

Università di Pisa - Corso di Laurea in Fisica  
Scritto d'esame di Complementi di Analisi  
Pisa, ?? ?? ????

1. Sia  $f(x, y) = |3x^2 - 2y^4|$  e sia  $D$  definito da:

$$D := \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

Determinare estremo inferiore e superiore di  $f$  in  $D$  specificando se si tratta di massimo e/o minimo e gli eventuali corrispondenti punti di massimo/minimo.

2. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^3 + \sin(x^2 y)}{1 + x^4 + |y|^7}.$$

- (a) Provare che l'origine è un punto stazionario e classificarlo.  
(b) Stabilire se  $f$  ammette massimo e/o minimo su  $\mathbb{R}^2$ .  
(c) Provare che  $f$  ammette almeno 5 punti stazionari.  
(d) (Bonus) Sia  $Q_R = [R, +\infty[ \times [R, +\infty[$  e sia  $M(R) = \sup_{Q_R} f(x, y)$ . Calcolare al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^\alpha M(R).$$

3. Sia  $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + z^2 \geq 1\}$ . Calcolare

$$\int_V |y| \, dx \, dy \, dz.$$

4. Sia  $F(x, y, z) = (x + y, x^2, z)$  e sia

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 + y^2 z^2 = 7, y \geq 0, z \geq 0\}$$

orientata prendendo in  $(2, 1, 1)$  la normale che punta verso le  $y$  negative. Calcolare il flusso del rotore di  $F$  attraverso  $S$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.