6. (b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{u}+\frac{\dot{u}}{1+t}=0\,.$$

Svolgimento di 6. (b) :

Poniamo $\dot{u}(t)=y(t)$ da cui segue che $\ddot{u}(t)=\dot{y}(t)$ e l'equazione differenziale si trasforma in

$\dot{y}+\frac{y}{1+t}=0$ a variabili separabili. Infatti è

$\frac{dy}{dt}=-\frac{y}{1+t}$ da cui $\frac{dy}{y}=-\frac{dt}{1+t}$ quindi $\log(y)=\log(\frac{1}{|1+t|})+c$ ed infine $y(t)=\frac{e^c}{|1+t|}=\frac{k_1}{|1+t|}$ $k_1>0$

Tornando alla funzione $u(t)$ e scegliendo, ad esempio, l'intervallo in cui è $1+t>0$, abbiamo che :

$u(t)=k_1\cdot\log(1+t)+k_2$