Esercizio 12.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \to (0,0)$ della funzione $f(x, y) = \int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt$

12a : per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Svolgimento di 12a :</u>

Per il teorema del valor medio, si ha che

$$f(x, y) = \int_x^y \frac{\arctan(t^3)}{x+y} dt = \frac{y-x}{y+x} \cdot \arctan(c^3) \quad \text{con } c \text{ compreso tra } x \text{ ed } y$$

La funzione, dunque, è definita su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Calcoliamo il limite lungo una generica famiglia di curve, tangenti nell'origine proprio alla retta $y = -x$, di equazione $y = x^m - x$, con $m > 1$

$$\lim_{t\to0^+} f(t, t^m - t) = \lim_{t\to0^+} \frac{t^m - t - t}{t^m - t + t} \cdot \arctan[c^3(t)] = \lim_{t\to0^+} \frac{-2 \cdot t}{t^m} \cdot \arctan[c^3(t)] = \lim_{t\to0^+} \frac{-2 \cdot \arctan[c^3(t)]}{t^{m-1}}$$

Adesso, per la specifica parametrizzazione scelta, se è lecito supporre che per $t \to 0$ $c(t) \sim t$, abbiamo che

$$\lim_{t\to0^+} \frac{-2 \cdot \arctan[c^3(t)]}{t^{m-1}} = \lim_{t\to0^+} \frac{-2 \cdot t^3}{t^{m-1}} = \lim_{t\to0^+} -2 \cdot t^{4-m} = \left\{\begin{matrix} 0 \;\; per \;\; 1 < m < 4 \\ -2 \;\; per \;\; m = 4 \\ -\infty \;\; per \;\; m > 4 \end{matrix}\right\}$$

Analogamente, se calcoliamo il limite lungo la famiglia di curve $y = -x^m - x$, otteniamo che

$$\lim_{t\to0^+} f(t, -t^m - t) = \lim_{t\to0^+} \frac{-t^m - t - t}{-t^m - t + t} \cdot \arctan[c^3(t)] = \lim_{t\to0^+} 2 \cdot t^{4-m} = \left\{\begin{matrix} 0 \;\; per \;\; 1 < m < 4 \\ 2 \;\; per \;\; m = 4 \\ +\infty \;\; per \;\; m > 4 \end{matrix}\right\}$$

Dunque, il limite non esiste ed è

liminf $f(x, y) = -\infty$

limsup $f(x, y) = +\infty$