

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 12 Gennaio 2016

1. Studiare il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2 - x^2 u) dx : u(0) = 0 \right\}.$$

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = \frac{u^5}{1+x^3} + x^5, \quad u(0) = 2016, \quad u'(2016) = 0.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale $\ell > 0$, il problema

$$\min \left\{ \int_0^\ell (\dot{u}^2 - 7 \arctan^2 u) dx : u(0) = u(\ell) = 0 \right\}.$$

- (a) Stabilire per quali valori di ℓ il problema ha soluzione.
(b) Stabilire per quali valori di ℓ il minimo (esiste ed) è negativo.
4. (a) Determinare per quali valori del parametro reale λ il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 - 2\dot{u}^2) dx : u(0) = 0, u(1) = \lambda \right\}$$

ammette soluzione.

- (b) Determinare per quali valori reali di λ la funzione $u_0(x) = \lambda x$ è un punto di minimo locale (WLM) per il problema precedente.
(c) Calcolare

$$\inf \left\{ \int_0^3 [\dot{u}^4 - 2\dot{u}^2 + (u + e^{-x})^2] dx : u \in C^1([0, 3]) \right\}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.