Notazioni. Su $\mathbf{R}^d$ metteremo la norma del massimo e su $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$ la corrispondente norma operatoriale. Con $C(x,r)$ indicheremo il cubetto aperto di centro $x \in \mathbf{R}^d$ e semilato $r > 0$, che è la palla aperta in questa norma.

Lemma del cubetto interno. Dati A e B aperti di $\mathbf{R}^d$, sia $\phi : A \to B$ diffeomeorfismo e $A' \subseteq A$ un compatto fissato.
Allora per ogni $1 > \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni $0 < \delta \le \delta_\epsilon$ valga:

$$\phi(C(x,\delta)) \supseteq C\left(\phi(x), \frac{\delta(1-\varepsilon)}{\|D\phi(x)^{-1}\|}\right) \qquad \forall\ x \in A'$$

Dimostrazione. Sia dato $\varepsilon \in (0,1)$. Scegliamo un δ tale che $2\delta \le \operatorname{dist}(A', A^c)$ e che valga:

$$\|x - x'\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left\|\mathbb{1} - D\phi(x)^{-1} \cdot D\phi(x')\right\| \le \varepsilon \qquad (1)$$

che è possibile per l' uniforme continuità della funzione

$$(x,x') \quad \longmapsto \quad \left\|\mathbb{1} - D\phi(x)^{-1} \cdot D\phi(x')\right\|$$

definita sul compatto $A' \times A'$ e nulla sulla diagonale.
Sia ora fissato un arbitrario $x_o \in A'$. Quello che dobbiamo provare è che se y è tale che:

$$\|y - \phi(x_o)\| < \frac{\delta(1-\varepsilon)}{\|D\phi(x_o)^{-1}\|} \qquad (2)$$

allora esiste $x_y \in C(x_o,\delta)$ tale che $y = \phi(x_y)$. Questo viene dimostrato per via contrattiva. Mostriamo che se y soddisfa (2) allora la seguente mappa è ben definita ed è una contrazione:

$$T_{(y)} : \overline{C(x_o,\delta)} \quad \longrightarrow \quad \overline{C(x_o,\delta)}$$

$$T_{(y)} : x \quad \longmapsto \quad x + D\phi(x_o)^{-1}.(y - \phi(x))$$

Per prima cosa diciamo che la scelta di δ è stata fatta anche in modo che $\overline{C(x_o,\delta)} \subseteq A$ e dunque abbia senso calcolare $T_{(y)}$.
Osserviamo poi che $T_{(y)}$ è contrattiva; il suo differenziale in un punto $x \in C(x_o,\delta)$ vale:

$$DT_{(y)}(x) = \mathbb{1} - D\phi(x_o)^{-1} \cdot D\phi(x)$$

ed essendo $\|x - x_o\| \le \delta$ tale differenziale ha norma minore di ε per la (1). Possiamo quindi ricavare una stima di tipo Lipschitz su T_y: la palla è convessa quindi posso applicare la disuguaglianza di Lagrange e ottenere, per ogni coppia di punti x e x' in $\overline{C(x_o,\delta)}$:

$$\|T_{(y)}(x') - T_{(y)}(x)\| \le \|DT_y(\xi)\| \cdot \|(x' - x)\| \le \varepsilon\ \|x' - x\|$$

Quindi è contrattiva.

Vediamo infine che il cubo viene mandato in sè:

$$\|T_{(y)}(x) - x_o\| \leq \|T_{(y)}(x) - T_{(y)}(x_o)\| + \|T_{(y)}(x_o) - x_o\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \|x - x_o\| + \|D\phi(x_o)^{-1}\| \|y - \phi(x_o)\| < \delta$$

E quindi in realtà $T_{(y)}\left(\overline{C(x_o,\delta)}\right) \subseteq C(x_o,\delta)$.
Dunque per tali y esiste un punto fisso $x_y \in \overline{C(x_o,\delta)}$ che risolve:

$$T_{(y)}(x_y) = x_y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \phi(x_y)$$

e dato che x_y sta nell' immagine di $T_{(y)}$ allora, per la disuguaglianza vista sopra, $\|x_y - x_o\| < \delta$. Detto in maniera diversa si è provato che:

$$\phi(C(x_o,\delta)) \supseteq C\left(\phi(x_o), \frac{\delta(1-\varepsilon)}{\|D\phi(x_o)^{-1}\|}\right)$$

si conclude osservando che la scelta di $x_o \in A'$ era stata fatta del tutto indipendentemente da quella di δ, su cui abbiamo imposto solo disuguaglianze dall' alto.
Osservazione. A ben vedere non si usa l' ipotesi di diffeomeorfismo, quanto più quella, assai meno stringente, di differenziale continuo ed ovunque invertibile.