ESERCIZIO 4 - APPELLO 15/01/19

Titolo nota 23/01/2019

4. Let us consider the open set $\Omega = (0,\pi)^2$. Determine if there exists a constant C such that

$$\int_\Omega \sin(xy)\cdot u^2\,dx\,dy \le C\int_\Omega \left(e^{xy}\cdot u_x^2 + u_y^2 + \cos x\cdot u_x\cdot u_y\right)dx\,dy$$

for every $u \in C^1_c(\Omega)$.

SVOLGIMENTO: OSSERVIAMO CHE Ω È APERTO E CHE $\operatorname{meas}(\Omega) < +\infty$

ALLORA:

$$\int_\Omega \sin(xy)\,u^2\,dx\,dy \le \int_\Omega u^2\,dx\,dy = \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

INOLTRE

$xy \geq 0$ e $\cos x \geq -1$

$$\int_\Omega e^{xy}\,u_x^2 + u_y^2 + \cos x\cdot u_x\cdot u_y\,dx\,dy \geq$$

$-ab \geq -\frac{a^2+b^2}{2}$ con $a = u_x$ e $b = u_y$

$$\geq \int_\Omega u_x^2 + u_y^2 - u_x\,u_y\,dxdy \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2 + u_y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

INOLTRE PER LE CONSIDERAZIONI FATTE ALL'INIZIO È POSSIBILE UTILIZZARE LA DIS. DI POINCARÈ E QUINDI ESISTE UNA COSTANTE K TALE CHE

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le K\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

IN PARTICOLARE $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le K^2\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$

QUINDI CONSIDERANDO LA DIS. INIZIALE SI HA

$$\underbrace{LHS \le}_{\text{CONT. INIZIALI}} \|u\|^2_{L^2} \underbrace{\le}_{\text{POINCARE'}} K^2\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = 2K^2\cdot\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \underbrace{\le}_{\text{CONTI INIZIALI}} 2K^2\cdot RHS$$

QUINDI LA COSTANTE C CERCATA È $2K^2$ DOVE K È LA COST DI POINCARÈ.