

# Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 23 Settembre 2017

1. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha \arctan n,$$

dove  $\alpha > 0$  è un parametro reale.

- (a) Determinare per quali valori di  $\alpha$  la serie converge assolutamente.
- (b) Determinare per quali valori di  $\alpha$  la serie converge.

2. Determinare, al variare del parametro reale  $\lambda$ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$e^{1/x} = \lambda x^2.$$

3. Consideriamo, al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ , la funzione  $f_\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definita da

$$f_\alpha(x) = \int_x^{x+x^\alpha} \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} dt.$$

- (a) Determinare, al variare di  $\alpha$ , il limite di  $f_\alpha(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .
- (b) (Bonus question) Determinare se esistono valori  $\alpha > 0$  per cui la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = f_\alpha(x_n), \quad x_0 = 2017$$

risulta *limitata* e *non infinitesima*.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'' + u' - 2u = \cosh t.$$

- (a) Determinare la soluzione generale.
- (b) Determinare per quali valori del parametro reale  $\alpha$  la soluzione con dati iniziali

$$u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0$$

risulta limitata inferiormente su tutto  $\mathbb{R}$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.