13) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{|x_n - 3|}{2} \\ x_0 = 2^{2015} \end{cases}$ (1)

Sia $f(x) = \dfrac{|x-3|}{2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & \text{per } x \geq 3 \\ \dfrac{-x+3}{2} & \text{per } x < 3 \end{cases}$

Il presunto limite della successione dovrebbe essere $l = 1$, come si ricava intersecando graficamente le funzioni $f(x) = \dfrac{|x-3|}{2}$ e $g(x) = x$.

Inoltre, essendo $f'(x) = -\frac{1}{2}$ per $x \in [0, 3]$, risulta $f(x)$ strettamente decrescente in questo intervallo. Quindi si ipotizza per x_n un comportamento sparpagliante entrante, esistendo un intorno di $x = 1$ in cui $f(x)$ è Lipschitziana con costante < 1.

Poiché $x_0 = 2^{2015}$ è di gran lunga > 3, dobbiamo prima di tutto determinare un $\delta > 0$ tale che $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [1-\delta, 1+\delta]$ e, successivamente, iterare a mano la successione data fino a trovare un indice n_0 tale che $|x_{n_0} - 1| \leq \delta$.

Essendo $|f'(x)| = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0, 3)$, sicuramente la condizione richiesta è soddisfatta per $\delta = \frac{1}{2}$ ad esempio.

Per quanto riguarda la determinazione dell'indice n_0, trattandosi di un lavoro improbo date le grandezze di x_0, cercheremo di determinare la formula generale per x_n, in modo da stabilire il valore di un qualunque termine della successione senza dover calcolare tutti i termini precedenti.

Iniziamo calcolando tramite la formula ricorsiva i primi termini della successione:

$$x_0 = 2^{2015}$$

$$x_1 = \left| \frac{2^{2015}}{2} - \frac{3}{2} \right| = 2^{2014} - \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \left| \frac{2^{2014} - \frac{3}{2} - 3}{2} \right| = 2^{2013} - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$x_3 = \left| \frac{2^{2013} - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 3}{2} \right| = 2^{2012} - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$

Ipotizzo che la formula generale per x_n sia:

$$x_n = \left| 2^{2015-n} - 3\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \right| \quad \forall n \geq 1$$

Dimostriamolo per induzione su n:

Passo base: $n = 1 \Rightarrow x_1 = \left| 2^{2014} - \frac{3}{2} \right|$ ok

Passo induttivo: se è vera per n allora è vera anche per $n+1 \Rightarrow$

Ipotesi: $x_n = \left| 2^{2015-n} - 3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right|$

Tesi: $x_{n+1} = \left| 2^{2014-n} - 3 \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right|$

Per la formula ricorsiva abbiamo che

$$x_{n+1} = \left| \frac{2^{2015-n} - 3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 3}{2} \right| =$$

$$\left| 2^{2014-n} - 3\left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\right] \right| =$$

$$\left| 2^{2014-n} - 3\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}\right] \right| =$$

shiftando gli indici e aggiungendo $\frac{1}{2}$

$$\left| 2^{2014-n} - 3 \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right|,$$ cioè la tesi

Vogliamo adesso che

$$|x_{n_0}-1| \le \delta \quad \text{per } n_0 = 2013$$

Infatti, dalla formula generale per x_n segue che

$$x_{n_0} = \left| 4 - 3\sum_{k=1}^{2013} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \right|$$

Ora è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k - 1 = 1$$

trattandosi della serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$, che converge a $\frac{1}{1-a}$ per $a \in (-1, 1)$

Quindi x_{n_0} è una quantità vicinissima a 1, da cui segue che

$$|x_{n_0}-1| \le \delta = \tfrac{1}{2}$$

Partiamo adesso con il piano delle distanze:

Poniamo $d_n = |x_n - 1|$ ~~[illegible]~~

i) $x_n \ge 0 \quad \forall n \ge n_0$

ii) $d_{n+1} \le \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \ge n_0$

iii) $d_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \ge n_0$

iv) $d_n \to 0$

Dim i)

Discende direttamente dalla formula di x_n, comparendoci il valore assoluto dei suoi termini.

Dim ii)

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1| = \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \geq n_0$$

definizione di d_n

formula ricorsiva più il fatto che $f(1) = 1$

Lipschitzianità di $f(x)$

ancora definizione di d_n

Dim iii)

Induzione su n:

Passo base: $n = n_0 \Rightarrow d_{n_0} = |x_{n_0} - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} |x_0 - 1|$

Passo induttivo: se è vera per n allora è vera anche per $n+1$ $\Rightarrow$

Ipotesi: $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$, tesi: $d_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} d_0$

Per il punto ii) è

$$d_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} d_0$$

Dim iv)

Per il teorema dei carabinieri è

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & d_n & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Quindi $|x_{n_0} - 1| \to 0 \Rightarrow x_n \to 1 \ \forall n \geq n_0$