

Vorrei chiedere a proposito di dubbi sorti in questo esercizio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \liminf (1 + a_n)^n = 1, \quad \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

Innanzitutto se  $l = \liminf a_n$  fosse minore di 1 avremmo un assurdo, dato che la successione è a valori positivi; se invece fosse maggiore di 1 la serie divergerebbe per il criterio della radice, da cui  $l = 0$ . A questo punto

$$\liminf (1 + a_n)^n = \liminf e^{n \log(1+a_n)} = \liminf e^{n(a_n + o(a_n))}$$

Ora trascuro l'  $o$  piccolo perché tanto “va già tutto a zero” (diciamo non è questo il punto che mi interessa), da cui

$$= e^{\liminf na_n} = e^0 = 1.$$

Infatti, se  $\liminf na_n > 0$  avremmo che la serie è asintoticamente equivalente a  $1/n$  e ancora divergerebbe, contro l'ipotesi (a patto che il confronto asintotico funzioni con il liminf “dal basso”, cosa che andrebbe dimostrata ma sembra ragionevole).

Il punto focale di cui vorrei chiedere è però l'uso della continuità dell'esponenziale per il calcolo del limite. Poiché mi sembrava tutt'altro che scontata la sua correttezza, ho abbozzato una rude dimostrazione. Sia  $f$  una funzione continua,  $a_n$  una successione e  $\liminf a_n = l \in \mathbb{R}$  per semplicità; sia inoltre  $f$  monotona crescente almeno in un intorno di  $l$ . Per caratterizzazione esiste  $a_{n_i} \rightarrow l$  e  $a_n > l - \varepsilon$  definitivamente. Adesso, applicando  $f$ , si ha

$$f(a_{n_i}) \rightarrow f(l) \quad f(a_n) > f(l - \varepsilon) = f(l) - \varepsilon_0$$

dove il primo risultato si ottiene per continuità per successioni e il secondo per monotonia 1. Dunque, data l'arbitrarietà (?) di  $\varepsilon_0$  e dato che esiste una sottosuccessione convergente, si ha che  $\liminf f(a_n) = f(l) = f(\liminf a_n)$ .

Mi lascia qualche perplessità l'aver dovuto supporre la monotonia in un punto, ma d'altronde mi sembra anche ragionevole poiché, mentre il limite ha entrambe le disuguaglianze *definitivamente*, il liminf ne ha solo una e pertanto non può permettersi di girare agilmente i versi delle disuguaglianze. A questo punto vorrei domandare: è davvero necessaria la monotonia? È corretto, per il resto, lo svolgimento dell'esercizio? Grazie e buonanotte :)