

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 29 Giugno 2015

1. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^4}{\arctan(x^3)} - \frac{\alpha x^3}{\arctan^2 x}.$$

Determinare, in funzione del parametro $\alpha > 0$, ordine di infinito/infinitesimo e parte principale per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$.

2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{\arctan x_n}{x_n + 3}.$$

- (a) Determinare, nel caso $x_0 = 2015$, il limite di x_n .
- (b) Determinare, nel caso $x_0 = 2015$, il limite di $\sqrt[n]{x_n}$.
- (c) Determinare se esistono valori $x_0 \neq 0$ per cui la successione risulta costante.

3. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{2 + t^4}.$$

- (a) Determinare quanti sono i valori di λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ non ha soluzioni.
- (b) Determinare quanti sono i valori di λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione.
- (c) Determinare se $f(x)$ è lipschitziana su tutto \mathbb{R} .
- (d) (Bonus question) Determinare per quali valori reali del parametro α si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_{2015}^{+\infty} [f(x)]^\alpha dx.$$

4. Determinare la soluzione generale del problema di Cauchy

$$u''(t) + u(t) = \cos^3 t.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.