a_n \to 0$



Dall'ipotesi

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$ definitiv., quindi

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{0}} \overset{\text{Hp}}{\leq} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{a_n}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}} \quad (\text{base} < 1)$$

Carabinieri

— o — o —

Oss. Il vero enunciato è il seguente: se $a_n \geq 0$

$\to \exists\, M > 1$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq M$ definitiv. $\Longrightarrow a_n \to +\infty$

$\to \exists\, M < 1$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq M$ " $\Longrightarrow a_n \to 0$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. rapporto}}$

$\boxed{\text{Caso } 1}$ Ipotesi: $\exists\, M > 1$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ definitiv.

Tesi: $a_n \to +\infty$

Per ipotesi $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$

[$a_{n_0+1} \geq M a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \geq M a_{n_0+1} \geq M^2 a_{n_0}$,
$a_{n_0+3} \geq M a_{n_0+2} \geq M^3 a_{n_0}$ ...]

Per induzione dimostro che [farlo!]

$$a_{n_0+k} \geq M^k a_{n_0} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè $$a_n \geq M^{n-n_0} a_{n_0}$$ definitivamente cioè

$$\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{\boxed{a_n}} \geq \underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{\boxed{M^n}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{costante positiva}}}{\boxed{\frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}}}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Ipotesi: $\exists\, M<1\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M \quad \forall\, n \geq n_0$

Tesi: $a_n \to 0$

Dall'ipotesi per induzione segue che

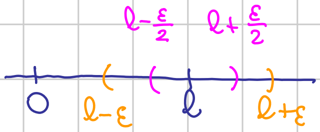
$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{0}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{a_n}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{M^n}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{costante}}}{\boxed{\frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}}}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim rapporto} \to \text{radice}}$ Ci sarebbe vari casi. Facciamo solo il caso $\ell \in (0,+\infty)$ (resterebbero $\ell = 0$ e $\ell = +\infty$)

Ipotesi: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$ Tesi: $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$

Per ipotesi $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ t.c.



$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, n \geq n_1$$

Ragionando come prima per induzione otteniamo che

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}} \leq a_n \leq \left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{a_{n_1}}{\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}}$$

Faccio la radice n-esima ovunque:

$$\left(\ell-\frac{\varepsilon}{2}\right)\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{\cdots\cdot}}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{\frac{a_{n_1}}{\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_1}}}}}\ \sqrt[n]{\text{cost.}}$$

Abbiamo dimostrato che

RHS (right-hand side) $\longrightarrow \ell + \frac{\varepsilon}{2}$

LHS $\longrightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2}$

ma questo non basta per garantire il limite del CHS.

Tuttavia avremo che RHS $\leq \ell + \varepsilon$ definitivamente e
analogamente LHS $\geq \ell - \varepsilon$ definitivamente,
quindi in conclusione

$$\ell - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente},$$

che è quello che volevo.

— o — o —

<u>Qualche caso del teo. algebrico</u>

- Se $a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n + b_n \to a_\infty + b_\infty$

[Brutta: $|(a_n+b_n) - (a_\infty + b_\infty)| \leq \varepsilon$

$$|(a_n - a_\infty) + (b_n - b_\infty)| \leq \underset{\leq \frac{\varepsilon}{2}}{|a_n - a_\infty|} + \underset{+ \; \frac{\varepsilon}{2}}{|b_n - b_\infty|} \leq \varepsilon \quad]$$

$\boxed{\text{Dim. vera}}$ Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha
$|(a_n+b_n) - (a_\infty + b_\infty)| \leq \varepsilon$.

Per def. di lim. su a_n e b_n ho che

$|a_n - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ definitiv. $\qquad |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ definitiv.

Quindi

$$|(a_n+b_n) - (a_\infty+b_\infty)| \underset{\substack{\uparrow \\ |x+y| \leq |x| + |y|}}{\leq} |a_n - a_\infty| + |b_n - b_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

definitiv. $\square$

ANALISI 1 – LEZIONE 15

Titolo nota 13/10/2014

Confronti di ordini di infinito

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{3^n}{n^3}}}_{a_n}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{\cancel{3^n}} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \to 3 > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Fatto generale:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^b} = +\infty \qquad \forall a>1\ \forall b>0}$$ TABELLINA

Esponenziale batte potenza

Quindi $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1,001)^n}{n^{2014}} = +\infty$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n} = \frac{3\cdot\cancel{3^n}\cdot\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Più in generale:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \forall a>1}$$ Tabellina

FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{n^n}{n!}}}_{a_n}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty}$$

Criterio del rapporto :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \, \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cancel{n!} \, n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

Quindi $a_n \to +\infty$.

<u>Esempio 4</u> $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}} = 0$ (occhio : $a^{b^c} = a^{(b^c)}$)

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{3^n} \xrightarrow{} 0 < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

↑ potenza vs espon.

<u>Esempio 5</u> $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Provo ad usare rapporto → radice con $a_n = n$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$, quindi $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

— o —

<u>Oss.</u> Non posso calcolare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5}$ con il rapporto → radice perchè il limite di $\sqrt[n]{\text{cost}}$ serve nella dimostrazione del criterio.

— o — o —

Dall' esempio 5 segue che $\lim_{n\to+\infty} \underset{\overset{\|}{(\sqrt[n]{n})^a}}{\sqrt[n]{n^a}} = 1$ per ogni $a > 0$

<u>Esempio 6</u> $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3+7n^2+5} = 1$

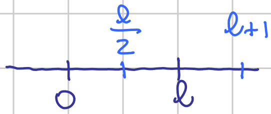
$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Faccio rapporto → radice con $a_n = n^3+7n^2+5$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Chi comanda si raccoglie!

$$\sqrt[n]{n^3+7n^2+5} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{n^3}}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ 1^0=1}}{\boxed{\sqrt[n]{1+\frac{7}{n}+\frac{5}{n^3}}}}$$

Fatto generale: se $b_n \to \ell \in (0,+\infty)$, allora $\sqrt[n]{b_n} \to 1$

Dim.: Poichè $b_n \to \ell$, allora



$$\frac{\ell}{2} \le b_n \le \ell+1$$ definitiv. e quindi

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{\frac{\ell}{2}}}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{b_n}}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\sqrt[n]{\ell+1}}}$$ definitiv.

Fatto generale $\boxed{\sqrt[n]{\text{polinomio}} \to 1}$

Esempio 7 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$

Rapporto → radice con $a_n = n!$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$, quindi $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$

Esempio 8 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ o analogamente $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Ora $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, quindi applico rapporto → radice con

$a_n = \frac{n^n}{n!}$. Calcolo quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e$ (vedi esempio 3)

quindi $\sqrt[n]{a_n} \to e$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e}$$

Esempio 9

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{9^n-7^n+n^{30}+\sin n!}=9$$

Chi comanda si raccoglie !!!

$$\sqrt[n]{\ldots}=\underset{\substack{\downarrow\\ 9}}{\boxed{\sqrt[n]{9^n}}}\left(\boxed{1-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{n^{30}}{9^n}}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{\sin n!}{9^n}}}\right)^{\frac{1}{n}}\to 9$$

$\sqrt[n]{b_n}$ con $b_n\to 1$, quindi $\to 1$

Esempio 10

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\binom{4n}{n}}=\frac{256}{27}$$

$\sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(3n)!\,n!}}$ Applico rapporto → radice con $a_n=\dfrac{(4n)!}{(3n)!\,n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(4n+4)!}{(3n+3)!\,(n+1)!}\;\frac{(3n)!\;n!}{(4n)!}$$

$$(4n+4)!=(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!$$

$$(3n+3)!=(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}}}{\longrightarrow}\frac{4^4}{3^3}=\frac{256}{27}$$

Quindi $\sqrt[n]{a_n}\to\dfrac{256}{27}$ (e ovviamente $a_n\to+\infty$ per il criterio della radice o del rapporto: $\dfrac{256}{27}>1$).

Esempio 11 $\lim_{n\to+\infty} 3^n + n^3 - n! = -\infty$

Chi comanda si raccoglie!

$$\underbrace{\boxed{n!}}_{+\infty}\left(\underbrace{\boxed{\frac{3^n}{n!}}}_{0} + \underbrace{\boxed{\frac{n^3}{n!}}}_{0} - 1\right) \to (+\infty)\cdot(-1) = -\infty$$

fattoriale vs potenza o esponenziale

— o — o —

Teo. alg. prodotto Se $a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b_\infty \in \mathbb{R}$, allora $a_n \cdot b_n \to a_\infty \cdot b_\infty$

[Brutta: $|a_n \cdot b_n - a_\infty \cdot b_\infty| = |a_n b_n - a_n b_\infty + a_n b_\infty - a_\infty b_\infty|$

$= |a_n(b_n - b_\infty) + b_\infty(a_n - a_\infty)|$

$\le \underbrace{|a_n|}\cdot|b_n - b_\infty| + \underbrace{|b_\infty|\cdot|a_n - a_\infty|}$

$a_n \le M$ perchè a_n è limitata e definitivamente $|b_n - b_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M}$

Definitivamente $|a_n - a_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|b_\infty|}$]

Bella: Scelgo il definitiv. in modo che $|b_n - b_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{M}$

$|a_n - a_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|b_\infty|}$

Domanda: ma non ci sono problemi se $b_\infty = 0$?
Come si aggiusta?

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 16

Titolo nota 14/10/2014

LIMITI DI FUNZIONI $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$

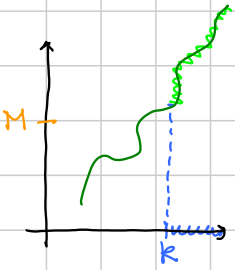
— o — o —

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ come prerequisito ho che D non sia limitato super.

Ci sono le solite 4 possibilità.

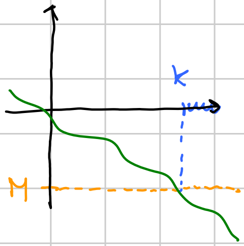
Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D, x \geq k$



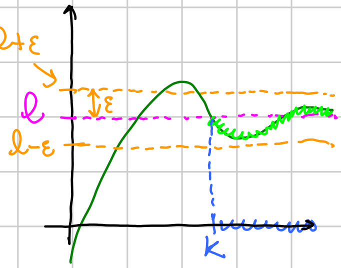
Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D, x \geq k$



Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in D, x \geq k$
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

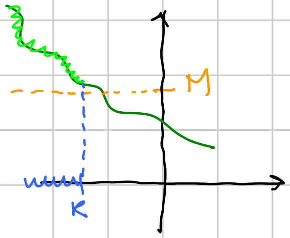


Moralmente: più ε diventa piccolo, più k potrebbe diventare grande

Def. Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste se ... nessuna delle prec. è vera.

— o — o —

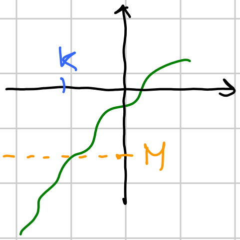
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ha come prerequisito che D non è limitato infer.



Def. Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se

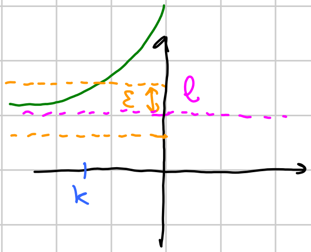
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M$ $\forall x \in D, x \leq k$

Tendenzialmente: + M è grande, + k sarà molto negativo.



Def. Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se

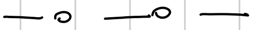
$\forall M \in \mathbb{R}$
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in D, x \leq k$



Def. si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

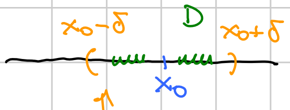
$\forall \varepsilon > 0$
$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$ $\forall x \in D, x \leq k$

Def. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ non esiste ... NDP.



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ ha come prerequisito che

$$\boxed{\forall \delta > 0 \quad ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset}$$



ogni intervallo centrato in x_0 contiene almeno un p.to $\neq x_0$

In questi casi si dice che x_0 è un p.to di accumulazione per D

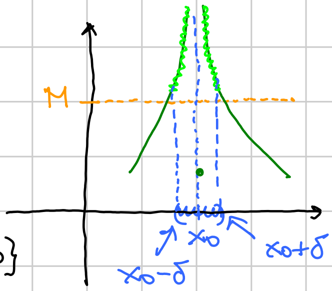
Oss. $x_0 \in D$ può non essere di accumulaz. (basta che sia isolato)
$x_0 \notin D$ può essere di accumul. (ad es. 0 è p.to di acc. per $(0,1)$)

Def. Si dice che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$\forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$



Def. Si dice che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

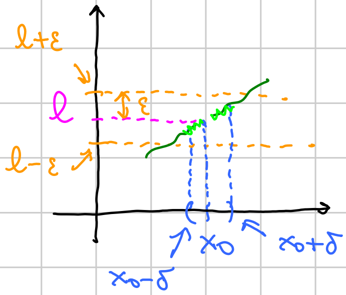
$\exists\, \delta > 0$ t.c $f(x) \leq M$ $\quad \forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$

Def. Si dice che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $l-\varepsilon \leq f(x) \leq l+\varepsilon$

$\forall x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta]\cap D)\setminus\{x_0\}$



Tendenzialmente: + prendo ε piccolo, + potrebbe servire δ piccolo.

Def. ... non esiste ... nessuno dei precedenti

— o — o —

Limiti $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ Prerequisito: $\forall \delta > 0$ $(x_0, x_0+\delta]\cap D \neq \emptyset$

↑esclude autom. x_0

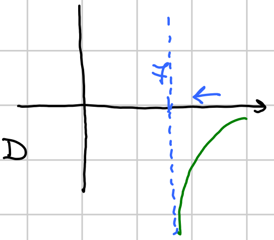
le definizioni sono analoghe solo concludendo con

"$\forall x \in (x_0, x_0+\delta]\cap D$"

— o — o —

Esempi $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta]\cap D$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 7^+$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c.

$7 < f(x) \leq 7+\varepsilon$ $\quad \forall x \in D,\ x \leq k.$

— o — o —

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$. Si dice che f è continua in x_0 se vale uno dei seguenti due fatti:

→ x_0 è isolato in D (cioè $\exists\, \delta > 0$ t.c. $[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D = \{x_0\}$)

(nei p.ti isolati la continuità è GRATIS)

→ x_0 è di accumulazione per D e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

(in particolare il limite è reale)

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in D se è continua in tutti i p.ti di D.

Volendo smontare la definizione, se

$$\boxed{\forall x_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon \quad \underbrace{\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap D}}$$

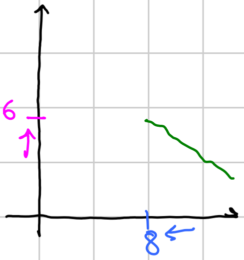
δ dipende da x_0 e da ε

se x_0 è un p.to isolato questo insieme è $\{x_0\}$, quindi $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ è banale

— o — o —

Esempi $\lim_{x \to 8^+} f(x) = 6^-$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $6 - \varepsilon \le f(x) < 6$
$\forall x \in (8, 8+\delta] \cap D$



$\lim_{x \to 6^-} f(x) = 8^+$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $8 < f(x) \le 8 + \varepsilon \quad \forall x \in [6-\varepsilon, 6) \cap D$

— o — o —

Domanda: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0\ \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$?

ANALISI 1 — LEZIONE 017

Titolo nota 14/10/2014

Strumenti per il calcolo di limiti di funzione

- → teoremi algebrici (esattamente come per le successioni)
- → teoremi di confronto a 2 e a 3 (come per le successioni)
- → continuità (se f è cont. in x_0, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)
- → limiti notevoli
- → cambi di variabile.

Come stabilisco se una funzione è continua ?

METATEOREMA (molto misterioso) Qualunque funzione ottenuta a partire da quelle elementari mediante oper. algebriche e/o composizioni è continua dove è definita (quindi dove non ci sono problemi di denom $=0$, $\log$ (roba ≤ 0), ...)

Esempio
$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\log_7 \left(7 + \arctan\left(2^x + 4\sin x\right)\right)}_{\text{funzione continua su tutto } \mathbb{R}} = \log_7 \left(7 + \frac{\pi}{4}\right)$$

(l'unica verifica da fare è che l'argomento del log sia >0)

$\boxed{\text{Ingrediente 1}}$ Tutte le funzioni elementari sono continue dove sono definite.

(Richiede dim. separate per le varie funzioni)

$\boxed{\text{Ingrediente 2}}$ Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue è ancora una funzione continua dove definite (denom. $\neq 0$)

(segue banalmente dai teoremi algebrici)

$\boxed{\text{Ingrediente 3}}$ La composizione di funzioni continue è ancora continua (dove tutto è ben definito)
(Richiede i cambi di variabile)

— o — o —

Esempio di cambio di variabile

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) \quad \text{Supponiamo che} \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$$

$$\text{e che } \lim_{y\to y_0} f(y) = z_0.$$

Allora verrebbe da dire che $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = z_0$

Detto brutalmente: $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ Pongo $\boxed{y = g(x)}$ cambio di variabile
Quando $x \to x_0$, ho $\boxed{y \to y_0}$

e allora il limite iniziale diventa

$$\lim_{\boxed{y\to y_0}} f(y) = z_0$$

Tutto ciò di solito si può fare.

Caso semplice (senza problemi burocratici)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$
Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$
Allora $f\circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Devo dimostrare che $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

So per ipotesi che f è continua in $g(x_0)$

Idea: se x e vicino a x_0, allora $g(x)$ è vicino a $g(x_0)$ per la continuità di g, ma allora $f(g(x))$ è vicino a $f(g(x_0))$ per la continuità di f in $g(x_0)$

Poichè f è continua in $g(x_0)$ so che $\exists\ \delta_1 > 0$ t.c.

$$|f(y) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \qquad \forall y \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$$

Ora uso la continuità di g con δ_1 al posto di ε:

$$\exists\ \delta_2 > 0 \text{ t.c. } |g(x) - g(x_0)| \leq \delta_1 \qquad \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2].$$

Il δ_2 è il δ che volevo, perchè

- Se $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, allora $g(x) \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$, ma allora $f(g(x)) \in [f(g(x_0)) - \varepsilon, f(g(x_0)) + \varepsilon]$.

— o — o —

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad [1^\infty]$

FIGLI: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

NIPOTI: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad (\text{se } a > 0)$

LIMITE DIMENTICATO: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log x = 0 \quad [0 \cdot (-\infty)]$

Gli altri sono tutti $\frac{0}{0}$

Esempio 1 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}$

Pongo $y = x^2$
Quando $x\to0$ ho $y\to0$

$= \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1$

Esempio 2 $\lim_{x\to0}\frac{e^{\arctan x}-1}{x} = 1$

$$\boxed{\frac{e^{\arctan x}-1}{\arctan x}}\ \boxed{\frac{\arctan x}{x}} \to 1\cdot1 = 1$$

↓ (tabellina)
1

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x\to0$ ho che $y\to0$, quindi diventa

$$\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y} = 1$$

Esempio 3 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$ da subito per il metateo.

Pongo $y = \cos x$. Quando $x\to0$ ho $y\to1$, quindi diventa

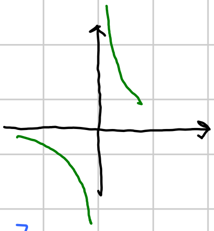
$$\lim_{y\to1}\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$ (funzione continua)

Esempio 4 $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(7x)}{x^2} = 49$

$$\frac{\sin^2(7x)}{x^2} = \left[\frac{\sin(7x)}{x}\right]^2 = \left[\boxed{\frac{\sin(7x)}{7x}}\right]^2\cdot 49 = 49$$

↓
$y=7x$
↓
1

Esempio 5 $\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x} = $ N.E.



$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x}\ \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$ $\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$

Esempio 6 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$-1 \le \sin x \le 1 \rightsquigarrow \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{-\frac{1}{x}}} \le \underset{\substack{\Downarrow\\0}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{1}{x}}}$$

ok per $x \to +\infty$
perchè sto dividendo per x

a $-\infty$ (cioè per x negativo) devo capovolgere

$$\overset{\text{pos}}{\boxed{-\frac{1}{x}}} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \boxed{\frac{1}{x}} \text{ neg.}$$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

Per successioni: $x_n \to 0 \iff |x_n| \to 0$

(con la def. è ovvio)

Per funzioni: $\lim_{x\to q.c.} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to \text{stessa cosa}} |f(x)| = 0$

Semplifica molti esempi...

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 018

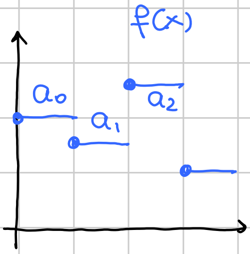
Titolo nota 16/10/2014

LIMITI NOTEVOLI

Criterio successioni → funzioni (come dedurre limiti di funzioni da limiti di successioni)

Idea: so che $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n}}_{\text{lim. succ.}} = +\infty$. Vorrei che $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x}}_{\text{con. lim. funz.}} = +\infty$

Lemma Sia $f(x)$ una funzione costante su tutti gli intervalli del tipo $[n, n+1)$.
Poniamo a_n = valore di $f(x)$ in $[n, n+1)$.
Allora



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

↑ qualunque cosa faccia a_n (①, ②, ③, ④) la stessa cosa fa $f(x)$.

Dim. Ovvia (quello che a_n soddisfa $\forall n \geq n_0$, lo stesso lo verifica $f(x)$ $\forall x \geq n_0$)

Lemma + confronto sistemano molti casi

Esempio 1 $\boxed{\frac{2^x}{x}} \geq \boxed{\frac{2^n}{n+1}}$ $\forall x \in [n, n+1)$

↑ den. + piccolo num. + grande

← pensata come funzione a gradini → $+\infty$

$+\infty$ per confronto

Esempio 2 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ voglio dedurlo da $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\underset{e}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}}} \le \underset{e}{\underset{\downarrow}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}} \le \underset{e}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}}} \qquad \forall x\in[n,n+1)$$

Vediamo per bene i laterali :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underset{e}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}}\cdot\underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}} \to e$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\boxed{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \to e}{\boxed{1+\frac{1}{n+1}} \to 1}$$

(se $a_n \to \ell$, allora anche $a_{n+1} \to \ell$)

— o — o —

Questo sistema
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

— o — o —

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Dim. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi basta dim. che $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Facciamo finta di sapere che $\sin x \le x \le \tan x \quad \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$

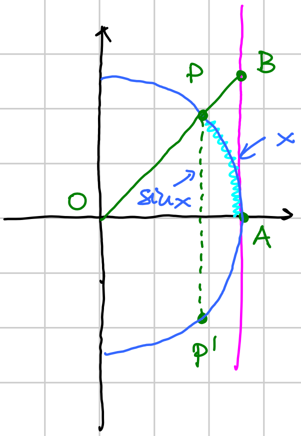
Quando $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ho $\sin x > 0$, quindi posso dividere per $\sin x$

Ottengo

$$\underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{1}}} \le \underset{1}{\underset{\downarrow}{\frac{x}{\sin x}}} \le \underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}} \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Poiché $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1$ per teo. alg. anche $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Dimostro la disug. usando la figura



$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{segm.}}}{\overline{PP'}} = 2\sin x \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{arco}}}{\overset{\frown}{PP'}} = 2x$$

segmento ≤ arco ⇝ $\cancel{2}\sin x \le \cancel{2}x$

Area triangolo OAB = $\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$

Area settore OAP : Area cerchio = x : 2π

Area settore OAP = $\frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2}$

Se Area sett. ≤ Area triang, allora $\frac{x}{\cancel{2}} \le \frac{1}{\cancel{2}} \tan x$

— o — o —

Limiti che discendono da $\frac{\sin x}{x}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}\;\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Oss. $$\frac{1-\cos x}{x} = \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{x}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1$$

Pongo $y = \arctan x$

Quando $x \to 0$ ho $y \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ con la sostituzione $y = \arcsin x$

— o — o —

Limiti che discendono da $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ Pongo $y=-x$. Quando $x\to-\infty$ ho $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \leftarrow z=y-1\\ e}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}} \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}} = e$$

Quindi abbiamo dim. che

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

Osserviamo che $\log x$ è una funzione continua.
Quindi facendo il log a RHS e LHS sopra otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 = \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Pongo $y=\frac{1}{x}$. Nel primo caso ho $y\to0^-$. Nel secondo caso $y\to0^+$

Quindi

$$\lim_{y\to0^-}\frac{1}{y}\log(1+y) = 1 = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y}\log(1+y)$$

Ho così dim.

$$\boxed{\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1}$$

Ora pongo $z = \log(1+y)$. Quando $y \to 0$ ho $z \to \log 1 = 0$

Ricavo y: $e^z = 1+y$, $y = e^z - 1$. Quindi il limite sopra diventa

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

da cui

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

LIMITE DIMENTICATO $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0^-}$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Diventa $\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log y}{y}$

Pongo $\log y = z$ e diventa $\lim_{z \to +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$ (anzi 0^-)

Oss. Anche $\lim_{x \to 0^+} x^a |\log x|^b = 0$ $\forall a > 0$ $\forall b > 0$

Esercizio: fare cambi di variabili e vedere che viene.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 019

Titolo nota 16/10/2014

Criterio funzioni → successioni (come dedurre limiti di successioni da limiti di funzioni)

Esempio $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \to +\infty$ ho che $x \to 0$, quindi div.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Teorema Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia a_n una succ. Supponiamo che

(1) • $a_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(2) • $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

(3) • $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ definitivamente

Allora $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$ (stesso ℓ di sopra)

$\boxed{\text{Dim. in un caso}}$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ $|f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon$ definitivamente.
Per ipotesi (2) dato $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Per ipotesi (1) e (3) abbiamo che $a_n \in \overbrace{(D \setminus \{x_0\})}^{(3)} \cap \overbrace{[x_0-\delta, x_0+\delta]}^{(1)}$ definitivamente.

Quindi definitivamente $|f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon$.

— o — o —

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a}$$

Base ed esponente strano ? e^{ALLA} !!!

$$\boxed{\text{Scrivo } f(x)^{g(x)} \text{ come } e^{g(x)\log f(x)}}$$

In questo caso $a^x = e^{x\log a}$, quindi

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\log a}-1}{x}=\underbrace{\boxed{\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}}}_{\downarrow\, y=x\log a \atop 1}\cdot\log a \to \log a$$

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{7}-1)$ $[+\infty\cdot 0]$

$$n(\sqrt[n]{7}-1)=\frac{7^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$ Quindi per funzioni → succ.

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{7}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{7^x-1}{x}=\log 7$$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{n}-1)$

$$n(\sqrt[n]{n}-1)=\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}}}}_{\downarrow \atop 1}\cdot\underbrace{\boxed{\log n}}_{\downarrow \atop +\infty}$$

Ho posto $x=\frac{\log n}{n}$ e osservo che quando $n\to+\infty$ ho che $x\to 0$ perché il logaritmo perde dalle potenze. Detto meglio

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}\underset{\uparrow\, y=\log x}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=0$$

Esempio 3 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos 3x}{\arcsin(7x)} = \frac{0}{0} = \frac{2}{7}$

$$\frac{e^{2x}-\cos(3x)}{\arcsin(7x)} = \frac{e^{2x}-1+1-\cos(3x)}{\arcsin(7x)}$$

Raccolgo x sopra e sotto

$$\frac{\overset{\overset{2}{\uparrow}}{\boxed{\frac{e^{2x}-1}{x}}} + \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{\frac{1-\cos(3x)}{x}}}}{\underset{\underset{7}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\arcsin(7x)}{x}}}} \to \frac{2}{7} \qquad \frac{1-\cos(3x)}{x} = \underset{\underset{\frac{1}{2}}{\downarrow}}{\boxed{\frac{1-\cos(3x)}{9x^2}}} \cdot \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{9x}}$$

Esempio 4 $\lim_{x\to 0} \left(1+\sin(2x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{2}$

$$\left(1+\sin(2x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+\sin(2x))}$$

Faccio solo il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(2x))}{x} = \lim_{x\to 0} \underset{\underset{1}{\downarrow}\ \uparrow\, y=\sin(2x)}{\boxed{\frac{\log(1+\sin(2x))}{\sin(2x)}}} \underset{\underset{2}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\sin(2x)}{x}}} = 2$$

Esempio 5 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\tan^2 x}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{\log(1+\overbrace{\cos x-1}^{y})}{\tan^2 x} = \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x-1}}} \underset{\underset{-\frac{1}{2}}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\cos x-1}{x^2}}} \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{x^2}{\tan^2 x}}} \to -\frac{1}{2}$$

$y = \cos x - 1$

$y \to 0$

Teo. algebrico per l'esponenziale $\lim\limits_{x\to q.c.} f(x)^{g(x)}$

Se $f(x)\to \ell_1$ e $g(x)\to \ell_2$, allora $f(x)^{g(x)} \to \ell_1^{\ell_2}$ tranne nei casi

$$\boxed{1^{\pm\infty}} \qquad \boxed{0^0} \qquad \boxed{+\infty^0}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Passando all'esponenziale mi riduco a fare il lim. di $g(x)\cdot\log f(x)$

quindi al limite del prodotto.

Le 3 forme indeterminate si riducono a $0\cdot\pm\infty$

—o—o—

Esempio 6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+3^x)}{x}$

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+3^x)}{3^x}}}_{1}\ \underbrace{\boxed{\frac{3^x}{x}}}_{+\infty} \to +\infty \qquad \text{NO!!!}$$

Se pongo $y=3^x$ ho che $y\to+\infty$, quindi non è il limite notevole

Brutalmente: $\log(1+3^x) \underset{\text{per } x \text{ enorme}}{\sim} \log(3^x) = x\log 3$

Rigorosamente: raccolgo 3^x dentro la parentesi

$$\frac{\log\left(3^x\,\frac{1+3^x}{3^x}\right)}{x} = \frac{x\log 3+\log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x} = \underbrace{\boxed{\log 3}}_{\log 3} + \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x}}}_{\frac{0}{+\infty}=0}$$

Quindi il limite è $\log 3$.

Esempio 7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \dfrac{2}{3}$ È come fosse $\dfrac{\log x^2}{\log x^3}$

Esempio 8 $\lim_{x \to 0} \frac{\log(x^3+1)}{\log(x^2+1)} = 0$

$$\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} = \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow \atop 0} \to 0$$

Esempio 9 $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Passando all'esponenziale mi riduco a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \log(\cos x)$

e questo tende a $-\frac{1}{2}$ come in un esempio precedente

ANALISI 1 – LEZIONE 020

Titolo nota 20/10/2014

SOTTOSUCCESSIONI Come dimostro che un limite non esiste?

Esercizio Negare $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon > 0 \ \underbrace{\forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0}_{\text{frequentemente}} \quad |a_n - \ell| > \varepsilon$$

Fare così è una pena.

— o — o —

Sottosuccessioni $\boxed{a_0}$ $\boxed{a_1}$ a_2 a_3 $\boxed{a_4}$ $\boxed{a_5}$ a_6 $\boxed{a_7}$ ...

Brutalmente, pescare un po' di termini da una succ. a_n.

Rigorosamente Sia a_n una succ. di numeri reali
Sia n_k una succ. $\boxed{\text{strett. cresc.}}$ di numeri interi ≥ 0.
Allora a_{n_k} si dice sottosucc. di a_n.

La successione n_k rappresenta gli indici che vado a pescare in a_n.

Esempi ① $a_n = \frac{1}{n^2}$

$n_k = 2k$ $\quad a_{2k} = \frac{1}{4k^2}$ sottosucc. termini di indice pari

$n_k = 2k+1$ $\quad a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2}$ " " " " dispari

② $a_n = 2^n$ $\quad n_k = 3k$ $\quad a_{n_k} = 2^{3k} = 8^k$ (indici multipli di 3)

$n_k = k!$ $\quad a_{n_k} = 2^{k!}$

Variante più debole Si prendono gli indici $n_k \to +\infty$ ma non necess. strett. crescenti.

Oss. Prendendo n_k strett. cresc., si ha che

$$\boxed{n_k \geq k \qquad \forall k \in \mathbb{N}}$$ si dim. per induzione

Teorema (limite di sottosucc.) Sia a_n una successione. Supponiamo che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (tipo ①, ②, ③). Allora ogni sottosuccessione $a_{n_k} \to \ell$ (stesso ℓ).

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Sarebbero 3 casi. Facciamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$.

Ipotesi: $a_n \to \ell$ Tesi: $a_{n_k} \to \ell$, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

Prendo ε. Per ipotesi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Ma allora basta prendere $k_0 = n_0$. Per ogni $k \geq k_0$ avremo che

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{oss. prec.}}}{n_k \geq} k \geq n_0$, quindi dall'ip. $|a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$. □

Achtung! Può accadere che a_n non abbia limite, ma alcune sue sottosucc. sì.

Esempio classico $a_n = (-1)^n$ non ha lim., ma

$a_{2k} \to 1$

$a_{2k+1} \to -1$

a_{k^2} non ha limite

$a_{k!} \to 1$

$a_n = (-n)^n$ non ha limite

$a_{2k} \to +\infty$ a_{7k+4} non ha limite.

$a_{2k+1} \to -\infty$

$\boxed{\text{Fatto fondamentale}}$ Se a_n ammette due sottosucc. con due limiti $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ DIVERSI, allora a_n non ha limite.

Dim. Se per assurdo $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosucc. dovrebbero tendere allo stesso $l \in \overline{\mathbb{R}}$. □

Esempio 1 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1$
$a_4 = 0,\ a_5 = 1,\ \dots$

$$a_{2k} = \sin(k\pi) = 0 \to 0$$

$$a_{4k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k+1)\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Esempio 2 $a_n = n^7 + (-1)^n n^{11}$ non ha limite

$$a_{2k} \to +\infty \qquad a_{2k+1} = (2k+1)^7 - (2k+1)^{11} \to -\infty$$

Esempio 3 $a_n = n^{11} + (-1)^n n^7$ tende a $+\infty$

Raccolgo n^{11} e ho $a_n = \underbrace{\boxed{n^{11}}}_{\downarrow\, +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^4}}_{\downarrow\, 0}\right) \to +\infty$ $\quad -\frac{1}{n^4} \leq \frac{(-1)^n}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$

(carabinieri)

— o — o —

Come dimostro che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ non esiste}$$

↑ può essere $+\infty, -\infty, l, l^+, l^-$

Uso il criterio funzioni → successioni "a rovescio", cioè cerco due successioni $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ tali che

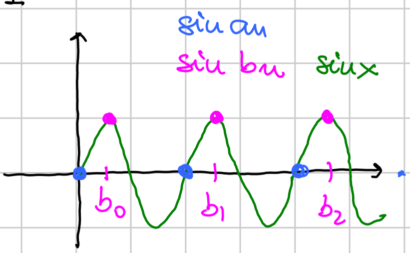
$$f(a_n) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad f(b_n) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad l_1 \neq l_2$$

Esempio 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ non esiste

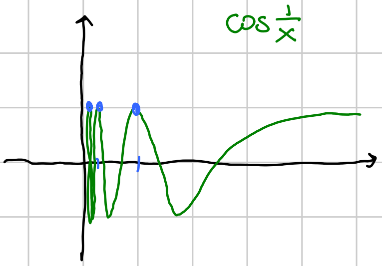
Formalmente, devo trovare $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ t.c. $\sin(a_n) \to \ell_1$, $\sin(b_n) \to \ell_2$ e $\ell_1 \neq \ell_2$.

$a_n = 2\pi n \to +\infty$ e $\sin a_n = 0 \to 0$

$b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$ e $\sin b_n = 1 \to 1$



Esempio 2 $\lim\limits_{x\to0^+} \cos\frac{1}{x}$ non esiste



Mi servono due succ. $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ t.c. $\cos a_n$ e $\cos b_n$ abbiano comp. diversi.

$a_n = \frac{1}{2n\pi}$. Allora $\cos\frac{1}{a_n} = \cos(2n\pi) = 1 \to 1$ e $a_n \to 0^+$

$b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Allora $\cos b_n = \cos(2\pi n + \pi) = -1 \to 1$ e $b_n \to 0^+$

Esempio 3 $\lim\limits_{x\to+\infty} (3+\cos x^2)^x = +\infty$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty \text{ per confronto}}}{\boxed{(3+\cos(x^2))^x}} \geq \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{2^x}}$$

Esempio 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(2+\sin x^2)^x}_{f(x)}$ non esiste

Devo trovare $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ t.c. $f(a_n)$ e $f(b_n)$ si comportino diversamente.

Scelgo a_n in modo che $\sin a_n^2 = 0$, ad esempio $a_n = \sqrt{2\pi n}$.
Allora $a_n \to +\infty$ e

$$f(a_n) = (2+\sin a_n^2)^{a_n} = 2^{\sqrt{2\pi n}} \to +\infty.$$

Scelgo b_n in modo che $\sin b_n^2 = -1$, ad es. $b_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$
Allora $b_n \to +\infty$ e

$$f(b_n) = (2+\sin b_n^2)^{b_n} = 1 \to 1.$$

Esempio 5 $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \boxed{\frac{\sin(3+\log x)}{\log(3+\sin x)}}$ $f(x)$

Prendo a_n in modo tale che $\sin(\dots) = 1$, ad esempio

$$3+\log a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \text{quindi} \quad \boxed{a_n = e^{\frac{\pi}{2}-3+2\pi n}} \to +\infty$$

Prendo b_n in modo che $\sin(\dots) = -1$, ad esempio

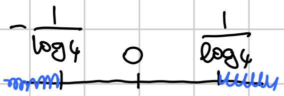
$$\boxed{b_n = e^{\frac{3\pi}{2}-3+2\pi n}} \to +\infty$$

Ora osservo che

$$f(a_n) = \frac{1}{\log(3+\sin a_n)} \geq \frac{1}{\log 4}$$

$$f(b_n) = \frac{-1}{\log(3+\sin b_n)} \leq \frac{-1}{\log 4}$$

Questo impedisce al limite di esistere, come si verifica usando i risultati tipo "permanenza del segno".



— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 021

Titolo nota 20/10/2014

Esempio 1 $\underbrace{\sqrt{n^2+3n+1}}_{\sqrt{A}} - \underbrace{n}_{\sqrt{B}}$ $[+\infty-\infty]$

$$\boxed{\text{Razionalizzazione : } (\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}}$$

Diventa : $\frac{\cancel{n^2}+3n+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n+1}+n} \to \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{\cancel{n}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$

Esempio 2 $\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+91}}$

Razionalizzo sopra e sotto

$$\frac{(\cancel{n}+3)-(\cancel{n}-7)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}}\,\frac{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n+91}}{(\cancel{2n}+5)-(\cancel{2n}+91)} = \frac{10}{-86}\underset{\downarrow\ \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\boxed{\frac{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n+91}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}}}}$$

Esempio 3 $\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+5}$

Come razionalizzo $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$. Si parte da $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ponendo

$a=\sqrt[3]{A}$ e $b=\sqrt[3]{B}$ si ottiene

$$A-B=\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)$$

$$\boxed{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}}$$

$$\sqrt[3]{\dots}-\sqrt[3]{\dots}=\frac{\cancel{n^3}+2n^2+1-\cancel{n^3}-5}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(\ )(\ )}+\sqrt[3]{(n^3+5)^2}}\to\frac{2}{3}$$

Esercizio Capire come si razionalizza $\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}$

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{\arcsin x}$ $\qquad \frac{[1-1]}{[0]}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{\sqrt{1+x}-1}{\arcsin x}}}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{1-\cos x}{\arcsin x}}}\qquad \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{x}{\arcsin x}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{x}}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\arcsin x}\quad\frac{\sqrt{\cdots}+1}{\sqrt{\cdots}+1}=\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{\arcsin x}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}}$$

Esempio 5 $\displaystyle\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt[3]{3n+1}}{\sqrt{n+4}}\to\sqrt{2}$ $\qquad \sim\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}\to\sqrt{2}$

Non serve a nulla razionalizzare, comandano i termini in $\sqrt{n}$.

Esempio 6 $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$

Raccolgo chi comanda $\quad n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$

$=\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}}$ e questo è legato al

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x}}}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}}}=0$$

(si fanno razionalizzando)

— o — o —

Esempio 7 $$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$a_1 = 1 + \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$, $a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$, ...

$a_n \to ?$ $a_n \to 0$ perchè tutti i termini tendono a 0.

I termini vanno a 0, ma il numero dei termini va a $+\infty$, quindi in un certo senso è $0 \cdot \infty$ e non si può usare il teo. algebrico (vale solo se il numero di addendi è FISSO).

Sol. decente: $$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{0}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{a_n}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\underset{\text{termine + grande}}{\boxed{\frac{1}{n^2}}} \cdot \underset{\text{numero dei termini}}{\boxed{(n+1)}}}}$$

Quindi $a_n \to 0$ per i carabinieri.

Esempio 8 $$a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{\sqrt{2n}}}$$

Invece $a_n \to +\infty$ perchè $$\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{a_n}} \ge \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{numero dei termini}}}{\boxed{(n+1)}} \overset{\text{termine + piccolo}}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2n}}}}}}$$

Esempio 9 $\lim_{x \to 0^+} x^x$ $[0^0]$

$x^x = e^{x \log x} \longrightarrow e^0 = 1$ $x \log x \to 0$ per $x \to 0$ (limite dimenticato)

Esempio 10 $\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\log(\sin x^2)}$ $\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$

$$\frac{\log x}{\log \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x^2} \overset{\text{precorso}}{=} \frac{\log x}{2\log x + \log \frac{\sin x^2}{x^2}} \overset{\text{raccolgo log}}{=} \frac{1}{2+\underbrace{\boxed{\frac{\log \frac{\sin x^2}{x^2}}{\log x}}}_{\frac{0}{-\infty}=0}} \to \frac{1}{2}$$

Esempio 11 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

SLOGAN :
- i limiti sono comodi per $x\to 0$ e per $x\to +\infty$
- se non sono a 0 oppure $+\infty$, ce li facciamo arrivare con opportuni cambi di variabile

In questo caso pongo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Quando $x\to\frac{\pi}{2}$ ho $y\to 0$.

Il limite diventa $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{\pi} - 2y - \cancel{\pi}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ resta ovviamente indeterminato

Ora $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{precorso}}{=} -\sin y$ quindi diventa $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{-2y} = \frac{1}{2}$

Esempio 12 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+\sin x} + x$

[Non pensare nemmeno ! $\sim x + x \longrightarrow -\infty$] [$\sqrt{x^2} = -x$ per $x<0$]

Cambio variabile $y = x$ e diventa

$$\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y^2-y-\sin y} - y = \lim_{y\to+\infty}\frac{\cancel{y^2}-y-\sin y-\cancel{y^2}}{\sqrt{\dots}+y} = -\frac{1}{2}.$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 022

Titolo nota 21/10/2014

SIMBOLI DI LANDAU → o piccolo (utile per i limiti)
(linguaggio degli infinitesimi) → O grande
→ ~ (equivalenza asintotica)

$\boxed{\text{o piccolo}}$ Siano date $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un p.to in cui ha senso fare i limiti ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$).
Si dice che $\boxed{f \text{ è o piccolo di } g \text{ per } x \to x_0}$ e si scrive

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0}$$

se esiste una funzione $\omega: D \to \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \qquad \forall x \in D \\ \lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0 \end{array}}$$

Detto altrimenti, $f(x) = g(x) \cdot$ q.c. che tende a 0 per $x \to x_0$

Def. quasi equivalente $\boxed{\text{Se}}$ se $g(x) \neq 0$ per $x \in D \setminus \{x_0\}$ posso dividere per $g(x)$, allora la def. diventa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Brutalmente: f è o piccolo di g se "f batte g" quando faccio il limite per $x \to x_0$

$\boxed{\text{Equivalenza asintotica}}$ Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se esiste $\omega: D \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \qquad \forall x \in D$$
$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$$

Esempi Da qui in poi $x_0 = 0$

① $x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

Def. uff. : $\underset{\underset{f(x)}{\uparrow}}{x^3} = \underset{\underset{g(x)}{\uparrow}}{x^2} \cdot \underset{\underset{\omega(x)}{\uparrow}}{x}$ $\quad \lim_{x\to0} \omega(x) = 0$

Def. quasi equiv.: per $x \neq 0$ posso dividere per x^2 e mi trovo a verificare

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} x = 0$$

Più in generale $x^a = o(x^b)$ per $x \to 0$ se e solo se $a > b$

② $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \to 0$ anche se nessuna delle due tende a 0 per $x \to 0$.

③ $\arctan^2 x = o(x)$ per $x \to 0$

Def. quasi equiv.: $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \overset{\omega(x)}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{\arctan^2 x}{x}}}} =$

$$= \lim_{x\to0} \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\arctan^2 x}{x^2}}} \cdot \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{x}} = 0$$

④ $\tan x \cdot \arcsin x^2 = o(x^2)$ per $x \to 0$

Def. quasi equiv.: $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{\overset{\nearrow 0}{\boxed{\tan x}} \; \boxed{\arcsin x^2}}{x^2} = 0$ $\quad \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{\arcsin x^2}{x^2}}$ $y = x^2$

Oss. Negli esempi ③ e ④ potrei scrivere

$\arctan^2 x \sim x^2$ $\qquad \tan x \cdot \arcsin x^2 \sim x^3$

Proprietà di o piccolo Supponiamo che

$f_1(x) = o(g(x))$ $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$f_1 \pm f_2$ Dico che $f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x))$

Dim.: $f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ $f_2(x) = g(x)\, \omega_2(x)$

Allora $f_1(x) \pm f_2(x) = g(x) \underbrace{[\omega_1(x) \pm \omega_2(x)]}_{\omega_3(x) \to 0 \pm 0 = 0}$

af_1 con $a \in \mathbb{R}$ Dico che $af_1(x) = o(g(x))$

Dim: $a f_1(x) = a\, g(x) \cdot \omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{a\, \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \to a \cdot 0 = 0}$

$f_1 \cdot f_2$ Dico che $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$

Dim. $f_1(x) \cdot f_2(x) = g^2(x) \cdot \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x) \to 0 \cdot 0 = 0}$

$\frac{f_1}{f_2}$ Nulla di furbo !!! $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot \omega_2(x)}$ BOH !!!

Brutalmente: f_1 batte g, f_2 batte g, ma chi vince tra f_1 ed f_2 non si sa.

Transitività Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e
$g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$

allora

$$f(x) = o(h(x)) \text{ per } x \to x_0.$$

Dim. Per ipotesi abbiamo $f(x) = g(x)\cdot\omega_1(x)$ con $\omega_1(x) \to 0$

$g(x) = h(x)\cdot\omega_2(x)$ con $\omega_2(x) \to 0$

Ma allora

$$f(x) = h(x)\cdot\underbrace{\omega_1(x)\cdot\omega_2(x)}_{\omega_3(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0.}$$ □

Con un po' di abuso di notazione possiamo riassumere le proprietà come

$$o(g) \pm o(g) = o(g) \qquad a\, o(g) = o(g)$$

$$o(g)\cdot o(g) = o(g^2) \qquad \frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH}$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

Esempio 1 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$

Cosa posso dire di

$$x\cdot f^2(x) \ ?$$

Posso dire che è $o(x^5)$.

Dim. Per ipotesi $f(x) = x^2\cdot\omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$

Ma allora

$$x\cdot f^2(x) = x\cdot x^4\cdot\omega^2(x) = x^5\cdot\boxed{\omega^2(x)}$$

$\hookrightarrow \omega_1(x) \to 0$

Esempio 2 Supponiamo che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

Cosa posso dire di

$$f(\arctan x) \ ?$$

Cosa posso dire di

$$\arctan(f(x)) \ ?$$

Dim. L' ipotesi dice che $f(x) = x^2 \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \to 0$

Nel 1° caso

$$f(\arctan x) = \arctan^2 x \cdot \boxed{\omega(\arctan x)}$$

$\omega_1(x) \to 0$ per cambio variabili

Per ora ho dimostrato che $f(\arctan x) = o(\arctan^2 x)$

Ma avrei anche potuto scrivere

$$f(\arctan x) = x^2 \cdot \boxed{\frac{\arctan^2 x}{x^2} \cdot \omega(\arctan x)}$$

$\omega_1(x) \to 1 \cdot 0 = 0$

Quindi ora so che $f(\arctan x) = o(x^2)$

Per il 2° ho che

$$\arctan(f(x)) = \arctan(x^2 \cdot \omega(x))$$

$$= x^2 \cdot \boxed{\underbrace{\boxed{\omega(x)}}_{0} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(x^2 \cdot \omega(x))}{x^2 \cdot \omega(x)}}}_{1}}$$

per cambio di variabili

$y = x^2\omega(x) \to 0$

Quindi $\arctan(f(x)) = o(x^2)$.

Oss. Sono stato un po' impreciso nel dividere per $x^2\omega(x)$ che potrebbe annullarsi anche per $x \neq 0$.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 023

Titolo nota 21/10/2014

Esercizio

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}+\log(1+\arctan(3x))+\sqrt{1+2x}-2\cos x^2}{\arcsin(5x)+\tan(e^{2x}-1)}=\frac{4}{7}$$

Divido sopra e sotto per x

$$\frac{\overset{0\nwarrow}{\boxed{\frac{e^{\sin^2x}-1}{x}}}+\overset{\nearrow 3}{\boxed{\frac{\log(1+\arctan(3x))}{x}}}+\overset{\nearrow 1}{\boxed{\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}}+2\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{1-\cos x^2}{x}}}}{\underset{\underset{5}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\arctan(5x)}{x}}}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\tan(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}}}\underset{\underset{2}{\downarrow}}{\boxed{\frac{e^{2x}-1}{x}}}}$$

$$\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{e^{\sin^2x}-1}{\sin^2x}}}\cdot\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\sin^2x}{x^2}}}\cdot\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{x}}\to 0$$

$$\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\log(1+\arctan(3x))}{\arctan(3x)}}}\underset{\underset{3}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\arctan(3x)}{x}}}\to 3$$

$$\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\,\frac{\sqrt{\ }+1}{\sqrt{\ }+1}=\frac{\cancel{1}+2\cancel{x}\cancel{-1}}{\cancel{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1}\to\frac{2}{2}=1$$

SVILUPPINI Tutti gli o piccolo si intendono per $x \to 0$

$\sin x = x + o(x)$ $\qquad e^x = 1 + x + o(x)$

$\tan x = x + o(x)$ $\qquad \log(1+x) = x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$ $\qquad \cos x = 1 + o(x)$

$\arcsin x = x + o(x)$ $\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ (comprende anche le radici $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$) e anche gli α negativi

Quando scrivo $\sin x = x + o(x)$ $\quad \sin x - x = o(x)$

Dim. Uso def. quasi equiv. e mi riduco a verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Analogamente si dimostrano gli altri della 1ª colonna.

$e^x = 1 + x + o(x)$ vuol dire che $\quad e^x - 1 - x = o(x)$

Dim.: mi riduco a $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

Verifica dei 2 con $\cos x$:

$\cos x = 1 + o(x)$ vuol dire che $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Dim. mi riduco a $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\overset{-\frac{1}{2}}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}} + \frac{1}{2} \right] = 0.$$

Quello con α si ottiene

→ dal binomio di Newton quando $\alpha \in \mathbb{N}$

→ dalla razionalizzazione quando $\alpha = \frac{1}{k}$ con k intero ≥ 2

→ da Taylor in generale per α generico.

— o — o —

La tabellina degli sviluppini si può interpretare in termini di equivalenza asintotica

$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$e^x - 1 \sim x$

$\log(1+x) \sim x$

$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Meglio dimenticarla quando si fanno i limiti

[Dim. Se divido $\frac{LHS}{RHS} \to 1$ per $x \to 0$]

Esempio 1 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\arcsin x + \tan x} = \frac{1}{2}$

Sostituisco ad ogni funzione il suo sviluppino

$$\frac{\overbrace{\cancel{1}+x+o(x)}^{e^x} - \overbrace{(\cancel{1}+o(x))}^{\cos x}}{\underbrace{x+o(x)}_{\arcsin x} + \underbrace{x+o(x)}_{\tan x}} = \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}}}{2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}}} \to \frac{1}{2}$$

Smontando tutto : $\sin x = x + o(x) \rightsquigarrow \sin x = x + x\omega_1(x)$

$e^x = 1 + x + o(x) \rightsquigarrow e^x = 1 + x + x\,\omega_2(x)$

...

$$\text{Frazione data} = \frac{x + x(\omega_1(x)+\omega_2(x))}{2x + x(\omega_3(x)+\omega_4(x))} = \frac{1+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\boxed{\omega_1(x)+\omega_2(x)}}}}{2+\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\omega_3(x)+\omega_4(x)}}}}$$

Esempio 2 $\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3}{2}$

$\sin x = x + o(x) \rightsquigarrow \sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x) \rightsquigarrow \log(1+2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$$\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{3 + \overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}}{2 + \underset{\downarrow 0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}} \to \frac{3}{2}$$

Esempio 3 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \tan^2(3x)}{2x + e^{5x} - 1} = \frac{2}{7}$

$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$[\tan(3x)]^2 = [3x + o(x)]^2 = 9x^2 + 6x\,o(x) + o(x)^2 = o(x)$

$$= 9x^2 + 6x \cdot x\,\omega(x) + x^2\omega^2(x)$$

$$= x\underbrace{(9x + 6x\,\omega(x) + x\,\omega^2(x))}_{\omega_1(x) \to 0}$$

$e^{5x} = 1 + 5x + o(x)$

$$\text{Frazione} = \frac{2x + o(x)}{2x + \cancel{1} + 5x - \cancel{1} + o(x)} = \frac{2x + o(x)}{7x + o(x)} \to \frac{2}{7}$$

* * *

Esempio 3 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\log(1 + \tan(5x))} = \frac{3}{5}$

$\text{Num} = 3x + o(x)$ $\text{Denom} = 5x + o(x)$

La giustificazione è il discorso delle composizioni dell'ora prec.

$$e^x = 1 + x + \boxed{o(x)} \longrightarrow x\,\omega(x)$$

$$e^{\sin(3x)} = 1 + \underbrace{\sin(3x)}_{3x+o(x)} + \underset{\downarrow}{\boxed{o(\sin(3x))}} = 1+3x+o(x)$$

$$\sin(3x)\,\omega(\sin(3x))$$

$$= x \underset{\substack{\downarrow\\3}}{\boxed{\frac{\sin(3x)}{x}}}\ \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\omega(\sin(3x))}}$$

$= x \cdot$ q.c. che va a 0

— o — o —

x^2 e me ne frego

$$\frac{\overset{\uparrow}{\boxed{e^{\sin^2 x}}} + \overset{\substack{3x\\\uparrow}}{\boxed{\log(1+\arctan(3x))}} + \overset{2x\cdot\overset{\substack{\alpha\\\uparrow}}{\frac{1}{2}} = x}{\boxed{\sqrt{1+2x}}} - 2\cos\overset{\text{quadrato...}}{\circled{x^2}}}{\underset{\substack{\downarrow\\5x}}{\boxed{\arcsin(5x)}} + \underset{\substack{\downarrow\\2x}}{\boxed{\tan(e^{2x}-1)}}} = \frac{4x}{7x} \rightarrow \frac{4}{7}$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 024

Titolo nota 23/10/2014

DERIVATA E DIFFERENZIALE

$f : D \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$

Prerequisito: x_0 è un punto interno a D, cioè $\exists \delta > 0$ t.c. $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq D$.

Def. (Rapporto incrementale). È la funzione

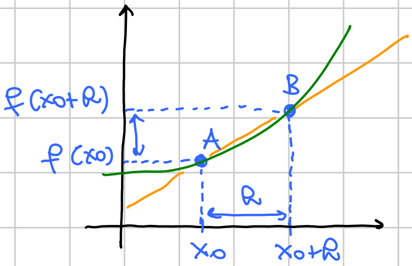
$$h \longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

← corr. incremento della y

← incremento della x quando passo da x_0 a x_0+h

definita almeno per $h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$

Geometricamente, il rapporto incrementale è il coeff. angolare della retta AB



Def. (Derivata in x_0) Si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0 se esiste finito (cioè reale) il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tale limite si indica con una di queste notazioni

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

e si chiama derivata di $f(x)$ in x_0

Def. Una funzione si dice derivabile in D se ogni p.to di D è interno a D ed il limite esiste per ogni $x_0 \in D$. In tal caso si indica con $f'(x)$ (o $\dot{f}(x)$) la funzione derivata.

Intuitivamente, quando $h \to 0$ il p.to B tende al p.to A e la retta AB tende alla retta tangente al grafico in A. Quindi $f'(x_0)$ rappresenta il coeff. ang. della retta tang. al grafico in A, che quindi ha equazione

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Def. (Differenziale) Si dice che $f(x)$ è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \qquad \text{per } h \to 0}$$

Si dice differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare $h \to \alpha h$

Teorema f derivabile in $x_0 \iff f$ differenziabile in x_0

Detto meglio:

- Se f è derivabile in x_0, allora f è diff. in x_0 e l'unico α che va bene è $f'(x_0)$
- Se f è diff. in x_0, allora c'è un unico α che va bene e inoltre f risulta derivabile in x_0 con $f'(x_0) = \alpha$.

Lemma (unicità del diff.) Se f è diff. in x_0, allora c'è un unico α che va bene.

Dim. Supponiamo verifichi la def. con α_1 e α_2. Allora

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha_1 h + o(h) = f(x_0) + \alpha_2 h + o(h) \qquad \text{per } h \to 0$$

Ma allora $(\alpha_1 - \alpha_2) h = o(h)$, il che equivale a dire che

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(\alpha_1 - \alpha_2)}\, \cancel{h} = \cancel{h} \cdot \underset{\searrow 0}{\omega(h)}$$

Quindi $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{f \text{ deriv.} \Rightarrow f \text{ diff.}}$ Dimostro che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

Con la def. quasi equiv. questo diventa verificare che

$$\lim_{h\to 0}\Bigg[\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - f'(x_0)\Bigg] = 0$$

$\boxed{f \text{ diff.} \Rightarrow f \text{ deriv. e } f'(x_0)=\alpha}$ Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Ma allora $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\alpha + \overset{0}{\boxed{\frac{o(h)}{h}}} = \alpha$

Quindi esiste $f'(x_0)$ e vale proprio α. □

Oss. Riscrivo la def. di diff. cambiando variabile (pongo $x_0+h=x$)

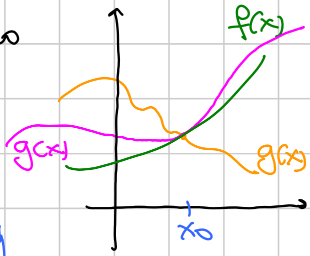
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \alpha(x-x_0)} + o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0$$

equazione della retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ con coeff. ang. α

Def.: Diciamo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si toccano in x_0 se $f(x_0)=g(x_0)$ (contatto di ordine 0)
Diciamo che il contatto è di ordine ≥ 1 se

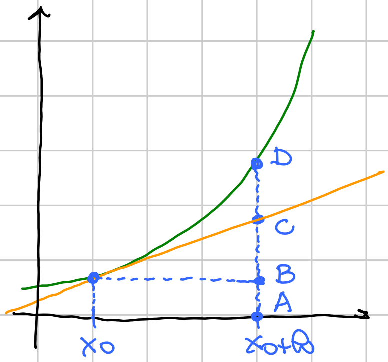
$$\boxed{f(x)-g(x) = o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0}$$



Def. intrinseca di retta tangente La retta tangente al grafico in un p.to è la retta che ha in quel p.to un contatto di ordine ≥ 1 con il grafico della funzione.

Oss. Quello che abbiamo dim. è che tale retta, posto che esista, è unica ed è quella che ha come coeff ang. $f'(x_0)$.

Interpretazione geometrica



$$\underbrace{f(x_0+h)}_{AD} = \underbrace{f(x_0)}_{AB} + \underbrace{f'(x_0)\,h}_{BC} + \underbrace{o(h)}_{CD}$$

Quando $h \to 0$

- AB resta costante
- $BC \to 0$ linearmente in h
- $CD \to 0$ più velocemente di h e questo è $o(h)$.

— o — o —

Derivate di funzioni elementari $D = \mathbb{R}$

Esempio 1 $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} (2x_0+h) = 2x_0$$

In versione differenziale:

$$\underbrace{(x_0+h)^2}_{f(x_0+h)} = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{\boxed{2x_0}\,h}_{\boxed{f'(x_0)}\,h} + \underset{o(h)}{h^2}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$

Rapp. increm.: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^{x_0} \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\dfrac{e^h - 1}{h}}} = e^{x_0}$

Diff.:

$$\underset{\underset{f(x_0+h)}{\uparrow}}{e^{x_0+h}} = e^{x_0} \cdot e^h = e^{x_0}(1 + h + o(h))$$

$$= \underset{\underset{= f(x_0)}{\uparrow}}{e^{x_0}} + \underset{\underset{\boxed{f'(x_0)}\cdot h}{\uparrow}}{\boxed{e^{x_0}} \cdot h} + \underset{\underset{o(h)}{\uparrow}}{o(h)}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$

Rapp. increm.: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x_0 \cdot \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\sin h}{h}}} + \sin x_0 \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}} = \cos x_0$$

Diff.:

$$\underset{\underset{f(x_0+h)}{\uparrow}}{\sin(x_0+h)} = \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \boxed{\cos x_0} \cdot h + o(h)$$

$$= f(x_0) + \boxed{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

Conclusione I tre concetti

- limiti notevoli con le funzioni elementari
- derivate delle funzioni elementari
- sviluppini

sono tre facce della stessa medaglia.

ANALISI 1 - LEZIONE 025

Titolo nota 23/10/2014

Derivate delle funzioni elementari

$(x^n)' = n x^{n-1}$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \cdot \log a$

$(\sin x)' = \cos x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\text{costante})' = 0$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Teoremi algebrici sulle derivate

$(\alpha f)' = \alpha f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

Derivata di $\log x$

Rapp. increm. $\lim_{h \to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$

pongo $y = \frac{h}{x_0}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log \frac{x_0+h}{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}}{\underbrace{\frac{h}{x_0}}_{\downarrow 1} \cdot x_0} \to \frac{1}{x_0}$$

Diff. $\log(x_0+h) = \log \frac{x_0+h}{x_0} + \log x_0$

$= \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right) + \log x_0 =$ sviluppiamo ...

Derivata della somma Siano $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in D$ un p.to interno.

Supponiamo $f(x)$ derivabile in x_0 e $g(x)$ derivabile in x_0.

Allora la funzione $s(x) = f(x) + g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim. via rapporto increm.

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)+g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim. via differenziale

$$s(x_0+h) = f(x_0+h) + g(x_0+h) \qquad \text{(uso ipotesi)}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h) + g(x_0) + g'(x_0)\cdot h + o(h)$$

$$= s(x_0) + \underbrace{[f'(x_0)+g'(x_0)]}_{s'(x_0)} h + o(h)$$

— o — o —

Derivata del prodotto ... enunciato ... $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ ...,

Dim. via rapp. increm. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$

(aggiungo e tolgo un termine misto qualunque)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0+h) + f(x_0)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}}{\boxed{g(x_0+h)}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ f(x_0)}}{\boxed{f(x_0)}}\ \cdot\ \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}}{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}$$

↑ andrebbe dimostrato

$$g(x_0+h) = \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{g'(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{0} + \underbrace{\boxed{g(x_0)}}_{g(x_0)} \longrightarrow g(x_0)$$

Oss. La riga precedente dimostra che g derivabile in $x_0 \Rightarrow g$ continua in x_0

(nota bene: $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$)

$\boxed{\text{Dim. via differenziale}}$

$$f(x_0+h)\,g(x_0+h) = [f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)]\cdot[g(x_0)+g'(x_0)h+o(h)]$$

$$= f(x_0)\cdot g(x_0) \qquad p(x_0)$$

$$+ [f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)]\,h \qquad \alpha\, h$$

$$+ \underset{\uparrow}{o(h)} \qquad + o(h)$$

provare a scrivere i 6 termini rimanenti e vedere che sono davvero o piccolo

—o—o—

Derivata di $\frac{1}{f}$ ... Enunciato ... Supponiamo $f(x_0) \neq 0$ ...

... $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ... $g'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

$\boxed{\text{Dim. via rapp. increm.}}$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\boxed{f(x_0)-f(x_0+h)}}^{-f'(x_0)}}{\underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)}\cdot f(x_0)\cdot \boxed{h}} = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Oss. Quando si definisce $\frac{1}{f(x)}$ ci vogliono cautele per essere sicuri che $f(x) \neq 0$ almeno vicino ad x_0 (perm. del segno).

Derivata di $\frac{f}{g}$: segue scrivendo $f \cdot \frac{1}{g}$ e facendo la derivata del prodotto.

Derivata della composizione : teorema misterioso

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \boxed{\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}} \; \boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}} \arrow[d, "\text{pongo } y = g(x_0+h) - g(x_0)"] & \boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}} \arrow[d] \\
\boxed{\frac{f(g(x_0)+y) - f(g(x_0))}{y}} \arrow[d] & g'(x_0) \\
f'(g(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Achtung! Non è una dim. completa perchè potrei aver moltiplicato e diviso per 0.

Derivata di x^n : si fa per induzione sfruttando la derivata del prodotto

Derivata di a^x : $a^x = e^{x \log a}$ e uso la composizione

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \underbrace{\log a}_{\text{derivata esponente}}$$

$$= a^x \cdot \log a$$

Derivata di x^α $\quad x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \boxed{\frac{\alpha}{x}} \nearrow \text{derivata esponente}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Teorema misterioso Sia $g(x)$ la funzione inversa di $f(x)$ (supposto che esista).

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, e sia $y_0 = f(x_0)$. Allora g è derivabile in y_0 e

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}} \qquad \boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}}$$

Dim abusiva $g(f(x)) = x$ per def. di inversa

Derivo a dx e sx e ottengo

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Quindi $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Metto $x = x_0$ e ho la tesi. $\square$

Oss. L'abusivismo è supporre che g sia derivabile.

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = \log x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$ $\quad g(x) = \arctan x$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ $\quad$ (si fa usando il rapporto $\frac{\sin x}{\cos x}$)

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Occhio alla possibilità di "semplificare" tan e arctan.

[Esercizio] Fare la stessa cosa per arcsin x e arccos x.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 026

Titolo nota 27/10/2014

Teorema di De L'Hôpital Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e la possibilità di dividere per $g(x)$ e $g'(x)$, esistenza di $f'(x)$ e $g'(x)$)

(ii) il limite iniziale sia una forma indet. del tipo $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, cioè che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

oppure $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$ (gli eventuali segni - si possono portare fuori)

(iii) esista

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

Operativamente. Devo calcolare il limite di $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}}$. Calcolo invece il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

→ che ho verificato essere $\frac{0}{0}$ opp $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

① Se questo non esiste, allora BOH (non posso dedurre nulla sul limite iniziale)

② Se esiste, allora ☺

③ Se è ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora posso reiterare, cioè calcolare il limite di

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{e così via.}$$

Esempio 1 $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x} \overset{\uparrow}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{1} = 0$

No! Non è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

In realtà il limite fa $+\infty$ $\left[\frac{1}{0^+}\right]$

Esempio 2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{3x} \overset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sin x}{3} =$ N.E.

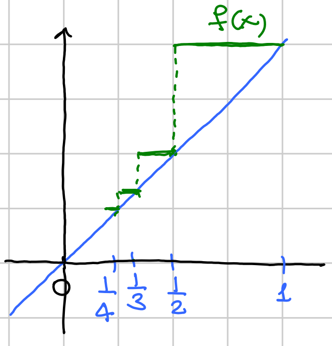
No! Se $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, allora non posso dedurre nulla sul limite iniziale

Infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\boxed{\frac{\cos x}{x}}}{3} = \frac{2}{3}$ $\nearrow 0$ (carabinieri)

Oss. Quando si applica De L'Hôpital non basta che x_0 sia un p.to di accumulazione dell'insieme dove sono definite $f(x)$ e $g(x)$ (così come se $x_0=+\infty$ non basta che l'insieme di definizione di $f(x)$ e $g(x)$ sia non limitato).
Serve che $f(x)$ e $g(x)$ siano definite almeno in tutto un intervallo $(x_0, x_0+\delta)$ oppure $(x_0-\delta, x_0)$ per qualche $\delta>0$ (oppure su tutta una semiretta nel caso $x_0=+\infty$ o $x_0=-\infty$)

Esempio 3 Prendiamo $g(x) = x^2$

Prendiamo $f(x)$ costante a tratti negli intervalli $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ dove è uguale a $\frac{1}{k}$



$f(x)$ e $g(x)$ sono definite in $\mathbb{R}$ meno i p.ti della successione $\frac{1}{n}$. Ovviamente 0 è p.to di accumulazione per questa zona.

$f'(x)=0$ dove definita

$\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\swarrow}{=} 0$

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\nearrow}{=} +\infty$

Oss. L'utilità pratica è limitata dal fatto che derivando spesso le funzioni peggiorano.

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow \atop +\infty}{x} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}_{\downarrow \atop 0}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\uparrow \atop \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

In alternativa: uso il fatto che $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$ e ottengo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1.$$

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ $\left[\frac{0}{0} : \text{Hôp}\right]$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}-x^2+2x}}\, 2\sqrt{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Oss. L'esempio 5 ci dice che

$$\boxed{\arccos(1-x) = \sqrt{2}\,\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \quad \text{per } x\to0^+}$$

Oss. Si può usare Hôp. per limiti di successioni solo dopo aver usato il criterio funzioni → successioni.

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3}$

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ Uso limiti notevoli

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{x\left(\overset{\nearrow 1}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}} - 1\right) + x^5}{x^3} = \frac{x^5}{x^3} = x^2 \to 0$$

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$ Uso l'equivalenza asintotica: $\sin x \sim x$

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \sim \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x^5}{x^3} = x^2 \to 0$$

$\boxed{3^\circ \text{modo}}$ Uso l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ [\frac{0}{0}:\ \text{Hôp}]}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + 5x^4}{3x^2} \overset{\swarrow [\frac{0}{0}:\ \text{Hôp}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 20x^3}{6x} \underset{\substack{\uparrow \\ [\frac{0}{0}:\ \text{Hôp}]}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 60x^2}{6} = -\frac{1}{6}$$

Commenti: nel 1° modo ho fatto il limite metà per volta.

Nel 2° modo ho usato l'equiv. asintotica, che non si può usare

Se avessi messo o piccolo, avrei trovato

$$\frac{\sin x - x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + x^5}{x^3} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

Oss. Posso usare Hôpital per calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$? o per

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$?

ANALISI 1 — LEZIONE 27

Titolo nota 27/10/2014

SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione $f(x)$ e dato $n \in \mathbb{N}$, si vorrebbe trovare un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \underbrace{\boxed{o(x^n)}}_{\text{resto}} \qquad \text{per } x \to 0}$$

Formula di TAYLOR con resto di PEANO

Se approssimo $f(x)$ con $P_n(x)$ commetto un errore $f(x) - P_n(x)$ che è "piccolo" nel senso che è $o(x^n)$ per $x \to 0$.

<u>Lemma</u> Supponiamo che esista un $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra.
Allora $P_n(x)$ è unico.

<u>Dim.</u>: Supponiamo che ce ne siano 2 che vanno bene, diciamo $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, allora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

da cui $\underbrace{P_n(x) - Q_n(x)}_{\text{polinomio di grado } \leq n} = o(x^n)$

Dato un polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$, allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x^n} = 0 \quad \text{se e solo se } P(x) \text{ è il polinomio nullo}$$

(esercizio: si tratta di raccogliere in $P(x)$ la potenza di x più bassa e osservare che c'è più esponente al denominatore). □

Teorema misterioso Sia $f(x)$ una funzione definita per lo meno in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per un qualche $\delta > 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che

- le derivate di f fino alla $(n-1)$-esima esistono in $(-\delta, \delta)$
- la derivata n-esima di f esiste almeno in 0

Allora esiste un (unico) polinomio $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\boxed{f^{(n)}(0)}}{n!}x^n$$

derivata n-esima di $f(x)$ in $x=0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Oss. 1 Le ipotesi del teorema sono condizioni SUFFICIENTI per l'esistenza del polinomio $P_n(x)$.
Ci sono esempi di funzioni $f(x)$ che non sono nemmeno derivabili che però ammettono polinomi $P_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Oss. 2 I polinomi $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ... si ottengo l'uno dal precedente aggiungendo un termine.

La formula di Taylor con resto di Peano, nelle ipotesi del teo. mist., si scrive come

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

se voglio il polinomio $P_n(x)$ mi fermo al termine con x^n

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \underset{\underset{\binom{\alpha}{1}}{\uparrow}}{\alpha} x + \underset{\underset{\binom{\alpha}{2}}{\uparrow}}{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}} x^2 + \underset{\underset{\binom{\alpha}{3}}{\uparrow}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}} x^3 + \dots$$

sono come i binomiali, ma α non è detto che sia in $\mathbb{N}$.

Oss. Le funzioni pari hanno solo potenze pari nello sviluppo
" " dispari " " " dispari " " .

[Si dimostra partendo dal fatto che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa, e le funzioni dispari in 0 fanno 0]

Oss. Casi particolari di $(1+x)^\alpha$.

$$\boxed{\alpha = -1} \qquad \binom{\alpha}{1} = -1 \qquad \binom{\alpha}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1 \qquad \binom{\alpha}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$$

e per induzione $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$, da cui

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ $$(1+x)^{\alpha} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2} x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

— o — o —

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} =$ (uso $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \cancel{-x} + x^5}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}$$

— o — o —

$\sin x = \overset{P_3(x)}{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}} + o(x^3)$ VERA (Taylor con $n=3$)

$\sin x = \overset{P_4(x)}{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}} + o(x^4)$ VERA (Taylor con $n=4$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ FALSA (manca $\frac{x^5}{120}$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$ VERA ma poco FURBA perché $o(x^2)$ mangia $-\frac{x^3}{6}$

$\sin x = x - 327x^3 + o(x^2)$ VERA per lo stesso motivo

— o — o —

Giustificazione degli sviluppi di Taylor

$\boxed{f(x) = e^x}$ Allora $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni k

quindi

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{f(x) = \sin x}$ Allora
$$f^{(0)}(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = \ldots$$
$$f^{(1)}(x) = \cos x = f^{(5)}(x) = f^{(8)}(x) = \ldots$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x = f^{(6)}(x) = \ldots$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x = \ldots$$

Quando sostituisco $x=0$ ottengo
$$\boxed{0, 1, 0, -1}, 0, 1, 0, -1, \ldots$$

Dividendo per $k!$ trovo i coeff. $\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \ldots$

$\boxed{f(x) = \cos x}$ Più o meno la stessa cosa

$\boxed{f(x) = \log(1+x)}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \ldots$$

In generale $\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}}$ Si dimostra facilmente per induzione

Da qui calcolo il coeff. di x^k nello sviluppo di $\log(1+x)$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1} \cdot \frac{1}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$
$$= 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Esercizio Giustificare lo sviluppo di $(1+x)^a$.
Provare con $\arctan x$ ...

ANALISI 1 - LEZIONE 028

Titolo nota 28/10/2014

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

Data $f(x)$, dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico polinomio P_n, di grado $\leq n$, tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0}$$

La formula per P_n è la solita, quindi

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)}$$

Scrittura alternativa: ponendo $x - x_0 = h$ si ottiene

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{per } h \to 0}$$

Sotto quali ipotesi vale? Condizione suff. è che

- $\exists\, \delta > 0$ t.c. f è definita almeno in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile almeno $(n-1)$ volte in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile n volte almeno in x_0.

Dim.: Pongo $g(h) := f(x_0+h)$. Ora g è definita almeno in $(-\delta, \delta)$. Le derivate di g sono legate a quelle di f da $f^{(k)}(x_0+h) = g^{(k)}(h)$, da cui $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(0)$. Scrivendo Taylor per $g(h)$ si ottiene Taylor per $f(x)$ con centro in x_0. □

$\boxed{\text{Operazioni con i polinomi di Taylor}}$ Per semplicità $x_0=0$

$\boxed{\text{Somma di funzioni}}$ Se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

allora

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

[Dim.: $f(x) = P_n(x) + x^n\omega_1(x)$, $g(x) = Q_n(x) + x^n\omega_2(x)$

Allora

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + \underbrace{x^n \underbrace{[\omega_1(x) \pm \omega_2(x)]}_{\omega_3(x)}}_{o(x^n)}$$

$\boxed{\text{Prodotto per una costante}}$ $\alpha f(x) = \alpha P_n(x) + o(x^n)$

$\boxed{\text{Prodotto di due funzioni}}$ $f(x)\cdot g(x) = P_n(x)\cdot Q_n(x) + o(x^n)$

[Dim.: $f(x)\cdot g(x) = P_n(x)\cdot Q_n(x) +$

$$\underbrace{+\,x^n \underbrace{\{P_n(x)\,\omega_2(x) + Q_n(x)\,\omega_1(x) + \omega_1(x)\,\omega_2(x)\,x^n\}}_{\omega_3(x)\ \to\ 0}}_{}$$

Tutto ciò è $o(x^n)$.]

Oss. Nel calcolare $P_n(x)\cdot Q_n(x)$ posso limitarmi ai termini di grado $\leq n$. Gli altri sono "mangiati" da $o(x^n)$

—o—o—

Esempio 1 $\cos x \cdot \sin x$ $n = 4$

$$\Big(\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{x^4}{24}}}_{\cos x} + o(x^4)\Big) \cdot \Big(\underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\sin x} + o(x^4)\Big) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

pensando che nell'altro termine c'è almeno x potevo risparmiarlo

Composizione $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

Primo caso semplice $f(\alpha x) = P_n(\alpha x) + o(x^n)$

Secondo caso semplice $f(x^\alpha) = P_n(x^\alpha) + o(x^{n\alpha})$ per $\alpha > 0$

↑ se $\alpha \in \mathbb{N}$ ottengo ancora un pol., altrimenti è comunque corretto

Dim.: $f(x^\alpha) = P_n(x^\alpha) + x^{n\alpha}\underbrace{\omega(x^\alpha)}_{\omega_3(x)}$ $\to 0$ perché $\alpha > 0$

corretto dopo video

Caso generale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = P_n(x) + x^n\omega_1(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + x^n\omega_2(x)$$

$$f(g(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$$

$\boxed{\text{PORCHÈ } Q_n(0) = 0 \text{ cioè } g(0) = 0}$

Dim.: $f(g(x)) = P_n(g(x)) + [g(x)]^n\,\omega_1([g(x)]^n)$

$= P_n(Q_n(x) + x^n\omega_2(x)) + [Q_n(x) + x^n\omega_2(x)]^n\,\omega_1(\dots)$

Fatto 1 $P_n(Q_n(x) + x^n\omega_2(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$

Questo è vero monomio per monomio

$$(Q_n(x) + x^n\omega_2(x))^k = [Q_n(x)]^k + \underbrace{\text{tutti termini con almeno } x^n \text{ e } \omega_2(x)}_{o(x^n)}$$

Fatto 2 $\underbrace{[Q_n(x) + x^n\omega_2(x)]^n}\,\omega_1(g(x)) \overset{?}{=} x^n\cdot\omega_3(x)$

↓ qui posso raccogliere x perché $Q_n(0) = 0$

$$[xR_n(x) + x^n\omega_2(x)]^n\,\omega_1(g(x)) =$$

$$x^n\underbrace{[R_n(x) + x^{n-1}\omega_2(x)]^n\,\boxed{\omega_1(g(x))}}_{\omega_3(x)}$$

poiché $g(x) \to 0$ posso porre $y = g(x)$ e dedurre che va a 0.

Esempio 1 $\cos(\sin x)$ Sviluppo con $n = 4$

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$ poi pongo $t = \sin x$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + \underbrace{o(\sin^4 x)}_{o(x^4)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doppio prodotto}}}{\frac{x^4}{3}}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underline{o(x^5)}$$

↑ avrei $o(x^4)$, ma sapendo che la funzione è pari sono sicuro che il termine con x^5 ha coeff. 0.

Esempio 2 $\sin(\cos x)$ $n = 4$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$ $\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \underbrace{o(\cos^4 x)}_{o(x^4)}$

NO! Perché non è verificata l'ipotesi $g(0) = 0$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non posso} \\ \text{molt. e dividere} \\ \text{per } x^4}}{\cos^4 x}\ \omega\,(\underbrace{\cos x}_{\substack{\uparrow \text{ non tende a 0,} \\ \text{quindi di } \omega \text{ non so} \\ \text{nulla}}})$$

Oss. Lo sviluppo classico di $\sin x$ vale quando $x \to 0$, quindi se l'argomento tende ad 1 non posso dire nulla.

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 029

Titolo nota 28/10/2014

FUNZIONI IPERBOLICHE

Def.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie

$$\sinh(-x) = -\sinh x \quad \text{(dispari)}$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \text{(pari)}$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x \quad \text{(dispari)}$$

Periodicità NON sono funzioni periodiche, anzi

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

Derivate

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \text{esercizio}$$

senza il segno –

Taylor

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\boxed{\sinh x + \cosh x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Dim. 1° modo $f(x) = \sinh x$, allora

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sinh x & k \text{ pari} \\ \cosh x & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi nel Taylor ci sono solo le potenze dispari con coeff. $\frac{1}{k!}$

2° modo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

i pari se ne vanno per colpa di

Esercizio: fare lo stesso per $\cosh x$.

Quadrati

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)$$

doppio prodotto

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right)$$

da cui

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Relazione fondamentale della trigonometria iperbolica

Duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$$

$$= 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

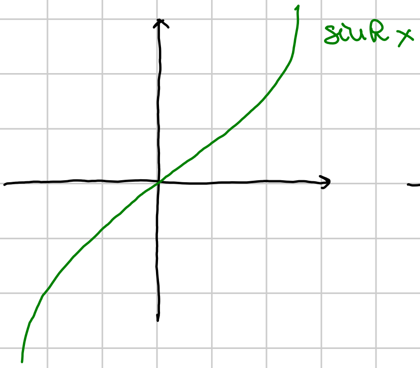
$$= 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

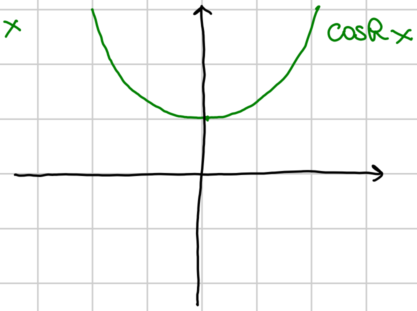
Ok!

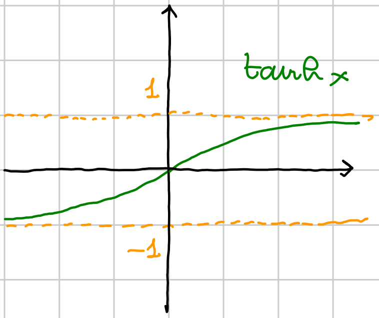
Esercizio: trovare la formula per $\cosh(2x)$ e scriverla nei tre modi usuali, confrontandola con

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Monotonia e grafici I grafici sono i seguenti







Dimostriamo che $\sinh x$ è monotona crescente: somma di 2 funzioni strett. crescenti (e^x e $-e^{-x}$).

Dim. che $\cosh x$ è strett. cresc. in $[0,+\infty)$: prendo $y > x$ e spero che $\cosh y > \cosh x$, cioè

$$\frac{e^y + e^{-y}}{\cancel{2}} > \frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}}$$

Pongo $e^y = b$, $e^x = a$ e mi riduco a dimostrare che

$$b > a \implies b + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{a}$$

$$b - a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (b-a) + \frac{a-b}{ab} = (b-a)\left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

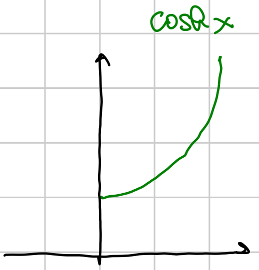
$$= \frac{(b-a)\boxed{(ab-1)}}{\underset{>0}{\boxed{ab}}} \quad >0 \text{ perchè } b > a \geq 1, \text{ quindi } ab > 1$$

quindi se $b - a > 0$ l'espressione è positiva.

Funzioni inverse

$\boxed{\sinh x}$ È bigettiva come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quindi ammette l'inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \text{Sett}\sinh x$$



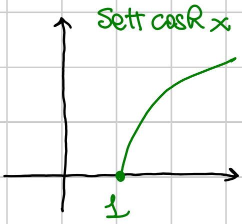
$\boxed{\cosh x}$ Vista come $f: [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ è invertibile.

La sua inversa

$$g: [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

è detta

$$g(x) = \text{Sett}\cosh x$$



Le derivate sono

$$(\text{Sett}\sinh x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\text{Sett}\cosh x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

controllare per esercizio

Formule esplicite per le funzioni inverse

Facciamo il caso di $\boxed{\cosh x}$. Per trovare Sett cosh x devo risolvere

$$\cosh \alpha = x$$ (cioè trovare α)

$\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) = x$, cioè $e^{\alpha}+e^{-\alpha} = 2x$

Pongo $e^{\alpha} = b$ e l'eq. diventa $b + \frac{1}{b} = 2x$, cioè

$b^2 - 2xb + 1 = 0$, da cui $b = x \pm \sqrt{x^2-1}$

Ora mi serve che sia $b > 0$ per poter risolvere $e^{\alpha} = b$. Si vede abbastanza facilmente che questo succede solo se $x \geq 1$ (per $x \leq -1$ le soluzioni sono negative).

A questo punto devo risolvere

$$e^{\alpha} = x \pm \sqrt{x^2-1}, \quad \text{cioè} \quad \alpha = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

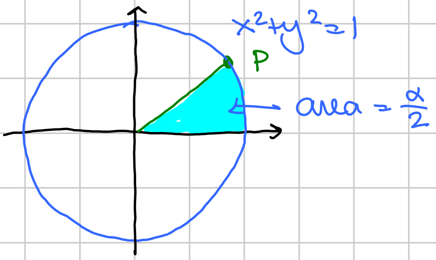
Quella buona è quella che mi fornisce $\alpha \geq 0$, quindi l'arg. del log deve essere ≥ 1 e questo accade se e solo se prendo quella con il +. Conclusione

$$\boxed{\text{Sett}\cosh x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

Oss. Le 2 soluzioni in α sono l'una = l'altra cambiata di segno. Si vede dalla formula?

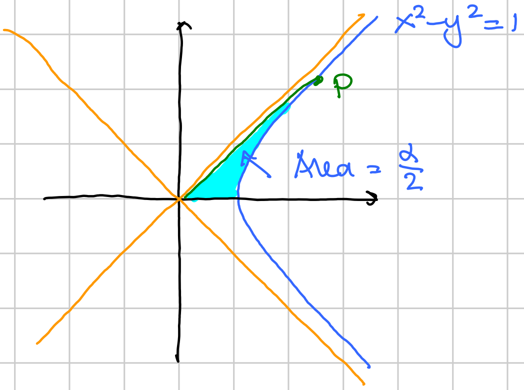
— o — o —

Interpretazione geometrica



Quando Area = $\frac{\alpha}{2}$, allora

$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$



Fatto misterioso: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un unico p.to P sull'iperbole che individua un settore di area = $\frac{\alpha}{2}$ (interpretata con segno).

Le coord. di $P = (\cosh\alpha, \sinh\alpha)$

Oss. Il giorno in cui i complessi saranno noti, ci saranno le formule

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

— o —

ANALISI 1 - LEZIONE 030

Titolo nota 30/10/2014

__Def.__ Se $f(x) \sim c x^{\alpha}$ per $x \to 0$

oppure equivalentemente

$$f(x) = c x^{\alpha} + o(x^{\alpha}) \quad \text{per } x \to 0$$

si dice che

- $f(x)$ è un <u>infinitesimo di ordine α</u> $(\alpha > 0)$ per $x \to 0$
- $c x^{\alpha}$ è la <u>parte principale</u> di $f(x)$.

__Esempi__ $\sin x \sim \boxed{x}$ parte principale $\qquad \sin x = x + o(x)$

$\sin x - x \sim \boxed{-\frac{1}{6}x^3}$ parte princ. $\qquad \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$

__Esempio 1__ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{x} = 2$$

$$\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \to 1 + 1 = 2$$

Si gioca sul 1° termine, quindi si fa anche con i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3} - 1 + \sin x^3}{\tan^3 x} = 2$$ per lo stesso motivo: si gioca sul 1° termine dello sviluppo.

__Esempio 2__ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}$$ Non si può fare con i limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1 - \sin x}{x^3} = \frac{\overbrace{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}}^{e^x} \cancel{-1} - \overbrace{\cancel{x}}^{\sin x} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

La battaglia si è decisa sul 2° termine.

Oss. Se sopra e sotto ci sono infinitesimi di ordine k, allora servirebbero k passaggi di Hôpital per concludere.

Esempio 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\underbrace{\sqrt{x}\arctan(x\sqrt{x})}_{x^2+o(x^2)}+\underbrace{|\sin^5 x|}_{o(x^2)}}=\frac{1}{2}$$

è lo stesso limite di prima.

Esempio 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^2-\sin^2 x}{\boxed{x^2\sin^2 x}}=$$

↑ parte principale x^4, quindi si gioca tutto sul 4° ordine

Mi devo procurare lo sviluppo di $\sin^2 x$ di ordine 4:

$$(\sin x)^2=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$=\frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(1+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)}\to\frac{1}{3}$$

Esempio 5 Sviluppare $\arctan(x+x^3)$ di ordine 3

$\arctan t=t+o(t)$ $\rightsquigarrow$ $\arctan(x+x^3)=x+x^3+o(x^3)$

↑ NO!

$$\arctan(x+x^3)=x+x^3+o(x+x^3)$$

$$=x+x^3+o(x)$$

$$=x+o(x)$$

Oss. $o(x+x^3)=o(x)$ e niente più

↑

raccolgo solo x

$$(x+x^3)\,\omega(x+x^3)=\boxed{x}\,\underbrace{(1+x^2)\,\omega(x+x^3)}_{\to 0}$$

Corretto: $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\arctan(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{1}{3}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3)$$

$$= x + x^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

<u>Esempio 6</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ $[1^\infty]$

Lo scrivo come $e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}}$ e considero il solo esponente

$$\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^2}\log\left[\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right]$$

$$\frac{o(x^3)}{x} = \frac{x^3\omega(x)}{x} = x^2\omega(x) = o(x^2)$$

$$= \frac{1}{x^2}\log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \to -\frac{1}{6}$$

$\log(1+t) = t + o(t)$ quindi

$$\log(1\underbrace{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}_{t}) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$

<u>Esempio 7</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]x$ $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to 0^+}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\right]\frac{1}{y}$$

Mi serve l'ordine di infinitesimo di $(1+y)^{\frac{1}{y}} - e$

$$(1+y)^{\frac{1}{y}} = e^{\frac{1}{y}\log(1+y)} = e^{\frac{1}{y}\left(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right)}$$

$$= e^{1-\frac{1}{2}y+o(y)} = e\cdot e^{-\frac{1}{2}y+o(y)}$$

$$= e\left[1-\frac{1}{2}y+o(y)\right] = e-\frac{e}{2}y+o(y)$$

Quindi

$$(1+y)^{\frac{1}{y}}-e = \cancel{e}-\frac{e}{2}y+o(y)-\cancel{e} = -\frac{e}{2}y+o(y)$$

In conclusione

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{(1+y)^{\frac{1}{y}}-e}{y} = -\frac{e}{2}$$

— o — o —

Esempio 8 $\left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^n - 3^n$ $\quad [3^\infty - 3^\infty]$

$$3^n\left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n+4}\right)^n - 3^n = 3^n\left[\underset{1^\infty \quad \downarrow\, e^{\frac{1}{3}-4}}{\boxed{\left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n+4}\right)^n}}-1\right] \longrightarrow -\infty$$

Pongo $x=\frac{1}{n}$ e vedo che succede nella parentesi quadra

$$\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{x}+4}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1+\frac{x}{3}}{1+4x}\right)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow e^{\frac{1}{3}-4} < 1$$

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \to e^{\frac{1}{3}} \qquad (1+4x)^{\frac{1}{x}} \to e^{4} \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{x}{3}\right)} \longrightarrow e^{\frac{1}{3}}$$

Achtung! Achtung!

Posto $f_n = \dfrac{n+\frac{1}{3}}{n+4}$ è vero che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Tuttavia **LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE**

cioè se so che $f_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso dedurre solo che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n \leq 1$$

↑ posto che esista

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 031

Titolo nota 30/10/2014

Esempio 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(\sinh\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$

Pongo $x=\frac{1}{n}$ e diventa $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sinh x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3}$

$$\frac{\sinh x-\sin x}{x^3}=\frac{\cancel{x}+\frac{x^3}{6}-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}\to\frac{1}{3}$$

Esempio 2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n-1}{n^2}=0$

$$\frac{\cancel{1}-\frac{n^2}{2}-\cancel{1}+o(n^2)}{n^2}\to\frac{1}{2}$$

NO!! $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ vale quando l'argomento tende a 0

Esempio 3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\sinh x+x^4\log x}{\boxed{x\arctan(x^2+x^3)}}=\underset{\uparrow}{-\frac{1}{6}}$

$x^3+o(x^3)$ quindi si decide sul 3° ordine

quello del $\sinh x$

Non posso sviluppare $\log x$ neanche scrivendo

$$\log x=\log[1+\underbrace{(x-1)}]$$

↑ non tende a 0

Fortuna: $x^4\log x=o(x^3)$ (quando divido tende a 0)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sinh x+x^3\log x}{x^3}=\lim_{x\to0}\underset{\substack{\downarrow\\ -\frac{1}{6}}}{\boxed{\frac{x-\sinh x}{x^3}}}+\underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{\boxed{\log x}}=-\infty$$

Esempio 4 Sviluppare e^x di ordine 3 con centro in $x_0 = 1$

Teoricamente uso la formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

Nel nostro caso $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi $f^{(k)}(1) = e$, da cui

$$e^{1+h} = e + eh + e\frac{h^2}{2} + e\frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$e\cdot e^h = e\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{6}h^3+o(h^3)\right)$$

Esempio 5 Sviluppare $\sin x$ con centro in $x_0 = 1$ e ordine 3

1º modo: fare le derivate

2º modo: $\sin(1+h) = \sin 1\cdot\cos h + \cos 1\cdot\sin h$

$$= \sin 1\left(1-\frac{1}{2}h^2+o(h^3)\right) + \cos 1\left(h-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1\cdot h - \frac{1}{2}\sin 1\cdot h^2 - \frac{1}{6}\cos 1\cdot h^3 + o(h^3)$$

Esempio 6 Sviluppare $\sin(\cos x)$ con centro in 0 e ordine 3

Non va bene: $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \boxed{o(x^3)}$$

NO!

Va bene: $\sin(\cos x) = \sin\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}_{h}\right)$ uso $\sin(1+h)$

$$= \sin 1 + \cos 1\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}_{h} + o(x^3)$$

$\uparrow$ mangia sia h^2, sia h^3, sia $o(h^3)$

Esempio 7 $\log(2+x)$ come lo sviluppo centro in $x_0=0$

$$\log(2+x) = \log[1+\underbrace{(1+x)}_{\uparrow}]$$

non tende a 0! non posso usare sviluppo classico

$$\log(2+x) = \log 2\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right) = \log 2 + \log\Big(1+\underbrace{\frac{x}{2}}_{t}\Big)$$

$$= \log 2 + \underset{\overset{\uparrow}{t}}{\frac{x}{2}} - \underset{\overset{\uparrow}{-\frac{1}{2}t^2}}{\frac{1}{8}x^2} + \underset{\overset{\uparrow}{+\frac{1}{3}t^3}}{\frac{1}{24}x^3} + o(x^3)$$

Esempio 8 $x^4+x^3-x = p(x)$

Taylor di ordine 3 con centro in 0 : $-x+x^3+o(x^3)$

" " " " " " " 2

$$p(2+h) = (2+h)^4+(2+h)^3-(2+h)$$

e faccio i conti con il binomio di Newton salvando solo i termini con esponente ≤ 3.

Esempio 9 $f(x) = \dfrac{x+2}{3+x}$ Taylor di ordine 3 in 0

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\frac{x+2}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}(x+2)\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}(x+2)\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+o(x^3)\right)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\ldots$$

e moltiplico salvando solo...

Esempio 10

$$\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\substack{\uparrow\\ \text{Derivata}\\ \text{di arctan } x}} = \underbrace{1-x^2+x^4-x^6+\dots}_{\substack{\uparrow\\ \text{Derivata di } x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots}}$$

Per rendere il discorso rigoroso

→ dallo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$ deduco il valore delle derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ in 0

→ dalle derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ deduco le derivate in $x=0$ di arctan x

→ dalle derivate di arctan x in $x=0$ deduco lo sviluppo di arctan x

Esempio 11 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+2n^2+5}-\sqrt[3]{n^3+7}$

Questo si fa razionalizzando le radici cubiche.

$$n\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^3}}-\sqrt[3]{1+\frac{7}{n^3}}\right]\dots$$ passo alle funzioni $x=\frac{1}{n}$

$$\frac{\sqrt[3]{1+2x+5x^3}-\sqrt[3]{1+7x^3}}{x} = \frac{\cancel{1}+\frac{2}{3}x-\cancel{1}+o(x)}{x}$$

$$\sqrt[3]{1+t}=(1+t)^{1/3}$$
$$=1+\frac{t}{3}+o(t)$$

$$\to \frac{2}{3}$$

Oss. Per questo limite bastano gli sviluppini (si è deciso al 1° ordine)

Esempio 12 $\left[\sqrt[n]{7^n+n^7}-7\right]e^n$

$$\sqrt[n]{7^n+n^7} = 7\sqrt[n]{1+\frac{n^7}{7^n}} = 7\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right)^{1/n} = 7\,e^{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^7}{7^n}\right)}$$

$$\uparrow$$
$$\log(1+t)\sim t$$

$$= 7\cdot e^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n^7}{7^n}} = 7\cdot e^{\frac{n^6}{7^n}} = 7\left(1+\frac{n^6}{7^n}\right) = 7+\frac{n^6}{7^{n-1}}$$

↑ Brutal mode

$$\uparrow$$
$$e^t\sim 1+t$$

Quindi espressione data $\sim \frac{n^6}{7^{n-1}} \cdot e^n \to 0$

Abbiamo dim. che $\sqrt[n]{7^n + n^7} - 7 = \underset{\uparrow}{\boxed{\frac{n^6}{7^{n-1}}}} + o\left(\frac{n^6}{7^{n-1}}\right)$

"ordine" di infinitesimo generalizzato

— o — o —

$(1+a_n)^{\boxed{\frac{1}{n}}^{\alpha}} \sim 1 + \boxed{\frac{1}{n}}\, a_n$ e il termine successivo ?

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 032

Titolo nota 03/11/2014

SERIE NUMERICHE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brutalmente è la somma di tutti i termini di una data succ. a_n

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Def. Data una succ. a_n, si definisce la successione S_n delle somme parziali

$$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}$$

non è una serie, ma una sommatoria finita

A quel p.to si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Da buon limite, ci sono 4 possibilità:

① $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora si dice che la serie converge ad ℓ

②-③ $S_n \to +\infty$ opp. $S_n \to -\infty$, allora si dice che la serie diverge a $+\infty$ opp. $-\infty$

④ S_n non ha limite, allora la serie è indeterminata.

Esempi banali Se $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la serie converge a 0.

Se $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

Se $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $S_n = 1$ per n pari e $S_n = 0$ per n dispari, quindi la serie è indeterminata.

[Le formule per S_n andrebbero dim. per induzione].

Variante banale : cosa vuol dire $\sum_{n\geq 77}^{\infty} a_n$?

Vuol dire che definisco $S_n := a_{77} + a_{78} + \dots + a_n$ per ogni $n \geq 77$ e poi faccio il limite del nuovo S_n.

Oss. banale Siano a_n e $\hat{a}_n$ due successioni tali che

$$a_n = \hat{a}_n \qquad \text{definitivamente}$$

(cioè possono differire solo per un numero finito di termini). Allora le serie

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \qquad e \qquad \sum_{n\geq 0}^{\infty} \hat{a}_n$$

hanno lo stesso tipo di comportamento (cioè una converge/div. se e solo se lo è l'altra, ma l'eventuale ℓ può essere diverso).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia n_0 t.c. $a_n = \hat{a}_n$ per ogni $n \geq n_0$. Siano S_n e $\hat{S}_n$ le due succ. delle somme parziali. Allora

$$S_n - S_{n_0} = \hat{S}_n - \hat{S}_{n_0} \qquad \forall n \geq n_0 \quad \text{(facile induzione)}$$

quindi $$\hat{S}_n = S_n + \underbrace{(\hat{S}_{n_0} - S_{n_0})}_{\text{numero fisso}} \qquad \forall n \geq n_0$$

Per fatti noti sui limiti $\hat{S}_n$ e S_n hanno lo stesso comportamento (teo. somma).

— o — o —

Due classi speciali : → SERIE TELESCOPICHE
→ SERIE GEOMETRICHE

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n\geq1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots$

Oss. chiave! $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = S_n$$

$$1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = S_n$$

Alla fine resta solo $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Se è così $S_n \to 1$, quindi la serie converge a 1.

Formalmente, dimostro che $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ per induzione.

Nel passaggio induttivo, assumo che $S_{n-1} = 1 - \frac{1}{n}$ e quindi

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\substack{S_{n-1} \text{ per} \\ \text{Hp indutt.}}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n\geq1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

Osservo che $a_n = \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n =$$
$$= \cancel{\log 2} - \log 1 + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 2} + \cancel{\log 4} - \cancel{\log 3} + \dots + \log(n+1) - \cancel{\log n}$$
$$= \log(n+1) \to +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge a } +\infty.$$

Formalmente, dimostro per induzione che $S_n = \log(n+1)$.

$\boxed{\text{SERIE GEOMETRICHE}}$ Sono le serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1+a+a^2+a^3+\dots$$

dove a è un numero reale FISSO

A suo tempo per induzione si ottiene $S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

(se $a \neq 1$, ma se $a=1$ è uno degli esempi iniziali).
Dalla formula segue la teoria, distinguendo dei casi

$\boxed{a>1}$ $S_n \to +\infty$

$\boxed{a=1}$ $S_n = n+1 \longrightarrow +\infty$

$\boxed{a\in(-1,1)}$ $S_n \to \frac{1}{1-a}$ perchè $a^{n+1} \to 0$

$\boxed{a=-1}$ $S_{2n} \to 1$, $S_{2n+1} \to 0$, quindi è indeterminata

$\boxed{a<-1}$ $S_{2n+1} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il denom. è} \\ \text{negativo}}}{-\infty}$, $S_{2n} \to +\infty$, quindi è indet.

Riassumendo:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } a \in (-1,1) \\ \searrow \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

<u>Oss.</u> Le serie telescopiche e geometriche sono quasi le uniche per cui c'è una formula esplicita per S_n

Proprietà algebriche Siano a_n e b_n due successioni. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

con tutte le cautele tipiche del limite della somma.
Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

con tutte le cautele del prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$.

Dim.: Pongo $c_n := a_n+b_n$. Chiamo S_m^a, S_m^b, S_m^c le somme parziali relative alle 3 serie.
Allora una banale induzione ci dice che

$$S_m^c = S_m^a + S_m^b.$$

A questo punto l'eventuale limite di S_m^c è legato ai limiti di S_m^a e S_m^b (teo. alg. per somma di limiti).

Dimostrazione analoga per λa_n.

— o — o —

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ non ha nulla a che fare con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Non vale nemmeno per le somme finite

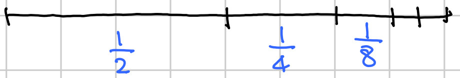
$$a_0b_0 + a_1b_1 \neq (a_0+a_1)\cdot(b_0+b_1)$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 033

Titolo nota 03/11/2014

Serie vs Zenone



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right)}_{\substack{\text{geometrica} \\ \text{con } a=\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{1-a}}} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

—o—o—

Teoria delle serie: stabilire se una serie converge o no SENZA avere una formula esplicita per S_n. Il valore a cui converge per ora non interessa.

Strumenti: $\boxed{\text{Condizione necessaria}}$

$\boxed{\text{Serie a termini } \geq 0}$ (segno costante) $\boxed{\text{Termini a segno qualunque}}$

- → Criterio della radice
- → " del rapporto
- → Criterio del confronto
- → Cr. del confronto asintotico:
  - * casi standard
  - * casi limite

- → Criterio di LEIBNITZ
- → Assoluta convergenza

—o—o—

$\boxed{\text{CONDIZIONE NECESSARIA}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim:}}$

$$\begin{array}{ccccc} a_n & = & S_n & - & S_{n-1} \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & \ell & & \ell \end{array} \qquad \forall n \geq 1$$

← sto usando che la serie converge

Quindi $a_n \to 0$. □

Achtung! La condizione è necessaria, ma non SUFFICIENTE. Quindi

- se a_n non tende a 0 (cioè tende ad altro oppure non ha limite), allora la serie non converge, quindi restano aperte 3 possibilità,
- se $a_n \to 0$, allora restano aperte tutte le 4 possibilità.

Fatto generale Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora S_n è debolmente crescente definitivamente, quindi (teo. succ. monotone) ci sono solo 2 possibilità:

- $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (cioè la serie converge)
- $S_n \to +\infty$ (cioè la serie diverge a $+\infty$).

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+3n+1}{5n^2-700}}}_{a_n} = +\infty$$

$a_n \geq 0$ definitivamente, quindi o converge, o diverge a $+\infty$. $a_n \to \frac{1}{5}$ quindi la cond. nec. non funziona, quindi non può convergere. Resta solo che diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto Siano a_n e b_n due succ. Supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{definitiv.}$$

Allora valgono queste due implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

Dim. wlog l'ipotesi valga per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, vuol dire che $S_n^a \to +\infty$, ma allora per confronto a 2 tra limiti anche $S_n^b \to +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

(oss.: fino a qui non ho usato che i termini sono ≥ 0)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, vuol dire che $S_n^b \to \ell \in \mathbb{R}$, ma allora S_n^b è limitata (volendo proprio da ℓ), ma allora S_n^a è limitata, ma allora (essendo debolmente crescente) S_n^a tende ad un limite reale $(\leq \ell)$.

↑ qui ho usato l'ipotesi che i termini siano ≥ 0

— o — o —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell \qquad (\ell \in [0,+\infty) \text{ opp. } \ell = +\infty)$$

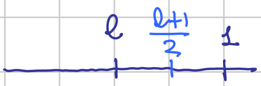
Allora

- se $\ell > 1$, la serie diverge
- se $\ell < 1$, la serie converge
- se $\ell = 1$, allora BOH.

Dim. $\ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty \Rightarrow$ addio condiz. nec. $\Rightarrow$ non può convergere

$\ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow$ ok cond. nec. $\Rightarrow$ BOH ← Falsa pista

Dim. giusta: $\ell < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ definit.



$$\Rightarrow a_n \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{\substack{\shortparallel \\ b_n}}$$

b_n ⇝ serie geometrica di ragione in $(0,1)$

quindi $\sum b_n < +\infty$, ma allora $\sum a_n$ converge.

Criterio del rapporto Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$$

Allora... esattamente come la radice

Dim. $\ell > 1 \Rightarrow$ NO cond. necessaria

$\ell < 1$, allora definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$

da cui per induzione si ottiene (come per i limiti)

$$a_n \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \forall n \geq n_0$$

cioè

$$a_n \leq \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{geometrica con} \\ \text{ragione } < 1}} \underbrace{\boxed{\frac{a_{n_0}}{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0}}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}$$

Si conclude come prima per confronto con la geometrica. □

—o—o—

ANALISI 1 - LEZIONE 034

Titolo nota 04/11/2014

Criterio del confronto asintotico Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che $b_n > 0$ e $a_n \geq 0$ definitivamente. Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \to \ell \in (0,+\infty) \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \text{ (caso standard)}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento, cioè

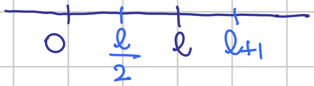
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

(il valore a cui convergono può essere diverso)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

Utilizzo operativo Data $\sum a_n$, con a_n complicato, cerco una b_n nota per cui funziona il criterio.

Dim Poichè $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, allora



definitivamente si avrà che

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell+1$$

Moltiplico impunemente per b_n (che è > 0):

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq (\ell+1) b_n.$$

Conclusione: $\sum b_n < +\infty \Longrightarrow \sum (\ell+1) b_n < +\infty \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \sum a_n < +\infty$

disug. dx + confronto

$$\sum b_n = +\infty \Longrightarrow \sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \sum a_n = +\infty. \qquad \square$$

disug. sx + confronto.

Confronto asintotico (casi limite)

(1) $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

[definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$ defin., quindi]

allora $\sum_{n \geq 0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n = +\infty$

(2) $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

[definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ defin. ...]

allora $\sum_{n \geq 0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Oss. Le implicazioni non scritte in generale non valgono.

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE ($a=1 \rightsquigarrow$ armonica)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{ diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{ converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{ diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{ converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

Dimostrazioni di questi fatti:

① Criterio di condensazione di CAUCHY
② Disuguaglianze dirette
③ Confronto serie - integrali

Criterio di condensazione di Cauchy Sia a_n una succ. tale che

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

(iii) $a_n \to 0$ (questa in realtà non serve)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

↑ termini i cui indici sono potenze di 2

Applicazione La successione $a_n = \frac{1}{n^a}$ verifica le ipotesi per ogni $a > 0$.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{na}} < +\infty$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n$$

Questa è una serie geometrica, quindi converge se e solo se $\frac{2}{2^a} < 1$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio Vedere cosa succede con $a_n = \frac{1}{n \log^a n}$

(risposta: diventa l'armonica precedente).

— o — o —

$$\boxed{\text{Dim. condensazione di Cauchy}}$$

$$a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \; a_4 \,|\, a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8 \,|\, a_9 \; \ldots \; a_{16} \,|\, \ldots$$

Maggiorazione:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^n} \leq a_1 + a_2 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

Minorazione

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n}$$

Detto formalmente

$$\boxed{a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k}}$$

Formalmente si dimostra per induzione

Allora ci sono 2 casi

① Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge, allora il RHS è limitato, quindi è limitato il CHS, quindi converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

② Se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = +\infty$, allora il LHS $\to +\infty$, quindi anche CHS $\to +\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{Alternativa 1}}$ Posso dimostrare che $\sum \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} = +\infty$ per confronto asintotico con $\sum \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$

Infatti $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to 1$ (solito limite notevole)

Sapendo che $\sum b_n = +\infty$ (telescopica) deduco che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

$\boxed{\text{Alternativa 2}}$ Dal fatto che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, posso dedurre che

$\sum \frac{1}{n^a} = +\infty$ per ogni $a \leq 1$

Infatti $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$ se $a \leq 1$ e si conclude per confronto

$\boxed{\text{Alternativa 3}}$ Se osservo che

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad \forall n \geq 2$$

Ora so che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < +\infty$ perchè è telescopica, quindi deduco che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Da qui per confronto deduco che converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ per ogni $a \geq 2$.

Quello che resta scoperto è il range $a \in (1,2)$.

Il caso $a=2$ fornisce un ulteriore suggerimento

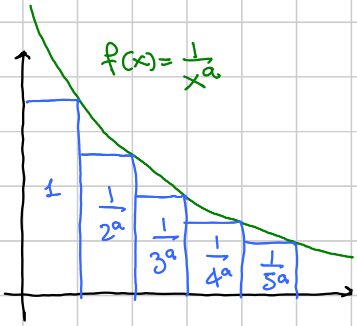
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

(si dimostra per induzione oppure maggiorando con la telescopica)

Nel caso generale posso sperare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leq A - \frac{B}{(n+1)^{a-1}}$$

L'obiettivo per una dim. diretta è trovare A e B in funzione di a, per cui la disuguaglianza è vera.



La scorciatoia è

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leq 1 + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx}_{\text{si sa fare}}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 035

Titolo nota 04/11/2014

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5}{2^n}}_{a_n}$ converge $\qquad a_n \geq 0$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}_{a_n}$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ converge

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n!}$ converge (radice / rapporto)

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-5}{n^3-200n^2+6}$ $\qquad a_n \geq 0$ definitiv.

(num. e denom. sono defin positivi perché $\to +\infty$)

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge (armonica con $a=1$)

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \dots \to 1$ $\quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$, quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

Esempio 5 $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \underset{\uparrow \text{ tabellina}}{\longrightarrow} e$ $\quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$ $\quad$ Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi diverge

Esempio 6 $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{7}-1\right)$ $a_n \geq 0$ sempre

Brutal mode: $e^{\frac{1}{n}\log 7} - 1 \sim \cancel{1} + \frac{1}{n}\log 7 - \cancel{1} = \frac{1}{n}\log 7$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{7}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\log 7}-1}{\frac{1}{n}} \to \log 7 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Esempio 7 $\sum_{n\geq 1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^4}$

Intanto $a_n \geq 0$ definitivamente, anzi sempre, perché $0 < \frac{1}{n^4} \leq 1$ e $\sin x > 0$ per $x \in (0,1)$

Brutal mode: $n^2 \sin\frac{1}{n^4} \sim n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$ ... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \to 1$

Esempio 8 $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$

Brutal mode: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ TROPPO BRUTALE, DEVO ANDARE AVANTI

$\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$ ↖ $>1 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Mi riduco a fare

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}$$ che diventa $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} \frac{1}{3}$$

Oss. Il limite appena fatto ci dice anche che $a_n > 0$ definitiv. Infatti, se $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{3}$

allora definitiv. $\frac{a_n}{b_n} > 0$, ma essendo $b_n > 0$ lo sarà pure a_n.

Esempio 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$

Brutal mode: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{6n^3}$

Rigorosamente è equivalente a dire che

$\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{6}$ da cui come prima $a_n > 0$ definitivamente e la serie converge.

Esempio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + n^5 - n^3}{n^\alpha + n^4 - 3\sqrt{n} + 8}$ converge $\iff \alpha > 9$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^3 + 5}{n^8 + n^5 - 127}$ converge $\iff \alpha < 7$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + 5}{n^\alpha + n^5 + 7}$ converge per ogni α

↓ sopra c'è n^3, che è comunque sconfitto da n^5

(Provare a sistemare rigorosamente)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sinh \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 6$

$\sum \frac{n^\alpha}{\boxed{\sinh (n^2)}}$ converge per ogni α

↑ contiene un e^{n^2} che sconfigge abbondantemente il numeratore

↳ step 1: C.A. con $\frac{n^\alpha}{e^{n^2}}$

↳ step 2: criterio della radice per

Esempio 11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $\qquad \dfrac{\log n}{n} \geq \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

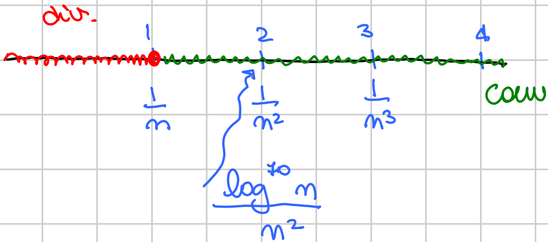
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ $\qquad \dfrac{1}{n^2 \log n} \leq \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

Esempio 12 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{70} n}{n^2}$

C.A. con $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ (o qualunque esponente in $(1,2)$)

$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\log^{70} n}{\sqrt{n}} \to 0$ caso limite

$\left[\dfrac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots \Rightarrow a_n \leq b_n \dots \right]$ $\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$



ordini di infinitesimo

Più in generale $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{b} n}{n^{a}} \quad \text{converge } \forall a > 1 \text{ e per } b \text{ qualunque}}$

C.A. con $\dfrac{1}{n^{(1+a)/2}} \leftarrow$ intermedio tra 1 e a

Esempio 13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^{\alpha}$

Brutal mode: $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 \sim \dfrac{\log n}{n}$, quindi

$a_n \sim \dfrac{\log^{\alpha} n}{n^{\alpha}}$ quindi come sopra converge se e solo se $\alpha > 1$.

Esempio 14 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n + n^4}{n^7 + \alpha^n}$ Converge se e solo se $\alpha > 4$: è come fosse $\dfrac{4^n}{\alpha^n} = \left(\dfrac{4}{\alpha}\right)^n$.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 036

Titolo nota 06/11/2014

Serie con termini di segno qualunque

① Criterio di LEIBNITZ

② Assoluta convergenza

Criterio di Leibnitz (serie a segno alterno)

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente (cioè la serie è a segni alterni)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

(iii) $a_n \to 0$ (equivalente alla condiz. necess.)

Allora la serie converge.

Achtung! Se l'ipotesi (i) o (ii) non sono verificate, allora non si può dire nulla.
Se invece non è verificata la (iii), allora manca la cond. nec., quindi di sicuro non converge.

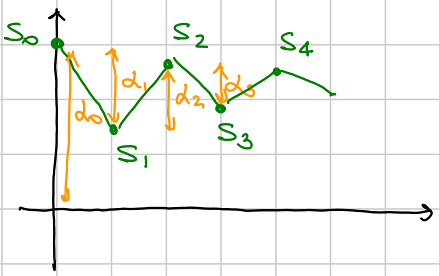
Idea: disegniamo le somme parziali S_n in rappresentazione cartesiana.

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 - a_1$

$S_2 = a_0 - a_1 + a_2$

$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$



$S_{2n} \searrow$ mentre $S_{2n+1} \nearrow$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Step 1}}$ $S_{2m+2} \le S_{2m}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti

$$S_{2m+2} = S_{2m} \underbrace{- \alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2}}_{\le 0 \text{ per Hp (ii)}} \le S_{2m}$$

Analogamente $S_{2m+3} \ge S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Step 2}}$ $S_{2n} \ge S_{2m+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $m \in \mathbb{N}$ (tutte le somme di indice pari sono maggiori di quelle di indice dispari)

Se $n \ge m$, allora $S_{2m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Step 1}}}{\le} S_{2n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ S_{2n+1} = S_{2n} - \alpha_{2n+1}}}{\le} S_{2n}$

Se $n \le m$, allora $S_{2n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Step 1}}}{\ge} S_{2m} \underset{\substack{\uparrow \\ S_{2m+1} = S_{2m} - \alpha_{2m+1}}}{\ge} S_{2m+1}$

$\boxed{\text{Step 3}}$ $S_{2n} \ge S_1 = \alpha_0 - \alpha_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$S_{2m+1} \le S_0 = \alpha_0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

Segue dallo Step 2 e dallo Step 1.

$\boxed{\text{Step 4}}$ Per il teorema delle successioni monotone

$$S_{2n} \longrightarrow \ell_1 \in \mathbb{R} \qquad S_{2n+1} \longrightarrow \ell_2 \in \mathbb{R}$$

A priori sappiamo solo che $\ell_1 \ge \ell_2$. Ora

$$\begin{array}{ccccl} S_{2n} & - & S_{2n+1} & = & \alpha_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \leftarrow \text{Hp (iii)} \\ \ell_1 & - & \ell_2 & = & 0 \end{array}$$

Questo mostra che $\ell_1 = \ell_2 = S_\infty$

$\boxed{\text{Step 5}}$ Sapendo che $S_{2n} \to S_\infty$ e $S_{2n+1} \to S_\infty$ posso concludere che $S_n \to S_\infty$.

— o — o —

Lemma delle 2 sottosuccessioni Se una successione ha 2 sottosucc. che tendono allo stesso $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, e coprono tutti gli indici, allora tutta la successione tende allo stesso ℓ.
Lo stesso vale se ho k sottosuccessioni con lo stesso limite che coprono tutti gli indici.

Esercizio E se le sottosuccessioni fossero infinite?

— o — o —

ASSOLUTA CONVERGENZA

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

Teorema Se una serie converge assolutamente, allora converge.
Detto altrimenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, per $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ restano aperte le 4 possibilità.

Due strategie dimostrative: → sfruttando l'ordinamento
→ sfruttando la completezza dei reali

— o — o —

Lemma (carabinieri per serie) Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente. Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ converge.}$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. (Nessuna Hp di segno su a_n, b_n, c_n)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Step 1}}$ $\sum_{n\geq 0}^{\infty} \underbrace{(c_n - a_n)}_{\geq 0}$ converge perchè è differenza di due serie convergenti.

$\boxed{\text{Step 2}}$ $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (b_n - a_n)$ converge. Infatti

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

quindi la tesi segue dallo Step 1 per confronto tra serie a termini ≥ 0

$\boxed{\text{Step 3}}$ $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, quindi

$\sum b_n = \sum a_n + \sum (b_n - a_n)$ è somma di due serie convergenti.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim criterio assoluta convergenza}}$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Le due serie laterali convergono per ipotesi, quindi converge quella centrale. $\square$

— o — o —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{1}{n}}$ $\leftarrow d_n$

Devo fare 3 verifiche:

(i) $d_n \geq 0$ gratis

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ gratis

(iii) $d_n \to 0$ gratis

Quindi la serie converge per Leibnitz

Non converge assolutamente perchè $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Generalizzazione : $\sum_{n\ge1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$

(1) converge per Leibnitz se e solo se $a > 0$

(2) converge assolutamente se e solo se $a > 1$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$

$\frac{\cos(n!)}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge quindi per confronto converge quella data.

No! Il confronto vale per serie a termini ≥ 0, quindi qui non si può usare.

Passo attraverso l'assoluta convergenza : $0 \le \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

$$\underset{\text{(tabellina)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \text{ converge } \underset{\substack{\uparrow\\ \text{confronto tra}\\ \text{serie a termini } \ge 0}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \text{ conv. } \underset{\substack{\uparrow\\ \text{assoluta}\\ \text{convergenza}}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} \text{ conv.}$$

Esempio 3 $\sum_{n\ge0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^3+n+7}{n^5-3n^4+18}} = a_n$

Se voglio usare Leibnitz devo dim. che $a_{n+1} \le a_n$ defin.

In questo caso l'assoluta convergenza è molto più comoda:

$$|(-1)^n a_n| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{almeno}\\ \text{definitiv.}}}{=} a_n \sim \frac{1}{n^2}$$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 037

Titolo nota 06/11/2014

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^2+2}$

Manca la condizione necessaria, quindi non converge.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+3n+1}{n^3+2}}\, a_n$

Non converge assolutamente perchè $|a_n| = a_n \sim \frac{1}{n}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Leibnitz... resta da fare $a_{n+1} \le a_n$ definitiv.

$$\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{(n+1)^3+2} \overset{?}{\le} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$\frac{n^2+5n+5}{n^3+3n^2+3n+3} \overset{?}{\le} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$(n^2+5n+5)(n^3+2) \overset{?}{\le} (n^2+3n+1)(n^3+3n^2+3n+3)$$

$$\cancel{n^5} + 5n^4 + (\text{roba di grado} \le 3) \overset{?}{\le} \cancel{n^5} + 6n^4 + (\text{roba di grado} \le 3)$$

$$n^4 \overset{?}{\ge} (\text{roba di grado} \le 3)$$

Divido per n^4 e ritrovo

$$1 \overset{?}{\ge} \boxed{\frac{\text{roba di grado} \le 3}{n^4}} \downarrow 0$$

quindi definitivamente sta sotto 1

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Brutalmente $a_n \sim \frac{1}{n}$. Aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cdots}{\cdots} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\cdots}{\cdots} - \frac{1}{n}\right)}_{\text{converge assolutamente}} + \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}}_{\text{converge per Leibnitz}}$$

Vediamo l'altra

$$\frac{n^2+3n+1}{n^3+2}-\frac{1}{n}=\frac{\cancel{n^3}+3n^2+n-\cancel{n^3}-2}{n(n^3+2)}=\frac{3n^2+n-2}{n(n^3+2)}$$

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^2+4}$

Sicuramente non converge. Che fa?
Aggiungo e tolgo 1 alla frazione:

$$\text{Serie data}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2+2}{n^2+4}-1\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{-2}{n^2+4}}_{\text{converge assolutamente}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n}_{\text{indeterminata}}$$

Convergente + indeterminata = indeterminata
In questo caso si dimostra che le somme parziali di indici pari/dispari hanno limiti diversi.

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ converge per il criterio del rapporto.
La somma di questa serie è e.

Nella giornata del numero e:

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\le\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}\qquad(*)$$

↖ somma parziale della serie data

Nell'ultima disug. ho usato che $\displaystyle\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{k!}$

$$\frac{\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{1}{n^k}}_{\le 1}}{k!}\le\frac{1}{k!}$$

Passando al limite in $(*)$ per $n\to+\infty$ otteniamo

$$e\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Serve disug. dalla parte opposta. Fisso un $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \geq m$ è vero che:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ e}}{\boxed{e_n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geq \underset{\substack{\downarrow\\ \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}}}{\boxed{\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}}$$

Fissato k, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\boxed{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}{k!\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{n^k}}} = \frac{1}{k!}$$

Così ho dimostrato che $e \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$ qualunque sia m.

Facendo ora andare $m \to +\infty$ ottengo $e \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$, che è la disuguaglianza richiesta.

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$ Converge per criterio del rapporto

La somma di questa è e^α. Per $\alpha \geq 0$ si dimostra come sopra partendo da:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ e^\alpha \text{ per limiti notevoli}}}{\boxed{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\alpha^k}{n^k} \geq \underset{\substack{\downarrow\\ \text{serie data}}}{\boxed{\sum_{k=0}^{m}\frac{\alpha^k}{k!}}}$$

La disuguaglianza opposta si fa come prima.

Futuro: il risultato si dimostra agevolmente con la formula di Taylor con resto di Lagrange

— o — o —

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Fatto 1 Per $\alpha > 1$ converge in quanto

$$0 \leq \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \leq \frac{327}{n^\alpha}$$ e concludo per confronto tra serie a termini ≥ 0

Fatto 2 Per $\alpha = 1$ diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan 1}{n}$, quindi diverge

Fatto 3 Quando $\alpha \in (0,1)$

Brutal mode!

$$\frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x \sim x \\ \text{quando } x \to 0}}{\sim} \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$$ quindi converge

Me la cavo in due step.

Prima faccio C.A. con $b_n = \dfrac{\alpha^n}{n^\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1$$
↑ solito limite notevole

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi converge ad esempio per il criterio della radice.

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}}} = a_n$ $\qquad \sqrt[n]{a_n} \to 1$ quindi BOH

Alternativa per il lim

$$\frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{(\sqrt{n})^{4028}}{2^{\sqrt{n}}}$$

Faccio C.A. con $b_n = \dfrac{1}{n^3}$ e ottengo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2017}}{2^{\sqrt{n}}} = e^{2017 \log n - \sqrt{n} \log 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{radice batte logaritmo}}}{\longrightarrow} e^{-\infty} = 0$$

$\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$ ... quindi defin... $\dfrac{a_n}{b_n} \leq 1$... $a_n \leq b_n$ ...

— ∘ — ∘ —

ANALISI 1 — LEZIONE 038

Titolo nota 10/11/2014

Teorema misterioso (Teorema di LAGRANGE) (MEAN VALUE THM.)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b). [Se è deriv. in $[a,b]$ meglio]

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

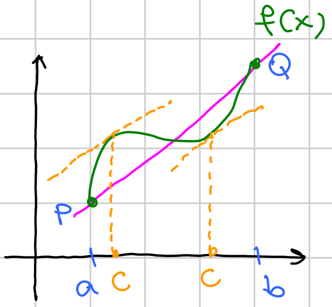
$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)}$$

Interpretazione geometrica Dividendo per $(b-a)$ la tesi diventa

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(c)}$$

|| coeff. angolare della retta PQ

|| coeff. ang. retta tangente in c



Esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ in cui la retta tangente è parallela alla retta PQ

Il p.to c può non essere unico (nella figura ce ne sono due).

— o — o —

Teoremi di monotonia = teoremi che legano segno della derivata e monotonia di una funzione.

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un p.to)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f'(x_0)$ esista e sia > 0.

Allora esiste $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tale che

$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ (un po' prima vale meno)

$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ (un po' dopo vale di più)

Achtung! Questo non vuol dire che

f è crescente (anche solo deb.) in $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$.

(questo richiederebbe confrontare 2 p.ti qualunque di $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$

Oss. Nei teoremi di monotonia se cambio $f'>0$ con $f'<0$ si cambia crescenza con decrescenza.

Dim. Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno si avrà che $\exists\, \delta_1 > 0$ $(\delta_1 \leq \delta_0)$ t.c.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \qquad \text{per ogni } h \in (-\delta_1, \delta_1) \setminus \{0\}$$

un po' a dx di x_0

Per $h > 0$, questo vuol dire $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$

Per $h < 0$, " " " $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$

un po' a sx di x_0

—o —o —

MONOTONIA 2 (segno della derivata in un intervallo)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile in tutto l'intervallo.

Allora valgono le seguenti implicazioni.

(i) $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ $\Rightarrow$ f è deb. cresc. in $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$

(ii) $f'(x) > 0$ " " $\Rightarrow$ f è strett. cresc. "

(iii) f è deb. cres. in $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ nell' intervallo

(iv) f è strett. cresc. " $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ " .

No!

Se f è strett. cresc. nell' intervallo, posso dedurre solo che $f'(x) \geq 0$ nell' intervallo stesso

Esempio $f(x) = x^3$ è strett. cresc. in $(-3,3)$, però
$f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Siano $x_0 - \delta_0 < \underset{\uparrow}{a} < \underset{\uparrow}{b} < x_0 + \delta_0$
generici

Per Lagrange

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot \overset{\nearrow \text{dipende da } a \text{ e } b}{f'(c)}$$

(i) So per certo che $f'(c) \geq 0$, da cui $f(b) - f(a) \geq 0$, cioè $f(b) \geq f(a)$

(ii) Stessa cosa, solo che so che $f'(c) > 0$, da cui $f(b) > f(a)$

(iii) Sia x un qualunque pto in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Per def.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\overset{\geq 0}{\boxed{f(x+h) - f(x)}}}{\boxed{h}_{\,>0}}$$

Per $h > 0$ ho che il rapp. increm. è ≥ 0, e questa disug. si mantiene al limite.
Per $h < 0$ si ha pure che rapp. increm. ≥ 0, ma non sempre strettamente.

— o — o —

Oss. Se f è strett. cresc., è vero che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \quad \text{per ogni } h \text{ compatibile con } x$$

Però le DISUG. strette NON passano al limite.

— o — o —

MONOTONIA 3 (Segno con annullamento sporadico)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f : (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

(ii) non esiste nessun intervallo $(a,b) \subseteq (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

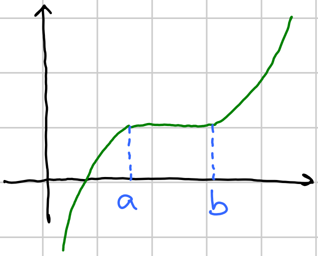
↖ $f'(x)$ si può annullare, ma non su un intero intervallo

Allora

f è strettamente crescente

Dim. Per monotonia 2 sappiamo che f è debolmente crescente. Se per assurdo non fosse strett. cresc., esisterebbero a e b in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ t.c. $a < b$ ma $f(a) = f(b)$.

Ma allora f dovrebbe essere costante in tutto $[a,b]$, ma allora $f'(x)$ dovrebbe annullarsi in tutto $[a,b]$.



— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 039

Titolo nota 10/11/2014

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

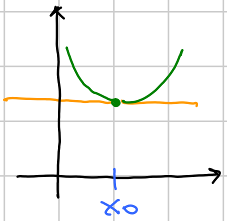
Obiettivo Dato un p.to x_0, capire come è fatto il grafico di $f(x)$ un po' dopo x_0 e un po' prima di x_0

Primo risultato : monotonia 1 (se conosco il segno di $f'(x_0)$, so confrontare $f(x_0)$ con $f(x)$ per x "vicino" a x_0

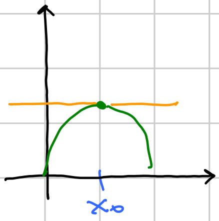
Cosa succede quando $f'(x_0) = 0$

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$ (prerequisito: x_0 è p.to interno alla zona di def. di f).

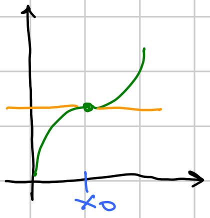
Possibili comportamenti vicino ad un p.to stazionario:



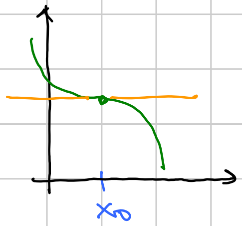
MIN. LOC.



MAX. LOC.



p.to di flesso a tang. oriz. ascendente



p.to di flesso a tang. orizz. discendente

C'è poi un quinto possibile comportamento patologico.

MIN. LOC. ⇝ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

FLESSO. TANG. ORIZ. DISC. $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$

Criterio delle derivate successive

Sappiamo che $f'(x_0)=0$. Supponiamo che esista $k \geq 2$ intero t.c.

$$f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

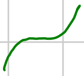
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

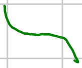
(stiamo supponendo che la k-esima derivata di f sia la prima a non annullarsi in x_0)

Allora

k pari $\nearrow$ $f^{(k)}(x_0) > 0$ ⇝ 

k pari $\searrow$ $f^{(k)}(x_0) < 0$ ⇝ 

k dispari $\nearrow$ $f^{(k)}(x_0) > 0$ ⇝ 

k dispari $\searrow$ $f^{(k)}(x_0) < 0$ ⇝ 

Dim. Taylor!!!

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k)$$

da cui

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Prendiamo uno qualunque dei 4 casi

$\boxed{k \text{ pari}, \ f^{(k)}(x_0) < 0}$ Il lim è <0, quindi frazione <0 per $h \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$.

Essendo k pari, il denom. è positivo, quindi il num. è <0, cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$ sia in $(-\delta_0, 0)$ sia in $(0, \delta_0)$.

Questo dice che x_0 è pto di max.

Altro caso $\boxed{k \text{ dispari}, f^{(k)}(x_0) > 0}$ Il lim. è >0, quindi

$\exists\, \delta_0 > 0$ t.c. la frazione è >0 in $(-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)$.

Essendo k dispari

- per $h \in (0, \delta_0)$ ho denom >0, quindi num >0, quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ (un po' dopo vale di più)
- per $h \in (-\delta_0, 0)$ ho denom. <0, quindi num <0, quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ (un po' prima vale di meno)

Per def. questo è il flesso a tg. orizz. ascendente.

—o—

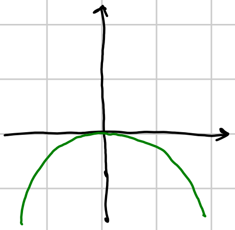
Studio locale: una funzione si comporta vicino ad x_0 come il primo termine non nullo e non costante del suo polinomio di Taylor.

—o—o—

Esempio 1 $f(x) = x^{20} - \sin x^4$

Come è fatto il grafico vicino all'origine?

Risposta: $f(x) = -x^4 + o(x^4)$ $\rightsquigarrow$ si comporta come $-x^4$ $\rightsquigarrow$ max. locale



Perchè $x_0 = 0$ è un p.to staz.?

modo antico: calcolo $f'(x)$ e verifico che $f'(0) = 0$

modo nuovo: $f'(0)$ compare nel coeff. di x del polinomio di Taylor di $f(x)$. Ora x non c'è, quindi coeff. $=0$, quindi $f'(0) = 0$.

Variante: quanto vale $f^{(2014)}(0)$? Vale 0 perchè nello sviluppo di Taylor ci sono solo potenze multiple di 4.

Lo studio locale ci dice anche che f NON è iniettiva.

Calcoliamo $f^{(2020)}(0)$. Penso allo sviluppo di Taylor

$$f(x) = -x^4 - \frac{1}{3!}x^{12} - \frac{1}{5!}x^{20} - \frac{1}{7!}x^{28} \dots \boxed{-\frac{1}{505!}}\, x^{2020}$$

$$\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!}\, x^{2020}$$

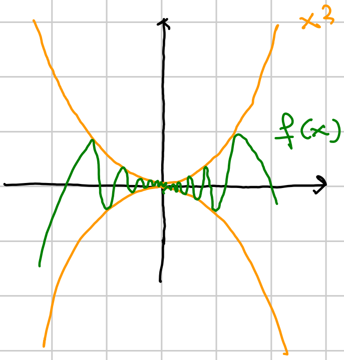
Da qui $f^{(2020)}(0) = -\frac{2020!}{505!}$

— o — o —

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

È facile vedere che non ha nessuno dei 4 comportamenti.
Perché $x=0$ è un p.to stazionario?
Calcolo $f'(0)$ usando la definizione



$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0 \quad \text{(carabinieri)}$$

Esempio 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^{20} \sin\frac{1}{x^{40}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

È evidente che $f(x) = o(x^{19})$ per $x \to 0$ (basta dividere e fare il limite)
quindi ammette polinomio di Taylor di ordine 19 (il polinomio nullo).
Si verifica che $f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ (anche $x=0$) ma non è continua in $x=0$, quindi $f''(0)$ NON ESISTE.

Esempio 4

$$f(x) = \begin{cases} x + 7x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si verifica che $f'(0)$ esiste e vale 1 (è somma di 2 funzioni derivabili).

Per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = 1 + 14x \sin \frac{1}{x} + 7\cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{\cancel{x^2}}\right)$

$$= 1 + 14x \sin \frac{1}{x} \boxed{+} 7 \cos \frac{1}{x}$$

segno − : corretto dopo video

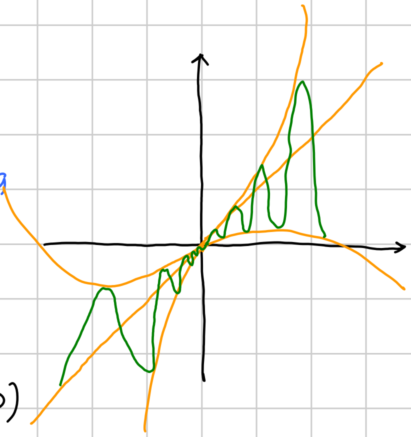
In ogni intervallo $(0,\delta)$ esistono punti, anzi intervalli, in cui $f'(x) > 0$ e intervalli in cui $f'(x) < 0$ (per colpa del termine $7 \cos \frac{1}{x}$)

Pur di scegliere δ piccolo

$f(x) > 0$ in $(0,\delta)$

$f(x) < 0$ in $(-\delta,0)$

monotonia 1



ma f non è monotona in nessun intervallo $(0,\delta)$ o $(-\delta,0)$

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 040

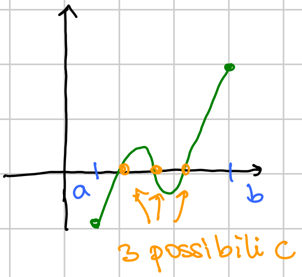
Titolo nota 11/11/2014

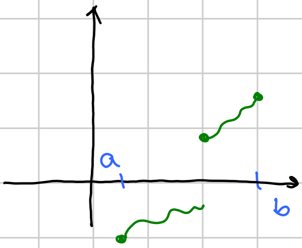
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f continua in $[a,b]$
(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (come dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso)
Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

$$f(c) = 0$$

Oss. ① Non è detto che c sia unico
② L'ipotesi di continuità è essenziale

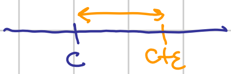




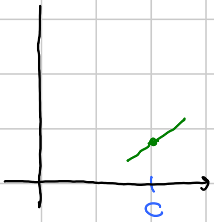
Dim 1: inf / sup + assurdo wlog $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pongo

$$c := \inf \{ \underbrace{x \in [a,b] \text{ t.c. } f(x) > 0}_{\text{non vuoto perché almeno c'è } x=b} \}$$

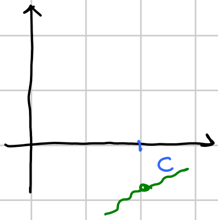
Dico che c è il p.to richiesto. Per definizione di inf deve succedere
(1) $f(x) \leq 0$ per ogni $x < c$, $x \in [a,b]$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in (c, c+\varepsilon)$ t.c. $f(x) > 0$
Suppongo per assurdo che $f(c) \neq 0$.



Caso 1: $f(c) > 0$ Per continuità $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per ogni $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Questo è contro il p.to (1) guardando a sx di c.



$\boxed{\text{Caso 2: } f(c)<0}$ Per continuità $\exists\, \delta>0$ t.c. $f(x)<0$ per ogni $x\in(c-\delta, c+\delta)$.



Questo è contro il p.to (2) guardando a dx di c.
Detto meglio: preso $\varepsilon=\delta$ dovrei trovare $x\in(c, c+\delta)$ t.c. $f(x)>0$ e invece non lo trovo.

L'unica possibilità rimasta è che $f(c)=0$.

— o — o —

<u>Esercizi</u> Capire se si può fare la dim. (e come) iniziando con

$$c := \inf\{x\in[a,b] : f(x)\geq 0\}$$
$$c := \sup\{x\in[a,b] : f(x)<0\}$$
$$c := \text{"}\ \{\qquad \text{"} \qquad f(x)\leq 0\}$$

Fare un esempio in cui le 4 possibilità producono 4 valori di c diversi.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. 2: inf / sup + diretta}}$ Inizio come prima

$$c := \inf\{x\in[a,b] : f(x)>0\}.$$

Ora osservo che

(1) $f(x)\leq 0$ per ogni $x\leq c$, quindi

$$f(c) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{perché } f \text{ è continua}}}{=} \lim_{x\to c^-} f(x) \leq 0$$

(2) $\forall \varepsilon>0\ \exists\, x\in(c, c+\varepsilon)$ t.c. $f(x)>0$

Per ogni $n\geq 1$, la applico con $\varepsilon=\frac{1}{n}$ e trovo un p.to $c_n\in\left(c, c+\frac{1}{n}\right)$ t.c. $f(c_n)>0$.

Ora $c_n\to c$ per i Carabinieri: $c\leq c_n\leq c+\frac{1}{n}$

Ma allora

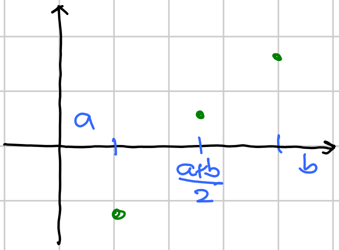
$$f(c) \overset{\substack{\text{funz. succ. + continuità}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to+\infty} f(c_n) \geq 0$$

Avendo $f(c) \geq 0$ e $f(c) \leq 0$, deve essere per forza $f(c)=0$.

— o — o —

Dim 3: BISEZIONE

Idea: ad ogni passaggio divido l'intervallo in 2 parti e scelgo una delle 2 parti in cui valgono ancora le ipotesi



Pongo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Considero $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0$, allora ho trovato c.

Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0$, allora valgono le ipotesi in $\Big[\underset{\overset{\shortparallel}{a_1}}{a_0}, \underset{\overset{\shortparallel}{b_1}}{\frac{a_0+b_0}{2}}\Big]$

Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < 0$, allora valgono le ipotesi in $\Big[\underset{\overset{\shortparallel}{a_1}}{\frac{a_0+b_0}{2}}, \underset{\overset{\shortparallel}{b_1}}{b_0}\Big]$

Proseguendo in questo modo o ad un certo p.to trovo un c in cui f si annulla, oppure ottengo una succ. di intervalli $[a_n, b_n]$, ognuno uguale a metà del precedente e tali che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

Idea: gli intervallini convergono ad un p.to in cui f si annulla

Rigorosamente: a_n è debolm. crescente e sup. limitata (da b) quindi $a_n \to a_\infty$ (teo. succ. monotone)

Analogamente: b_n è debolm. decresc. e inf. limitata (da a) quindi $b_n \to b_\infty$

D'altra parte

$$\begin{array}{ccccc} b_n & - & a_n & = & \frac{b-a}{2^n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b_\infty & - & a_\infty & = & 0 \end{array} \quad \text{(banale induzione)}$$

quindi $a_\infty = b_\infty$ e d'ora in poi lo chiamo c.

La conclusione è come nella dim. 2

- $a_n \to c$, $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0$
- $b_n \to c$, $f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0$

$\Big\} f(c) = 0.$

—o—o—

Oss. In tutte queste dim. il p.to c è limite di successioni in cui $f > 0$ e di successioni in cui $f < 0$.

Teorema (Teorema dei valori intermedi) (INTERMEDIATE VALUE THM.)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f è continua in $[a,b]$
(ii) $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$ (o viceversa)
Allora:

$$\exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

Dim. Applico il teo. di esistenza degli zeri a $g(x) := f(x) - \lambda$. □

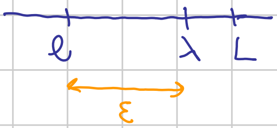
Corollario 1 Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua. Siano

$$\ell := \inf\{f(x) : x \in (a,b)\} \qquad L := \sup\{f(x) : x \in (a,b)\}$$

(possono essere reali oppure $\pm\infty$)

Allora $\forall \lambda$ t.c. $\ell < \lambda < L$ $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \lambda$

Oss. Altro modo di dire la stessa cosa: f assume tutti i valori strettamente compresi tra il suo inf ed il suo sup. I valori ℓ ed L li può assumere o no a seconda dei casi.



Dim. Per la caratterizzazione dell'inf esiste un p.to $A \in (a,b)$ t.c. $f(A) < \lambda$

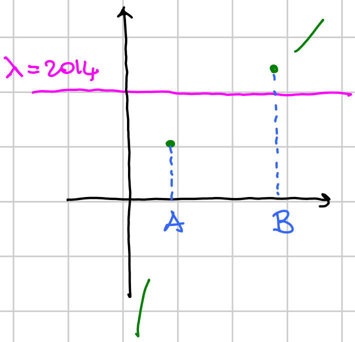
Per la caratterizzazione del sup esiste un p.to $B \in (a,b)$ t.c. $f(B) > \lambda$.

Basta applicare il teo. dei valori intermedi nell'intervallo di estremi A e B (non so quale dei 2 è più grande).

Esempio 1 $\quad f(x) = \log x + x^{28} + \sin(x^2)$

Pensata come $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è surgettiva.

Basta osservare che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Quindi $\inf \{ f(x) : x > 0 \} = -\infty$

$\sup \{ f(x) : x > 0 \} = +\infty$

e quindi f assume tutti i valori intermedi, cioè tutti i possibili valori reali.

ANALISI 1 — LEZIONE 041

Titolo nota 11/11/2014

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

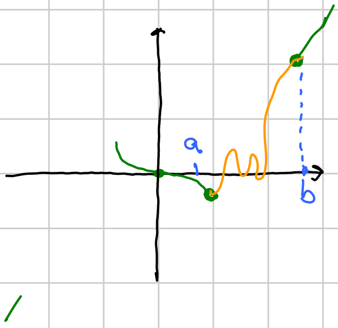
$$\underbrace{x^7 - \sin x^3 + \log(1+x^{20})}_{f(x)} = 2014$$

ha almeno una soluzione reale.

Banale: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (comanda x^7)

Essendo anche f continua, questo garantisce che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva. Questo garantisce che $f(x) = \lambda$ ha almeno una sol. reale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 2 La $f(x)$ di prima è iniettiva?



No! Perché $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$
quindi $f(x)$ ha in $x = 0$ un
flesso a tg. orizz. discendente.
A questo p.to l'equazione
$f(x) = 0$
ha almeno 3 soluzioni reali, quindi f non è iniettiva

$$\boxed{\text{Dim rigorosa che } \exists\, x > 0 \text{ t.c. } f(x) = 0}$$

- Dallo studio locale: $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) < 0$ in $(0, \delta)$.
  Prendo $a \in (0, \delta)$
- Dal limite a $+\infty$: $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) > 0$ $\forall\, x \geq k$
  Prendo $b > a$ e $b > k$

Applico il teo. esistenza degli zeri in $[a, b]$.

Esempio 3 La funzione $f(x) = x + \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

Surgettiva SI! basta guardare i limiti per $x \to \pm\infty$

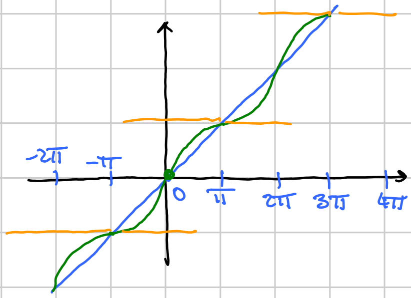
Iniettiva: vedo se per caso è monotona.

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi per lo meno è debolmente crescente. Ora

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

quindi annullamento sporadico, quindi è strett. crescente, dunque iniettiva.



I p.ti $x = \pi + 2k\pi$ sono tutti p.ti di flesso a tangente orizz. ascendente.

Generalizzazione Le funzioni $x \pm a \sin x$, $x \pm a \cos x$ sono iniettive e surgettive ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se e solo se $|a| \leq 1$. Per $|a| > 1$ viene meno l'iniettività in quanto

$$f'(x) = 1 \pm a \cos x \qquad (= 1 \mp a \sin x)$$

e quindi ci sono intervalli con $f'(x) > 0$ e altri con $f'(x) < 0$.

— o — o —

Esempio 4 Una funzione continua che ha un p.to di minimo locale non può essere iniettiva.
Idem per il massimo locale.

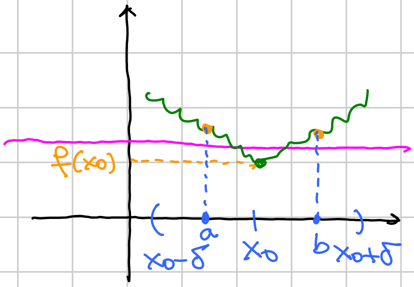
Idea: devo trovare un valore λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per def. di p.to di min. locale

$$\exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \begin{array}{ll} f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \end{array}$$

Prendo $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Ora scelgo

$$f(x_0) < \lambda < \min\left\{ f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right), f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) \right\}$$



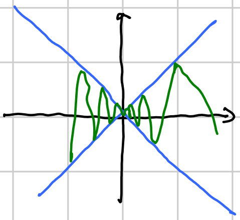
Dico che $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Infatti

- c'è una sol in (x_0, b) per il teo. dei valori intermedi
- c'è una sol. in (a, x_0) per lo stesso motivo.

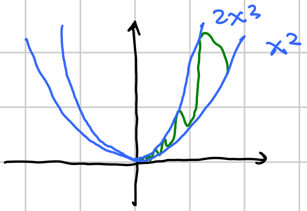
— o — o —

Oss. Se f ha un p.to di min. locale in x_0, NON è detto che $\exists\, \delta > 0$ t.c. f è crescente in $(x_0, x_0+\delta)$
f è decrescente in $(x_0-\delta, x_0)$

Esempio $|x| \sin \frac{1}{x}$
Questo non va



Altro esempio



$$f(x) = x^2 + x^2 \sin^2 \frac{1}{x^{20}}$$

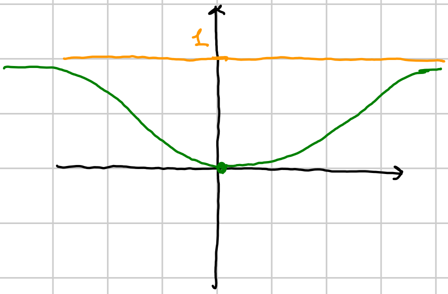
$$f'(x) = 2x + 2x \sin^2 \frac{1}{x^{20}} - \boxed{x^2 \cdot 2 \sin \frac{1}{x^{20}} \cos \frac{1}{x^{20}} \frac{20}{x^{21}}}$$

vicino a 0 ci sono valori per cui è positivo enorme e valori per cui è neg. enorme

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

f è continua in $x = 0$ e quindi su tutto $\mathbb{R}$.



$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x \neq 0$$

In $x = 0$ faccio il rapporto incrementale e diventa

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

Questo mostra che f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e f' è continua ovunque (anche in 0).

Per induzione si dimostra che esistono tutte le derivate e sono del tipo

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

↑ P_k e Q_k polinomi

Conseguenza: f è derivabile infinite volte e $f^{(k)}(0)=0$ per ogni k.

Quindi ha lo sviluppo di Taylor per ogni n ed è il polinomio nullo

$$f(x) = o(x^n) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Usando questa si possono pensare esempi del tipo

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x} \qquad \text{o peggio!}$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 042

Titolo nota 13/11/2014

$\boxed{\text{MAX - MIN per funzioni di una variabile}}$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $f : A \to \mathbb{R}$

$\{f(x) : x \in A\} = f(A)$ = insieme dei valori assunti da $f(x)$ quando x varia in A

Def. Si dice che $M = \max\{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = M$.

Tutti i p.ti x che soddisfano (ii) si dicono p.ti di max.

Oss. ① Il max non è obbligato ad esistere

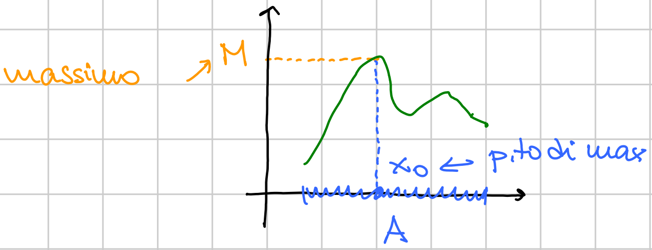
② Se esiste è unico

③ Se anche esiste il max, i p.ti di max possono non essere unici.

Achtung! Non confondere MAI

- il massimo M, che è un valore assunto dalla funzione (è "una y")
- i p.ti di massimo, che sono "le x" in cui il valore M viene raggiunto

Definizioni analoghe valgono per minimo e p.ti di minimo.



Teorema misterioso (WEIERSTRASS edulcorato)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora esistono per forza

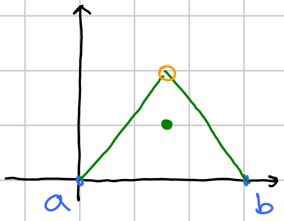
$$\boxed{\begin{array}{l} \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{array}}$$

Oss. Le ipotesi importanti sono che

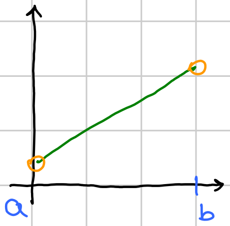
- f è continua
- l'intervallo comprende gli estremi
- l'intervallo è un insieme limitato

Quando falliscono le ipotesi (almeno una), allora BOH, cioè max / min possono esistere oppure no.

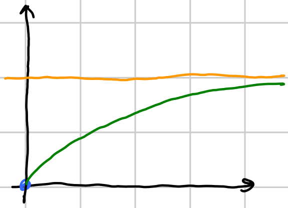
Esempi



Manca continuità in un p.to



Mancano gli estremi all'interv.



L'insieme è la semiretta $[0, +\infty)$

Esercizi
① Esiste $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
② Esiste $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
③ Esiste $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua per ogni $x \neq \frac{1}{2}$ che non ha né max, né min?

Esempio facile Esiste $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ continua (o anche no) che ha sia max sia min.

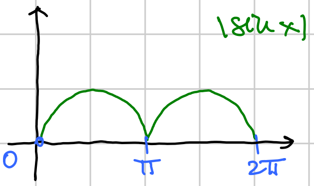
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, come trovo max e min?

I candidati ad essere p.ti di max / min. ricadono in queste 3 categorie

- p.ti STAZIONARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- p.ti SINGOLARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- p.ti del BORDO : $x = a$ e $x = b$.

Operativamente: trovo i p.ti delle 3 categorie, li sostituisco tutti nella funzione: quelli in cui vale di più sono i p.ti di max, quelli in cui vale meno sono i p.ti di min.

Esempio 1 $[a,b] = [0, 2\pi]$, $f(x) = |\sin x|$



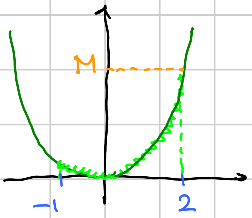
Max = 1 p.ti di max: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

stazionari interni

min = 0 p.ti di min: $x = 0$, $x = 2\pi$, $\underline{x = \pi}$

bordo singolare interno

Esempio 2 $[a,b] = [-1, 2]$, $f(x) = x^2$



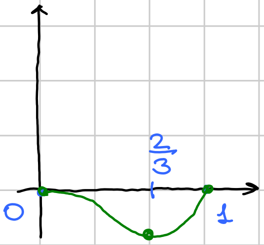
Max = 4 p.to di max: $x = 2$

bordo

min = 0 p.to di min: $x = 0$

stazionario interno

Esempio 3 $[0, b] = [0, 1]$ $f(x) = x^3 - x^2$



- stazionari interni: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x-2) = 0$$

$x = 0$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$ ↖ stazionario interno

- singolari interni: $\emptyset$ (f è derivabile ovunque)
- bordo: $\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = 1}$

Ho 3 candidati:

$x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0$ ← Max

$x = 1 \rightsquigarrow f(1) = 0$

$x = \frac{2}{3} \rightsquigarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$ ← min

Max $= 0$ p.ti di max: $x = 0$ e $x = 1$
bordo

Min $= -\frac{4}{27}$ p.to di min: $x = \frac{2}{3}$ ← staz. interno

Oss. • Non è detto che tutti i candidati siano alla fine p.ti di max / min.

• Se ci sono dubbi su un p.to singolare, tanto vale metterlo in elenco e male non fa.

Esempio $f(x) = x\,|\sin x|$

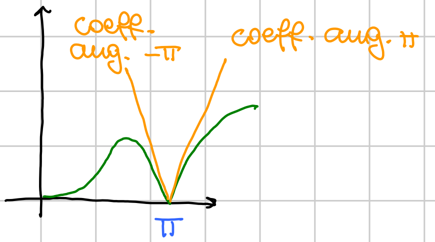
$x = 0$ è un p.to singolare? NO, perché $f'(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\,|\sin h|}{\cancel{h}} = 0$$

$x = \pi$ è un p.to singolare? SI, perché

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(\pi+h)\,|\sin(\pi+h)|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(\pi+h)\sin h}{h} = \pi$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h} = \dots = -\pi$$



— o — o —

PRIMA VARIANTE DI W. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica e continua.
Allora max e min esistono per forza

Dim. Sia T **UN** periodo qualunque. Allora per W. vero esiste

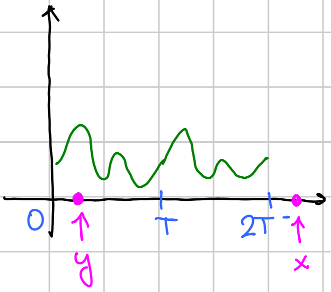
$$m = \min\{f(x) : x \in [0,T]\}$$

e sia $x_0 \in [0,T]$ un qualunque p.to di min. corrispondente.
Allora dico che

$$m = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Infatti, preso un qualunque $x \in \mathbb{R}$ esiste un $y \in [0,T]$ tale che

$$x = y + kT \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Per periodicità

$$f(x) = f(y) \geq m$$

Quindi $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
D'altra parte, già sappiamo che $\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = m$.

Per dimostrare per bene l'esistenza di y (dato x) considero i p.ti del tipo kT. Allora per forza $\exists\, k_0 \in \mathbb{Z}$ t.c. $\underbrace{k_0 T \leq x < (k_0+1)T}_{\text{questi intervalli ricoprono la retta}}$

Ora $y := x - k_0 T$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 043

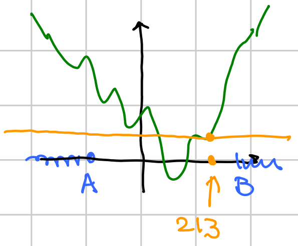
Titolo nota 13/11/2014

WEIERSTRASS GENERALIZZATO Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.



Dim. Considero $f(213)$.

Per il limite a $-\infty$ esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq f(213) \quad \forall\, x \leq A$$

Per il limite a $+\infty$ esiste $B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geqslant f(213) \quad \forall\, x \geq B$$

Wlog posso assumere $B > A$, anzi posso assumere $A < 213 < B$

Per W vero esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

Dico che è il minimo anche su tutto $\mathbb{R}$.

Prendo $x \in \mathbb{R}$ e dimostro che $f(x) \geq m$. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [A, B]$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m.
- Se $x \leq A$, allora

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } A}}{\geq} f(213) \underset{\uparrow}{\geq} m$$

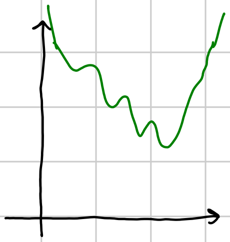
perché $213 \in [A, B]$, quindi 213 ha giocato nella gara per la definizione di m

- Se $x \geq B$, allora è come il p.to precedente.

— o — o —

Del tutto analogo: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



allora esiste il minimo (esercizio).

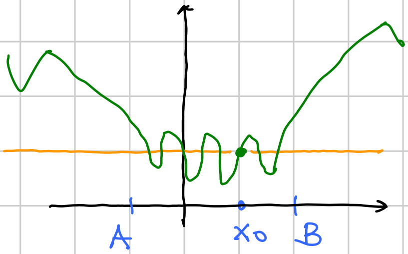
Ancora più generale Quello che abbiamo veramente usato è

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua
- esiste un intervallo $[A,B]$ ed esiste $x_0 \in [A,B]$ t.c.

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \geq B$$
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \leq A$$

Sotto queste ipotesi

$$\min\{f(x) : x \in [A,B]\}$$
$$= \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$



— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^{14} - \log(1+x^{20}) + x^7 \sin x$

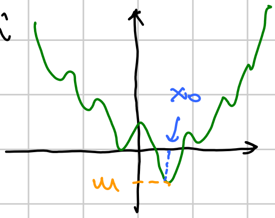
Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva? è surgettiva?

Si vede subito che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Quindi per W. generalizzato esiste il minimo, quindi addio surgettività.
L'iniettività me la gioco sul livello $m+4$, cioè l'equazione

$$f(x) = m+4$$

ha almeno 2 soluzioni, una in $(x_0, +\infty)$ una in $(-\infty, x_0)$ per il teorema dei valori intermedi.

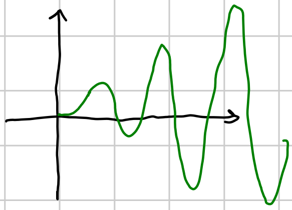


Esempio 2 $f(x) = x^4 - \log(1+x^{20}) + x^7 \cos x$

Come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

NO ↓ SI

in 0 si comporta
come $x^4 \Rightarrow$ min. loc.
$\Rightarrow$ addio iniettività



Per la surgettività considero la successione

$a_n = 2\pi n$ (così $\cos = 1$)

$b_n = 2\pi n + \pi$ (così $\cos = -1$)

Si vede facilmente che

$$f(a_n) \to +\infty \qquad e \qquad f(b_n) \to -\infty$$

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ trovo un p.to in cui vale − e un p.to in cui vale di +. Concludo per esistenza degli zeri.

— o — o —

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

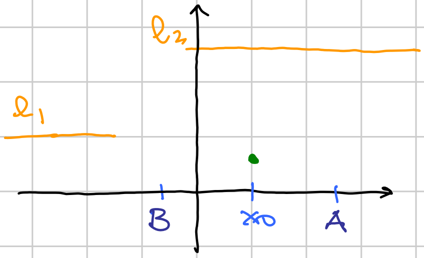
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$$

Domande: esistono max / min ? Non è detto (arctan x)

può essere surgettiva ? NO

Dim non surgettività Prendo $m = \min\{\ell_1, \ell_2\}$. Ho 2 casi

- se $f(x) \geq m$ sempre, allora addio surgettività
- se $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < m$, allora f ammette un minimo $m_1 \in \mathbb{R}$ ($m_1 < m$) e quindi addio surgettività



Per il limite a $-\infty$ esiste $B < x_0$ t.c. $f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \leq B$

Per il limite a $+\infty$ esiste $A > x_0$ t.c. $f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \geq A$.

A quel p.to il minimo in $[B, A]$ è il minimo generale.

— o — o —

Esercizio Consideriamo l'equazione

$$\underbrace{\sinh x - 10^{10} x \cos(x^2) + x^3 \arctan x}_{f(x)} = \lambda$$

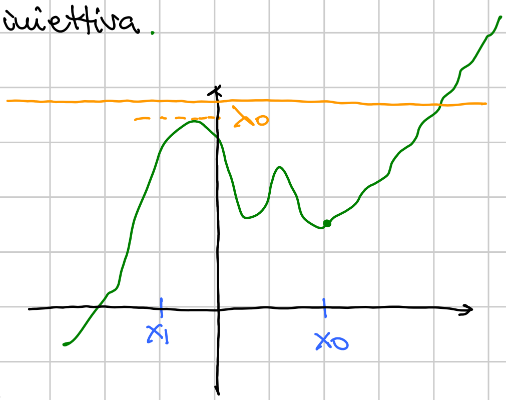
È evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists$ soluzione (surgettività).

$\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \lambda \geq \lambda_0$ la soluzione è unica

Derivata: $f'(x) = \cosh x$ + roba polinomiale
(meno forte quando $x \to +\infty$ di $\cosh x$)

Quindi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

Di conseguenza $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) > 0$ per ogni $x \geq x_0$
quindi $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è iniettiva.
Mi piacerebbe che esistesse



$$\max\{f(x) : x \leq x_0\}$$

Se esistesse questo è il λ_0 che sto cercando
Infatti per ogni $\lambda > \lambda_0$ la soluzione di $f(x) = \lambda$ (che so già esistere) sarà per forza $\geq x_0$ (prima non può essere perché λ_0 è il max) e dopo x_0 è unica per iniettività.

Per dimostrare l'esistenza del max per $x \leq x_0$ bisogna fare un Weierstrass generalizzato.
Basta prendere $x_1 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \leq x_1$$

e poi dimostrare al solito modo (farlo!) che il max in $[x_1, x_0]$ è in realtà anche il max in $(-\infty, x_0]$

—o—o—

ANALISI 1 – LEZIONE 044

Titolo nota 17/11/2014

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire il grafico di una funzione su tutto l'insieme di definizione

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Punto 1 Eventuali simmetrie. In questo caso è dispari

$$f(-x) = -f(x)$$

Punto 2 Dove ha senso e dove è continua: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

In questa zona è continua per teo. sulle funzioni continue

Punto 3 Limiti agli estremi della zona di continuità. In questo caso

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

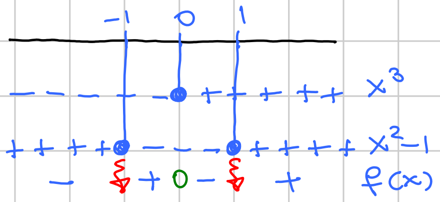
(Quelli della seconda riga sono i primi cambiati di segno)

Punto 4 Zeri e segno, cioè risolvere

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$



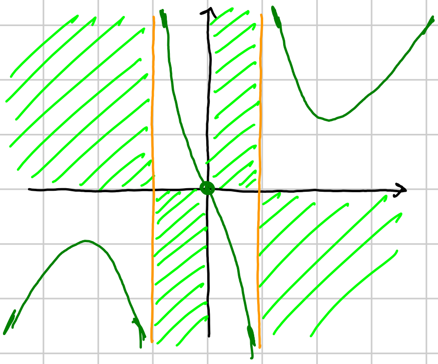
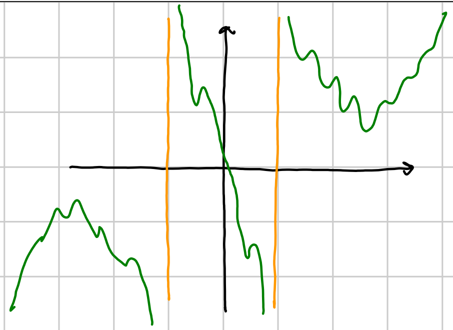


Grafico "supposto"

$\boxed{\text{Punto 5}}$ Segno della derivata e monotonia.



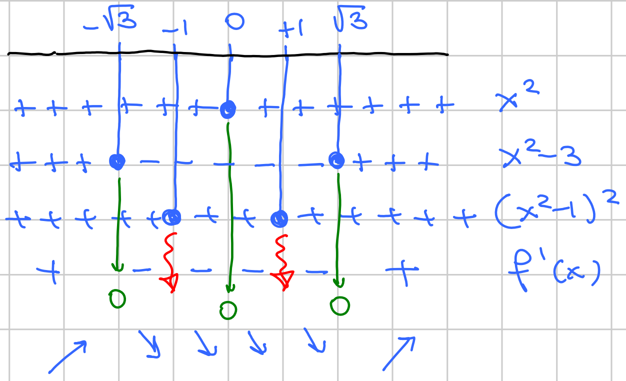
Altro grafico compatibile con i primi 4 p.ti.

f(x) è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{+1,-1\}$ e

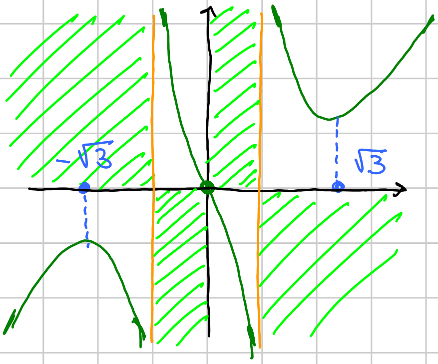
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Voglio risolvere $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$



$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}, 0$



Possiamo dire che $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ sono p.ti di min / max locale.

$\boxed{\text{Punto 6}}$ P.ti di max / min locale e globale (occhio: globale ⇒ locale): $x = \sqrt{3}$ (min. loc.)
$x = -\sqrt{3}$ (max. loc.)
Globali non ce ne sono.

Complementi al p.to 5 : classi di regolarità

Si dice che $f \in C^0(D)$ se f è continua in ogni p.to di $D \subseteq \mathbb{R}$
(nel nostro caso $f \in C^0(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1,-1\}}_{D})$)

Si dice che $f \in C^1(D)$ se f è derivabile in D e $f' \in C^0(D)$

" " " $f \in C^k(D)$ se f è derivabile k volte (almeno) in D e $f^{(k)} \in C^0(D)$.

Si dice che $f \in C^\infty(D)$ se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Oss. Da C^1 in poi c'è come prerequisito che D sia $\boxed{\text{APERTO}}$, cioè che ogni p.to di D sia interno a D, cioè

$$\forall x \in D \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ (x-\delta, x+\delta) \subseteq D.$$

Esempi classici di insieme aperto:

- tutto $\mathbb{R}$
- intervalli senza estremi: (a,b)
- semirette senza estremo: $(-\infty, a)$ oppure $(a, +\infty)$.

Def. estesa (nel caso di intervali $[a,b]$ o semirette $[a,+\infty)$, $(-\infty, a]$)
Si dice che $f \in C^1([a,b])$ se $f \in C^1((a,b))$ ed esiste $g \in C^0([a,b])$ tale che $g(x) = f'(x)$ per ogni $x \in (a,b)$.
(sostanzialmente f' è continua in (a,b) e si può estendere ad una funzione continua g definita in tutto $[a,b]$)

Esercizio La definizione sopra è equivalente a definire $f'(x)$ anche agli estremi come limite del rapp. increm. dx/sx e imporre la continuità in $[a,b]$.

Analogamente si definisce $f \in C^k([a,b])$ e C^∞ ...

Nell' esempio possiamo dire che $f \in C^\infty(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1,-1\}}_{\text{insieme aperto}})$

$\boxed{\text{Punto 7}}$ Asintoti → orizzontali
→ verticali
→ obliqui

$\boxed{\text{Asintoti orizz.}}$ La retta $y = l$ è asintoto orizz. per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

La stessa retta è asintoto orizz. per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

$\boxed{\text{Asintoto verticale}}$ La retta $x = x_0$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una di queste 4 possibilità

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$$

Nell'esempio le rette $x = +1$ e $x = -1$ sono asintoti vert.

$\boxed{\text{Asintoto obliquo}}$ La retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0}$$

La retta ..., per $x \to -\infty$ se

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0}$$

<u>Come calcolo gli asintoti obliqui?</u> Esistono se e solo se

$$\boxed{m = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}} \qquad \boxed{n = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}}$$

<u>Dim.</u> Se $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{f(x) - mx - n}{x}}_{\frac{0}{+\infty} = 0} + \underbrace{\frac{mx + n}{x}}_{m} = m$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\boxed{f(x)-mx-n}}_{0} + n = n$$

Altra implicazione: se i due limiti sono reali, allora dal secondo limite deduco che

$$\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{f(x)-mx-}_{n}n) = n-n=0$$

Oss. Supponiamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$. Possiamo dedurre che $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

C'è una implicazione: se $\frac{f(x)}{x}$ è una forma del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, allora posso provare con De L'Hôpital e ottenere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}$$

a patto che il 2° esista.

Nell'esempio $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1$

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-1}-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x}{x^2-1} = 0$$

quindi $y=x$ è asintoto obliquo.

ANALISI 1 - LEZIONE 045

Titolo nota 17/11/2014

Precisazioni sugli asintoti obliqui

1° fatto Può essere che $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \to +\infty$, ma

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) \quad \text{non esiste}$$

(se esiste è per forza m)

Ad esempio

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^{20})}{x}$$

È chiaro che $y = x$ è asintoto obliquo $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$,

ma $$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \underbrace{\frac{20\, x^{\overset{18}{\cancel{19}}} \cdot \cos x^{20}}{\cancel{x}}}_{\text{non esiste}} - \underbrace{\frac{\sin(x^{20})}{x^2}}_{0}$$

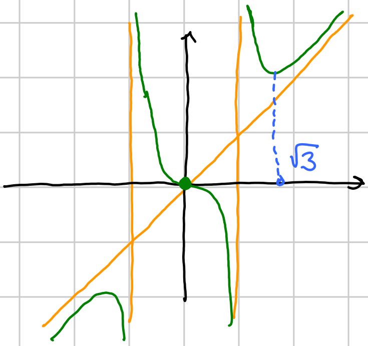
2° fatto Gli asintoti orizz. sono un caso particolare di asintoto obliquo.

3° fatto Può esistere $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ ma non esserci l'asintoto obliquo a $+\infty$.

Esempio: $f(x) = 2x + \log x$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, ma

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

Un asintoto obliquo dà una info sulla crescita della funzione a $\pm\infty$



Nell' esempio, per decidere se $f(x)$ "tende all'asintoto" da sopra o da sotto posso risolvere $f(x) = x$ oppure $f(x) > x$

$$f(x) = x \iff \frac{x^3}{x^2-1} = x \iff \frac{x^3}{x^2-1} - x = 0$$

$$\iff \frac{x}{x^2-1} = 0 \iff x = 0$$

Punto 8 Convessità / Concavità

"Def. geometrica di convessità"

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni a e b in D si ha che tutto il segmento $[a,b] \subseteq D$.

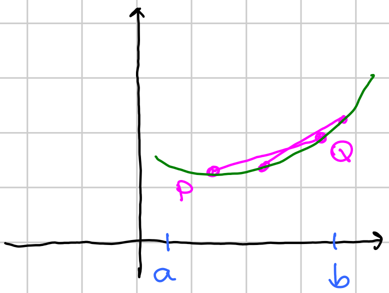
Esercizio I sottoinsiemi $D \subseteq \mathbb{R}$ convessi sono tutti e soli quelli del seguente elenco:

- → banali: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, un solo p.to
- → intervalli, con o senza estremi
- → semirette, con o senza estremi

Idea della dim: prendo $\sup D$ e $\inf D$ e mostro che tutti i p.ti strettamente compresi stanno in D.

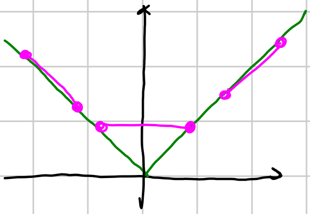
"Def" Sia D un insieme convesso. Una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti P e Q del grafico, tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico.

Si dice concava se PQ sta sempre "sotto" il grafico, cioè se $-f(x)$ è convessa.



Precisazione : quella data è la definizione di debolmente convessa. Strettamente convessa vuol dire che grafico e segmento si incontrano solo agli estremi.

Esempio $f(x) = |x|$



convessa, ma non strett. convessa

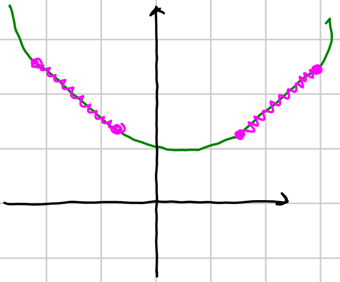
$f(x) = x^2$ ⤳ strett. convessa.

Teorema misterioso (convessità e derivata seconda)
Sia D un insieme convesso e sia $f: D \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che $f''(x)$ esista in D.
Allora valgono le seguenti implicazioni:
(i) Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$, allora f è convessa in D
(ii) Se f è convessa in D, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$
(iii) Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$, allora f è strett. conv. in D
$\boxed{\text{(iv) Se } f \text{ è strett. conv. in D, allora } f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in D}$
NO

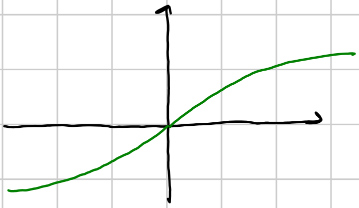
Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv. in $\mathbb{R}$, ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x = 0$.

Achtung! Una funzione può essere convessa e avere $f'(x)$ che non esiste da qualche parte (figuriamoci $f''(x)$)
(ad esempio $f(x) = |x|$ ha f' che non esiste in $x = 0$).

Teorema misterioso (convessità e retta tangente)
Il grafico di una funzione convessa sta sopra tutte le rette tangenti che esistono.



Oss. Una funzione convessa ma non strettamente convessa ha il grafico con dei tratti rettilinei.
In questi tratti $f''(x) \equiv 0$, quindi vale una specie di monotonia 3:
se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e non esiste nessun intervallo $[a,b] \subseteq D$ in cui $f''(x) = 0$ a tappeto, allora $f(x)$ è convessa strettamente in D.



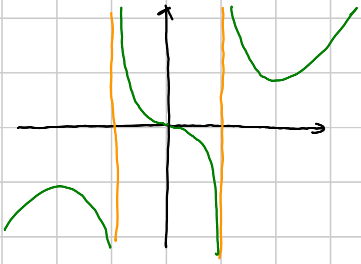
Esempio $f(x) = \arctan x$
Ci aspettiamo
- convessa in $(-\infty, 0]$
- concava in $[0, +\infty)$

Si può verificare con $f''(x)$

Def. Si dice che x_0 è un p.to di flesso per $f(x)$ se esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ è convessa in } [x_0, x_0+\delta] \\ f \text{ è concava in } [x_0-\delta, x_0] \end{array}\right\} \text{ o viceversa}$$

Nei p.ti di flesso la retta tangente (posto che esista) attraversa il grafico (cioè $f(x)$ sta sopra a dx e sotto a sx, o viceversa).



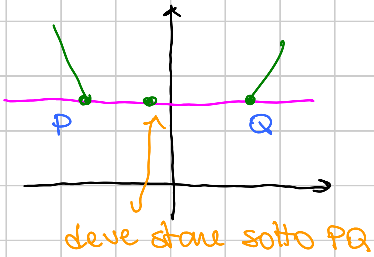
Tornando all'esempio $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, ci aspettiamo che sia
- convessa in $(-1, 0]$ e in $(1, +\infty)$
- concava in $(-\infty, -1)$ e in $[0, 1)$.

Ci aspettiamo che $x = 0$ sia l'unico p.to di flesso

Oss. In un p.to di flesso la derivata 2^a, se esiste, si annulla.
Non vale il viceversa, cioè può essere $f''(x_0) = 0$ senza che x_0 sia un p.to di flesso
(Pensare a $f(x) = 3x + x^4$)

Esercizio Se $f(x)$ è strett. convessa, allora l'eq.
$$f(x) = \lambda$$
ha al massimo 2 soluzioni.

Dim. Se ne avesse 3 ...



Domanda: se $f(x)$ e $g(x)$ sono strett. convesse e non coincidono in nessun intervallo, cosa possiamo dire del numero di soluzioni di
$$f(x) = g(x)$$

Niente! Possono anche essere infinite

Esempio: $f(x) = 7x^2$ $\qquad$ $g(x) = 7x^2 + \sin x$

ANALISI 1 - LEZIONE 046

Titolo nota 18/11/2014

Motivi per fare uno studio globale di funzioni:

→ decidere iniettività / surgettività

→ calcolare inf / sup / max / min di una $f(x)$ in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

→ risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$ o $f(x) = \lambda$

→ risolvere disequazioni del tipo $f(x) > 0$.

Achtung! È pericoloso risolvere equazioni/disequazioni del tipo

$$f(x) = g(x) \qquad f(x) > g(x)$$

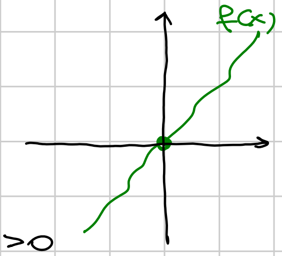
che comportano il confronto tra 2 grafici.

Molto meglio ridursi a $\underbrace{f(x)-g(x)}_{\varphi(x)} = 0$, $\underbrace{f(x)-g(x)}_{\varphi(x)} < 0$

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\underbrace{2x+\sin x}_{f(x)} > 0$

Osservo che $f(0) = 0$ e che $f'(x) = 2 + \cos x \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ è strett. cresc., quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Conclusione $2x + \sin x > 0 \iff x > 0$



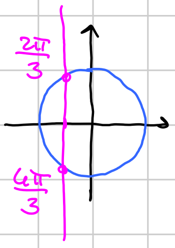
Esempio 2 Risolvere la disequazione $\underbrace{x + 2\sin x}_{f(x)} > 0$

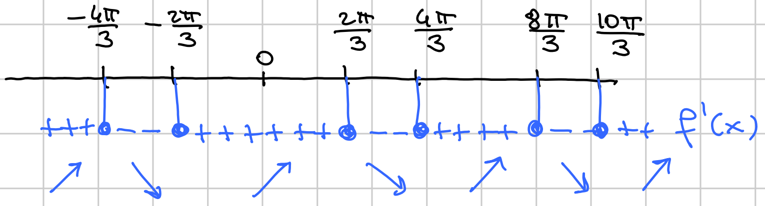
Ora non ho la monotonia.

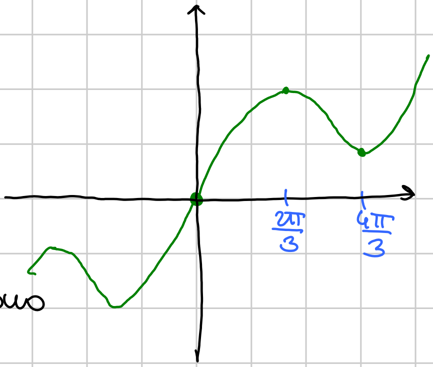
$f'(x) = 1 + 2\cos x$

Provo a capire il segno

$f'(x) > 0 \iff 1 + 2\cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$







Osservo che $f(0)=0$ e che f è dispari.

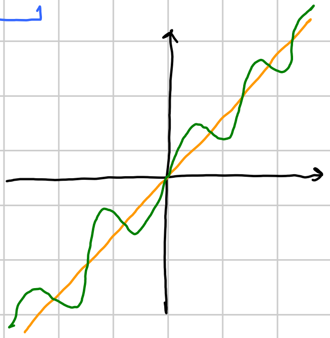
È necessario calcolare

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$$

In tutti i successivi p.ti di min. loc., che sono $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ sarà

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underbrace{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}_{\geq \frac{4\pi}{3}} + \underbrace{2\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)}_{-\sqrt{3}} > 0$$

Zoommando indietro il grafico è così →



Conclusione: $x + 2\sin x > 0 \iff x > 0$

— o — o —

Esempio 3 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Se uno confronta i grafici

Congettura:

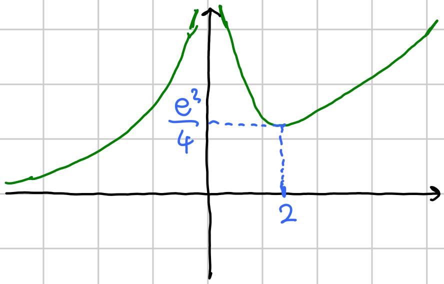
→ se $\lambda < 0$ nessuna soluzione

→ $\lambda > 0$ piccolo ⇝ 1 soluzione

→ $\lambda > 0$ grande ⇝ 2 soluzioni

Metodo sistematico: studio $\underset{f(x)}{\boxed{\frac{e^x}{x^2}}} = \lambda$

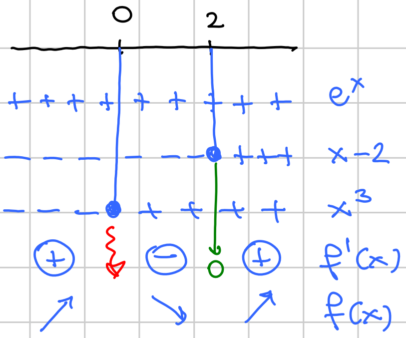
Oss.: dividendo per x^2 non perdo sol. perché $x=0$ non è mai sol.



Calcolo $f'(x)$ per confermare il grafico.

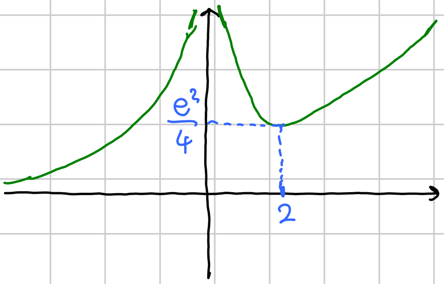
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

Studio il segno di $f'(x)$, che conferma il grafico e individua il p.to di minimo locale in $x = 2$ con valore $\frac{e^2}{4}$.

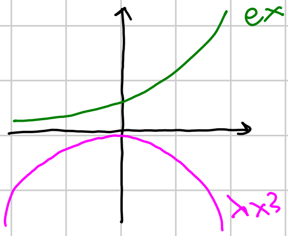


Soluzioni di $f(x) = \lambda$

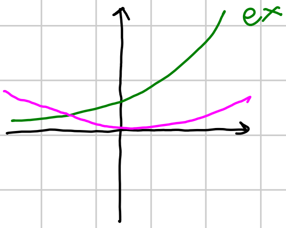
- $\lambda \leq 0$ ⇝ 0 sol.
- $0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$ ⇝ 1 sol.
- $\lambda = \frac{e^2}{4}$ ⇝ 2 sol.
- $\lambda > \frac{e^2}{4}$ ⇝ 3 sol.



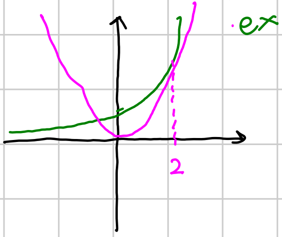
Ora possiamo veramente capire il confronto di grafici



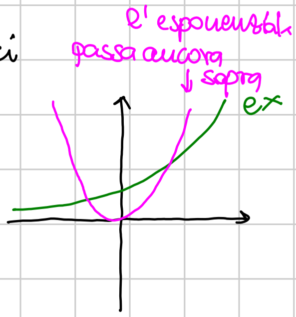
$\lambda \leq 0$



$0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$



$\lambda = \frac{e^2}{4}$



$\lambda > \frac{e^2}{4}$

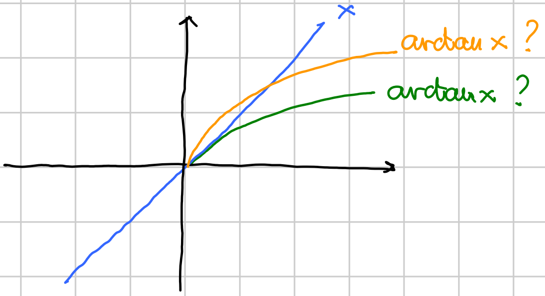
— o — o —

Esempio 4 Risolvere la disequazione $\arctan x \leq x$

Se confronto i grafici, è pericoloso

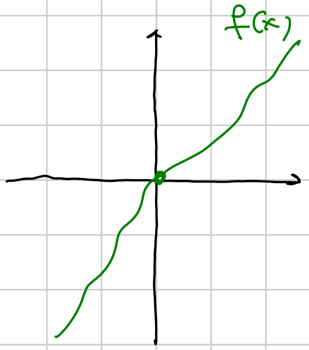
Per decidere, studio la funzione

$$f(x) = x - \arctan x$$



Osservo che $f(0)=0$, $f(x)$ è dispari e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$



e $f'(x)=0$ se e solo se $x=0$, quindi c'è annullamento sporadico.

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $f(x)$ è strett. crescente

quindi

$f(x) > 0 \iff x > 0$

$f(x) < 0 \iff x < 0$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

Morale: $\arctan x \leq x \iff x \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $x=0$.

— o — o —

Allo stesso modo si dimostrano le seguenti disuguaglianze:

$$\left.\begin{array}{lcl} \sin x \leq x & \iff & x \geq 0 \\ \arctan x \leq x & \iff & x \geq 0 \\ \log(1+x) \leq x & \iff & x \geq 0 \\ e^x \geq 1+x & \iff & x \geq 0 \end{array}\right\} \text{inoltre vale il segno di uguale se e solo se } x=0$$

Si potrebbe andare avanti:

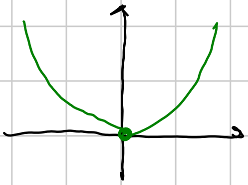
$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \iff x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$ con l'uguaglianza se e solo se $x=0$

Volendo dimostrare quest'ultima, studio $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0$

Osservo che $f(x)$ è pari, $f(0)=0$, e $f'(x) = x - \sin x \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ (per disug. precedente) con $f'(x)=0 \iff x=0$.

Quindi $f(x)$ è strett. cresc. per $x \geq 0$



Analogo: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \iff x \geq 0$

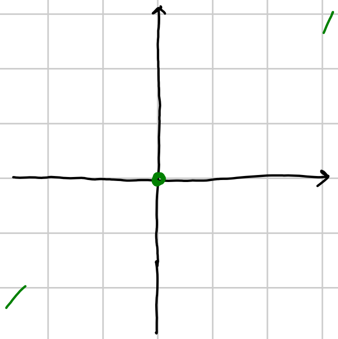
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 047

Titolo nota 18/11/2014

<u>Esempio 1</u> Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$.

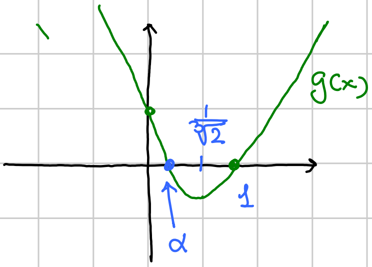
Considero $f(x) = x - \arctan(x^2)$.
Se fosse monotona...



$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Den. >0 sempre, quindi il segno dipende dal segno di $1+x^4-2x$.
Pongo $g(x) = x^4-2x+1$ e studio questa

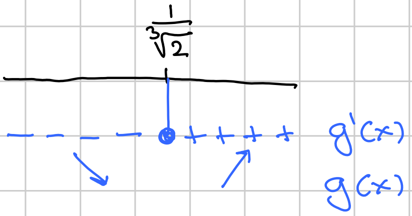
$$g'(x) = 4x^3-2$$



$\alpha \in (0,1)$

Ci sono vari modi di uscirne.

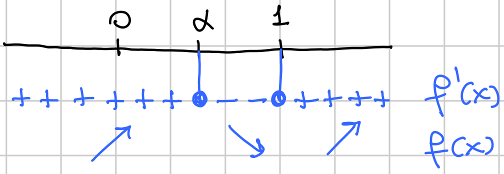
$\boxed{1^o \text{ modo: standard}}$ Segno di $g'(x)$



Dal grafico di $g(x)$ abbiamo dedotto che esiste $\alpha \in (0,1)$ t.c.

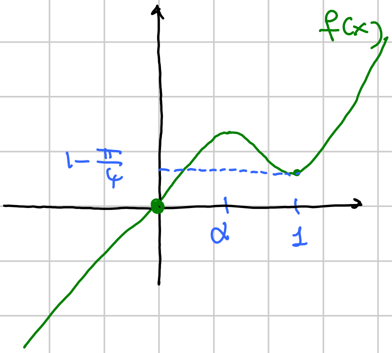
$g(x) > 0 \iff x \in (-\infty, \alpha) \cup (1, +\infty)$
$g(x) < 0 \iff x \in (\alpha, 1)$
$g(x) = 0 \iff x = \alpha$ oppure $x = 1$

Dal segno di $g(x)$ deduciamo quello di $f'(x)$, cioè



Punto decisivo: calcolare

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

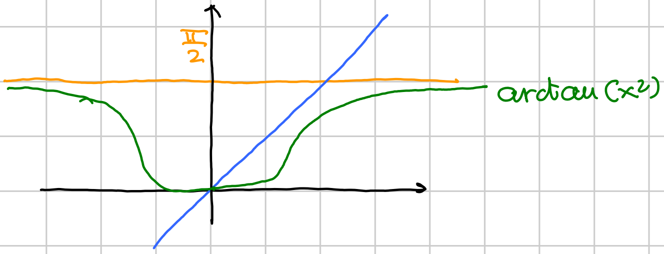


Conclusione

$$\arctan(x^2) \leq x \iff x \geq 0$$

con segno di uguale solo per $x=0$.

Confronto tra grafici



$\boxed{\text{2° modo: risparmioso}}$

Per $x<0$ è ovvio che $\arctan(x^2) > x$

Per $x \in (0,1)$ abbiamo

$$\arctan(x^2) < \arctan x < x$$

Disug. classica

$x^2 < x$ e arctan è monotona

per $x=1$ faccio il conto e $x - \arctan x > 0$

per $x>1$ riprendo le funzioni precedenti e ho $g'(x) > 0$, quindi $g(x)$ strett. crescente, quindi $g(x) > g(1) = 0$, quindi $f'(x) > 0$, quindi $f(x) > f(1) > 0$, da cui

$$x > \arctan(x^2).$$

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che esiste una costante $c>0$ tale che

$$e^x \geq c(x^2-7) \quad \forall x \geq 0$$

Idea: isolare c. $\boxed{\frac{e^x}{x^2-7} \geq c}$ $\boxed{\frac{1}{c} \geq (x^2-7)e^{-x}}$

OK perché ho diviso per e^x

così non è equivalente perché non posso dividere per roba di segno ignoto

Volendo salvare il primo approccio, posso dire

- per $x \in [0,\sqrt{7}]$ ho LHS $> 0 \geq$ RHS per ogni $c>0$, quindi la disug. data è gratis
- per $x > \sqrt{7}$ posso dividere e mi riduco a trovare $c>0$ t.c

$$\frac{e^x}{x^2-7} \geq c \qquad \text{per ogni } x > \sqrt{7}$$

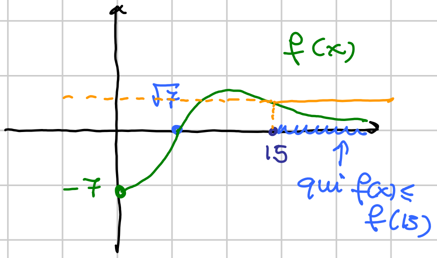
Seguiamo la via $\underbrace{\boxed{(x^2-7)e^{-x}}}_{f(x)} \leq \frac{1}{c}$

Mi basta dimostrare che $f(x)$ ha massimo per $x \geq 0$ e poi porre $\frac{1}{c} \geq \max$ (in realtà basterebbe

$$\sup\{f(x) : x \geq 0\} < +\infty \;).$$

A questo punto basta osservare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ per dedurre

che $f(x)$ è limitata inferiormente e superiormente per $x>0$.
Dalle varianti di Weierstrass segue
che $f(x)$ ammette pure max / min in $x \geq 0$



$\boxed{\text{Dim. che esiste il max}}$ Prendo $x = 15$, cioè un p.to in cui f è >0.
Poiché $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, dalla def. di limite ho che esiste $k \geq 15$ tale che $f(x) \leq f(15)$ per ogni $x \geq k$
Ora applico W. in $[0,k]$ e trovo il max in $[0,k]$ che è anche max in $[0,+\infty)$ (vedi lezione corrispondente).

Nell'esempio il max si calcola pure

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2-7)e^{-x} = (2x - x^2 + 7)e^{-x}$$

Quindi $f'(x)$ si annulla dove si annulla x^2-2x-7

$$x = 1+\sqrt{8} = 1+2\sqrt{2}$$

Conclusione: il max si ha per $x = 1+\sqrt{8}$ e vale $f(1+\sqrt{8})$. Ponendo $\frac{1}{c} = \max$ si trova non solo che esiste $c>0$ ma si trova il c ottimale per cui vale.

<u>Esempio 3</u>
① $\exists c>0$ t.c. $x^2+1 \geq c\,(e^{3x}+\arctan x)$ $\forall x \in [0,7]$ OK
② $\exists c>0$ t.c. $x^2-1 \geq c\,(e^{3x}+\arctan x)$ $\forall x \in [0,7]$ NO
③ $\exists c>0$ t.c. $x^2+1 \geq c\,(e^{3x}+\arctan x)$ $\forall x \geq 0$ NO

La ③ è NO perché dovrebbe essere $\frac{1}{c} \geq \underbrace{\boxed{\frac{e^{3x}+\arctan x}{x^2+1}}}_{f(x)}$ per ogni $x \geq 0$ e se faccio il limite per $x \to +\infty$ il RHS $\to +\infty$, quindi è assurdo

La ① è OK. La $f(x)$ è continua in $[0,7]$ per il metateorema, quindi per W. ha max e basta prendere $\frac{1}{c} \geq \max$

La ② è NO perché per $x \in (0,1)$ abbiamo LHS <0 e RHS >0. Gli approcci basati su isolare c hanno problemi di tutti i tipi

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 048

Titolo nota 20/11/2014

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
Si dice che f è lipschitziana in A se esiste una costante L tale che

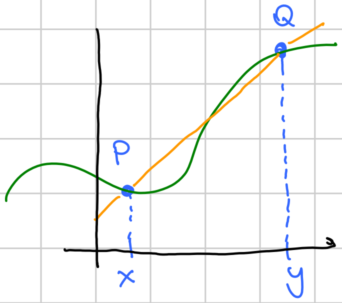
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Oss. Se una certa L va bene, allora tutte le $L' \geq L$ vanno bene ugualmente.
La più piccola L che posso mettere si dice costante di Lip. di f in A ed è data dalla formula

$$L = \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}$$

Interpretazione geom. Per $x \neq y$ divido e ottengo

$$\underbrace{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}}_{\text{coeff ang. retta PQ}} \leq L \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad x \neq y$$



Quindi: f è Lip. in A se e solo se le rette che congiungono 2 p.ti qualunque del grafico hanno pendenza limitata.
È come dire che il grafico ha pendenza limitata.

Esempio 1 $f(x)=x^2$ è Lip. su $\mathbb{R}$? No

Pongo $x=0$ e $y=n$ nella definizione

$$|f(y)-f(x)| \le L|y-x|$$

$n^2 \le Ln$ quindi $n \le L$ che è impossibile $\forall n \in \mathbb{N}$

In alternativa potevo usare $x=n$, $y=n+1$

Esempio 2 $f(x)=x^2$ è Lip. in $[-30,30]$? SI

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\substack{\le 60 \text{ nell'}\\ \text{intervallo dato}}} \cdot |x-y| \le 60\,|x-y|$$

Esempio 3 $f(x)=\sqrt{x}$ è Lip. in $[0,1]$? NO

Sostituisco $x=0$ e $y=\frac{1}{n}$ nella def.:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{0}\right| \le L\left|\frac{1}{n}-0\right|, \text{ cioè } \frac{1}{\sqrt{n}} \le L\cdot\frac{1}{n}, \text{ cioè}$$

$\sqrt{n} \le L$ che è impossibile quando $n \to +\infty$.

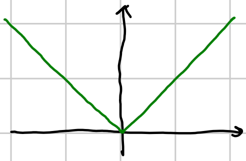
Esempio 4 $f(x)=\sqrt{x}$ è Lip. in $[1,+\infty)$? SI

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \overset{?}{\le} L|x-y|, \quad |\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}| \overset{?}{\le} L|\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}|\cdot|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$$

è equivalente a $1 \le L|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$ e questa è vera anche con $L=\frac{1}{2}$ in quanto

$$1 \le \frac{1}{2}\cdot 2 \underset{\substack{\uparrow \\ x\ge 1 \\ y \ge 1}}{\le} \frac{1}{2}|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$$

Oss. Le funzioni Lip. non è detto che siano derivabili. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è Lip. ma non derivabile in $x=0$



$$\big||x|-|y|\big| \le \underset{L=1}{\uparrow} |x-y|$$

Dim. Partiamo dalla disuguaglianza triangolare

$$|a+b| \le |a| + |b| \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$$

(si dimostra distinguendo un po' di casi). Pongo $a = y$, $b = x-y$
Ottengo

$$|x| \le |y| + |x-y|$$

da cui

$$|x|-|y| \le |x-y|. \qquad (\text{utile se } |x| \ge |y|)$$

Ponendo $a = x$ e $b = y-x$ ottengo

$$|y| \le |x| + |y-x|$$

da cui

$$|y|-|x| \le |x-y| \qquad (\text{utile se } |x| \le |y|)$$

— o — o —

Teorema Supponiamo che A sia un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che $f: A \to \mathbb{R}$ sia derivabile.
Allora

$$\boxed{f \text{ è Lip. in } A \iff |f'(x)| \text{ è limitata in } A}$$

e in tal caso $\quad L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\}$

Dim. Ipotesi: f derivabile e Lip.
Tesi: derivata limitata dalla costante di Lip.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq L$$

sappiamo già che $f'(x_0)$ esiste

poiché $\quad f(y) - f(x) \qquad L\,|y-x|$

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \frac{L\cancel{|h|}}{\cancel{|h|}}$$

<u>Seconda implicazione</u> Ipotesi: $L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\} < +\infty$
Tesi: f è Lip. in A

$$f(y) - f(x) = f'(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sta tra } x \text{ e } y}}{c})\,(y-x) \qquad \text{Lagrange}$$

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leq L\,|y-x|$$

Oss.: per poter applicare Lagrange serve che f sia definita in tutto l'intervallo tra x e y, quindi l'insieme A deve essere convesso

Resta da verificare che L è la più piccola costante che va bene.
Se esistesse una costante $L_1 < L$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq L_1\,|y-x| \qquad \forall x \in A \quad \forall y \in A,$$

allora per l'implicazione precedente potrei concludere che

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} \leq L_1 < L$$

il che contraddice la def. di L.

— o — o —

<u>Esempio 2bis</u> $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-30, 30]$

$f'(x) = 2x$, quindi la costante è

$$\sup\{|2x| : x \in [-30,30]\} = 60$$

Esempio 4 bis $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$

$$\sup\{|f'(x)| : x \geq 1\} = \sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1\right\} = \frac{1}{2}$$

— o — o —

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x-y| \qquad "$$

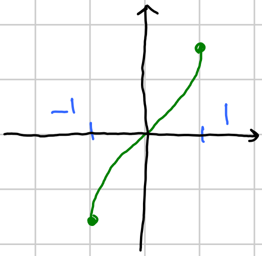
$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y| \qquad "$$

Seguono banalmente dall' essere funzioni con derivata ≤ 1.

Esempio 5 $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $[-1, 1]$? No

Se lo fosse la sua derivata, dove esiste, sarebbe $\leq L$ e questo non è vero

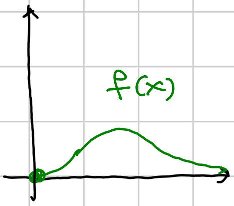
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



che ha problemi quando $x \to \pm 1$

Oss. Se f è Lip. in A e $f'(x)$ esiste anche solo in un pto $x_0 \in A$, allora per forza $|f'(x_0)| \leq L$ (questo perchè i rapporti incrementali sono limitati)

Esempio 6 $f(x) = x^{20} e^{-x}$ è Lip. in $[0, +\infty)$?



$$f'(x) = 20x^{19}e^{-x} - x^{20}e^{-x}$$

Basta ora osservare che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, quindi

per le varianti di Weierstrass $|f'(x)|$ è limitata superiormente, quindi f è Lip.

— o — o —

ANALISI 1 — LEZIONE 049

Titolo nota 20/11/2014

Esercizio 1 Dimostrare che esiste una costante $\boxed{c>0}$ tale che

$$\boxed{\cos^{22}x+\sin^{2014}x\ge c \qquad \forall x\in\mathbb{R}}$$

Dim. Pongo $f(x)=\cos^{22}x+\sin^{2014}x$. Si tratta di una funzione periodica (2π è un periodo).

Continua + periodica $\Longrightarrow$ esiste

$$\min\{f(x):x\in\mathbb{R}\}=\min\{f(x):x\in[0,2\pi]\}=c$$

Resta da verificare che $c>0$.

Ora $c=f(x_0)$ per un qualche $x_0\in\mathbb{R}$. Inoltre

$$f(x_0)>0$$

perché se fosse $f(x_0)=0$ vorrebbe dire che $\sin x_0=\cos x_0=0$ il che non è possibile.

Dim. sbagliata $f(x)>0$ sempre (perché $\sin x$ e $\cos x$ non si annullano contemporaneamente) quindi $c>0$.

Oss. $f(x)=\frac{1}{x}>0$ per ogni $x>0$, ma non è vero che

$$\exists\, c>0 \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{x}\ge c \qquad \forall x>0.$$

È fondamentale l'esistenza del minimo.

Esercizio 2 Dim. che esiste $c>0$ t.c.

$$\frac{1}{\sin x+2\cos x}\le c \qquad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

<u>Dim.</u> Rendo $f(x) = \underset{\geq 0}{\sin x} + 2\underset{\geq 0}{\cos x}$.

nell' intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$

Poiché $\sin x$ e $\cos x$ sono ≥ 0 e non si annullano contemporaneamente, per forza $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Inoltre

$$f(x) \geq \min\{f(x) : x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\} = m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } m = f(x_0) > 0}}{>} 0$$

quindi

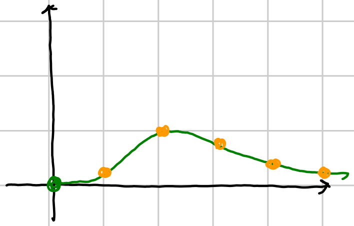
$$\frac{1}{f(x)} \leq \underset{\overset{\parallel}{C}}{\boxed{\frac{1}{m}}} \qquad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

— o — o —

<u>Esercizio 3</u> Calcolare inf / sup / max / min dell' insieme

$$\Big\{ \underbrace{\frac{n^3}{2^n}}_{a_n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \Big\} = \Big\{ \frac{1}{2}, \frac{8}{4}, \frac{27}{8}, \dots \Big\}$$

Possibile approccio: studio la funzione $f(x) = x^3 2^{-x}$ per $x \geq 0$



Parte facile: inf $= 0$ e min non esiste

$a_n \to 0$ e $a_n > 0$ sempre. Questo basta per concludere che inf $= 0$ e min. N.E.

Quasi gratis: esiste il max. Infatti

$$\{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ e } a_n \geq \tfrac{1}{2} \}$$

è un insieme finito perché poiché $a_n \to 0$ sarà $a_n < \frac{1}{2}$ definitivamente. Quindi per il max se la giocano un numero finito di termini, Formale: uso la def. di limite con $\varepsilon = \frac{1}{25}$. Allora

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \geq n_0 \text{ si ha } \quad a_n \leq \frac{1}{25}$$

Prendo $M = \max\{a_n : 1 \leq n \leq n_0\}$ (esiste perché è un insieme finito) e dico che $M = \max\{a_n : n \geq 1\}$.

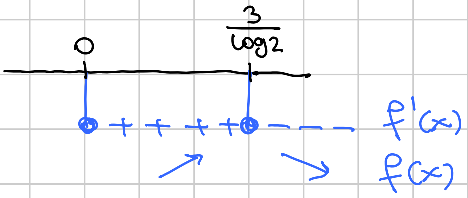
Questo è vero perché

- se $n \leq n_0$, allora $a_n \leq M$ per def. di M
- se $n \geq n_0$, allora

$$a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ n_0}}{\leq} \frac{1}{25} \leq \frac{1}{2} = a_1 \underset{\substack{\uparrow \\ a_1 \text{ gioca nella} \\ \text{def. di } M,}}{\leq} M$$

$$f'(x) = 3x^2\, 2^{-x} - x^3\, 2^{-x} \log 2 = x^2\, 2^{-x}\,(3 - x\log 2)$$

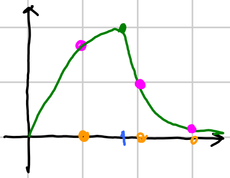
$f'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = \dfrac{3}{\log 2}$



Anche la successione prima cresce e poi decresce definitivamente. Il max è il valore che si ha quando inizia la decrescita

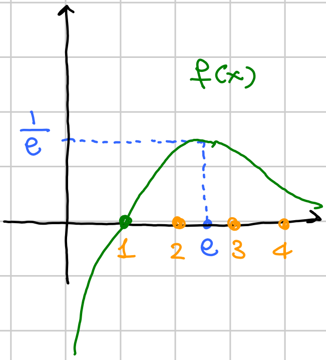
$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{8}{4} \qquad a_3 = \frac{27}{8} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Max}}}{\boxed{a_4 = \frac{64}{16}}} \qquad a_5 = \frac{125}{32} < a_4$$

Achtung! Non è vero che il p.to di max su $\mathbb{N}$ è l'intero positivo più vicino al p.to di max su $x \geq 0$. Se la giocano sempre l'intero prima e dopo.



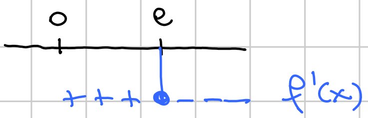
Esercizio 4 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$ chi è più grande ?

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n}$ quindi studio



$f(x) = \frac{\log x}{x}$ per $x \geqslant 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$



Per il max se la giocano $n=2$ e $n=3$: $\sqrt{2} \overset{?}{<} \sqrt[3]{3}$ elevo alla 6ª

$8 < 9$ ok.

Quindi il max è $\sqrt[3]{3}$. Ora sappiamo anche che la successione $a_n = \sqrt[n]{n}$ è strett. decr. per $n \geqslant 3$

— o — o —

Esercizio 5 Dimostrare che l'equazione

$$\log(3+x^{20}) + x\sin(x^2) = 2014$$

ha infinite soluzioni reali (sarebbe lo stesso con ogni λ invece di 2014)

[se fosse $\log(3+x^{20}) + x = 2014$ sarei sicuro che c'è un'unica soluzione $x>0$ (per le soluzioni $x<0$ bisognerebbe fare un conto): guardo il lim a $+\infty$ e la monotonia].

Fatto generale. Se $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è continua ed esistono due successioni $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ t.c.

$$f(a_n) \to +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \to -\infty,$$

allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha infinite soluzioni.

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $f(a_{n_1}) > \lambda$

$\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $f(b_{k_1}) < \lambda$, $k_1 > n_1$

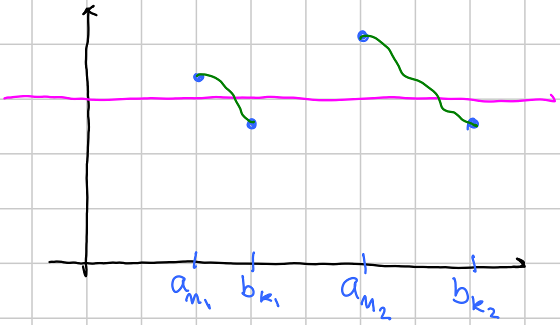
Allora esiste x compreso tra a_{n_1} e b_{k_1} tale che $f(x) = \lambda$.

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_2 > k_1$ e $f(a_{n_2}) > \lambda$

$\exists\, k_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $k_2 > n_2$ e $f(b_{k_2}) < \lambda$

Allora esiste x in $[a_{n_2}, b_{k_2}]$ t.c. $f(x) = \lambda$

e così via.



ANALISI 1 - LEZIONE 050

Titolo nota 24/11/2014

Formula di Taylor con resto di Lagrange Caso con centro in $x_0=0$

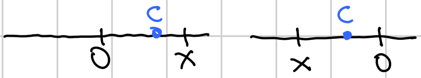
$$\underbrace{f(x)}_{\uparrow \text{funzione "strana"}} = \underbrace{P_n(x)}_{\uparrow \text{polinomio}} + \underbrace{o(x^n)}_{\uparrow \text{resto alla PEANO}}$$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}}_{\text{resto di Lagrange}}$$

è come se fosse il termine successivo solo con la derivata calcolata in c e non in 0.

Teorema misterioso Sia $\delta>0$ e sia $f:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$. Supponiamo che f sia derivabile $(n+1)$ volte in $(-\delta,\delta)$. Sia $n\in\mathbb{N}$. Sia $P_n(x)$ il pol. di Taylor di f di grado $\leq n$ dato dalla solita formula.

Allora per ogni $x\in(-\delta,\delta)$ esiste c compreso tra x e 0 tale che vale la formula di sopra.



Oss. Se prendo $n=0$ ottengo $P_0(x) = f(0)$ e la formula diventa

$$f(x) = f(0) + f'(c)\,x$$
$$f(x) - f(0) = f'(c)\,(x-0)$$

e questo è il teo. di Lagrange.

—o —o —

Esempio 1 Approssimare $\sin\frac{1}{10}$ con una frazione.

Uso Taylor per approssimarlo con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}\, x^5$$

Se al posto di $\sin \frac{1}{10}$ io scrivo $\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = \frac{599}{6000}$

commetto un errore che è $\frac{f^{(5)}(c)}{120} \cdot \frac{1}{10^5}$.

Pur non conoscendo c, so che $|f^{(5)}(c)| = |\cos c| \leq 1$, quindi

$$|\text{errore}| \leq \frac{1}{12.000.000}$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}1\ldots \qquad \frac{599}{6000} = 0,099833\boxed{3}$$

— o — o —

Oss. La formula vale anche con centro x_0 generico:

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

dove c sta tra x_0 e x_0+h.

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$: porto a sx e faccio lo studio di funzione.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$: Taylor – Lagrange con $n = 1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2$$

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{2} x^2}}_{\geq 0} \geq 1+x$$

(la disug. è stretta se $x \neq 0$)

Esempio 2bis Se uso ordine 2 ottengo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{6} e^c x^3}}_{\text{ha lo stesso segno di } x}$$

e di conseguenza

$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \iff x \geq 0$$

— o — o —

<u>Esempio 3</u> Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Chiamo $S_n(x)$ la somma parziale n-esima, che in realtà è $P_n(x)$ (il pol. di Taylor di grado n di $f(x) = e^x$)
Per Taylor-Lagrange

$$e^x - S_n(x) = e^x - P_n(x) = \frac{\overset{f^{(n+1)}(c)}{e^c}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

quindi $0 \leq |e^x - S_n(x)| \leq \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

non so dove sta c_n,
ma sta tra 0 e x,
quindi $c_n \leq |x|$

Fissato x, è ovvio che RHS $\to 0$, quindi LHS $\to 0$

— o — o —

<u>Esempio 4</u> Allo stesso modo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

Infatti

derivata $(2n+2)$-esima in un p.to c

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}$$

Ancora una volta, fissato x il resto tende a 0 ($x \in \mathbb{R}$ qualunque)

— o — o —

Def. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, si dice SERIE DI TAYLOR di $f(x)$ la serie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Serie di potenze : "polinomio di grado infinito"

cioè la serie (in cui x è pensato come parametro) che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Fatto: con Taylor-Lagrange si può dimostrare che, per opportuni valori della x e per opportune $f(x)$, la serie converge proprio ad $f(x)$.

Def. Quando succede che $f(x)$ è la somma della sua serie di Taylor in un certo intervallo si dice che $f(x)$ è ANALITICA in quell'intervallo e si indica con

$$f \in C^{\omega}((a,b))$$

Esempio $f(x) = \log(1+x)$

Dove è vero che $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$?

Certamente non per $x > 1$, perché lì la serie non converge

Idem per $x \leq -1$.

Per $x \in (-1,1)$ posso applicare Taylor-Lagrange (basta usare l'espressione per la derivata $(n+1)$-esima.

In particolare

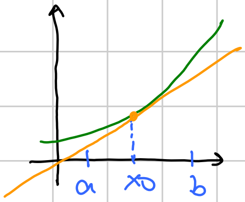
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots = \log \frac{4}{3}$$

— o — o —

ANALISI 1 – LEZIONE 051

Titolo nota 24/11/2014

Esempio 1 Sia $f \in C^2((a,b))$ una funzione convessa, sia $x_0 \in (a,b)$. Allora $f(x)$ sta sopra la retta tangente in x_0



Dim. Taylor-Lagrange con $n=1$ e centro in x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{\overset{\geq 0}{\boxed{f''(c)}}}{2}\underset{\geq 0}{\boxed{h^2}}$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)h$$

Volendo si può porre x_0+h e ottenere

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{eq. retta tangente al grafico in } x_0},$$

— o — o —

Oss. La conclusione vale per f convessa anche se non è C^2, ma la dimostrazione è diversa.

Esempio 2 Taylor-Lagrange di $f(x) = e^x$ di ordine n:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Domanda: fissato $x \in \mathbb{R}$, calcolare $\lim_{n\to+\infty} c_n$.

Prima osservazione: c_n è unico perché e^x è iniettiva (vale tutte le volte che la derivata $(n+1)$-esima è iniettiva).

Seconda osservazione: volendo c_n si ricava, ma il numero di termini cresce di volta in volta.

Scrivo anche il Taylor-Lagr. di ordine $(n+1)$

$$\boxed{\cancel{1+x+\dots+\frac{x^n}{n!}}}+e^{c_n}\frac{x^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!}=\boxed{\cancel{1+x+\dots+\frac{x^n}{n!}}}+\frac{\cancel{x}^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!}+\frac{e^{c_{n+1}}\,x^{\cancel{n+2}}}{(n+2)!}$$

Semplificando x^{n+1} e $(n+1)!$ ottengo

$$1\underset{\substack{\uparrow\\ c_n\geq 0}}{\leq} e^{c_n}=1+\frac{e^{c_{n+1}}\,x}{n+2}\underset{\substack{\uparrow\\ c_{n+1}\leq x}}{\leq} 1+\frac{e^x x}{n+2}$$

Facendo per semplicità il caso $x\geq 0$, otteniamo

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\textcircled{1}}\leq \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\textcircled{e^{c_n}}}\leq \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{1+\frac{e^x\cdot x}{n+2}}}$$

Per i carabinieri $e^{c_n}\to 1$, quindi $c_n\to 0$ $\left(c_n=\log\left(e^{c_n}\right)\right)$

Se $x\leq 0$, tutte le diseg. nei carabinieri sono "girate".

<u>Esempio 3</u> Sviluppare $\tan x$ in $x=0$ di ordine 5.

<u>1° modo</u>: 5 bovine derivate ...

<u>2° modo</u>: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^{-1}$$

$(1+t)^{-1}=1-t+t^2-t^3\dots$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^5)$$

e si sviluppa $\left(\text{se fosse } (5+t)^{-1}=5^{-1}\left(1+\frac{t}{5}\right)^{-1}\dots\right)$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Lo sviluppo sarà $\tan x=x+ax^3+bx^5+o(x^6)$

Ora scelgo se usare $\tan(\arctan x) = x$ o viceversa

$$\tan(\arctan x) = \arctan x + a \arctan^3 x + b \arctan^5 x + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + b x^5 + o(x^6)$$

$$= \cancel{x} \underbrace{- \frac{x^3}{3}}_{} + \frac{x^5}{5} + \underbrace{a x^3}_{} - a x^5 + b x^5 + o(x^5)$$

$$= \cancel{x}$$

Quindi per forza $a = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5} - a + b = 0$, $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

— o — o —

<u>Oss.</u> Allo stesso modo posso fare $\arcsin x$

Alternativa per $\arcsin x$: sviluppare la derivata $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

e fare la primitiva termine a termine come con $\arctan x$

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

e poi faccio "la primitiva termine a termine"

Formalmente: sviluppo $\frac{1}{1+x^2}$ ⇝ ottengo info sulle derivate in $x=0$ di $\frac{1}{1+x^2}$ ⇝ ottengo info. sulle derivate di $\arctan x$ in $x=0$ ⇝ ottengo lo sviluppo di $\arctan x$.

La stessa ROAD MAP funziona per $\arcsin x$ e $\arccos x$.

— o — o —

Esempio 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\cosh x)-\cos(\sqrt{1+x^2})}{\cosh(\cos x)-\cosh(\sqrt{1+x^2})}$$

Con Taylor costringe a sviluppare $\cos x$ e $\cosh x$ in $x_0 = 1$

1° modo: sviluppi

2° modo: Hôpital

3° modo: Lagrange

$$\text{Num} = -\sin(c_x)\,(\cosh x - \sqrt{1+x^2})$$
$$\text{Den} = \sinh(d_x)\,(\cos x - \sqrt{1+x^2})$$

Quindi

$$\text{Frazione} = \frac{-\sin(c_x)}{\sinh(d_x)}\ \boxed{\frac{\cosh x - \sqrt{1+x^3}}{\cos x - \sqrt{1+x^2}}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\cancel{1}+\frac{x^2}{2}-\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\cancel{1}-\frac{x^2}{2}-\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$\frac{o(x^2)}{-x^2+o(x^2)} \to 0$$

Dove stanno c_x e d_x?

c_x sta tra $\cosh x$ e $\sqrt{1+x^2}$

d_x sta tra $\cos x$ e $\sqrt{1+x^2}$

Per i carabinieri $c_x \to 1$, $d_x \to 1$

quindi $-\dfrac{\sin(c_x)}{\sinh(d_x)} \to -\dfrac{\sin 1}{\sinh 1}$,

Esempio 5

$$\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}-3\sqrt{n}\right]^{1/\log n}$$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}-3\sqrt{n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{4n}\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-3\sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{1}{4n}}-3\right\} = \sqrt{n}\left\{\cancel{1}+\frac{1}{2n}+\cancel{2}+\frac{1}{4n}-\cancel{3}\right\}$$

$= \sqrt{n}\,\dfrac{3}{4n} = \dfrac{3}{4\sqrt{n}}$. È come se fosse $\left[\dfrac{3}{4\sqrt{n}}\right]^{\frac{1}{\log n}} =$

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\log n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{\log n}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\log n}}}_{e^{\frac{1}{\log n}\cdot\log\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= e^{\frac{1}{\cancel{\log n}}\left(-\frac{1}{2}\cancel{\log n}\right)}$$

— o — o —