6) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n^2} \\ x_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Primi termini della successione:

$x_0 = -0{,}5$; $x_1 = -0{,}4$; $x_2 = -0{,}3\dot{4}5$ ....

Piano di studio della successione:

i) $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $x_n \to l \in \mathbb{R}$

iv) $l = 0$

Dim. i)

Per induzione su n:

Passo base: per $n = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 0$ ok

Passo induttivo: se la relazione è vera per n allora è vera anche per $(n+1) \Rightarrow$

Ipotesi: $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0$; Tesi: $-\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq 0$

Poiché $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente in $[-\frac{1}{2}, 0]$, bisogna cambiare verso alla disequazione nel fare il quadrato dei termini presenti nell'ipotesi:

$-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \leq 1 + x_n^2 \leq \frac{5}{4}$

Poiché $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ è strettamente decrescente in $[1, \frac{5}{4}]$, bisogna cambiare nuovamente verso nel fare l'inverso dei termini $\Rightarrow$

$\frac{4}{5} \leq \dfrac{1}{1+x_n^2} \leq 1$

Essendo poi per ipotesi $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0$, bisogna ulteriormente cambiare di verso nel moltiplicare per $x_n \Rightarrow$

$$x_n \leq \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{4}{5} x_n$$

Infine, sempre per l'ipotesi $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0$, il termine al centro dovrà essere maggiore del valore minimo assunto dal LHS e minore del valore massimo assunto dal RHS. $\Rightarrow$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq 0$$, cioè la tesi.

Dim ii)

Dalla formula ricorsiva segue che:

non si cambia verso perché si moltiplica per quantità > 0

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow \frac{x_n}{1+x_n^2} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \geq x_n(1+x_n^2) \Leftrightarrow 1 \leq 1+x_n^2 \Rightarrow$$

si cambia verso perché si divide per quantità < 0

$x_n^2 \geq 0$ sempre

Dim. iii)

Essendo per ii) x_n debolmente crescente ed essendo per i) limitata dall'alto, per il teorema delle successioni monotone esiste il limite ℓ di x_n, con $\ell \in \mathbb{R}$.

Dim. iv)

Poiché per iii) $x_n \to \ell$, passiamo al limite nella formula ricorsiva:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2} \Rightarrow \ell = \frac{\ell}{1+\ell^2} \Rightarrow \ell(1+\ell^2) - \ell = 0 \Rightarrow \ell^3 = 0 \Rightarrow$$

$\ell = 0$

Riassumendo è

x_n monotona $\uparrow$

$x_n \to \ell = 0$

$\inf\{x_n\} = -1/2$

$\sup\{x_n\} = 0$