Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (1, 2, -1), \qquad C = (-1, 1, 0), \qquad D = (-3, 2, 1).$$

   (a) Determinare la proiezione di D sul piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare le rette che passano per D ed intersecano la retta AB formando un angolo di $60°$.

   (c) Determinare l'equazione del piano che passa per C e per D ed è parallelo alla retta AB.

2. Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = x - y + z - w = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

   (a) Determinare basi ortonormali per V e $V^\perp$.

   (b) Determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

3. Consideriamo le seguenti tre condizioni:

$$f(1, -2, 3) = (1, 0, \alpha), \qquad f(1, 0, \beta) = (2, 3, 4), \qquad f(1, \beta, 1) = (3, 4, 5).$$

   (a) Discutere, al variare dei parametri reali α e β, l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che verifica le tre proprietà.

   (b) Nei casi in cui l'applicazione esiste, determinare, sempre in funzione di α e β, la dimensione del nucleo di f.

4. Scrivere un sistema di 5 equazioni in 4 incognite che verifica contemporaneamente le seguenti due condizioni:

   - nessuna equazione del sistema è multipla di un'altra equazione del sistema,
   - la soluzione del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(x, y, z, w) = (t + 3, 2t - 1, t - 4, 5t - 2).$$

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

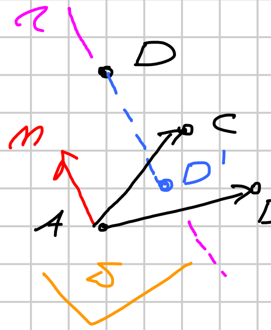
$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (1, 2, -1), \qquad C = (-1, 1, 0), \qquad D = (-3, 2, 1).$$

(a) Determinare la proiezione di D sul piano passante per A, B, C.

(b) Determinare le rette che passano per D ed intersecano la retta AB formando un angolo di 60°.

(c) Determinare l'equazione del piano che passa per C e per D ed è parallelo alla retta AB.

(a) $\pi_{A,B,C}$: $AB = (0,2,1)$ $\quad AC = (-2,1,2)$



$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -2, 4)$$

$$\pi: 3x - 2y + 4z + d = 0 \overset{A \in \pi}{\Longrightarrow} 3 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = 5$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 4z + 5 = 0 \quad (\text{VER. } B, C \in \pi \quad 3 - 4 - 4 + 5 = 0 \text{ OK} \quad -3 - 2 + 5 = 0 \text{ OK})$$

$$r: (-3,2,1) + \delta(3,-2,4) = (-3+3\delta, 2-2\delta, 1+4\delta)$$

$$D' \equiv r \cap \pi: 3(-3+3\delta) - 2(2-2\delta) + 4(1+4\delta) + 5 =$$

$$= -9 + 9\delta - \cancel{4} + 4\delta + \cancel{4} + 16\delta + 5 = 29\delta - 4 = 0 \qquad \delta = 4/29$$

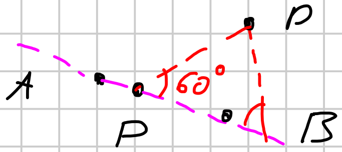
$$D' = \left(-3 + \frac{12}{29}, 2 - \frac{8}{29}, 1 + \frac{16}{29}\right) = \left(-\frac{75}{29}, \frac{50}{29}, \frac{45}{29}\right)$$

$$\text{VER. } DD' = \left(-\frac{75}{29} + 3, \frac{50}{29} - 2, \frac{45}{29} - 1\right) = \left(\frac{12}{29}, -\frac{8}{29}, \frac{16}{29}\right) \parallel n \quad \text{OK!}$$

$$D' \in \pi \quad -225 - 100 + 180 + 145 = 0 \quad \text{OK!}$$

(b) $P \in r_{AB}: (1,0,-2) + \delta(0,2,1) \Rightarrow P = (1, 2\delta, -2+\delta)$

$$DP = (4, 2\delta - 2, -3 + \delta)$$



$$\cos^2\theta = \frac{\langle DP, v\rangle^2}{|DP|^2 \cdot |v|^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(\overbrace{4\delta - 4 - 3 + \delta}^{5\delta - 7})^2 = (16 + 4\delta^2 + 4 - 8\delta + 9 + \delta^2 - 6\delta)\cdot 5$$

$$\Rightarrow 4(25\delta^2 + 49 - 70\delta) = 5(5\delta^2 - 14\delta + 29)$$

$$\Rightarrow 100\delta^2 - 25\delta^2 - 280\delta + 70\delta + 196 - 145 = 0$$

$$\Rightarrow +75\delta^2 - 210\delta + 51 = 0 \qquad \delta^* = \frac{210 \pm \sqrt{210^2 - 4\cdot 75\cdot 51}}{150} = \frac{210 \pm \sqrt{28800}}{150}$$

$$= \frac{21 \pm 12\sqrt{2}}{15} = \frac{7 \pm 4\sqrt{2}}{5}$$

$$\varepsilon_{1,2}: (-3,2,1) + \sigma(4, 2\delta^* - 2, -3 + \delta^*) = (-3,2,1) + \sigma\left(4, \frac{4 \pm 8\sqrt{2}}{5}, \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{5}\right)$$

(c) $\delta: ax + by + cz + d = 0 \parallel AB \Rightarrow a\cdot 0 + b\cdot 2 + c\cdot 1 = 0 \Rightarrow 2b = -c$

$$\Rightarrow ax + by - 2bz + d = 0 \qquad CD = (-2,1,1)$$

$$\delta \parallel CD \Rightarrow -2a + b - 2b = 0 \quad -2a - b \Rightarrow b = -2a$$

$$\Rightarrow ax - 2ay + 4az + d = 0 \qquad -a - 2a + d = 0 \quad d = 3a$$

$$\Rightarrow x - 2y + 4z + 3 = 0$$

2. Sia $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = x-y+z-w = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare basi ortonormali per V e $V^\perp$.

(b) Determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) $V:\ \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y+w=0 \end{cases} \Rightarrow V = (s,\delta,-s,-\delta) =$

$= s(1,0,-1,0)+\delta(0,1,0,-1)$

$\hat{v}_1 = (1,0,-1,0), \hat{v}_2 = (0,1,0,-1) \Rightarrow \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle = 0$

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$V^\perp:\ \begin{cases} x-z=0 \\ y-w=0 \end{cases} \Rightarrow V^\perp = (s,\delta,s,\delta) = s(1,0,1,0)+\delta(0,1,0,1)$

$\hat{w}_1 = (1,0,1,0), \hat{w}_2 = (0,1,0,1) \Rightarrow \langle \hat{w}_1, \hat{w}_2 \rangle = 0$

$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad w_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oss $w_1, w_2 \perp v_1, v_2$

(b)

$$\hat{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_\mathcal{E} \to f_\mathcal{B}(v)_\mathcal{E}} \qquad M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_\mathcal{E} \to v_\mathcal{B}} = \sqrt{2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & \quad v_2 & \quad w_1 & \quad w_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \hat{A} M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Consideriamo le seguenti tre condizioni:

$$f(1,-2,3)=(1,0,\alpha), \qquad f(1,0,\beta)=(2,3,4), \qquad f(1,\beta,1)=(3,4,5).$$

(a) Discutere, al variare dei parametri reali α e β, l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ che verifica le tre proprietà.

(b) Nei casi in cui l'applicazione esiste, determinare, sempre in funzione di α e β, la dimensione del nucleo di f.

(a) $\Rightarrow$ PER TEOR. ESIST. E UNICITÀ $v_1, v_2, v_3 \Rightarrow$ BASE $\mathbb{R}^3$

$$\det\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix} = -2\beta+3\beta-\beta^2+2 = -\beta^2+\beta+2$$

$$\det(v_i)=0 \Rightarrow \beta^2-\beta-2=0 \Rightarrow (\beta-2)(\beta+1)=0$$

$\Rightarrow$ ESISTE UNICA PER $\beta\neq 2$ $\beta\neq -1$ $\alpha\in\mathbb{R}$

$\beta=2$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=2c-c=c \\ y=-2c \\ z=c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f NON ESISTE

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-0 \\ 8-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\beta=-1$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=-c/2 \\ y=-c/2 \\ z=c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2+1 \\ 3/2 \\ \alpha/2+2 \end{pmatrix}$$

f NON ESISTE

$f(v_1)=w_1 \qquad f(v_2)=w_2 \qquad f(v_3)=w_3$

$$\begin{cases} \beta = 2 \Rightarrow v_3 = -v_1 + 2v_2 & w_3 = -w_1 + 2w_2 \quad \text{IMPOSSIBILE } \forall \alpha \\ \beta = -1 \Rightarrow v_3 = \dfrac{v_1}{2} + \dfrac{v_2}{2} & w_3 = \dfrac{w_1}{2} + \dfrac{w_2}{2} \quad \text{IMPOSSIBILE } \forall \alpha \end{cases}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ \alpha & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4-2\alpha & 5-3\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5-3\alpha - \frac{4}{3}(4-2\alpha) \end{pmatrix}$$

$v_\varepsilon \to f_\alpha(v_\varepsilon)$

$$5 - 3\alpha - \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\alpha = 0 \Rightarrow 15 - 9\alpha - 16 + 8\alpha = -\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow \alpha \neq -1 \quad \dim(\mathrm{KER}\, f) = 0 \qquad \alpha = -1 \quad \dim(\mathrm{KER}\, f) = 1$$

4. Scrivere un sistema di 5 equazioni in 4 incognite che verifica contemporaneamente le seguenti due condizioni:

- nessuna equazione del sistema è multipla di un'altra equazione del sistema,
- la soluzione del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(x, y, z, w) = (t + 3, 2t - 1, t - 4, 5t - 2).$$

$$(x, y, z, w) = (3, -1, -4, -2) + \sigma(1, 2, 1, 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 1 & 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 1 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ -18 \\ 16 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 & 17 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -18 \\ 5 & 5 & 0 & -3 & 16 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & -19 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 & 17 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = \frac{17}{5} + \sigma$

$y = -1/5 + 2\sigma$

$z = -\frac{18}{5} + \sigma$

$w = 5\sigma$