Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x,y) = |3x^2 - 2y^4|$ e sia D definito da:
$$D := \{(x,y) : \, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$
Determinare estremo inferiore e superiore di f in D specificando se si tratta di massimo e/o minimo e gli eventuali corrispondenti punti di massimo/minimo.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \frac{x^2y^3 + \sin(x^2y)}{1 + x^4 + |y|^7}.$$
   (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.
   (b) Stabilire se f ammette massimo e/o minimo su $\mathbb{R}^2$.
   (c) Provare che f ammette almeno 5 punti stazionari.
   (d) (Bonus) Sia $Q_R = [R, +\infty[\times [R, +\infty[$ e sia $M(R) = \sup_{Q_R} f(x,y)$. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{R \to +\infty} R^\alpha M(R).$$

3. Sia $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + z^2 \geq 1\}$. Calcolare
$$\int_V |y| \, dx \, dy \, dz.$$

4. Sia $F(x,y,z) = (x + y, x^2, z)$ e sia
$$S = \{(x,y,z) : \, x^2 + y^2 + z^2 + y^2z^2 = 7, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}$$
orientata prendendo in $(2,1,1)$ la normale che punta verso le y negative. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso S.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + x^2z^2 = 1,\ x \geq 0\}, \quad f(x, y, z) = x + y - z^2.$$

Determinare $\inf_S f$ e $\sup_S f$ precisando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Sia $Q := [1, +\infty[\times[1, +\infty[$.

   (a) Stabilire se convergono:

$$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^2}\, dx\, dy, \qquad \int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^4} dx\, dy.$$

   (b) (Bonus) Sia $Q_n = [n, 2n] \times [n, 2n]$. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha \int_{Q_n} \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^4} dx\, dy.$$

3. Sia T il triangolo del piano xy di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(3, 2)$ sia V il solido ottenuto da una rotazione completa di T intorno all'asse y. Calcolare il volume e le coordinate del baricentro di V.

4. Sia γ la curva del piano (x, y) definita da $\gamma(t) = (t^2 - 2t^3, t - t^2)$, con $0 \leq t \leq 3/2$.

   (a) Determinare se γ è semplice e farne un disegno approssimativo.

   (b) Determinare le intersezioni tra γ e la retta $6y = x$.

   (c) Sia D la regione di piano racchiusa da $\gamma \cup \{6y = x\}$. Calcolare l'area di D.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi

Pisa, ?? ?? ????

1. Sia $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e poniamo
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ x + z = 1,\ |y| \leq 2\}.$$
Determinare $\inf_C f$ e $\sup_C f$ specificando se si tratta di minimo/massimo e gli eventuali corrispondenti punti di minimo/massimo.

2. Per $\alpha \geq 0$ sia $f_\alpha(x, y) = 2x^4 - \alpha x^2 y^2 + y^4$.
   (a) Stabilire per quali α esiste
   $$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f_\alpha(x, y).$$
   (b) Provare che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha: $|x^3 y| \leq f_0(x, y)$.
   (c) Stabilire per quali α esiste una costante M_α tale che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$|x^3 y| \leq M_\alpha |f_\alpha(x, y)|.$$
   (d) (Bonus) Sia $\alpha_0 := \sup\{\alpha :\ \text{esiste}\, M_\alpha\}$. Calcolare
   $$\lim_{\alpha \to \alpha_0^-} (\alpha_0 - \alpha) M_\alpha.$$

3. Sia B la sfera di $\mathbb{R}^3$ di centro $(1, 0, 2)$ e raggio 2. Calcolare
$$\int_B |x|\, dx\, dy\, dz.$$

4. Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale
$$\omega_\alpha = e^{\alpha xy}(xy + y^2 + 1)dx + e^{\alpha xy}(x^2 + xy + 1)dy + dz$$
e sia $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin t, \cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$.
Calcolare per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$
$$\int_\gamma \omega_\alpha.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.