Vorrei chiedere a proposito di dubbi sorti in questo esercizio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \liminf\,(1+a_n)^n = 1, \qquad \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

Innanzitutto $l = \liminf a_n \geq 0$, dato che la successione è a valori positivi; se tuttavia fosse $l > 0$ avremmo, per caratterizzazione del liminf, che

$$\exists n_0 : a_n > \frac{l}{2} \quad \forall n > n_0,$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \frac{l}{2} \sum_{n_0+1}^{\infty} (n - n_0) \to +\infty,$$

contro l'ipotesi; dunque $l = 0$. A questo punto

$$\liminf\,(1+a_n)^n = \liminf e^{n\log(1+a_n)} = \liminf e^{n(a_n+o(a_n))}$$

Ora trascuro l'o piccolo perché tanto "va già tutto a zero" (diciamo non è questo il punto che mi interessa), da cui

$$= e^{\liminf n a_n} = e^0 = 1.$$

Infatti, se $\liminf n a_n > 0$ avremmo che la serie è asintoticamente equivalente a $1/n$ e ancora divergerebbe, contro l'ipotesi (a patto che il confronto asintotico funzioni con il liminf "dal basso", cosa che andrebbe dimostrata ma sembra ragionevole).

Il punto focale di cui vorrei chiedere è però l'uso della continuità dell'esponenziale per il calcolo del limite. Poiché mi sembrava tutt'altro che scontata la sua correttezza, ho abbozzato una rude dimostrazione. Sia f una funzione continua, a_n una successione e $\liminf a_n = l \in \mathbb{R}$ per semplicità; sia inoltre f monotona crescente almeno in un intorno di l. Per caratterizzazione esiste $a_{n_i} \to l$ e $a_n > l - \varepsilon$ definitivamente. Adesso, applicando f, si ha

$$f(a_{n_i}) \to f(l) \qquad f(a_n) > f(l-\varepsilon) = f(l) - \varepsilon_0$$

dove il primo risultato si ottiene per continuità per successioni e il secondo per monotonia 1. Dunque, data l'arbitrarietà (?) di ε_0 e dato che esiste una sottosuccessione convergente, si ha che $\liminf f(a_n) = f(l) = f(\liminf a_n)$.

Mi lascia qualche perplessità l'aver dovuto supporre la monotonia in un punto, ma d'altronde mi sembra anche ragionevole poiché, mentre il limite ha entrambe le disuguaglianze *definitivamente*, il liminf ne ha solo una e pertanto non può permettersi di girare agilmente i versi delle disuguaglianze. A questo punto vorrei domandare: è davvero necessaria la monotonia? È corretto, per il resto, lo svolgimento dell'esercizio? Grazie e buonanotte :)