Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 2

Pisa, 29 Giugno 2018

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = x^2 + \sinh(y^4) - y \sin x.$$
   (a) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.
   (b) Stabilire se $f(x,y)$ ammette massimo e/o minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. Consideriamo gli insiemi $Q = [0,+\infty)^2$ ed $R = [1,+\infty)^2$.
Studiare la convergenza degli integrali
$$\int_R \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\, dx\, dy, \qquad \int_Q \frac{\arctan(xy)}{y^2 + x^2y^2 + 1}\, dx\, dy.$$

3. Consideriamo la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx^3) + x}{x + n^2}.$$
   (a) Dimostrare che la somma della serie è una funzione $f(x)$ di classe C^1 in $(0,+\infty)$.
   (b) Calcolare i limiti
$$\lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$
   (c) (Bonus question) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u' = \frac{\arctan(u^3)}{u - t^2}, \qquad u(0) = \alpha \neq 0.$$
   (a) Nel caso $\alpha > 0$, studiare l'esistenza globale della soluzione, nel passato e nel futuro.
   (b) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel passato e tendono a $-\infty$ per $t \to -\infty$.
   (c) Stabilire se esistono soluzioni che esistono globalmente nel futuro e sono infinitesime per $t \to +\infty$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.