Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 2

Pisa, 1 Dicembre 2017

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x,y) = \sin(x+y^2) \cdot \arctan y$.

   Determinare *quali* delle derivate parziali di ordine quattro di $f(x,y)$ sono diverse da zero nell'origine.

2. Determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x-y)^2$ sul triangolo con vertici nei punti $(-2,0)$, $(1,0)$, $(2,2)$ del piano cartesiano, precisando quali sono i punti di massimo e di minimo.

3. Sia A l'insieme dei punti del piano che stanno sopra l'asse x e sotto il grafico della funzione $y = 1-x^2$. Calcolare
$$\int_A |x|\,dx\,dy.$$

4. Determinare le coordinate del baricentro del solido
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Sia $Q = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Determinare per quali valori del parametro reale positivo a si ha convergenza dell'integrale
$$\int_Q \frac{\arctan^a(xy)}{x^6+y^8}\,dx\,dy.$$

6. Consideriamo l'insieme
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+yz = 15,\ y^2+z^2 \leq 18\}.$$
   Determinare l'estremo inferiore e superiore in A della funzione $f(x,y,z) = x+y+z$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo.

7. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = 12x^2 + \arctan(xy^2) + \sinh(y^6).$$
   (a) Stabilire se ammette minimo su tutto $\mathbb{R}^2$.
   (b) Stabilire se l'origine è un punto di massimo/minimo locale (o nessuno dei due).
   (c) Dimostrare che ammette almeno tre punti stazionari.
   (d) (Bonus question) Siano $m(r)$ ed $M(r)$ il minimo ed il massimo di $f(x,y)$ sulla palla chiusa con centro nell'origine e raggio r.
   Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $m(r)$ e $M(r)$ per $r \to 0^+$.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.