Esercizio 1.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{\sin(x \cdot y)}{x \cdot y}$

1a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 1a :</u>

Posto $x \cdot y = t$, segue che, per $(x, y) \to (0,0)$, $t \to 0$

Dunque, abbiamo che

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

e il limite esiste ed è 1

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 1b, 1c e 1d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 1$$

Esercizio 2.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{\sin(x \cdot y)}{\sqrt{|x| + 2 \cdot |y|}}$

2a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 2a :</u>

In coordinate polari la funzione data diventa

$$f(\rho, \theta) = \frac{\sin[\rho^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)]}{\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{|\cos(\theta)| + 2 \cdot |\sin(\theta)|}} \quad \text{per} \quad \rho > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Adesso è

$$0 \leqslant |f(\rho, \theta)| = \frac{|\sin[\rho^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)]|}{\sqrt{\rho} \cdot \sqrt{|\cos(\theta)| + 2 \cdot |\sin(\theta)|}} \leqslant \frac{\rho^2 \cdot |\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)|}{m \cdot \sqrt{\rho}} \leqslant \frac{\rho^2}{m \cdot \sqrt{\rho}}$$

Infatti, per quanto riguarda il denominatore, il fattore $d(\theta) = \sqrt{|\cos(\theta)| + 2 \cdot |\sin(\theta)|}$ è una funzione continua di θ sempre > 0, in quanto radice della somma di due quantità positive che non si annullano mai contemporaneamente. Quindi, per Weierstrass, $d(\theta)$ presenterà un minimo $m > 0$, mentre, per quanto riguarda il numeratore, è $|\sin(z)| \leqslant |z| \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Quindi, per $\rho \to 0^+$, possiamo scrivere che

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho, \theta) = \lim_{\rho \to 0^+} |f(\rho, \theta)| = 0$$

Dunque, il limite esiste ed è 0

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 2b, 2c e 2d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 3.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione $f(x,y) = \dfrac{\sin(x-y)}{x+y}$

3a : per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 3a :</u>

La funzione data è definita su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo la generica retta per l'origine :

$$\lim_{t\to 0} f(t, mt) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t - m\cdot t)}{t + m\cdot t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin[t\cdot(1-m)]}{t\cdot(1-m)} \cdot \frac{t\cdot(1-m)}{t\cdot(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

Il limite dunque, variando al variare del parametro m , non esiste.

Poniamo $g(m) = \dfrac{1-m}{1+m}$ e studiamone l'andamento :

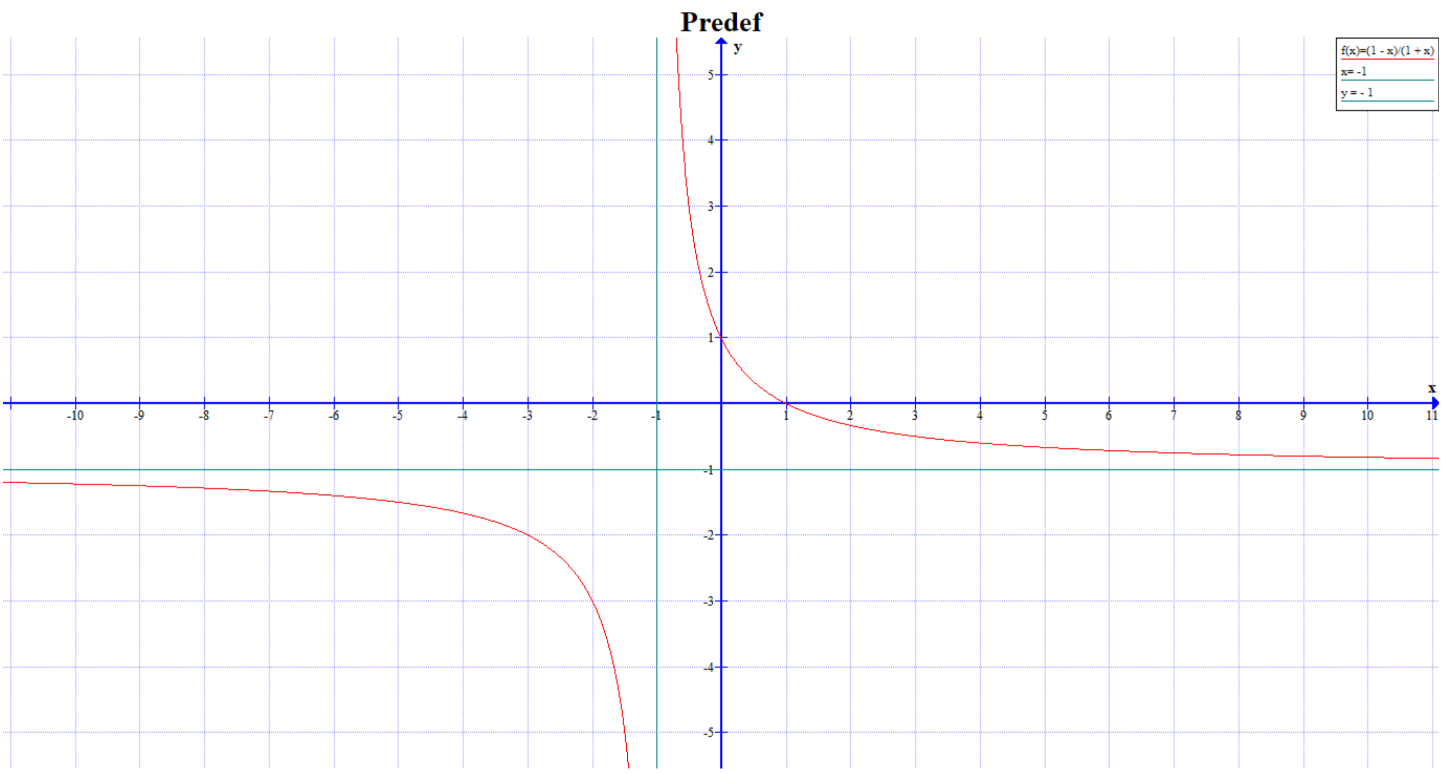
Insieme di esistenza : $E = \{m \in \mathbb{R} : m \neq -1\}$

Studio del segno : $g(m) \geqslant 0$ per $m \in$ (-1 , 1]

Limiti agli estremi del dominio di esistenza : $\lim_{m\to\pm\infty} g(m) = -1$ $\lim_{m\to -1^-} g(m) = -\infty$ $\lim_{m\to -1^+} g(m) = +\infty$

Studio della derivata prima : $g'(m) = \dfrac{-(1+m)-(1-m)}{(1+m)^2} = \dfrac{-2}{(1+m)^2}$ da cui segue che

$g'(m) < 0$ sempre $\Rightarrow g(m)$ strettamente decrescente $\forall m \in \mathbb{R}$



Dalle informazioni ottenute con lo studio di $g(m)$ si ha che

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

3b : per $x>0$ e $y>0$

Svolgimento di 3b :

Sul dominio adesso in esame la funzione $g(m)$ è definita per $m \in (0,+\infty)$ e, per la sua stretta decrescenza, segue che

liminf $f(x,y) = \lim_{m\to+\infty} g(m) = -1$

limsup $f(x,y) = \lim_{m\to 0^+} g(m) = 1$

Infatti, per quanto riguarda liminf, deve essere $f(x,y) \geqslant -1$:

$$\frac{\sin(x-y)}{x+y} \geqslant -1 \Leftrightarrow \sin(x-y) \geqslant -x-y \Leftrightarrow \sin(y-x) \leqslant y+x$$

da cui segue, per le proprietà della funzione seno e per la disuguaglianza triangolare,

$$\sin(y-x) \leqslant |y-x| \leqslant |y|+|-x| = y+x \leqslant y+x$$

Mentre, per limsup, deve essere $f(x,y) \leqslant 1$:

$$\frac{\sin(x-y)}{x+y} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sin(x-y) \leqslant x+y$$

da cui, per considerazioni analoghe a quelle fatte per liminf, segue che

$$\sin(x-y) \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|-y| = x+y \leqslant x+y$$

3c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 3c :

Sul questo dominio la funzione $g(m)$ è definita per $m \in [1, +\infty)$ e, sempre per la sua stretta decrescenza, abbiamo che

liminf $f(x,y) = \lim_{m\to+\infty} g(m) = -1$, che si dimostra come in 3b;

limsup $f(x,y) = \lim_{m\to 1^+} g(m) = 0$

Mentre, per limsup, resta da dimostrare che $f(x,y) \leqslant 0$ sempre.

3d : per $x>0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 3d :

Poiché nel dominio adesso in esame compare nuovamente parte della regione di indeterminatezza di $f(x, y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, come in 3a sarà :

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

come si dimostra facilmente calcolando il limite sulle parabole tangenti nell'origine alla suddetta bisettrice, ad esempio $y = x^2 - x$ e $y = -x^2 - x$

Esercizio 4.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{y \cdot \sin(x)}{x^2 + y}$

4a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 4a :

La funzione data è definita su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$

Essendo

$$0 \leqslant |f(x, y)| = \left| \frac{y \cdot \sin(x)}{x^2 + y} \right| \leqslant \frac{|y| \cdot |\sin(x)|}{|y|} = |\sin(x)|$$

per $x \to 0$, abbiamo che il limite esiste ed è 0

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 4b, 4c e 4d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 5.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{\cos(x) - \cos(y)}{x + y}$

5a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 5a :</u>

Applicando alla funzione data la formula di prostaferesi relativa alla differenza di coseni, otteniamo che

$$f(x, y) = \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x + y} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{x + y} = \frac{-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

A questo punto effettuiamo il seguente cambio di variabili :

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \cdot z \\ x - y &= 2 \cdot w \end{aligned} \quad \text{da cui segue che} \quad (x, y) \to (0,0) \Rightarrow (z, w) \to (0,0)$$

Quindi, abbiamo che

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{(z, w) \to (0,0)} f(z, w) = \lim_{(z, w) \to (0,0)} \frac{-\sin(z)}{z} \cdot \sin(w) = 0$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 5b, 5c e 5d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Esercizio 6.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{e^x - e^{2\cdot y}}{x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2}$

6a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 6a :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni degli assi cartesiani :

Asse delle $y>0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1-e^{2\cdot t}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1-e^{2\cdot t}}{2\cdot t} \cdot \dfrac{2}{t} = -\infty$

Asse delle $x>0$: $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,0) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{e^t - 1}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{e^t-1}{t} \cdot \dfrac{1}{t} = +\infty$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

6b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 6b :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni di due parabole tangenti nell'origine, rispettivamente, all'asse x

$$\lim_{t\to 0^+} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - e^{2\cdot t^2}}{t^2 + t^4 + t^6} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1+t-(1+2\cdot t^2)+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t+o(t)}{t^2+o(t^2)} = +\infty$$

e all'asse y

$$\lim_{t\to 0^+} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t^2} - e^{2\cdot t}}{t^4 + t^2 + t^6} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1+t^2-(1+2\cdot t)+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-2\cdot t+o(t)}{t^2+o(t^2)} = -\infty$$

Dunque, anche su questo dominio, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

6c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

Svolgimento di 6c :

Essendo per ogni (x , y) appartenente al dominio in esame

$$\frac{e^x - e^{2\cdot y}}{x^2 + y^2 + x^2\cdot y^2} \leqslant \frac{e^y - e^{2\cdot y}}{y^2}$$

ed essendo

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - e^{2\cdot y}}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1 + y - (1 + 2\cdot y) + o(y)}{y^2 + o(y^2)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-y + o(y)}{y^2 + o(y^2)} = -\infty$$

sarà anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = -\infty$$

6d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

Svolgimento di 6d :

Essendo per ogni (x , y) appartenente a questo dominio

$$\frac{e^x - e^{2\cdot y}}{x^2 + y^2 + x^2\cdot y^2} \geqslant \frac{e^x - e^{2\cdot x^2}}{x^2 + x^4 + x^6}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{2\cdot x^2}}{x^2 + x^4 + x^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x - (1 + 2\cdot x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

sarà anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = +\infty$$

Esercizio 7.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$

7a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 7a :</u>

Per Lagrange possiamo scrivere

$f(x, y) = \dfrac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \dfrac{(x - y) \cdot \cos(\xi)}{(x - y)}$ con ξ compreso tra x ed y.

Quindi $(x, y) \to (0,0) \Rightarrow \xi \to 0$

da cui segue che

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{\xi \to 0} \cos(\xi) = 1$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, esso esisterà anche su tutte le sue restrizioni. Quindi, avremo che anche su tutti gli altri domini, indicati con 7b, 7c e 7d, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 1$$

Esercizio 8.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\dfrac{\sin(x)+\sin(y)}{x+y}$

8a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 8a :</u>

La funzione data è definita su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo la parabola, tangente nell'origine alla bisettrice del 2° e 4° quadrante, $y=x^2-x$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2-t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)+\sin(t^2-t)}{t+t^2-t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+t^2-t+o(t^2)}{t^2}=1$$

Dunque, se il limite esiste, deve essere uguale a 1

Applichiamo adesso la formula di prostaferesi, relativa alla somma di seni, ottenendo che

$$f(x,y)=\frac{\sin(x)+\sin(y)}{x+y}=\frac{2\cdot\sin(\frac{x+y}{2})\cdot\cos(\frac{x-y}{2})}{x+y}=\frac{\sin(\frac{x+y}{2})\cdot\cos(\frac{x-y}{2})}{(\frac{x+y}{2})}$$

Effettuiamo di seguito il cambio di variabili

$$\begin{array}{l} x+y=2\cdot z \\ x-y=2\cdot w \end{array} \quad \text{da cui segue che} \quad (x,y)\to(0,0)\Rightarrow(z,w)\to(0,0)$$

Quindi, abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(z,w)\to(0,0)} f(z,w)=\lim_{(z,w)\to(0,0)}\frac{\sin(z)\cdot\cos(w)}{z}=1$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, allora esisterà e sarà uguale ad 1 anche su tutti gli altri domini che sono restrizioni di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 9.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{\sin^2(x) - \sin^2(y)}{x - y}$

9a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 9a :

Attraverso passaggi algebrici elementari, possiamo scrivere che

$$f(x, y) = \frac{\sin^2(x) - \sin^2(y)}{x - y} = \frac{[\sin(x) - \sin(y)] \cdot [\sin(x) + \sin(y)]}{x - y}$$

Per l'esercizio 7 è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = 1$$

mentre è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} \sin(x) + \sin(y) = 0$$

Quindi, complessivamente, per il metateorema di Analisi 1, è

$$\lim_{(x, y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Poiché il limite esiste su tutto $\mathbb{R}^2$, allora esisterà e sarà uguale a 0 anche su tutti gli altri domini, in quanto restrizioni di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 10.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \dfrac{x - \sqrt{x \cdot y}}{x^2 - y^2}$

10a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 10a :</u>

La funzione è definita su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geqslant 0 \ e \ y \neq x\}$

Calcoliamo il limite lungo la direzione individuata dalla parabola, tangente nell'origine alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, di equazione $y = x^2 + x$

$$\lim_{t \to 0} f(t, t + t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{t - \sqrt{t^2 + t^3}}{t^2 - (t + t^2)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot [1 - \sqrt{1 + t}]}{t^2 - t^2 - t^4 - 2 \cdot t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - (1 + t/2 + o(t))}{-2 \cdot t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{4 \cdot t} = \begin{Bmatrix} +\infty \ se \ t \to 0^+ \\ -\infty \ se \ t \to 0^- \end{Bmatrix}$$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$

10b : per $x > 0$ e $y > 0$

10c : per $0 \leqslant x \leqslant y$

<u>Svolgimento di 10c :</u>

Calcoliamo il limite lungo l'asse y positivo :

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{-t^2} = 0$$

Mentre per 10a il limite lungo la parabola, tangente nell'origine alla bisettrice del 1° quadrante, è dato da

$$\lim_{t\to 0^+} f(t\,,t+t^2) = +\infty$$

Essendo poi, su tutto il dominio indicato, $f(x\,,y) \geqslant 0$ sempre, in quanto è

$$\frac{x-\sqrt{x\cdot y}}{x^2-y^2} = \frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)\cdot(x-y)} \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y}) \leqslant 0 \quad \text{OK}$$

Quindi è

liminf $f(x\,,y) = 0$

limsup $f(x\,,y) = +\infty$

10d : per $x > 0$ e $y \leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 10d :</u>

Essendo su tutto il dominio dato

$$f(x\,,y) = \frac{x-\sqrt{x\cdot y}}{x^2-y^2} \geqslant \frac{x-\sqrt{x^3}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

il limite esiste ed è $+\infty$

Esercizio 11.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{x+y}\,dt$

11a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 11a :</u>

Per il teorema del valor medio, abbiamo che

$$f(x,y)=\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{x+y}\,dt=\frac{y-x}{y+x}\cdot e^{-c^2} \quad \text{con } c \text{ compreso tra } x \text{ e } y$$

La funzione, dunque, è definita su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$

Calcoliamo, pertanto, il limite lungo le direzioni individuate dalle parabole, tangenti nell'origine proprio alla retta $y=-x$, di rispettive equazioni

1. $y=x^2-x$: $\lim_{t\to 0^+} f(t,t^2-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-t-t}{t^2-t+t}\cdot e^{-c^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-2\cdot t+o(t)}{t^2}\cdot e^{-c^2}=-\infty$
2. $y=-x^2-x$: $\lim_{t\to 0^+} f(t,-t^2-t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{-t^2-t-t}{-t^2-t+t}\cdot e^{-c^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-2\cdot t+o(t)}{-t^2}\cdot e^{-c^2}=+\infty$

Infatti, nel caso 1, data la specifica parametrizzazione scelta per x e y, abbiamo che

$$\begin{matrix} x(t)=t \\ y(t)=t^2-t \end{matrix} \quad \Rightarrow (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow t\to 0$$

Inoltre, essendo c compreso tra x ed y, segue che

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow c\to 0$ e quindi $c\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$

Un discorso analogo vale per il caso 2.

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x,y)=-\infty$

limsup $f(x,y)=+\infty$

11b : per $x>0$ e $y>0$

<u>Svolgimento di 11b :</u>

Calcoliamo il limite lungo le direzioni individuate dalle due parabole, tangenti nell'origine agli assi cartesiani, di equazioni

1. $y = x^2$: $\lim_{t\to 0^+} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-t}{t^2+t}\cdot e^{-c^2} = -1$
2. $x = y^2$: $\lim_{t\to 0^+} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t-t^2}{t+t^2}\cdot e^{-c^2} = 1$

Quindi, il limite non esiste. Dimostriamo che

liminf $f(x,y) = -1$

limsup $f(x,y) = 1$

Per quanto riguarda limsup, deve essere $f(x,y)\leqslant 1$ per ogni (x,y) appartenente al 1° quadrante (assi esclusi) :

$$\frac{y-x}{y+x}\cdot e^{-c^2} \leqslant \frac{y-x}{y+x} \leqslant 1 \Leftrightarrow y-x\leqslant y+x \Leftrightarrow x\geqslant 0 \quad \text{OK}$$

Mentre per quanto riguarda liminf, deve essere $f(x,y)\geqslant -1$ per ogni (x,y) appartenente al 1° quadrante (assi esclusi) :

$$\frac{y-x}{y+x}\cdot e^{-c^2} \geqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y}\cdot e^{-c^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y}\leqslant 1 \Leftrightarrow x-y\leqslant x+y \Leftrightarrow y\geqslant 0 \quad \text{OK}$$

11c : per $0\leqslant x\leqslant y$

<u>Svolgimento di 11c :</u>

Calcoliamo il limite lungo la bisettrice del 1° quadrante

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t-t}{t+t}\cdot e^{-c^2} = 0$$

e lungo l'asse delle $y>0$

$$\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t}\cdot e^{-c^2} = 1$$

Dunque, il limite non esiste. Dimostriamo che

liminf $f(x,y) = 0$

limsup $f(x,y) = 1$

Per limsup la dimostrazione è identica a sopra, mentre per liminf deve essere $f(x,y)\geqslant 0$ per ogni (x,y) appartenente al dominio in esame :

$\frac{y-x}{y+x} \cdot e^{-c^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow y-x \geqslant 0$ OK per le definizioni stesse di x e y

---

11d : per $x>0$ e $y \leqslant x^2$

<u>Svolgimento di 11d :</u>

Esattamente come in 11a, comparendo nuovamente parte della regione di indeterminazione di $f(x,y)$, costituita dalla bisettrice del 4° quadrante, abbiamo che

liminf $f(x,y) = -\infty$

limsup $f(x,y) = +\infty$

Esercizio 12.

Calcolare liminf e limsup per $(x,y)\to(0,0)$ della funzione $f(x,y)=\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y}dt$

12a : per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 12a :</u>

Essendo la funzione integranda $\arctan(t^3)$ una funzione dispari, una sua primitiva $h(t)$ sarà una funzione pari e, quindi, avremo che

$$\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y}dt = h(y)-h(x)$$

Inoltre, per la specifica simmetria della funzione $h(t)$, sarà

$$h(y)-h(x) = h(y)-h(-x)$$

da cui, andando a ritroso, segue che

$$\int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y}dt = \int_{-x}^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y}dt$$

Applicando adesso il teorema del valor medio, otteniamo

$$f(x,y)=\frac{y+x}{x+y}\cdot\arctan(c^3) \quad \text{con} \quad c \quad \text{compreso tra} \quad x \quad \text{ed} \quad y$$

Dunque, in conclusione, avremo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{c\to 0}\arctan(c^3)=0$$