Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 18 Settembre 2018

1. (a) Dimostrare che esiste una costante reale positiva c tale che
$$x^4 + y^4 \geq c \arctan(x^3 y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (b) Determinare il più grande valore di c per cui vale la disuguaglianza precedente.

2. Sia S la sfera di $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio 2, sia S^+ l'insieme dei punti (x, y, z) di S con $z \geq 0$, sia $P = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$, e sia $V = S^+ \setminus P$.
   Calcolare
$$\int_V z \, dx \, dy \, dz.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}.$$
   (a) Dimostrare che converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Detta $f(x)$ la somma, calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   (c) Stabilire se la serie converge uniformemente in $(0, +\infty)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = (u + t)^2 (u - t)^2, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Stabilire se esistono valori di $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale, nel passato e nel futuro.
   (b) Stabilire se esistono valori di α per cui la soluzione non è globale nel futuro.
   (c) (Bonus question) Dimostrare che la soluzione con $\alpha = 0$ ha almeno un punto di flesso per tempi positivi.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.