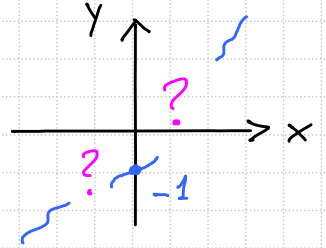


Si tratta di stabilire l'injectività della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sinh(x^5) - \cosh(x^3)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, f \text{ CONT.} \Rightarrow \text{SURJETTIVA}$$

$$2) \begin{aligned} x \rightarrow 0 \quad f(x) &= -1 + x^5 + o(x^5) \\ x=0 \quad &\text{È UN PUNTO DI FLESSO} \end{aligned}$$



3) PER $x \in (-\infty, 0)$ $f(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE IN QUANTO SOMMA DI FUNZIONI STRETT. CRESCENTI

$$(\sinh x^5)' = 5x^4 \cosh x^5 > 0, (-\cosh x^3)' = -3x^2 \sinh x^3 > 0$$

4) PER $x \in (0, +\infty)$ È SOMMA DI UNA FUNZIONE STRETT. CRESC. $(\sinh x^5)$ E DI UNA FUNZIONE STRETT. DECRESCENTE $(-\cosh x^3)$

$$(\sinh x^5)' = 5x^4 \cosh x^5 > 0, (-\cosh x^3)' = -3x^2 \sinh x^3 < 0$$

$$f'(x) = 5x^4 \cosh x^5 - 3x^2 \sinh x^3 =$$

$$= 3x^2 \sinh x^3 \left(\frac{5}{3} x^2 \frac{\cosh x^5}{\sinh x^3} - 1 \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} x^2 \frac{\cosh x^5}{\sinh x^3} > 1$$

CONSIDERIAMO DUE CASI:

$$(i) \quad x \geq 1 \quad \frac{5}{3} x^2 \frac{\cosh x^5}{\sinh x^3} \geq \frac{5}{3} x^2 \frac{\cosh x^3}{\sinh x^3} \geq \frac{5}{3} > 1$$

$$(ii) \quad 0 < x < 1 \quad \frac{5}{3} x^2 \frac{\cosh x^5}{\sinh x^3} \geq \frac{5}{3} x^3 \frac{\cosh x^5}{\sinh x^3} \geq \frac{5}{3} \frac{x^3}{\sinh x^3}$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ 0 < y < 1 \end{cases} = \frac{5}{3} \frac{y}{\sinh y} \geq \frac{5}{3} \frac{1}{\sinh(1)} > 1$$

$$\frac{y}{\sinh y} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0 \quad \left(\frac{y}{\sinh y} \right)' = \frac{\sinh y - y \cosh y}{(\sinh y)^2} = \frac{\cosh y}{(\sinh y)^2} (\tanh y - y) < 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geq 0$ con $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, PER "MONOTONIA 3"

$\Rightarrow f(x)$ È STRETT. CRESCENTE $\Rightarrow f(x)$ È INIETTIVA