Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 2 Febbraio 2016

Esercizio 1. Consideriamo il funzionale:

$$F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 + (u - x^2)^2 \; dx$$

- Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(0) = u(2)$;
- Studiare il problema di minimo per $F(u)$ con le condizioni al bordo $\dot{u}(0) = \dot{u}(2)$.

Soluzione. Proviamo minimizzare $F(u)$ nello spazio seguente:

$$X = \{u \in C^1([0,2]) \mid u(0) = u(2)\}$$

Il minimo, se esiste in X, deve soddisfare:

$$\frac{d}{dt} F(u + tv)\bigg|_{t=0} = 0$$

per ogni $v \in V$, con V giacitura di X (X è uno spazio vettoriale, quindi in questo caso $V = X$). Da qui si ottiene, in sostanza, la prima forma integrale di Eulero:

$$\int_0^1 2\dot{u}\dot{v} + 2(u - x^2)v \; dx = 0$$

Supponendo che sia $u \in C^2([0,2])$, integrando per parti si ottiene la seconda forma integrale di Eulero:

$$[2\dot{u}v]_0^2 + \int_0^1 -2\ddot{u}v + 2(u - x^2)v \; dx = 0$$

$$2[\dot{u}(2) - \dot{u}(0)]v(0) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2(u - x^2))v \; dx = 0$$

Restringendosi allora al sottospazio W di V seguente:

$$W = \{v \in C^1([0,2]) \mid v(0) = v(2) = 0\}$$

si ha che u, se esiste, dev'essere soluzione della seguente equazione differenziale di Eulero:

$$-2\ddot{u} + 2(u - x^2) = 0$$
$$\ddot{u} = u - x^2$$

Proviamo a determinare una soluzione particolare dell'equazione, della forma:

$$u_0(x) = ax^2 + b$$

In effetti, se $a = 1$ e $b = 2$, u_0 risolve l'equazione differenziale. A tale funzione possiamo sommare una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$\ddot{z} = z$$

Vale allora:

$$z(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$$

Supponiamo di poter imporre la condizione di Dirichlet $u(0) = u(2)$, ove $u = z + u_0$. La seconda forma integrale diventa allora:

$$2[\dot{u}(2) - \dot{u}(0)]v(0) + \int_0^1 (-2\ddot{u} + 2(u - x^2))v \; dx = 2[\dot{u}(2) - \dot{u}(0)]v(0) = 0$$

Per arbitrarietà di $v \in V$, allora (dato che esistono $v \in V \setminus W$ con $v(0) = v(2) \neq 0$), bisogna imporre la seguente condizione di periodicità su $\dot{u}$:

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(2)$$

Ci siamo quindi ricondotti al seguente problema misto:

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{cases}$$

Elementari nozioni di algebra lineare garantiscono allora che i coefficienti c_1, c_2 sono univocamente determinati (omettiamo i conti espliciti).

Sia quindi u la soluzione trovata: dato che la funzione integranda è strettamente convessa, essa è un minimo, ed è l'unico punto di minimo per F.

Il minimo, dunque, è $F(u)$ (omettiamo i conti).

Per quanto riguarda il secondo punto, notiamo che il minimo di F in $C^1([0,2])$ senza alcuna condizione al bordo, di periodicità o integrale, è tale da soddisfare il seguente problema misto:

$$\begin{cases} \ddot{v} = v - x^2 \\ \dot{v}(0) = 0 \\ \dot{v}(2) = 0 \end{cases}$$

Ciò si può vedere ripercorrendo i conti effettuati al primo punto.

Anche in questo caso, elementari nozioni di algebra lineare dimostrano che i coefficienti c_1, c_2 sono univocamente determinati. Visto che in particolare la condizione di periodicità $\dot{v}(0) = \dot{v}(2)$ è verificata, e che la soluzione trovata è un punto di minimo ed è unico per stretta convessità della funzione integranda, concludiamo che anche in questo caso il minimo esiste, ed è $F(v)$, e che inoltre il punto di minimo è unico anche in questo caso.

Esercizio 2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema:

$$\begin{cases} \ddot{u} = 2^{x+u} \\ u(2) = 2 \\ u(4) = 4 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione proposta è l'equazione differenziale di Eulero del seguente funzionale:

$$F(u) = \int_2^4 \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{2^x}{\ln 2} 2^u \, dx$$

Se dunque tale funzionale ammette punti estremali (con le condizioni al bordo assegnate), l'equazione ha soluzione.

Notiamo subito che, per ogni $x \in [2,4]$ fissato, la funzione integranda:

$$\psi_x(s,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{2^x}{\ln 2} 2^s$$

è strettamente convessa in (s,p), dunque ogni punt estremale è un minimo (visto che c'è convessità), e l'eventuale minimo è unico (visto che la convessità è stretta). Se dunque la soluzione esiste, essa è unica.

Cerchiamo ora di usare il metodo diretto per garantire l'esistenza e la regolarità del punto di minimo. Formuliamo innanzitutto il prolblema nello spazio seguente:

$$X = \{ \; u \in H^1([2,4]) \;\; | \;\; u(2) = 2 \; , \; u(4) = 4 \; \}$$

Le condizioni al bordo, come sappiamo, hanno senso in questo spazio.

Cerchiamo ora una nozione di convergenza che renda compatti i sottolivelli e semicontinuo il funzionale, in modo da poter applicare il teorema di Weierstrass e concludere. Sia $u \in \Lambda_M$, con:

$$\Lambda_M = \{ \ u \in X \ \ | \ \ F(u) \leq M \ \}$$

Allora si ha banalmente:

$$||\dot{u}||_{L^2}^2 \leq 2M = \eta_1$$

Dunque $u \in C^{0,1/2}([2,4])$. Infatti per ogni $x, y \in [2,4]$, supponendo che $x < y$, si ha:

$$|u(y) - u(x)| \ = \ \left| \int_x^y \dot{u}(s) \ ds \right| \ \leq \ \int_x^y |\dot{u}(s)| \ ds \ \leq$$

$$\leq \ |y-x|^{1/2} ||\dot{u}||_{L^2} \ \leq \ \sqrt{\eta_1}|y-x|^{1/2}$$

Inoltre, per ogni $x \in [2,4]$:

$$|u(x)| \ \leq \ u(2) + |x-2|^{1/2}\sqrt{\eta_1} \ \leq \ 2 + 2^{1/2}\sqrt{\eta_1} \ = \ \eta_2 \ ,$$

da cui $||u||_{C^0} \leq \eta_2$.

In sostanza, usando la debole compattezza della palla unitaria in $L^2([2,4])$ e il teorema di Ascoli-Arzelà, si dimostra che i sottolivelli sono compatti rispetto alla seguente nozione di convergenza, che peraltro rende inferiormente semicontinuo il funzionale:

$$\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{u}_\infty \end{cases}$$

In particolare, la convergenza uniforme assicura che sia $u_\infty \in X$.

Resta allora da discutere la regolarità della soluzione trovata. Per ogni $v \in C_c^\infty(]2,4[)$ si ha:

$$\int_2^4 \dot{u}\dot{v} + 2^{x+u}v \ dx = 0$$

$$\int_2^4 \dot{u}\dot{v} \ dx = - \int_2^4 2^{x+u}v \ dx$$

Dunque $\dot{u}$ ammette derivata debole continua, quindi $\dot{u} \in C^1([2,4])$ e $u \in C^2([2,4])$. A questo punto, tramite *bootstrap*, si conclude che $u \in C^\infty([2,4])$.

La soluzione, pertanto, esiste ed è unica, ed appartiene a $C^\infty([2,4])$.

Esercizio 3. Consideriamo, per ogni numero reale $l > 0$, il seguente funzionale:

$$F(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - \sinh(u^2) \ dx$$

- Stabilire per quali valori di l la funzione $u_0(x) \equiv 0$ è un minimo locale forte (tra le funzioni nulle al bordo).
- Stabilire per quali valori di l il funzionale ammette minimo tra le funzioni tali che $u(0) = u(l) = 0$.
- Stabilire per quali valori di l il funzionale ammette minimo tra le funzioni tali che $u(0) = u(l) = 2016$.

Soluzione. Risolviamo prima gli ultimidue punti, e poi ci concentriamo sul primo.

Per ogni $l > 0$ consideriamo la successione di funzioni nulle al bordo $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale $\phi_n \equiv n \cdot \phi_1$, con:

$$\phi_1(x) = -x(x-l)$$

Allora:

- $\phi_1(x)$ è l-Lipschitziana, dunque ϕ_n è nl-Lipschitziana;
- $\phi_1(x)$, nell'intervallo $[\frac{l}{3}, \frac{2l}{3}]$, è maggiore di $\frac{2}{9}l^2$, dunque nel medesimo intervallo ϕ_n è maggiore di $\frac{2n}{9}l^2$.

Allora si ha:

$$F(\phi_n) = \int_0^l \dot{u}^2 - \sinh(u^2)\ dx \ \leq \ \int_0^l (nl)^2\ dx - \int_{l/3}^{2l/3} \sinh\left(\left(\frac{2n}{9}l^2\right)^2\right)\ dx \ \leq$$

$$\leq \ l(nl)^2 - \frac{l}{3}\sinh\left(\left(\frac{2n}{9}l^2\right)^2\right)$$

Dato che per ogni $x \geq 0$:

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \geq \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2}$$

si ha allora:

$$F(\phi_n) \ \leq \ l(nl)^2 - \frac{l}{3}\sinh\left(\left(\frac{2n}{9}l^2\right)^2\right) \ \leq \ l(nl)^2 - \frac{l}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\left(\frac{2n}{9}l^2\right)^2} - 1\right)$$

Dunque è palese che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} F(\phi_n) = -\infty$$

Un esempio simile dimostra che anche nel caso in cui $u(0) = u(l) = 2016$ l'estremo inferiore è $-\infty$: ad esempio si può considerare come successione di funzioni la successione $(\tilde{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale $\tilde{\phi}_n \equiv 2016 + \phi_n$.

Veniamo ora al primo punto. Innanzitutto u_0 risolve l'equazione differenziale di Eulero, che è:

$$\ddot{u} = -\cosh(u^2)2u$$

La variazione seconda di F calcolata in u_0 è:

$$Q(v) = \int_0^l 2\dot{v}^2 - 2v^2\ dx$$

Per ogni $l > 0$, allora, la condizione L^+ è verificata.

L'eccesso di Weierstrass è invece:

$$E(x,s,p,q) \ = \ q^2 - \sinh(s^2) - p^2 + \sinh(s^2) - (q-p)2p \ = \ q^2 - p^2 - (q-p)2p \ =$$

$$= \ (q-p)(q+p) - (q-p)2p \ = \ (q-p)(q-p) \ = \ (q-p)^2 \ \geq \ 0\ ,$$

per ogni $(x,s,p,q) \in [0,l] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per ogni $l > 0$, dunque, la condizione W^+ è verificata.

L'equazione di Jacobi associata a Q è:

$$4\ddot{v} = -4v$$

$$\ddot{v} = -v$$

La soluzione di tale equazione differenziale lineare del second'ordine con dati iniziali $v(0) = 0$, $\dot{v}(0) = 1$, è:

$$v_0(x) = \sin x$$

Essa si annulla nuovamente in $x_0 = \pi$. Dunque:

- Per $l < \pi$, la condizione L^+ è verificata;
- Per $l > \pi$, la condizione L non è verificata.

Quindi, in base a quanto detto finora:

- Per $l < \pi$, u_0 è un minimo locale forte;
- Per $l > \pi$, u_0 non è nemmeno minimo locale direzionale, dunque non è minimo locale forte.

Resta da discutere il caso in cui $l = \pi$.

Per una funzione di classe $C^\infty([0,\pi])$ non nulla (quindi non nulla in un insieme di misura positiva), vale:

$$F(u) < \int_0^l \dot{u}^2 - u^2 \, dx \ ,$$

dato che per ogni $x > 0$ vale $\sinh(x) > x$. Fissato allora $\delta > 0$, la funzione:

$$v_\delta = \delta \sin x$$

è nulla al bordo, ed è tale che $||v_\delta||_{C^0} \leq \delta$. Inoltre è facile mostrare che $F(v_\delta) < 0$, dato che:

$$\int_0^\pi \dot{v}_\delta^2 - v_\delta^2 \, dx = 0$$

Dunque, per $l = \pi$, u_0 non è minimo locale forte (in effetti, dato che $||\dot{v}_\delta||_{C^0} \leq \delta$, abbiamo dimostrato che u_0 non è nemmeno minimo locale debole).

Esercizio 4. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia:

$$m_\varepsilon = \min \left\{ \int_0^1 \sinh(\dot{u}^2) + \sin^4(u) \, dx \;\middle|\; u(0) = 0 \ , \ u(1) = \varepsilon \right\}$$

- Dimostrare che m_ε è ben definito per ogni $\varepsilon > 0$.
- Determinare la parte principale di m_ε per $\varepsilon \to 0^+$.

Soluzione. Il fatto che m_ε sia ben definito per ogni $\varepsilon > 0$ è una conseguenza di un'applicazione abbastanza standard del metodo diretto: vediamola per sommi capi.

Formuliamo il problema nello spazio:

$$X_\varepsilon = \{ \ u \in H^1([0,1] \ \mid \ u(0) = 0 \ , \ u(1) = \varepsilon \ \}$$

Se $F(u) \leq M$, dato che valgono le seguenti disuguaglianze:

- $\sinh(\dot{u}^2) \geq \dot{u}^2$;
- $-1 \leq \sin^4(u) \leq 1$,

si ricava facilmente una limitazione sulla derivata. Con passaggi standard, si dimostra allora che la seguente nozione di convergenza:

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} u_\infty \\ (\dot{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{u}_\infty \end{cases}$$

garantisce l'esistenza di un punto di minimo in X_ε. Tale minimo verifica le condizioni al bordo, ma a priori non è sufficientemente regolare.

Valutiamo ora la regolarità, l'unica cosa non proprio banale. Per $v \in C_c^\infty(]0,1[)$ si ha:

$$\int_0^1 [\cosh(\dot{u}^2) 2\dot{u}] \dot{v} \, dx = \int_0^1 [4 \sin^3(u) \cos(u)] v \, dx$$

Dunque:

$$[cosh(\dot{u}^2) 2\dot{u}] \in C^1([0,1])$$

Si ha però:

$$cosh(\dot{u}^2)2\dot{u} = \phi(\dot{u}) \ ,$$

con $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da:

$$\phi(x) = \cosh(x^2)2x$$

La derivata di tale funzione è:

$$\phi'(x) = 2\cosh(x^2) + 4x^2 \sinh(x^2)$$

Dunque, dato che la derivata è sempre strettamente positiva, deduciamo che ϕ è continua e strettamente crescente, dunque un omeomorfismo (ossia è invertibile con inversa continua). Da qui deduciamo allora che:

$$\dot{u} = \phi^{-1} \circ \phi(\dot{u}) \in C^0([0,1]) \ ,$$

dunque:

$$u \in C^1([0,1])$$

Concludiamo allora che, per ogni $\varepsilon > 0$, m_ε è ben definito.

Operiamo ora una linearizzazione. Ponendo $u = \varepsilon v$ si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo scrivere:

$$m_\varepsilon = \varepsilon^2 \min \left\{ \int_0^1 \frac{\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin^4(\varepsilon v)}{\varepsilon^2} \ dx \ \middle| \ v(0) = 0 \ , \ v(1) = 1 \right\}$$

Sia allora, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$G_\varepsilon = \int_0^1 \frac{\sinh(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin^4(\varepsilon v)}{\varepsilon^2} \ dx \ ,$$

e sia:

$$G(u) = \int_0^1 \dot{v}^2 \ dx$$

Sosteniamo che:

$$G = \Gamma - \lim_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon$$

Infatti:

- Sia $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \to v$, ad esempio in $L^2([0,1])$. Se:

  $$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$$

  non c'è nulla da dimostrare. Se invece:

  $$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) = M \in \mathbb{R}$$

  Allora esiste una successione decrescente $(\varepsilon_n)_{n \in \infty} \to 0^+$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vale $G_{\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) \leq M + 1$. In tal caso, per ongi $n \in \mathbb{N}^+$:

  $$M \geq G_{\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) \geq G(v_{\varepsilon_n}) = ||\dot{v}_{\varepsilon_n}||^2_{L^2}$$

  Dunque, a meno di estrarre un'ulteriore sottosuccessione:

  $$\begin{cases} (v_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}^+} \to_{||\cdot||_\infty} v \\ (\dot{v}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}^+} \rightharpoonup \dot{v} \end{cases}$$

  In particolare, $v \in H^1([0,1])$, con $v(0) = 0, v(1) = 1$. Sfruttando allora l'inferiore semicontinuità della norma L^2:

  $$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} G(v_\varepsilon) \geq G(v) \ ,$$

  e la prima disuguaglianza è verificata;

- È sufficiente verificare la seconda disuguaglianza solo che $G(v) < +\infty$, ossia se $v \in H^1([0,1])$. Ad esser precisi, è sufficiente verificarlo per $v \in C^1([0,1])$, visto che questo è un denso in energia in $H^1([0,1])$ rispetto a G. Ma per $v \in C^1([0,1])$, definendo $v_\varepsilon \equiv v$ per ogni $\varepsilon > 0$, si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} G_\varepsilon(v) = G(v) \ ,$$

  ossia si ha l'altra disuguaglianza.

Analizziamo velocemente il funzionale G. Esso ha un unico punto di minimo, dato dalla retta congiungente:

$$v_0(x) = x \ ,$$

dunque il minimo è $G(v_0) = 1$. Se dunque abbiamo un'ipotesi di equicoercività sui punti di minimo dei funzionali G_ε, allora essi devono necessariamente convergere a v_0. Dunque vale:

$$m_\varepsilon = \varepsilon^2 + \mathrm{o}(\varepsilon^2) \ , \ \varepsilon \to 0^+$$

In effetti basta che vi sia equicoercività per $\varepsilon \in]0,1[$, con $0 < \varepsilon_0 < 1$. Dato che:

$$G_\varepsilon(v_0) \leq \frac{\sinh(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \leq 10 \ ,$$

quindi $m_\varepsilon \leq 10$ per $0 < \varepsilon < 1$. Da qui si ottiene, con conti molto simili a quelli visti per dimostrare la prima disuguaglianza per determinare il Γ-limite, l'equicoercività voluta.

Dunque:

$$m_\varepsilon = \varepsilon^2 + \mathrm{o}(\varepsilon^2) \ , \ \varepsilon \to 0^+$$