BY GIMUSI 25/10/15

Limiti 11

Argomenti: limiti di funzioni e successioni **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: limiti notevoli, confronto di ordini di infinito e infinitesimo

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, i limiti delle seguenti successioni:

a) $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, c) $\frac{2^{n^\alpha}}{n^2}$, d) $\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right]n^\alpha$,

e) $n^\alpha\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$, f) $n^\alpha\left[\log(n^2+7)-\log(n^2+3)\right]$, g) $\alpha^n\log\left(\frac{2+3^{-n}}{2+4^{-n}}\right)$.

2. Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha>0$, i seguenti limiti di funzioni:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin(\cos x-1)}-1}{x^\alpha}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9^x+\alpha^x}-3^x$, e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+x^\alpha+7}-\sqrt[3]{x^2+5}$.

3. Consideriamo i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin x)^x$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin^2 x)^x$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\alpha+\sin x)^{1/x}$.

Determinare i valori del parametro reale α per cui le funzioni coinvolte nei limiti sono definite per ogni $x>0$ e, per tali valori di α, calcolare il limite.

4. Determinare, al variare dei parametri $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ e $c\in\mathbb{R}$, il

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)^{ax+c}.$$

5. (Limiti di medie p-esime)

(a) Dimostrare che per ogni coppia (a,b) di numeri positivi valgono i seguenti limiti:

1) $$\lim_{p\to0}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\sqrt{ab},$$

2) $$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\max\{a,b\},$$ 3) $$\lim_{p\to-\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}=\min\{a,b\}.$$

(b) Per ogni n-ulpa di numeri reali positivi $(a_1,\ldots,a_n)$, definiamo la loro media p-esima come

$$M_p(a_1,\ldots,a_n):=\left(\frac{a_1^p+\ldots+a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Calcolare il limite della media p-esima per p che tende a 0, $+\infty$ e $-\infty$.

1/8

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, i limiti delle seguenti successioni:

1.a) $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n/\alpha}\right]^\alpha \to e^\alpha$

1.b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = e^{n^{(\alpha-1)} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \begin{cases} +\infty & \alpha>1 \\ e & \alpha=1 \\ 1 & \alpha<1 \end{cases}$

1.c) $\frac{2^{n^\alpha}}{n^2} \to \begin{cases} 0 & \alpha \le 0 \\ +\infty & \alpha>0 \end{cases}$

$\alpha=0 \qquad a_n = \frac{2}{n^2} \to 0$

$\alpha<0 \qquad a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 2^{n^{|\alpha|}}} \to 0$

$\alpha>0 \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{2^{n^{\alpha-1}}}{\sqrt[n]{n^2}} \to \begin{cases} 1 & \alpha<1 \\ 2 & \alpha=1 \\ +\infty & \alpha>1 \end{cases} \Rightarrow a_n \to \begin{cases} ? & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha\ge 1 \end{cases}$

$0<\alpha<1 \qquad \beta = 1/\alpha > 1 \qquad \frac{2^{n^\alpha}}{n^2} = \frac{2^{n^{1/\beta}}}{\left(n^{1/\beta}\right)^{2\beta}} \to +\infty$

1.d) $\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] n^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \alpha>1 \\ 1 & \alpha=1 \\ 0 & \alpha<1 \end{cases}$

$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \log(1+1/n^2)} \sim e^{1/n} \sim 1+1/n$

$\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] n^\alpha \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}}$

1.e) $n^\alpha(\sqrt[n]{n}-1) \to \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}} \sim 1 + \frac{\log n}{n}$$

$$n^\alpha(\sqrt[n]{n}-1) = \frac{\log n}{n^{1-\alpha}}$$

1.f) $n^\alpha[\log(n^2+7)-\log(n^2+3)] \to \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ 10 & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha < 2 \end{cases}$

$$\log(n^2+7)-\log(n^2+3) \sim \log(1+7/n^2) - \log(1+3/n^2) \sim$$

$$\sim \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^2} = \frac{10}{n^2}$$

$$n^\alpha[\log(n^2+7)-\log(n^2+3)] \sim \frac{10}{n^{2-\alpha}}$$

1.g) $\alpha^n \log\left(\frac{2+3^{-n}}{2+5^{-n}}\right) \to \begin{cases} +\infty & \alpha > 3 \\ 1/2 & \alpha = 3 \\ 0 & |\alpha| < 3 \\ N.E. & \alpha \leq -3 \end{cases}$

$$\log\left(\frac{2+3^{-n}}{2+5^{-n}}\right) = \log(1+3^{-n}/2) - \log(1+5^{-n}/2) \sim$$

$$\sim \frac{1}{2\cdot 3^n} - \frac{1}{2\cdot 5^n} \sim \frac{1}{2\cdot 3^n}$$

$$\alpha^n \log\left(\frac{2+3^{-n}}{2+5^{-n}}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^n$$

2. Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, i seguenti limiti di funzioni:

2.a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 3 \\ 1 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha < 3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x} = \frac{x^3}{x^3} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}} + x^{\alpha-3}}{\underset{\to 1}{1+\frac{1}{x^2}}}$$

2.b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x^\alpha}{x^3+x} = \frac{x}{x} \frac{\overset{\to 0}{x} + x^{\alpha-1}}{\underset{\to 1}{x^2+1}}$$

2.c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(\cos x - 1)} - 1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ 1/2 & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha < 2 \end{cases}$$

$$e^{\sin(\cos x-1)} - 1 \sim x^2/2 \qquad \frac{e^{\sin(\cos x-1)} - 1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2} x^{2-\alpha}$$

2.d) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9^x+\alpha^x} - 3^x = \begin{cases} +\infty & \alpha > 3 \\ 1/2 & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha < 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{9^x+\alpha^x} - 3^x = \left(\sqrt{9^x+\alpha^x} - 3^x\right) \cdot \frac{\sqrt{9^x+\alpha^x}+3^x}{\sqrt{9^x+\alpha^x}+3^x} =$$

$$= \frac{\alpha^x}{\sqrt{9^x+\alpha^x}+3^x}$$

2.e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+x^\alpha+7} - \sqrt[3]{x^2+5} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 5/3 \\ 1/3 & \alpha = 5/3 \\ 0 & \alpha < 5/3 \end{cases}$

$$\sqrt[3]{x^2+x^\alpha+7} - \sqrt[3]{x^2+5} =$$

$$\frac{\cancel{x^2}+x^\alpha+7-\cancel{x^2}-5}{\sqrt[3]{(x^2+x^\alpha+7)^2}+\sqrt[3]{(x^2+5)^2}+\sqrt[3]{x^5+5x^2+x^{\alpha+2}+5x^\alpha+7x^2+35}}$$

3. Consideriamo i seguenti limiti

Determinare i valori del parametro reale α per cui le funzioni coinvolte nei limiti sono definite per ogni $x > 0$ e, per tali valori di α, calcolare il limite.

3.a) $\lim_{x\to+\infty} (\alpha+\sin x)^x = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2 \\ \text{N.E.} & 1 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}$

$(\alpha+\sin x)^x$ DEFINITA PER $\alpha+\sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$\rightsquigarrow \alpha \geq 1$

3.b) $\lim_{x\to+\infty} (\alpha+\sin^2 x)^x = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \text{N.E.} & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$

$(\alpha+\sin^2 x)^x$ DEFINITA PER $\alpha+\sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$\rightsquigarrow \alpha \geq 0$

3.c) $\lim_{x\to+\infty} (\alpha+\sin x)^{1/x} = \begin{cases} 1 & \alpha > 1 \\ \text{N.E.} & \alpha = 1 \end{cases}$

$(\alpha+\sin x)^{1/x}$ DEFINITA PER $\alpha+\sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$\rightsquigarrow \alpha \geq 1$

4. Determinare, al variare dei parametri $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x}\right)^{ax+c}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x}\right)^{ax+c} \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ e^{b} & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\left(a + \frac{b}{x}\right)^{ax+c} = e^{(ax+c)\log\left(a + \frac{b}{x}\right)}$$

$$\log\left(a + \frac{b}{x}\right) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{ax}\right) \sim$$

$$\sim \log a + \frac{b}{ax}$$

$$e^{(ax+c)\log\left(a + \frac{b}{x}\right)} \sim e^{ax\lg a + b + c\lg a + \frac{bc}{ax}}$$

$$= e^{(ax+c)\lg a + b\left(1 + \frac{c}{ax}\right)}$$

<u>$a = 1$</u>

$$e^{(ax+c)\lg a + b\left(1 + \frac{c}{ax}\right)} = e^{b\left(1 + \frac{c}{x}\right)} = e^{b}$$

<u>$a > 1$</u>

$$e^{\overbrace{(ax+c)\lg a}^{\to +\infty} + b\left(1 + \frac{c}{ax}\right)} \to +\infty$$

<u>$0 < a < 1$</u>

$$e^{\overbrace{(ax+c)\lg a}^{\to -\infty} + b\left(1 + \frac{c}{ax}\right)} \to 0$$

6/8

5. (Limiti di medie p-esime)

(a) Dimostrare che per ogni coppia (a, b) di numeri positivi valgono i seguenti limiti:

1) $$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = \sqrt{ab}$$

$$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = e^{\frac{1}{p}\log\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)} \sim$$

$$\sim e^{\frac{1}{p}\log\left(\frac{1+p\lg a+1+p\lg b}{2}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{p}\lg\left(1+p\lg\sqrt{ab}\right)} \sim e^{\frac{1}{p}\cdot p\lg\sqrt{ab}}$$

$$= e^{\log\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

2) $$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = \mathrm{MAX}(a,b)$$

SIA $a>b$ (WLOG) $$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = a\left(\frac{1+\overbrace{(b/a)^p}^{\to 1}}{2}\right)^{1/p} \to a$$

$$\left(\frac{1+(b/a)^p}{2}\right)^{1/p} = e^{\frac{1}{p}\left(\lg\left(1+(b/a)^p\right)\right)} \to 1$$

3) $$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = \mathrm{MIN}(a,b)$$

SIA $a<b$ (WLOG) $$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p} = a\left(\frac{1+\overbrace{(b/a)^p}^{\to 1}}{2}\right)^{1/p} \to a$$

$$\left(\frac{1+(b/a)^p}{2}\right)^{1/p} \underset{q=-p}{=} \frac{1}{\left(\frac{1+(a/b)^q}{2}\right)^{1/q}} \to 1$$

(b) Per ogni n-ulpa di numeri reali positivi $(a_1, \ldots, a_n)$, definiamo la loro media p-esima come

$$M_p(a_1, \ldots, a_n) := \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Calcolare il limite della media p-esima per p che tende a 0, $+\infty$ e $-\infty$.

1) $\lim\limits_{p \to 0} M_p = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

$$M_p = e^{\frac{1}{p} \log\left(\frac{1 + p \log a_1 + \ldots + 1 \log a_n}{n}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{p} \log(1 + p \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n})} \sim$$

$$\sim e^{\frac{1}{\cancel{p}} \cancel{p} \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n})} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

2) $\lim\limits_{p \to +\infty} M_p = MAX(a_1, \ldots, a_n)$

SIA $a_1 > a_{2 \div n}$ $\quad M_p = a_1 \left(\frac{1 + (a_2/a_1)^p + \ldots + (a_n/a_1)^p}{n}\right)^{1/p} \to a_1$

(WLOG)

3) $\lim\limits_{p \to -\infty} M_p = MIN(a_1, \ldots, a_n)$

SIA $a_1 < a_{2 \div n}$ $\quad M_p = a_1 \left(\frac{1 + (a_2/a_1)^p + \ldots + (a_n/a_1)^p}{n}\right)^{1/p} \to a_1$

(WLOG)