

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 22 Gennaio 2018

1. Determinare l'insieme delle coppie (a, b) di numeri reali positivi per cui si ha convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt[n]{a + \frac{3}{n}} - 1 \right|^b.$$

2. Consideriamo l'equazione

$$\sin x = \lambda x^2.$$

- (a) Dimostrare che per ogni valore reale positivo di λ l'equazione ammette un'unica soluzione nell'intervallo $(0, \pi)$.
(b) Dimostrare che esistono valori di λ per cui l'equazione non ammette soluzioni $x > 0$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = n^\alpha \cdot \arctan\left(\frac{x_n}{n}\right), \quad x_1 = 2018.$$

- (a) Determinare il limite della successione nel caso $\alpha = 1/2$.
(b) Sempre nel caso $\alpha = 1/2$, stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

- (c) (Bonus question) Stabilire se la successione risulta infinitesima nel caso $\alpha = 1$.

4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'' = u + \frac{1}{e^t + 1}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.