Esercizio

Sia $\ddot{u}(t) - 7u(t) = f(t)$ una equazione differenziale, dove $f(t)$ è una funzione continua e limitata. L'omogenea associata è risolta da

$$h(t) = c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}}.$$

Dunque $u(t) = h(t) + z(t)$, dove $z(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Con il metodo di variazione delle costanti trovo

$$z(t) = 2\sqrt{7} e^{t\sqrt{7}} \int f(s) e^{-s\sqrt{7}} \mathrm{d}s - \frac{e^{-t\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}} \int f(s) e^{s\sqrt{7}} \mathrm{d}s.$$

Per ipotesi $|f(s)| \leq \mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$ da cui

$$z(t) \leq 2\sqrt{7} e^{t\sqrt{7}} \int \mathrm{M} e^{-s\sqrt{7}} \mathrm{d}s - \frac{e^{-t\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}} \int (-\mathrm{M}) e^{s\sqrt{7}} \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow z(t) \leq 2\sqrt{7} e^{t\sqrt{7}} \mathrm{M} \int e^{-s\sqrt{7}} \mathrm{d}s + \frac{e^{-t\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}} \mathrm{M} \int e^{s\sqrt{7}} \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow u(t) \leq c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} + 3\mathrm{M}$$

dove l'implicazione si è ottenuta maggiorando il più possibile l'espressione al variare di $f(t)$ tra $-\mathrm{M}$ ed M.
Allo stesso modo trovo che

$$u(t) \geq c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} - 3\mathrm{M}.$$

Da qui si vede che gli unici problemi di non limitatezza possono sorgere soltanto all'infinito. Adesso passo al limite per $+\infty$ e $-\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} - 3\mathrm{M} \right) \leq \lim_{t\to+\infty} u(t) \leq \lim_{t\to+\infty} \left(c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} + 3\mathrm{M} \right);$$

$$\lim_{t\to-\infty} \left(c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} - 3\mathrm{M} \right) \leq \lim_{t\to-\infty} u(t) \leq \lim_{t\to-\infty} \left(c_1 e^{t\sqrt{7}} + c_2 e^{-t\sqrt{7}} + 3\mathrm{M} \right).$$

e si deduce così che per $c_1 = c_2 = 0$ si ha effettivamente l'unica soluzione limitata. Tuttavia non sono affatto convinto di questo svolgimento: dov'è l'errore?