1. (a) Dimostrare che esiste una costante reale c tale che

$$x^4 + y^4 \geq c \arctan(x^3 y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Determinare il più grande valore di c per cui vale la disuguaglianza precedente.

(a) Per $(x,y) = (0,0)$ una qualunque costante va bene. Ci siamo quindi ridotti a trovare una costante c tale che

$$\frac{\arctan(x^3y)}{x^4+y^4} \leq \frac{1}{c} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

cioè a dimostrare che la funzione al LHS è limitata superiormente. Indicata con $f(x,y)$ la funzione, basta osservare che

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^3y|}{x^4+y^4} \leq \max\{|x^3y| : x^4+y^4=1\} \in \mathbb{R}$$

funzione omogenea di grado 0, quindi basta restringersi alla sfera

(b) Il max sulla sfera si calcola con i moltiplicatori di Lagrange. Il 1° sistema non ha soluzione, il 2° sistema è

$$\begin{cases} 3x^2y = 4\lambda x^3 \\ x^3 = 4\lambda y^3 \end{cases}$$

1ª eq $\nearrow$ $x=0 \longrightarrow y = \pm 1 \longrightarrow (0, \pm 1)$

1ª eq $\searrow$ $\lambda = \frac{3y}{4x} \xrightarrow{\text{2ª eq.}} x^4 = 3y^4 \xrightarrow{\text{vincolo}} 4y^4 = 1 \longrightarrow \left(\pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4 p.ti

Sostituendo i vari candidati si ottiene che il max è $\frac{\sqrt[4]{27}}{4}$, realizzato ad esempio da $\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Questo mostra che $\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{4}$.

D'altra parte, considerando p.ti del tipo $(x,y) = t\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si vede che il valore è ottimale. Quindi

$$\boxed{c = \frac{4}{\sqrt[4]{27}}}$$

Approccio alternativo Consideriamo la funzione differenza

$$g(x,y) = x^4+y^4 - c\arctan(x^3y)$$

Osserviamo che $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} g(x,y) = +\infty$, come si può vedere, per esempio, dalla maggiorazione $g(x,y) \geq x^2+y^2-2-\frac{\pi}{2}c$.

Allora per Weierstrass generalizzato $g(x,y)$ ammette minimo in $\mathbb{R}^2$. A noi interessano i valori di c per cui tale minimo è ≥ 0. Il min. sarà assunto in un p.to in cui si annulla il gradiente, cioè

$$4x^3 - c\,\frac{3x^2y}{1+x^6y^2} = 0 \qquad 4y^3 - c\,\frac{x^3}{1+x^6y^2} = 0$$

$1^a \cdot x - 2^a \cdot y \;\leadsto\; x = \pm\sqrt[4]{3}\,y$, quindi il minimo sta in una di queste due rette. Ora

$$g(\pm\sqrt[4]{3}y, y) = 4y^4 - c\arctan(\sqrt[4]{27}\,y^4) = \gamma(y)$$

Ora non resta che osservare che

- per $c \leq \frac{4}{\sqrt[4]{27}}$ si ha che $\gamma(y) \geq 0$ sempre (segue dalla solita $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$)
- per $c > \frac{4}{\sqrt[4]{27}}$ si ha che $\gamma(y) < 0$ in un intorno di $y=0$ (Taylor in 0).

Da qui seguono i p.ti (a) e (b).

— o — o —

Altra alternativa: dopo aver osservato l'omogeneità di $\frac{x^3y}{x^4+y^4}$, si può porre $y=mx$ e studiare la funzione

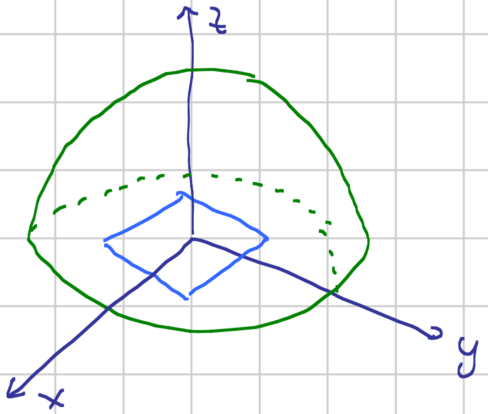
$$\frac{m}{1+m^4}.$$

— o — o —

2. Sia S la sfera di $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio 2, sia S^+ l'insieme dei punti (x, y, z) di S con $z \geq 0$, sia $P = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$, e sia $V = S^+ \setminus P$.

Calcolare

$$\int_V z \, dx \, dy \, dz.$$



L'insieme V è costituito dalla semisfera S^+ di raggio 2 privata dei p.ti che si proiettano sul piano xy nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$.

L'integrale richiesto si calcola bene per differenza.

- Sulla semisfera usiamo le coord. sferiche:

$$\iiint_{S^+} z \, dx\, dy\, dz = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \rho \sin\varphi \, \rho^2 \cos\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^3 \, d\rho}_{4} \; \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \; \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}} = 4\pi$$

- Sul "tassello" integriamo per colonne

$$\iiint_{S^+ \cap P} z \, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \, (4-x^2-y^2)$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 2\left(4 - \frac{1}{3}\right) - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 8 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

In conclusione

$$\iiint_{S^+ \setminus P} z \, dx\, dy\, dz = \boxed{4\pi - \frac{20}{3}}$$

— o — o —

3. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

(a) Dimostrare che converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Detta $f(x)$ la somma, calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

(c) Stabilire se la serie converge uniformemente in $(0, +\infty)$.

(a) Per $x=0$ è ovvio. Per $x \neq 0$ basta mettere il valore assoluto e ottenere l'assoluta convergenza per confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

(b) Dette $f_n(x)$ le funzioni che stiamo sommando, vale

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \qquad \forall\, x \geq 1$$

Ne segue che la serie conv. unif. in $[1,+\infty)$ per l'M-test di Weierstrass. A questo punto possiamo applicare il teorema di scambio ed ottenere che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \boxed{=0}$$

(la serie in realtà potrebbe partire da $n=1$)

(c) $\boxed{\text{Non c'è conv. unif. in } (0,+\infty)}$ in quanto manca la condizione necessaria.

Basta osservare che

$$\sup\{|f_n(x)| : x>0\} \geq \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2}\sin 1 \not\to 0.$$

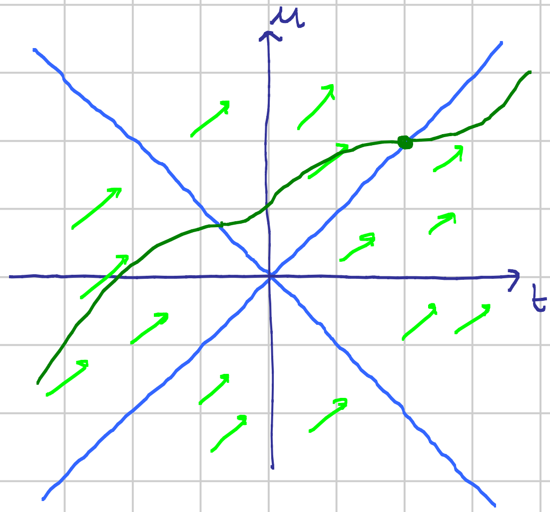
4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = (u+t)^2(u-t)^2, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Stabilire se esistono valori di $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale, nel passato e nel futuro.

(b) Stabilire se esistono valori di α per cui la soluzione non è globale nel futuro.

(c) (Bonus question) Dimostrare che la soluzione con $\alpha = 0$ ha almeno un punto di flesso per tempi positivi.



(a) $\boxed{\text{SI}}$ La soluzione con $u(1) = 1$ è globale nel passato e nel futuro.
Basta escludere i blow up

- Per $t \geq 1$ varrà sempre

$$\underset{\text{sottosol}}{-t} \leq u(t) \leq \underset{\text{soprasol.}}{t}$$

e quindi niente BU.

- Per $t \leq 1$ inizialmente la sol "scende" fino ad incontrare la retta $-t$ in un certo $t_0 < 0$.
A quel punto per $t \leq t_0$ verificherà nuovamente

$$\underset{\text{soprasol.}}{t} \leq u(t) \leq \underset{\text{sottosol.}}{-t}$$

e ancora una volta niente BU.

(b) $\boxed{\text{SI}}$ Osserviamo che $v(t) = t+1$ è sottosoluzione, quindi tutte le soluzioni con $\alpha \geq 1$ soddisfano

$$\dot{u} \geq (u+t)^2 \geq u^2$$

Ne segue che tutte le soluzioni con $\alpha \geq 1$ hanno BU.

(c) Derivando $\dot{u} = (u^2-t^2)^2$ otteniamo $\ddot{u} = 4(u^2-t^2)[u(u^2-t^2)^2 - t]$.
Essendo $u(t) = o(t)$ per $t \to 0^+$ e $-t \leq u(t) \leq t$ per $t \geq 0$ ne deduciamo che $\ddot{u}(t) > 0$ in un intorno dx di $t = 0$, nel quale $u(t)$ risulta convessa. Se restasse convessa per ogni $t > 0$, la funzione $u(t) - t$ sarebbe convessa e sempre negativa, dunque decrescente, dunque $u(t) - t \leq u(1) - 1 = c < 0$ per ogni $t \geq 1$. Ma allora $\dot{u}(t) \geq c^2(u+t)^2 \underset{\text{u e t positive.}}{\geq} c^2u^2$ per ogni $t \geq 1$, il che darebbe BU.

— o — o —