1. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \sin(x^2y + y^4) + \arctan(x^2 - y^5) - x^2y^2.$$

(a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto si tratta.

(b) Stabilire se $f(x,y)$ ammette massimo in $[1,+\infty) \times [1,+\infty)$.

(c) Determinare estremo inferiore e superiore di $f(x,y)$ in $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

(a) Per Taylor si ha che

$$f(x,y) = x^2 + x^2y - x^2y^2 + y^4 + o((x^2+y^2)^2)$$

in un intorno di $(0,0)$, da cui segue che $(0,0)$ è stazionario (mancano i termini di 1° grado). In un intorno di $(0,0)$ vale

$$f(x,y) = x^2(1+y-y^2) + y^4 + o((x^2+y^2)^2) \geq \frac{1}{2}x^2 + y^4 + o(\rho^4)$$

$$\geq \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + o(\rho^4) \geq \frac{1}{2}\rho^4 \underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{\geq m > 0 \text{ unif. in } \theta} + o(\rho^4)$$

$$\geq \frac{1}{2}m\rho^4 - \frac{1}{4}m\rho^4 \geq 0$$

Ne segue che $(0,0)$ è un p.to di $\boxed{\text{min. locale.}}$

(b) Posto $A := [1,+\infty) \times [1,+\infty)$ basta dimostrare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y) \in A}} x^2y^2 = +\infty$$

A quel p.to $\boxed{\text{il massimo esiste}}$ per una delle tante varianti di Weierstrass. Il limite segue dalla stima

$$x^2y^2 = \frac{1}{2}x^2\underbrace{y^2}_{\geq 1} + \frac{1}{2}\underbrace{x^2}_{\geq 1}y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \text{(valida in } A\text{)}.$$

(c) $\boxed{\operatorname{Inf} = -\infty}$ (basta considerare $f(t,t)$ con $t \to +\infty$)

$\boxed{\operatorname{Sup} = 1 + \frac{\pi}{2}}$ Basta osservare che $f(x,y) < 1 + \frac{\pi}{2}$ sempre e

$$f\underbrace{\left(t, \frac{\pi}{2t^2}\right)}_{\text{sta nel 1° quadrante}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^4}{16t^8}\right) + \arctan\left(t^2 - \frac{\pi^5}{32t^{10}}\right) - \frac{\pi^2}{4t^2}$$

$$\to 1 + \frac{\pi}{2} \quad \text{per } t \to +\infty$$

— o — o —

2. Consideriamo la superficie

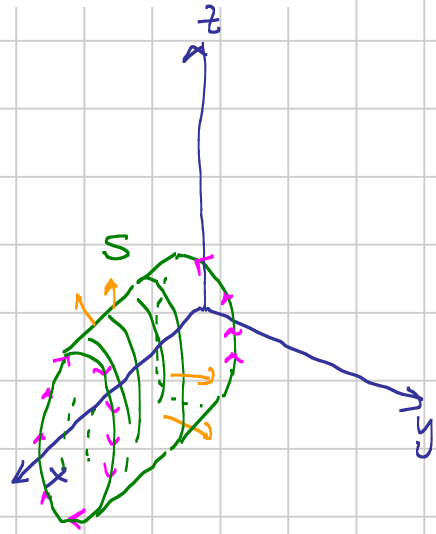
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ y^2 - x^4z^2 + 3z^2 = 1\}$$

ed il campo di vettori

$$E(x,y,z) = (-x^2, xy + \cos z, xz + \arctan(x^2)) .$$

Determinare il flusso di E attraverso S, orientata in maniera "uscente" rispetto all'asse x.

Le sezioni di S a x fisso sono delle ellissi centrate sull'asse x, dunque il sostegno di S è "una specie di cilindro".



Osserviamo che $\operatorname{div} E = 0$, e quindi nel calcolo del flusso posso sostituire S con una qualunque superficie con lo stesso bordo ed orientazioni coerenti. Usiamo quindi i 2 "tappi"

$T_1 = \{x=0,\ y^2+3z^2 \le 1\}$ con normale $(1,0,0)$

$T_2 = \{x=1,\ y^2+2z^2 \le 1\}$ " " $(-1,0,0)$

$\int_{T_1} \langle E, n \rangle d\sigma = 0$ perché la prima comp. di E è nulla in T_1

$\int_{T_2} \langle E, n \rangle d\sigma = \int_{y^2+2z^2 \le 1} 1 \, dy\, dz = \text{Area ellisse} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(volendo si calcola in coord. polari $y = \sqrt{2}\rho\cos\theta$ $z = \rho\sin\theta$)

Approcci alternativi: (1) Usare Gauss-Green dopo aver aggiunto i tappi (viene lo stesso conto)

(2) Trovare F tale che $\operatorname{rot} F = E$, e a quel pto usare Stokes per ridursi ad un integrale sul bordo di S.

— o — o —

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{n^4x^2+1}. \qquad f_n(x)$$

(a) Dimostrare che $f(x)$ è di classe C^1 in $(0, +\infty)$.

(b) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

(c) (Bonus question) Stabilire se $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

(a) La convergenza puntuale segue per confronto asintotico con $\frac{1}{n^3}$.

Dato $A>0$ vale che

$$\frac{nx}{n^4x^2+1} \leq \frac{nx}{n^4x^2} \leq \frac{1}{n^3x} \leq \frac{1}{A}\,\frac{1}{n^3} \qquad \forall x \geq A$$

Per l'M-test di Weierstrass segue che la serie converge totalmente, e quindi unif. in $[A,+\infty)$, e quindi la somma è continua in $[A,+\infty)$. Essendo A arbitrario abbiamo continuità in $(0,+\infty)$.

Inoltre

$$f_n'(x) = \frac{n(n^4x^2+1) - 2n^4x\cdot nx}{(n^4x^2+1)^2} = \frac{n - n^5x^2}{(n^4x^2+1)^2} \quad \text{da cui}$$

$$|f_n'(x)| \leq \frac{n+n^5x^2}{n^8x^4} \leq \frac{1}{A^4}\,\frac{1}{n^7} + \frac{1}{A^2}\,\frac{1}{n^3}$$

Analogamente a prima otteniamo la conv. unif. della serie delle derivate in $[A,+\infty)$ e quindi $f \in C^1((0,+\infty))$.

(b) Grazie alla conv. unif. in $[1,+\infty)$ possiamo utilizzare il teo. di scambio e dedurre che $\boxed{f(x) \to 0 \text{ per } x \to +\infty}$.

(c) È evidente che $f(0)=0$. Se mostriamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$, avremo che f non è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Ora

stima del numero di termini

$$f(x) \geq \sum_{\frac{1}{\sqrt{x}} \leq n \leq \frac{2}{\sqrt{x}}} \frac{nx}{n^4x^2+1} \geq \boxed{\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x}{\frac{16}{x^2}\cdot x^2+1}} \cdot \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)} \to \frac{1}{16} > 0$$

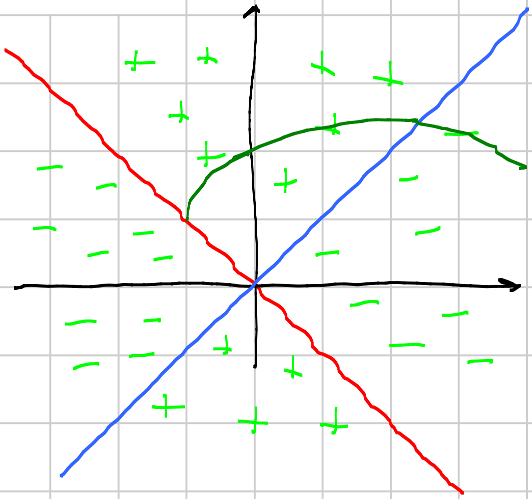
stima del termine generale in quel range

Oss. Con un confronto serie-integrali (delicato, perché non c'è monotonia in n) si ottiene che il limite è $\int_0^{+\infty} \frac{z}{z^4+1}\,dz$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{\arctan(u-t)}{u+t}, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel passato.
(b) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro e monotona.
(c) Stabilire se esistono valori $\alpha > 0$ per cui la soluzione è globale nel futuro.



Esistenza e unicità locali non sono un pbm.
Situazione segni come in figura.

(a) $\boxed{\text{NO}}$ Per $t<0$ le soluzioni "scendono" fino ad avere break-down prima di $t=-\alpha$.

(b) $\boxed{\text{NO}}$ Se la soluzione è globale e monotona, dunque crescente, allora $u(t) \geq t$ per $t \geq 0$, ma allora $u'(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, ma allora $\frac{u(t)}{t} \to 0$ per $t \to +\infty$ (Höp), il che contrasta con la stima $u(t) \geq t$.

(c) $\boxed{\text{SI}}$ Osserviamo che $v(t) = 100-t$ è sottosoluzione. Infatti

$$\dot v(t) = -1 < \frac{-\frac{\pi}{2}}{100} < \frac{\arctan(v(t)-t)}{v(t)+t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Consideriamo ora la soluzione con $u(0) = 50$. Questa tocca la retta $u=t$ in un punto (t_0, t_0) con $t_0 > 50$. Da quel momento

$$\underbrace{100-t}_{\text{sottosoluzione}} \leq u(t) \leq t \qquad \forall t \geq t_0$$

banale soprasoluz.

Vivendo in quella zona la soluzione eviterà blow up e break down.
[Avere $t_0 > 50$ garantisce che $u(t_0) \geq 100 - t_0$].

Oss. Sarebbe interessante mostrare che per $\alpha > 0$ piccolo le soluzioni hanno BD nel futuro. Questo non è così ovvio, perché potrebbe a priori esserci una fossa comune nell'origine.