Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 27 Luglio 2017

1. Consideriamo la successione
$$a_n = \sqrt[n]{(n+3)^n - n^n}.$$
   (a) Dimostrare che a_n non è limitata superiormente.
   (b) Determinare l'ordine di infinito e la parte principale di a_n.

2. Consideriamo, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la funzione $f_\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\alpha(x) = x^4 - \alpha x^3 \log(1+x).$$
   (a) Dimostrare che per ogni numero reale $\lambda \geq 0$ l'equazione $f_\alpha(x) = \lambda$ ammette almeno una soluzione.
   (b) Determinare per quali valori di α la funzione $f_\alpha(x)$ è iniettiva.
   (c) (Bonus question) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 2$ la funzione $f_n(x)$ ammette un unico punto di minimo $x_n > 0$, e studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_x^{2x} \log t \cdot \arctan t \, dt.$$
   (a) Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità di $f(x)$ in $(0, 1)$.
   (b) Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità di $f(x)$ in $(1, +\infty)$.

4. Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ si ha convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x) - e^{-2x^2}}{x^\alpha \log(1+x)} \, dx.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.