

Esercizio 5.

Calcolare liminf e limsup per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ della funzione $f(x, y) = \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x + y}$

5a: per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Svolgimento di 5a:

Applicando alla funzione data la formula di prostaferesi relativa alla differenza di coseni, otteniamo che

$$f(x, y) = \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x + y} = \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{x + y} = \frac{-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

A questo punto effettuiamo il seguente cambio di variabili:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \cdot z \\ x - y &= 2 \cdot w \end{aligned} \quad \text{da cui segue che } (x, y) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow (z, w) \rightarrow (0, 0)$$

Quindi, abbiamo che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(z, w) \rightarrow (0, 0)} f(z, w) = \lim_{(z, w) \rightarrow (0, 0)} \frac{-\sin(z)}{z} \cdot \sin(w) = 0$$