Spazi Euclidei – Esercizi teorici 1

Argomenti: Consolidamento della teoria **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: Prodotto scalare e norma in $\mathbb{R}^n$, coordinate polari nel piano

---

1. Dimostrare le seguenti proprietà del *prodotto scalare euclideo*. Gli enunciati sono volutamente imprecisi: prima di dimostrarli, bisogna renderli precisi "quantificando" e spiegando dove stanno le variabili.
   - *Simmetria*: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   - *Distributività rispetto alla somma*: $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
   - *Comportamento rispetto al prodotto per una costante*: $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.
   - *Bilinearità*: $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$ e $\langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$.
2. Dimostrare che vale la relazione
   $$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$
   per ogni coppia di vettori u e v in $\mathbb{R}^2$ in due modi distinti:
   - scrivendo le componenti di u e v in coordinate polari,
   - appliando il teorema di Carnot (detto anche teorema del coseno) nel triangolo con vertici in 0 (cosa vuol dire qui 0?), u, v.
3. Dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (come sempre da quantificare)
   $$\big|\langle u, v\rangle\big| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$
   in due modi distinti:
   - sfruttando che $P(x) = \|u + xv\|^2$ è un polinomio di secondo gradi nella variabile x che non diventa mai negativo, dunque il suo discriminante …
   - sfruttando l'espressione per il prodotto scalare in termini di $\|u\|$, $\|v\|$ e del coseno dell'angolo compreso.

   Determinare in quali casi vale il segno di uguale.
4. Dimostrare le seguenti proprietà della *norma euclidea* (anche qui valgono le solite considerazioni sulla necessità di precisare gli enunciati "quantificando").
   - *Non-negatività*: $\|u\| \geq 0$.
   - $\|u\| = 0$ se e solo se $u = 0$.
   - *Omogeneità*: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
   - *Sub-additività*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
     Interpretare questa disuguaglianza in termini di lati di un triangolo.

1. Dimostrare le seguenti proprietà del *prodotto scalare euclideo*. Gli enunciati sono volutamente imprecisi: prima di dimostrarli, bisogna renderli precisi "quantificando" e spiegando dove stanno le variabili.

   - *Simmetria*: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
   - *Distributività rispetto alla somma*: $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
   - *Comportamento rispetto al prodotto per una costante*: $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.
   - *Bilinearità*: $\langle au+bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$ e $\langle u, av+bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$.

SIMMETRIA $\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n \quad \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

$$\langle u,v\rangle = \sum u_i v_i = \sum v_i \cdot u_i = \langle v,u\rangle$$

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cos\theta = \|v\|\cdot\|u\|\cos\theta = \langle v,u\rangle$$

DISTRIBUT. $\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n \quad \langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

$$\langle u+v,w\rangle = \sum (u_i+v_i)\cdot w_i = \sum u_i w_i + v_i\cdot w_i =$$
$$= \sum u_i w_i + \sum v_i \cdot w_i = \langle u,w\rangle + \langle u,v\rangle$$

PROD. X COST. $\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \langle\lambda u,v\rangle = \langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

$$\langle\lambda u,v\rangle = \sum \lambda u_i \cdot v_i = \sum u_i \cdot \lambda v_i = \langle u,\lambda v\rangle =$$
$$= \lambda\sum u_i\cdot v_i = \lambda\langle u,v\rangle$$

BILINEARITÀ $\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$

$$\langle au+bv,w\rangle = \sum(au_i+bv_i)w_i = \sum au_i w_i + bv_i w_i$$
$$= a\langle u,v\rangle + b\langle v,w\rangle$$

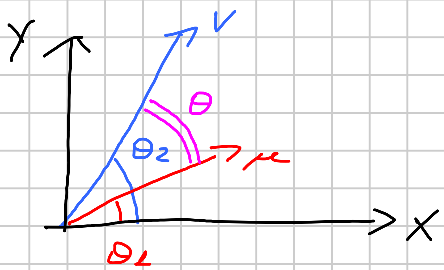
2. Dimostrare che vale la relazione

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

per ogni coppia di vettori u e v in $\mathbb{R}^2$ in due modi distinti:

- scrivendo le componenti di u e v in coordinate polari,
- appliando il teorema di Carnot (detto anche teorema del coseno) nel triangolo con vertici in 0 (cosa vuol dire qui 0?), u, v.

1° MODO



$$u = (\|u\| \cos\theta_1 , \|u\| \operatorname{sen}\theta_1)$$

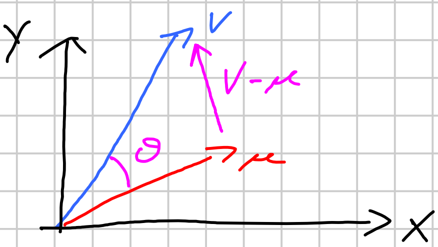
$$v = (\|v\| \cos\theta_2 , \|v\| \operatorname{sen}\theta_2)$$

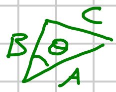
$$\langle u, v\rangle = \sum u_i \cdot v_i = \|u\|\cdot\|v\| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 =$$

$$= \|u\| \|v\| (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) = \|u\| \|v\| \cos\theta$$

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

2° MODO





T. DI CARNOT

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

|||

$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \|v-u\|^2 = \langle v-u , v-u\rangle = \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle + \langle v, -u\rangle + \langle -u, v\rangle$$

$$= \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle \Rightarrow \langle u, v\rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$$

3. Dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (come sempre da quantificare)

$$\big|\langle u, v\rangle\big| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

in due modi distinti:

- sfruttando che $P(x) = \|u + xv\|^2$ è un polinomio di secondo gradi nella variabile x che non diventa mai negativo, dunque il suo discriminante ...
- sfruttando l'espressione per il prodotto scalare in termini di $\|u\|$, $\|v\|$ e del coseno dell'angolo compreso.

Determinare in quali casi vale il segno di uguale.

(a) $\|u+xv\|^2 = \langle u+xv, u+xv\rangle = \|u\|^2 + x^2\|v\|^2 + 2x\langle u,v\rangle$

$= \|v\|^2 x^2 + 2x\langle u,v\rangle + \|u\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \Delta = (2\langle u,v\rangle)^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 \leq 0$

$\Rightarrow 4(\langle u,v\rangle)^2 \leq 4(\|u\|\cdot\|v\|)^2 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$

(b) $\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cos\theta \Rightarrow |\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|\cdot|\cos\theta|, |\cos\theta| \leq 1$

$\Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$

(c) $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\| \iff \theta = 0, \pi$

4. Dimostrare le seguenti proprietà della *norma euclidea* (anche qui valgono le solite considerazioni sulla necessità di precisare gli enunciati "quantificando").

- *Non-negatività*: $\|u\| \geq 0$.
- $\|u\| = 0$ se e solo se $u = 0$.
- *Omogeneità*: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
- *Sub-additività*: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
  Interpretare questa disuguaglianza in termini di lati di un triangolo.

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(a) $\|u\| = \sqrt{\sum u_i^2} \geq 0$

(b) $\|u\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum u_i^2} = 0 \Rightarrow \sum u_i^2 = 0 \Rightarrow u_i = 0 \quad \forall i = 1, n$

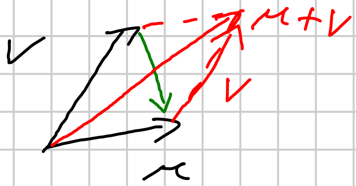
(c) $\|\lambda u\| = \sqrt{\sum (\lambda u_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum u_i^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum u_i^2} = |\lambda| \, \|u\|$

(d) $\|u+v\|^2 = \sum (u_i + v_i)^2 = \sum (u_i^2 + 2u_i v_i + v_i^2) = \sum u_i^2 + 2\sum u_i v_i + \sum v_i^2 =$

$= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad \langle u, v\rangle \leq |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

SI POSSONO ELIMINARE I QUADRATI $\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$



$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\|u-v\| \leq \|u\| - \|v\|$