Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 3 Settembre 2015

1. Studiare, al variare del parametro reale a, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \int_0^{1/n} \frac{\sin(t^2)}{t}\,dt.$$

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \arctan^{70} x + \log|1 + x^{77}| - 77x^{77}.$$

   (a) Calcolare la derivata 2015-esima nel punto $x = 0$.

   (b) Dimostrare che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno quattro soluzioni reali.

   (d) Dimostrare che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzione unica per ogni λ sufficientemente grande.

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\log(1 + x)}{x}.$$

   (a) Dimostrare che $f(x)$ è monotona.

   (b) Dimostrare che $f(x)$ è lipschitziana con costante minore o uguale a 1.

   (c) (Bonus question) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza da $x_{n+1} = f(x_n)$ ammette limite reale per ogni dato iniziale $x_0 > 0$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = (u^2 + 1)e^{-t}, \qquad u(0) = \alpha.$$

   (a) Determinare la soluzione particolare nel caso particolare $\alpha = 0$, specificando anche se (nel futuro) si ha esistenza globale, blow-up o break-down.

   (b) Determinare per quali valori del parametro α la soluzione ha esistenza globale nel futuro.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.