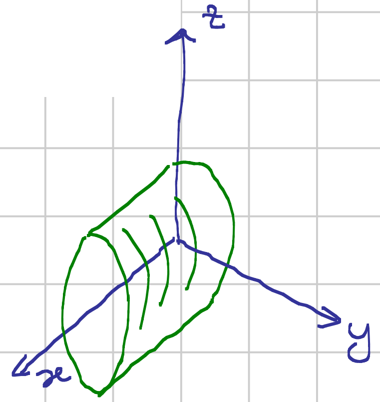
1. Sia $V$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dal piano $x = 0$, dal piano $x = 2$, e dalla superficie parametrizzata da

$$\Phi(u, v) = (v, \sin^3 u, \cos u) \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

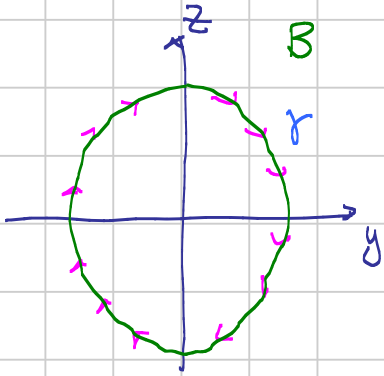
Determinare il volume e le coordinate del baricentro di $V$.




Il solido V è un "cilindro" con altezza $x \in [0,2]$ e base

$$B = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{|y|^{\frac{2}{3}} + z^2 \leq 1}_{} \}$$

$(\sin^3 u, \cos u)$ percorre il bordo di questo insieme




L'insieme B ha simmetria centrale rispetto all'origine, quindi il baricentro sarà in $\boxed{(1,0,0)}$

Il volume è $2 \cdot$ Area (B), e l'area si calcola con Gauss-Green:

$$\text{Area }(B) = \int_{\overset{\uparrow}{\gamma}} z \, dy = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot 3 \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

la curva è orientata al contrario

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta = \frac{3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi \quad \text{da cui} \quad \boxed{\text{Vol} = \frac{3}{2}\pi}$$

<u>Alternativa</u>: si potevano calcolare il volume e la coordinata x del baricentro integrando 1 e x su V. Per calcolare questi integrali si poteva usare Gauss-Green per ridursi ad integrali sul bordo di V (sup. laterale + 2 basi).

Come sempre il problema più grande sono le orientazioni.

2. Per ogni numero naturale $n$, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} nxy + n^2 \sinh x = 3, \\ n \arctan y + \cos x = 5. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che per $n$ grande il sistema ammette almeno una soluzione $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (Bonus question) Dimostrare che per $n$ grande la soluzione è unica.

(c) Dimostrare che per $n$ grande si ha che $x_n > 0$ e $y_n > 0$.

(d) Determinare, la variare del parametro reale $\alpha$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^\alpha}{y_n}.$$

Dividendo, il sistema diventa $\begin{cases} \frac{1}{n} xy + \sinh x = \frac{3}{n^2} \\ \arctan y + \frac{1}{n} \cos x = \frac{5}{n} \end{cases}$

Consideriamo la funzione

$$(x,y,z) \xrightarrow{\Phi} (xyz + \sinh x - 3z^2, \arctan y + z\cos x - 5z)$$

$$J\Phi(0,0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

↑ invertibile, quindi per $|z|$ piccolo posso ricavare $x$ e $y$ in funzione di $z$

(a) Basta prendere $x(z)$ e $y(z)$ come sopra e definire $x_n = x(\frac{1}{n})$, $y_n = y(\frac{1}{n})$

(b) Sia $(x_n, y_n)$ una soluzione. Se mostriamo che $(x_n, y_n) \to (0,0)$, allora definitivamente entra nella finestrella in cui vale il teo. delle funzioni implicite, da cui l'unicità.

Ora dalla 2ª equazione segue che $\arctan y_n \to 0$, da cui $y_n \to 0$.

Supponendo che, a meno di s.succ., si abbia $x_n \to \ell \neq 0$, nella prima equazione si avrebbe

$$\underbrace{\frac{1}{n} y_n}_{\downarrow\, 0} + \frac{\sinh x_n}{x_n} = \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\downarrow\, 0} \cdot \frac{1}{x_n}.$$ Ne segue che $\frac{\sinh x_n}{x_n} \to 0$

il che non è possibile se $\ell \neq 0$ (nota che se ci fosse sin invece di sinh non si potrebbe escludere $\ell = \pm\infty$).

(c-d) Dagli sviluppi di Taylor segue che

$x(z) = 3z^2 + o(z^2)$ $\qquad$ $y(z) = +4z + o(z)$

da cui la positività di $x_n$ e $y_n$ per $n$ grande e

$$\boxed{\frac{x_n^\alpha}{y_n} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}}$$

3. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\frac{nx^2+1}{n^3x+1}}. \quad f_n(x)$$

(a) Dimostrare che definisce una funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ di classe $C^1$.

(b) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(a) La convergenza puntuale segue dal confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

Fissiamo $[A,B] \subseteq (0,+\infty)$. Allora in $[A,B]$ vale

$$0 \le f_n(x) \le \frac{nx^2+1}{n^3x+1} \le \frac{nx^2+1}{n^3x} = \frac{x}{n^2} + \frac{1}{n^3x} \le \frac{B}{n^2} + \frac{1}{An^3}$$

Dall'M-test di Weierstrass segue la conv. totale in $[A,B]$, quindi la conv. unif. e la continuità. Dall'arbitrarietà di $[A,B]$ segue la continuità in $(0,+\infty)$.

Per le derivate osserviamo che

$$f_n'(x) = \frac{2nx(n^3x+1) - n^3(nx^2+1)}{(n^3x+1)^2} = \frac{n^4x^2+2nx-n^3}{(n^3x+1)^2}$$

da cui $\quad |f_n'(x)| \le \dfrac{n^4B^2+2nB+n^3}{n^6A^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \forall x\in[A,B]$

Come prima dall'M-test segue la conv. unif. della serie delle derivate, da cui $f\in C^1((0,+\infty))$ per l'arbitrarietà di $[A,B]$.

(b) Osserviamo che $f_n(x)>0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $x>0$.

Allora

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)} \ge \lim_{x\to+\infty} f_{37}(x) = \boxed{+\infty}$$

Analogamente per ogni $n\ge 0$ vale

$$f(x) \ge \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad \text{da cui}$$

$$\liminf_{x\to 0^+} f(x) \ge \liminf_{x\to 0^+} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = n+1$$

e quindi $\quad \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

— o — o —

4. Consideriamo il problema di Cauchy

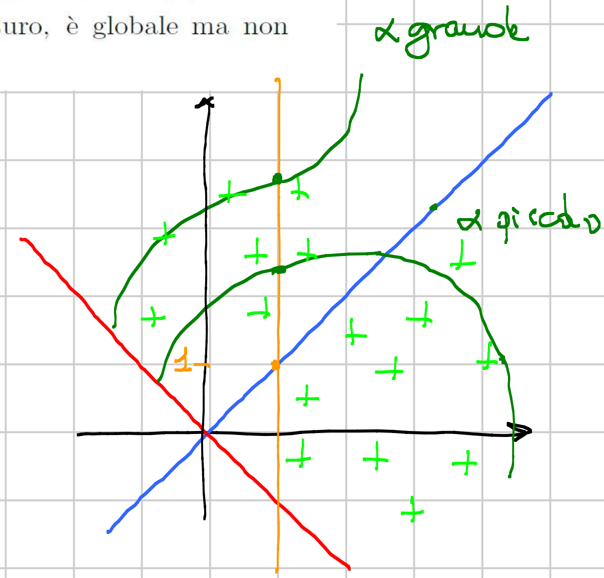
$$u' = \frac{u-t}{\arctan(u+t)}, \qquad u(1) = \alpha > 1.$$

(a) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione è globale nel passato.

(b) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale e monotona.

(c) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, non è monotona.

(d) Stabilire se esistono valori $\alpha > 1$ per cui la soluzione, nel futuro, è globale ma non monotona.




Esistenza loc. no pblm. per $\alpha > -1$

Situazione segui come in figura

(a) $\boxed{\text{NO}}$ Per $t < 1$, le soluzioni "scendono" fino ad avere BD nell'origine o sulla retta $u = -t$ (per $t > -1$)

(b) $\boxed{\text{SI}}$ La funzione $v(t) = t + 100$ è sottosoluzione per $t \geq 1$ in quanto

$$v'(t) = 1 < \frac{100}{\frac{\pi}{2}} < \frac{v(t) - t}{\arctan(v(t) + t)}$$

Quindi le soluzioni con $\alpha \geq 101$ le stanno sempre sopra, quindi sono monotone crescenti ed esistono globalmente perché

$$\frac{u-t}{\arctan(u+t)} \leq \frac{u+t}{\arctan(100)}$$ in quella zona e quindi il RHS è sublineare

(c) $\boxed{\text{SI}}$ Le soluzioni che verificano $u(t_0) = t_0$ per $t_0 > 1$ non sono monotone (crescono per $t < t_0$ e decrescono per $t > t_0$: basta osservare che $v(t) = t$ è soprasoluzione).
"Tornando indietro" queste soluzioni sopravvivono fino a $t = 1$, determinando dei valori di $\alpha$ con la proprietà richiesta.

(d) $\boxed{\text{NO}}$ Le soluzioni non monotone sono quelle che attraversano la retta $u = t$. Dopo aver attraversato restano sempre nella zona $-t < u(t) < t$ e quindi decrescono.
Se esistessero globalmente, avremmo che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ per $t \to +\infty$. Il caso $\ell \in \mathbb{R}$ non è compatibile con il teo. dell'asintoto. Se $\ell = -\infty$, allora $u'(t) \to -\infty$, dunque $\frac{u(t)}{t} \to -\infty$ (Hôpital), il che non è compatibile con la stima $u(t) \geq -t$.

— o — o —