Sia $B = \{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Stabilire se gli integrali impropri delle funzioni date sull'insieme B convergono.

Esercizio 6a :

$$f(x\,,y) = \frac{[\arctan(x\cdot y)]^2}{x^4+y^4}$$

<u>Svolgimento di Esercizio 6a</u> :

Poiché è $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} xy = 0$, $\arctan(xy)$ è infinitesimo vicino all'origine e possiamo svilupparlo in serie di Taylor

$$f(x\,,y) = \frac{(xy)^2}{x^4+y^4} + \frac{o[\|(x\,,y)\|^4]}{x^4+y^4}$$

Pertanto, abbiamo che

$\iint\limits_B f(x\,,y)\,dxdy$ è, in prossimità dell'origine, asintoticamente equivalente a $\iint\limits_B \frac{(xy)^2}{x^4+y^4}\cdot dxdy$

Passando adesso a coordinate polari, l'insieme B e la funzione integranda diventano rispettivamente

$$A = \{(\rho\,,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0 < \rho \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$$

$$g(\rho\,,\theta) = \frac{\rho^4\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\rho^4\cdot[\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)]}$$

Pertanto, applicando la formula per il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari negli integrali doppi, otteniamo che

$$\iint\limits_B f(x\,,y)\,dx\cdot dy = \iint\limits_A g(\rho\,,\theta)\cdot\rho\, d\rho\cdot d\theta$$

Dunque, abbiamo che

$$\iint\limits_A \frac{\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta = \int_0^1 \rho\cdot d\rho\cdot\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\cdot d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}\cdot d\theta$$

Essendo la funzione

$$h(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}$$

continua (denominatore sempre > 0) e limitata per $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, il suo integrale su tale intervallo è un numero finito. Pertanto, l'integrale dato converge.