Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Elementi di Calcolo delle Variazioni

Pisa, 25 Dicembre 2015

1. Consideriamo il problema

$$\min\left\{\int_0^1 (\ddot{u}^2 + u^2 - x^2 u)\,dx : u(0) = 0\right\}.$$

   (a) Scrivere l'equazione di Eulero e le condizioni al bordo associate al problema.

   (b) Dimostrare che l'equazione di Eulero ha soluzione unica.

   (c) Stabilire se il problema di minimo ha soluzione.

2. Discutere esistenza, unicità e regolarità per il problema

$$\ddot{u} = \frac{xu^3}{1 + \dot{u}^2}, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 2016.$$

3. Consideriamo, per ogni numero reale $\ell > 0$, il problema

$$\min\left\{\int_0^\ell (\dot{u}^2 - u^2 + 7xu)\,dx : u(0) = 0,\ u(\ell) = 2016\right\}.$$

   (a) Scrivere l'equazione di Eulero associata al problema.

   (b) Studiare, al variare del parametro ℓ, l'unicità della soluzione dell'equazione di Eulero.

   (c) Stabilire per quali valori di ℓ il problema di minimo ha soluzione.

4. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$I_\varepsilon = \inf\left\{\int_0^1 \left[\varepsilon \dot{u}^4 - \dot{u}^2 - u^2\right]\,dx : u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

   (a) Dimostrare che $I_\varepsilon \in (-\infty, 0)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

   (b) Dimostrare che $I_\varepsilon \to -\infty$ per $\varepsilon \to 0^+$.

   (c) Calcolare l'ordine di infinito di I_ε per $\varepsilon \to 0^+$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.