BY GIMUSI 11/07/17

esercizio su massimi e minimi

Consideriamo $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y\sin(x) + z^2$.

a. determinare $sup_{\mathbb{R}^3} f$ e $inf_{\mathbb{R}^3} f$
b. determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
c. determinare i punti di massimo e minimo locale e globale, nel caso esistano.

a) $\lim_{\substack{y\to\pm\infty \\ x=z=\frac{\pi}{2}}} y\sin(x)+z^2 = \pm\infty \leadsto \begin{cases} \sup f = +\infty \\ \inf f = -\infty \end{cases}$

$\Downarrow$

NON ESISTONO MAX, MIN GLOBALI

b) PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} f_x = y\cos x = 0 \\ f_y = \sin x = 0 \\ f_z = 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi, \; k\in\mathbb{Z} \\ z = 0 \end{cases}$$

MATRICE HESSIANA IN $P(k\pi, 0, 0)$

$$\begin{cases} f_{xx} = -y\sin x & f_{xy} = f_{yx} = \cos x \\ f_{yy} = 0 & f_{yz} = f_{zy} = 0 \\ f_{zz} = 2 & f_{zx} = f_{xz} = 0 \end{cases}$$

$x = 2k\pi$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det H = -2$

$x = (2n+1)\pi$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det H = -2$

IN ENTRAMBI I CASI

SEGNATURA: $+ \; 0 \; -$ $\leadsto \begin{cases} + + - \\ \cancel{- - -} \end{cases} \leadsto$ NON ESISTONO MAX MIN LOCALI

(SYLVESTER)

c) b) $\Rightarrow$ NON ESISTONO P.TI DI MAX, MIN LOCALE/GLOBALE

SEGNATURA CON COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x\ y\ z) H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2z^2 + 2xy =$$

$$= \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + 2z^2 \qquad + + -$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x\ y\ z) H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2z^2 - 2xy =$$

$$= -\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 + 2z^2 \qquad + + -$$