

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1
Pisa, 24 Luglio 2015

1. Calcolare, al variare del parametro reale a , il limite della successione

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^a}.$$

2. Determinare le migliori costanti c_1 e c_2 per cui

$$\frac{c_1 x}{x+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{c_2 x}{x+1} \quad \forall x > 0.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{x_n + n}{n^2 + 1}, \quad x_1 > 0.$$

- (a) Determinare il limite della successione x_n .
(b) Determinare il limite della successione nx_n .

4. Consideriamo gli integrali

$$I_1(\alpha) := \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1+x^\alpha}} dx, \quad I_2(\alpha) := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{1+x^\alpha}} dx.$$

- (a) Studiare la convergenza di $I_1(\alpha)$ e $I_2(\alpha)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.
(b) Calcolare il valore di $I_2(1)$.
(c) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale β , la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [I_2(n)]^\beta.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.